О. Ю. Питьовка (Мукачівський техн. ін-т)

ДВОСТОРОННІЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ У КРАЙОВИХ УМОВАХ

The boundary value problem with parameters for the system of quasylinear second order differential equation is invertigated by the two-sided method.

У роботі двостороннім методом досліджується задача з параметрами у крайових умовах для випадку системи квазілінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Дана робота є узагальненням досліджень, приведених в [1], на випадок системи квазілінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Розглянемо систему квазілінійних диференціальних рівнянь:

$$L_{2,\lambda}(y(x)) = F[Y(x)],\ x \in [0;1], \tag{1}$$

де $L_{2,\lambda}$ — диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом $l_{2,\lambda} \equiv \equiv Y''(x)$ та крайовими умовами

$$\begin{cases} A_1 \Lambda Y(0) + B_1 Y(1) = d_1, \\ A_2 Y'(0) + B_2 Y'(1) = \Lambda d_2, \\ Y(0) = Y_0, \end{cases} \tag{2}$$

де $Y(x) = (y_i(x))$, $F[Y(x)] = (f_i[Y(x)])$, $Y_0 = (y_{i,0})$, $d_k = (d_{i,k})$, $i = \overline{1,n}$, $k = 1,\ 2$ — вектори-стовпці, $f_i[Y(x)] \equiv f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots y_n'(x))$; $A_k = = (\delta_{i,j}\alpha_{i,k})$, $B_k = (\delta_{i,j}\beta_{i,k})$, $\Lambda = (\delta_{i,j}\lambda_i), j = \overline{1,n}$ — матриці, $y_{i,0}$, $d_{i,k}$, $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ — задані сталі, λ_i — шукані параметри, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Під розв'язком крайової задачі (1)–(2) будемо розуміти [2] пару векторів $(Y(x), \lambda)$, де $\lambda = (\lambda_i)$ — вектор-стовпець, $\lambda_i \in [\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}]$, $\lambda_{i,k}$ — задані сталі, $k = 1, 2$, вектор-функція $Y(x)$, яка належить просторові $C_1[0;1] \equiv C^2(0;1) \cap C^1[0;1]$, є розв'язком рівняння

$$Y''(x) = F[Y(x)] \tag{3}$$

і разом з шуканим параметром λ задовольняють крайові умови (2).

Нехай $C(\bar{B})$-простір неперервних вектор-функцій $F[Y(x)]$ з областю визначення $(x, Y(x), Y'(x)) \in \bar{B} \subset R^{2n+1}$, $x \in [0;1]$. Якщо $F[Y(x)] \in C(\bar{B})$ і матриця $K = A_1 Y_0^+ \times \times d_2^{-1}(A_2 + B_2) + B_1$ є невиродженою, то крайову задачу (1)-(2) можна подати в еквівалентній інтегральній формі [3]:

$$Y(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G(x,\xi) F[Y(\xi)] d\xi, \tag{4}$$

$$\lambda = R_1 + \int_0^1 (R_3\xi + R_2) F[Y(\xi)] d\xi, \tag{5}$$

де вектор $C \equiv K^{-1}(d_1 - B_1 Y_0) = \left(\frac{(d_{i,1} - \beta_{i,1} y_{i,0}) d_{i,2}}{\rho_i}\right)$, $\rho_i = \alpha_{i,1}(\alpha_{i,2} + \beta_{i,2}) y_{i,0} + \beta_{i,1} d_{i,2}$, $d_2^{-1} = (\delta_{i,j} d_{i,2}^{-1})$, $Y_0^{-1} = (\delta_{i,j} y_{i,0}^{-1})$, $Y_0^{+} = (\delta_{i,j} y_{i,0})$,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} Bx + (Ax - E)\xi,\ \xi \in [0;x], \\ Bx + (A\xi - E)x,\ \xi \in (x;1], \end{cases}$$

матриці

$$A \equiv K^{-1}B_1 = \left(\delta_{i,j}\frac{\beta_{i,1}d_{i,2}}{\rho_i}\right), \quad B \equiv K^{-1}A_1Y_0^{+}d_2^{-1}A_2 = \left(\delta_{i,j}\frac{\alpha_{i,1}\alpha_{i,2}y_{i,0}}{\rho_i}\right),$$

$$R_1 = A_1^{-1}Y_0^{-1}d_1 - A_1^{-1}B_1Y_0^{-1}(Y_0 + C) = \left(\frac{(\alpha_{i,2}+\beta_{i,2})(d_{i,1}-\beta_{i,1}y_{i,0})}{\rho_i}\right)$$

