І. Й. Поляк (Ужгородський нац. ун-т)

УТОЧНЕННЯ ЛОКАЛЬНОЇ ГРАНИЧНОЇ ТЕОРЕМИ В СХЕМІ СЕРІЙ

In the contains consider estimates of the rate of convergence in the local limit theorem.

В роботі розглядаються оцінки швидкості збіжності в локальній граничній теоремі.

В останні роки пожвавилися дослідження швидкості збіжності в локальних граничних теоремах, з використанням псевдомоментів різної структури. такі дослідження відображено в роботах [1]–[4]. В даній роботі продовжується дослідження оцінок швидкості збіжності в локальній граничній теоремі в схемі серій з використанням псевдомоменту одного виду.

Нехай $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ — послідовність незалежних однаковорозподілених в кожній серії випадкових величин з $M\xi_{ni} = 0$, $D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$. Позначимо через $F_n(x)$ і $f_n(t)$ — відповідно функцію розподілу і характеристичну функцію ξ_{ni}. Нехай $S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nn}$ — випадкова величина з функцією розподілу $\Phi(x)$, щільністю $\varphi(x)$ стандартного нормального закону.

Теорема 1. *Нехай* $\nu_{n0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} max(1, \sqrt{n}|x|^3)\, |d\,(F_n(x) - \Phi(x\sqrt{n}))|$,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t)|dt = A_n < \infty, \tag{1}$$

тоді при $n > 1$ *і* $\nu_{n0} \le c$, $c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$\sup_x |P_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{\nu_{n0}}{\sqrt{n}} c^{(1)} + \frac{(2\nu_0)^{n-1}}{2\pi} A_n, \tag{2}$$

а при $\nu_{n0} > c$

$$\sup_x |P_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{\nu_{n0}}{\sqrt{n}} c^{(2)} + \frac{1}{2\pi} b^{(n-1)} A_n, \tag{3}$$

$b_n = \exp\left\{ -\frac{\pi^2}{24A_n^2\left(2+\frac{\pi\nu_{n0}}{c\sqrt{n}}\right)^2} \right\}$, $c^{(i)}$ — *сталі, що залежать від* c.

При доведенні теореми використовуються наступні леми.

Лема 1. *Нехай* $h_n(t) = f_n(t) - e^{\frac{t^2}{2}}$ *тоді для всіх* $t \in R$

$$|h_n(t)| \le \nu_{n0} \min\left(1, \frac{|t|^3}{6n^{\frac{3}{2}}}\right) \le \nu_{n0} \frac{t^2}{\sqrt[3]{36n}}.$$

Лема 2. *Для будь-якого* $c \in (0;1)$ *при* $0 < \nu_{n0} \le c$ *і* $|t| \le \sqrt{-2n \ln \nu_0} = T_n^{(1)}$, $|f_n(t)| \le e^{-c_1 \frac{t^2}{n}}$, $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{36}} > 0$, *а при* $|t| > T_n^{(1)}$ $|f_n(t)| \le 2\nu_{n0}$.

Якщо ж $\nu_{n0} > c$, *то при* $|t| = \frac{c\sqrt{n}}{\nu_{n0}} = T_n^{(2)}$, $|f_n(t)| \le e^{-c_2 \frac{t^2}{n}}$, *де* $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{e}}{6} c > 0$.

Доведення теореми. У випадку $\nu_{n0} = 0$ теорема виконується, тому будемо вважати, що $\nu_{n0} > 0$. Оскільки

$$P_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \left(f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right) dt,$$

то

$$P_n(x) - \varphi(x) \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt. \tag{4}$$

Покладемо $u = f_n(t)$, $v = e^{-\frac{t^2}{2n}}$.

Із рівності

$$u^n - v^n = (u - v) \sum_{k=1}^{n} u^{n-k} v^{k-1},$$

лем 1 та 2 при $n > 1$, $|t| \le T_n^{(i)}$ ($i = 1$ при $0 < \nu_{n0} \le c$, $i = 2$ при $\nu_{n0} > c$) одержимо

$$\left| f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \le \left| f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \cdot \sum_{k=1}^{n} |f_n(t)|^{n-k} e^{-\frac{t^2(k-1)}{2n}} \le$$

$$\le \frac{\nu_{n0}|t|^3}{6n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{n} e^{-c_i t^2} \frac{n-k}{n} e^{-\frac{t^2}{2n}(k-1)} \le \frac{\nu_{n0}|t|^3}{6\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}c_i t^2}. \tag{5}$$

Тоді із (4)

$$|P_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \le T_n^{(i)}} \left| f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| > T_n^{(i)}} |f_n^n(t)|\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \le T_n^{(i)}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