— вектор,

$$R_2 = -A_1^{-1}B_1Y_0^{-1}B = \left(-\delta_{i,j}\frac{\alpha_{i,2}\beta_{i,1}}{\rho_i}\right),$$

$$R_3 = -A_1^{-1}B_1Y_0^{-1}(A - E) = \left(\delta_{i,j}\frac{\beta_{i,1}(\alpha_{i,2}+\beta_{i,2})}{\rho_i}\right)$$

— матриці.

Нехай $F[Y(x)] \in C_1(\overline{B})$, де $C_1(\overline{B})$ — простір вектор-функцій, які задовольняють наступним умовам:

1) $F[Y(x)] \in C(\overline{B})$;

2) вектор-функцію $F[Y(x)]$ можна подати у вигляді

$$F[Y(x)] \equiv F(x, Y^{+}(x), Y^{+'}(x); Y^{-}(x), Y^{-'}(x)) \equiv F[Y^{+}(x), Y^{-}(x)]$$

таким чином, що для довільних вектор-функцій $Z_0(x)$, $Z_1(x)$, $V_0(x)$, $V_1(x)$ з простору $C_1[0;1]$, які належать області визначення $\overline{B_1} \in R^{4n+1}$ функції $F[Y^{+}(x); Y^{-}(x)]$ і задовольняють умови $Z_0^{(s)}(x) \le Z_1^{(s)}(x)$, $V_0^{(s)}(x) \ge V_1^{(s)}(x)$, $s = 0,\ 1$, виконується нерівність

$$F[Z_1(x); V_1(x)] - F[Z_0(x); V_0(x)] \ge 0; \tag{6}$$

3) вектор-функція $F[Y^{+}(x);\ Y^{-}(x)]$ задовольняє в області її визначення $\overline{B}_1$ умову Ліпшіца з матрицею $\frac{1}{4}L$, тобто для всяких вектор-функцій $Z_0(x)$, $Z_1(x)$, $V_0(x)$, $V_1(x)$, які належать області $\overline{B}_1$, виконується умова

$$|F[Z_1(x), V_1(x)] - F[Z_0(x); V_0(x)| \le \tfrac{1}{4}L\,(|Z_1(x) - Z_0(x)| +$$

$$+ |Z_1'(x) - Z_0'(x)| + |V_1(x) - V_0(x)| + |V_1'(x) - V_0'(x)|)\,,$$

$$L = (\delta_{i,j}L_i), \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Тут $|Z_1(x) - Z_0(x)| = (|z_{i,1}(x) - z_{i,0}(x)|)$ і нерівність між векторами розуміємо як нерівність покомпонентну.

Не зменшуючи загальності подальших міркувань, покладемо:

$$d_2 = e \equiv (1, 1, \ldots, 1),\ A_1 = E,\ det(A_2Y_0^{+}) \ne 0.$$

Нехай

$$E + B_2A_2^{-1} \le \Theta, \quad B_1(A_2Y_0^{+})^{-1} \le \Theta, \tag{7}$$

де Θ — нульова матриця.

Подамо функцію Гріна задачі (1)–(2) у вигляді:

$$G(x,\xi) = G_1(x,\xi) + G_2(x,\xi),$$

де

$$G_1(x,\xi) = Ax\xi, \xi \in [0;1],$$

$$G_2(x,\xi) = \begin{cases} -E\xi + Bx, \ \xi \in [0;x], \\ -Ex + Bx, \ \xi \in (x;1]. \end{cases}$$

Приймаючи до уваги те, що $A \geq \Theta, \ B \leq \Theta$, будемо мати:

$$G_{1_x}^{(s)}(x,\xi) \geq \Theta, \ G_{2_x}^{(s)}(x,\xi) \leq \Theta, \quad s = 0, \ 1 \tag{8}$$

при $(x,\xi) \in \overline{D} = \{(x,\xi) | x \in [0,1], \xi \in [0,1]\}$.

Позначимо:

$$F^p(x) = F[Z_p(x); V_p(x)], \ F_p(x) = F[V_p(x); Z_p(x)],$$

$$\begin{gathered} \alpha_p(x) = Z_p(x) - Y_0 - Cx - \int_0^1 G_1(x,\xi) F^p(\xi) d\xi - \int_0^1 G_2(x,\xi) F_p(\xi) d\xi, \\ \beta_p(x) = V_p(x) - Y_0 - Cx - \int_0^1 G_1(x,\xi) F_p(\xi) d\xi - \int_0^1 G_2(x,\xi) F^p(\xi) d\xi, \end{gathered} \tag{9}$$

$$W_p(x) = Z_p(x) - V_p(x)$$

і побудуємо послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x)\}, \{V_p(x)\}$ згідно закону [4]:

$$\begin{gathered} Z_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G_1(x,\xi) \overline{F}^p(\xi) d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi) \overline{F}_p(\xi) d\xi, \\ V_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G_1(x,\xi) \overline{F}_p(\xi) d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi) \overline{F}^p(\xi) d\xi, \\ \overline{F}^p(x) = F^p(x) - C_p(x)(F^p(x) - F_p(x)), \quad C_p(x) = (\delta_{i,j} c_{p,i}(x)), \\ \overline{F}_p(x) = F_p(x) - Q_p(x)(F^p(x) - F_p(x)), \quad Q_p(x) = (\delta_{i,j} q_{p,i}(x)), \end{gathered} \tag{10}$$

де $c_{p,i}(x)$, $q_{p,i}(x)$ — довільні невід'ємні з простору $C[0;1]$ функції для всіх $i = \overline{1,n}$, $p = 0, 1, \ldots$, а нульове наближення в просторі вектор-функцій $C_1[0;1]$ вибираємо таким чином, щоб при $x \in [0;1]$ виконувались нерівності:

$$W_0^{(s)}(x) \geq 0, \ \alpha_0^{(s)}(x) \geq 0, \ \beta_0^{(s)}(x) \leq 0, \ s = 0, 1. \tag{11}$$

Нехай

$$\sup_{[0,1]} c_{p,i}(x) \leq 0,5, \ \sup_{[0,1]} q_{p,i}(x) \leq 0,5, \ \forall i = \overline{1,n}, \ p = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Із (10), (11) маємо:

$$\begin{gathered} Z_{p+1}(x) - Z_p(x) = -\alpha_p(x) + \int_0^1 \{G_2(x,\xi) Q_p(\xi) - \\ - G_1(x,\xi) C_p(\xi)\} (F^p(\xi) - F_p(\xi)) \, d\xi, \\ V_{p+1}(x) - V_p(x) = -\beta_p(x) + \int_0^1 \{G_1(x,\xi) Q_p(\xi) - \\ - G_2(x,\xi) C_p(\xi)\} (F^p(\xi) - F_p(\xi)) \, d\xi, \end{gathered} \tag{13}$$

$$W_{p+1}(x) = \int_0^1 [G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)] (E - C_p(\xi) - Q_p(\xi)) (F^p(\xi) - F_p(\xi)) \, d\xi, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{p+1}(x) &= \int_0^1 G_1(x,\xi)\left(\overline{F}^p(\xi) - F^{p+1}(\xi)\right)d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi)\left(\overline{F}_p(\xi) - F_{p+1}(\xi)\right)d\xi,\\ \beta_{p+1}(x) &= \int_0^1 G_1(x,\xi)\left(\overline{F}_p(\xi) - F_{p+1}(\xi)\right)d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi)\left(\overline{F}^p(\xi) - F^{p+1}(\xi)\right)d\xi.\end{aligned} \tag{15}$$

Із (13)–(14) при $p = 0$, враховуючи (6), (8), (11) та (12), випливає:

$$Z_0^{(s)}(x) - Z_1^{(s)}(x) \geq 0, \quad V_0^{(s)}(x) - V_1^{(s)}(x) \leq 0, \quad W_1^{(s)}(x) \geq 0, \quad s = 0, 1,$$

тобто в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності:

$$V_0^{(s)}(x) \leq V_1^{(s)}(x) \leq Z_1^{(s)}(x) \leq Z_0^{(s)}(x), \quad x \in [0;1],\ s = 0, 1,$$

а це означає, що $Z_1(x),\ V_1(x) \in \overline{B}_1$.