При $n > 1$ ($i = 1, 2$) із (5)

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \le T_n^{(i)}} \left| f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt \le \frac{1}{2\pi} \frac{\nu_{n0}}{\sqrt{n}} \int\limits_{|t| \le T_n^{(i)}} \frac{|t|^3}{6} e^{-\frac{1}{2}c_i t^2} dt \le c_3 \frac{\nu_{n0}}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

Із умови (1) і леми 2 при $n > 1$, $i = 1$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| > T_n^{(i)}} |f_n^n(t)|\, dt \le \frac{(2\nu_{n0})^{n-1}}{2\pi} \int\limits_{|t| > T_n^{(i)}} |f_n^n(t)|\, dt \le \frac{(2\nu_{n0})^{n-1}}{2\pi} A_n. \tag{7}$$

Із умови (1) випливає, що щільність розподілу ξ_{ni} існує і обмежена числом $\frac{A_n}{2\pi}$, тому при $|t| \ge T_n^{(2)}$ із [5]

$$|f_n(t)| \le \exp\left\{ -\frac{\pi^2}{24A_n^2 \left(2 + \pi \frac{\nu_{n0}}{c\sqrt{n}}\right)^2} \right\} = b_n.$$

Тоді при $\nu_{n0} > c$ для I_2 одержимо оцінку

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} b_n^{n-1} A_n. \tag{8}$$

Для оцінки I_3 використаємо нерівність

$$\int_a^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{a^2}{2}}, \quad (a > 0).$$

Тому у випадку $i = 1$, $\nu_{n0} \leq c$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| > T_n^{(1)}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{2}{2\pi T_n^{(1)}} e^{-\frac{\left(T_n^{(1)}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{-2\ln\nu_{n0}}\sqrt{n}} \nu_{n0}^n \leq$$

$$\leq \frac{\nu_{n0}}{\pi\sqrt{n}\sqrt{-2\ln c}} c^{n-1} \leq c_5 \frac{\nu_{n0}}{\sqrt{n}}, \tag{9}$$

а при $i = 2$, $(\nu_{n0} > c)$

$$I_3 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| > T_n^{(2)}} \frac{t}{T_n^{(2)}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq C_6 \frac{\nu_{n_0}}{\sqrt{n}}. \tag{10}$$

Об'єднуючи (6), (7), (9) одержуємо (2) і об'єднуючи (6), (8), (10) одержуємо (3). Теорема доведена.

Якщо ж $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ — послідовність серій незалежних однаковорозподілених в кожній серії випадкових величин з $M\xi_{ni} = 0$, $D\xi_{ni} = 1$, $P_n(t)$ — щільність розподілу випадкової величини

$$S_n = \frac{\xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}}{\sqrt{n}},$$

$$\nu'_{n0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, |x|^3) |d(F_n(x) - \Phi(x))|,$$

то справедлива така теорема

Теорема 2. *Нехай*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t)| dt = A_n < \infty,$$

тоді при $n > 1$ *і* $\nu'_{n0} \leq c$, $c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$\sup_x |P_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\nu'_{n0}}{\sqrt{n}} \left\{ c^{(4)} + c^{(5)A} \right\},$$

а при $\nu'_{n0} > cc$

$$\sup |P_n(x) - \varphi(x)| \leq c^{(6)} \frac{\nu'_{n0}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{2\pi} b_n^{n-1} A,$$

де $b_n = \exp\left\{ -\frac{\pi^2}{24 A_n^2 \left(2 + \frac{\pi \nu'_{n0}}{c}\right)^2} \right\}$, $c^{(4)} - c^{(6)}$ *— сталі, які залежать тільки від* c.

Відзначимо, що доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1.

1. *Золотарев В. М.* Современная теория независимых случайных величин. – М: Наука , 1986. – 416 р.
2. *Кароблис Ф, Слесорайтене. Р.* Апроксимация плотностей распределения сумм независимых случайных величин // Лит. мат. сб. — 1989. – **29**, №4. – С. 715–720.
3. *Слюсарчук П. В., Игнат Ю. И.* О скорости сходисости в локальной предельной теореме для плотностей // Теория вероятностей и ее применение. — 1991. – **36**, вып. 4. – С. 807–808.
4. *Слюсарчук П. В., Поляк І. Й.* Деякі оцінки швидкості збіжності в центральній граничній теоремі // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1997. – Вип. 2. – С. 104–107.
5. *Статулявичус В. А.* Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределения сум независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применение. – 1965. – **310**, №4. – С. 645–649.

Одержано 17.09.2006