Приймаючи останні нерівності до уваги, одержуємо:

$$\overline{F}^0(x) - F^1(x) = F^0(x) - F^1(x) - C_0(x)(F^0(x) - F_0(x)),$$

$$\overline{F}_0(x) - F_1(x) = F_0(x) - F_1(x) + Q_0(x)(F^0(x) - F_0(x)),$$

де $F^0(x) - F^1(x) \geq 0, \quad F_0(x) - F_1(x) \leq 0, \quad F^0(x) - F_0(0) \geq 0,\ x \in [0;1]$.

Отже, вибираючи елементи матриць $C_0(x),\ Q_0(x)$ таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$

$$\overline{F}^0(x) - F^1(x) \geq 0,\ \overline{F}_0(x) - F_1(x) \leq 0,$$

із (15) при $p = 0$ випливає справедливість при $x \in [0;1]$ нерівностей:

$$\alpha_1^{(s)}(x) \geq 0,\ \beta_1^{(s)}(x) \leq 0,\ s = 0, 1.$$

Беручи вектор-функції $Z_1(x)$ та $V_1(x)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування, методом математичної індукції легко показати, що якщо на кожному кроці ітерації (10) елементи матриць $C_p(x),\ Q_p(x)$ вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$ виконувались умови:

$$\begin{aligned}F^p(x) - F^{p+1}(x) - C_p(x)(F^p(x) - F_p(x)) &\geq 0,\\ F_p(x) - F_{p+1}(x) + Q_p(x)(F^p(x) - F_p(x)) &\leq 0,\end{aligned} \tag{16}$$

то при $x \in [0;1]$ для довільного $p \in N$ справедливі нерівності:

$$\begin{aligned}V_p^{(s)}(x) \leq V_{p+1}^{(s)}(x) \leq Z_{p+1}^{(s)}(x) \leq Z_p^{(s)}(x),\\ \alpha_{p+1}^{(s)}(x) \geq 0,\ \beta_{p+1}^{(s)}(x) \leq 0,\ s = 0, 1,\ x \in [0;1].\end{aligned} \tag{17}$$

Покажемо, що побудовані послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x)\}, \{V_p(x)\}$ абсолютно і рівномірно збігаються до єдиного в просторі вектор-функцій $C_1[0;1]$ розв'язку рівняння (4).

Позначимо

$$q = \max_p \sup_{[0,1]} \|E - C_p(x) - Q_p(x)\|,$$

$$d = \sup_{[0,1]} \{\|W_0(x)\|, \|W_0'(x)\|\},\ \|L\| < M.$$

Тоді із (14) методом математичної індукції одержуємо оцінки:

$$\sup_{[0,1]}\left\{\|W_p(x)\|,\left\|W'_p(x)\right\|\right\}\le (q\mu M)^p d, \tag{18}$$

де

$$\mu = sup\left\{\tfrac{1}{2}\tau_2^2,\tau_2\right\},\ \tau_2=\left\|\left(\delta_{i,j}\frac{3\beta_{i,1}+2\beta_{i,2}y_{i,0}}{2\rho_i}\right)\right\|.$$

Якщо

$$q\mu M<1, \tag{19}$$

то із останніх оцінок і нерівностей (17) випливає, що

$$\lim_{p\to\infty} Z_p^{(s)}(x)=\lim_{p\to\infty} V_p^{(s)}(x)=Y^{(s)}(x),\ s=0,1,$$

де $Y(x)$ — єдиний розв'язок рівняння (4) (єдиність доводиться методом від супротивного).

Покажемо, що збіжність ітераційного процесу (13), (16) не повільніша збіжності звичайного методу послідовних наближень Пікара.

Припустимо, що $Z_p(x), V_p(x)$ — двосторонні наближення до розв'язку рівняння (4), які задовольняють умови (17).

Нехай

$$Z^*_{p+1}(x)=Y_0+Cx+\int_0^1 G_1(x,\xi)F^p(\xi)d\xi+\int_0^1 G_2(x,\xi)F_p(\xi)d\xi,$$

$$V^*_{p+1}(x)=Y_0+Cx+\int_0^1 G_1(x,\xi)F_p(\xi)d\xi+\int_0^1 G_2(x,\xi)F^p(\xi)d\xi.$$

Тоді

$$Z_{p+1}(x)-Z^*_{p+1}(x)=\int_0^1\left\{G_2(x,\xi)Q_p(\xi)-G_1(x,\xi)C_p(\xi)\right\}\left(F^p(\xi)-F_p(\xi)\right)d\xi\le 0,$$

$$V_{p+1}(x)-V^*_{p+1}(x)=\int_0^1\left\{G_1(x,\xi)Q_p(\xi)-G_2(x,\xi)C_p(\xi)\right\}\left(F^p(\xi)-F_p(\xi)\right)d\xi\ge 0,$$

тобто при $x\in[0;1]$ справедливі нерівності:

$$V^*_{p+1}(x)\le V_{p+1}(x)\le Z_{p+1}(x)\le Z^*_{p+1}(x),$$

що і треба було показати. Таким чином справедливою є наступна теорема

Теорема 1. *Нехай права частина рівняння* (3) $F[Y(x)]\in C_1(\overline{B})$ *і в області* $\overline{B}_1$ *існують вектор-функції нульового наближення* $Z_0(x), V_0(x)\in C_1[0;1]$, *які задовольняють умови* (11). *Якщо* $E+B_2A_2^{-1}\le\Theta,\ B_1(A_2Y_0^+)^{-1}\le\Theta$, *то послідовності вектор-функцій* $\{Z_p(x)\}$, $\{V_p(x)\}$, *побудовані згідно закону* (10), (16) *при виконанні умови* (19) *збігаються абсолютно і рівномірно в області* $\overline{B}_1$ *до єдиного в просторі* $C_1[0;1]$ *розв'язку рівняння* (4) *і мають місце нерівності:*

$$V_p^{(s)}(x)\le V_{p+1}^{(s)}(x)\le Y^{(s)}(x)\le Z_{p+1}^{(s)}(x)\le Z_p^{(s)}(x),\quad x\in[0;1], s=0,1, \tag{20}$$

а збіжність методу (10), (16) *не повільніша збіжності методу Пікара.*

Перейдемо до рівняння (5). Відмітимо, що при виконанні умов (7) маємо:

$$R_2 \geq (\leq)\Theta,\ R_3 \geq (\leq)\Theta, \qquad \text{якщо } A_2 \leq (\geq)\Theta. \tag{21}$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= R_1 + \textstyle\int_0^1 (R_3\xi + R_2)F^p(\xi)d\xi, \\ \lambda_p^- &= R_1 + \textstyle\int_0^1 (R_3\xi + R_2)F_p(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{22}$$

Приймаючи до уваги нерівності (6), (20) та умову (21), одержимо:

$$\lambda_p^+ - \lambda = \textstyle\int_0^1 (R_3\xi + R_2)\left[F^p(\xi) - F[Y(\xi)]\right]d\xi \geq (\leq)0,$$

$$\lambda_p^- - \lambda = \textstyle\int_0^1 (R_3\xi + R_2)\left[F_p(\xi) - F[Y(\xi)]\right]d\xi \leq (\geq)0,$$

тобто

$$\lambda_p^- \leq (\geq)\lambda \leq (\geq)\lambda_p^+,\ p = 0, 1, \ldots \tag{23}$$

при виконанні умов (7) та (21).

Якщо $\lambda_p^-, \lambda_p^+ \in [\lambda_1, \lambda_2]$, то їх можна вважати за p-ве двостороннє наближення до параметру λ, який визначається згідно формули (5).

Теорема 2. *Нехай* $F[Y(x)] \in C_1(\overline{B})$ *і виконуються умови* (7), *а* $Z_p(x)$, $V_p(x)$ — *p-ве двостороннє наближення до розв'язку рівняння* (4), *яке визначається згідно* (10), (16). *Тоді при виконанні умови* (19) *двосторонні наближення до шуканого параметру* λ *визначаються згідно формул* (22) *і мають місце нерівності* (23).

Зауважимо, що вектор-функції $Z_{p+1}(x)$ та $V_{p+1}(x)$, побудовані згідно закону (10), (16) не задовольняють всім крайовим умовам (2), але функція $\widetilde{Y}_{p+1}(x) = \frac{1}{2}(Z_{p+1}(x) + V_{p+1}(x))$ задовольняє всім крайовим умовам (2) і її та параметр $\lambda_{p+1} = \frac{1}{2}(\lambda_{p+1}^+ + \lambda_{p+1}^-)$ беремо за $p+1$-ше наближення до розв'язку задачі (1)–(3).

Нехай

$$E + B_2A_2^{-1} \geq \Theta,\ B_1(A_2Y_0^+)^{-1} \geq \Theta. \tag{24}$$

Тоді $A \geq \Theta,\ B \geq \Theta$ і

$$\begin{aligned} G_1(x,\xi) &= (A\xi + B)x,\ \xi \in [0;1], \\ G_2(x,\xi) &= \begin{cases} -E\xi,\ \xi \in [0;x], \\ -Ex,\ \xi \in (x;1]. \end{cases} \end{aligned} \tag{25}$$

Очевидно, що $G_1(x,\xi) + G_2(x,\xi) = G(x,\xi)$, $G_1(x,\xi)$ та $G_2(x,\xi)$ при $(x,\xi) \in \overline{D}$ задовольняють умови (8).

У даному випадку двосторонні наближення до розв'язку рівняння (4) будуємо згідно закону (10), (16), де за нульове наближення вибираємо довільні з простору $C_1[0;1]$ вектор-функції $Z_0(x), V_0(x) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умови (11).

При цьому є справедливими оцінки

$$\sup_{[0,1]} \left\{\|W_p(x)\|, \left\|W_p'(x)\right\|\right\} \leq (q\tau_4 M)^p d,$$

де

$$\tau_4 = \left\|\left(\delta_{i,j}\left(1 + \tfrac{0{,}5\beta_{i,1} + \alpha_{i,2}y_{i,0}}{\rho_i}\right)\right)\right\|.$$

Якщо

$$q\tau_4 M < 1, \tag{26}$$

то, як і у попередньому випадку, послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x)\}$, $\{V_p(x)\}$, побудовані згідно закону (10), (16), абсолютно і рівномірно збігаються до єдиного розв'язку рівняння (4) і мають місце нерівності (20).

Позначимо

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= R_1 + \int_0^1 [R_3\xi F^p(\xi) + R_2 F_p(\xi)]\, d\xi, \\ \lambda_p^- &= R_1 + \int_0^1 [R_3\xi F_p(\xi) + R_2 F^p(\xi)]\, d\xi. \end{aligned} \tag{27}$$

Тоді, якщо $A_2 \geq (\leq)\Theta$, то є справедливими нерівності (23).

Теорема 3. *Нехай права частина рівняння* (3) $F[Y(x)] \in C_1(\overline{B})$, *виконуються умови* (24), (26), *а в області* $\overline{B}_1$ *існують вектор-функції нульового наближення* $Z_0(x)$, $V_0(x) \in C_1[0;1]$, *які задовольняють нерівності* (11) *та умову* (10), $G_1(x,\xi)$, $G_2(x,\xi)$ *визначаються згідно* (25). *Тоді p-им наближенням до розв'язку задачі* (1)–(3) *є пара* $\left(\widehat{Y}_p(x), \lambda_p\right)$, *де*

$$\lambda_p = \frac{1}{2}(\lambda_p^+ + \lambda_p^-), \quad \widehat{Y}_p(x) = \frac{1}{2}(Z_p(x) + V_p(x)),$$

вектор-функції $Z_p(x), V_p(x)$ *є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння* (4), *які визначаються згідно* (10), (16), *задовольняють нерівності* (20), *а* λ_p^+, λ_p^- *— p-ве двостороннє наближення до шуканого параметру* λ, *визначене згідно* (27) *і задовольняє умови* (23).

1. *Маринець В. В., Питьовка О. Ю.* Про одну задачу з параметром у крайових умовах // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.– 2005. – Вип. 10–11. – С. 70–76.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1992. – 280 с.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
4. *Маринец В. В.* Об одном подходе построения итерационных методов приближенного интегрирования краевых задач теории пластин и оболочек // Материалы VIII Всесоюзной конф. "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности". – Новосибирск, 1984. – С. 194–198.

Одержано 30.05.2006