В. Я. Рибак (Ужгородський нац. ун-т)

ПЕРЕТВОРЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАТОРІВ ДРОБОВОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Transformation of ordinary differential equations and its solutions by fractional derivatives are examined in the paper.

У статті розглядаються перетворення звичайних диференціальних рівнянь та їх розв'язків за допомогою похідних дробового порядку.

Ми вже згадували про можливості похідних та інтегралів дробового порядку узагальнювати математичні поняття та об'єкти [1]. Метою даної статті є висвітлення ще однієї властивості дробового інтегро-диференціювання — використання його для перетворення диференціальних рівнянь.

1. Загальні положення. Нехай $f(x)$ — інтегровна на скінченому проміжку (a, b), $a \geq 0$, функція. Тоді невизначена похідна $D'f(x)$ або невизначений інтеграл $D^r f(x)$ дійсного порядку $r > 0$ мають вигляд [2]:

$$D^{\pm r} f(x) = \{D^{\pm r} f(x)\} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{(x-a)^{\mp r - k}}{\Gamma(1 \mp r - k)}, \tag{1}$$

де $\{D^{\pm r} f(x)\}$ — головне значення похідної (інтеграла); A_k — довільні сталі інтегро-диференціювання;

$$\begin{gathered} \{D^{-r} f(x)\} = \tfrac{1}{\Gamma(r)} \int\limits_a^x (x-t)^{r-1} f(t) dt, \\ \{D^r f(x)\} = \tfrac{1}{\Gamma(\rho)} \tfrac{d^m}{dx^m} \int\limits_a^x (x-t)^{\rho-1} f(t) dt, \quad r = m - \rho, \quad 0 < \rho \leq 1, \end{gathered} \tag{2}$$

$m = [r + I]$ — найменше ціле число, що перевищує r.

Існують (правда, більш громіздкі) вирази головних значень [2], що справедливі для неперервних на (a, b) функцій. Константи A_k призначаються за загальною методикою задачі Коші. Якщо, наприклад, $D^r y = f(x)$, то

$$y = D^{-r} f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{(x-a)^{r-k}}{\Gamma(1 + r - k)}, \quad A_k = \left(D^{r-k} y(x) - D^{-k} f(x)\right)\Big|_{x=a}. \tag{3}$$

Повторне застосування до (3) оператора D^r дає у загальному випадку

$$D^r y = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{(x-a)^{-r-j}}{\Gamma(1 - r - j)}, \quad B_j = \left(D^{-j} y(x) - D^{-r-j} f(x)\right)\Big|_{x=a}. \tag{4}$$

Стосовно перетворень (3) і (4) можна сказати таке:

1) довільні сталі A_k і B_j несуть цілком конкретну інформацію про початкові властивості $(x = a)$ об'єктів інтегро-диференціювання $y(x)$ та $D^r y(x)$ відповідно;

2) для похідної натурального порядку нескінченна сума у правій частині (4) зникає, як це має місце у класичному аналізі;

3) присутність нескінченних сум у виразах (3) і (4) слід пов'язувати із наступним інтегро-диференціюванням об'єктів $y(x)$ та $D^r y(x)$. Якщо такою операцією буде диференціювання із порядком похідної $s \in R$, то (3) у загальному випадку треба записувати так:

$$y = D^{-r} f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{(x-a)^{s-k}}{\Gamma(1+s-k)}. \tag{5}$$

Багато відомих диференціальних рівнянь та їх розв'язки є результатом простих перетворень за участю операторів дробового інтегродиференціювання над елементарними початковими (твірними) диференціальними рівняннями. З цією метою можуть використовуватись операції із наступними структурами:

$$x^\beta D^\alpha f(x), \quad x^\delta D^\gamma \left(x^\beta D^\alpha f(x)\right), \quad x^c D^b \left(x^a f(x)\right), \quad x^e D^d \left(x^c D^b \left(x^c D^b \left(x^a f(x)\right)\right)\right).$$

Неважко переконатись, що для аналітичних на $(0,x)$ функцій справедливе співвідношення

$$\begin{gathered} D^d\left(x^c D^b (x^a f(x))\right) = x^\xi D^\varepsilon \left(x^\delta D^\gamma \left(x^\beta D^\alpha f(x)\right)\right), \\ a - b + c - d = -\alpha + \beta - \gamma + \delta - \varepsilon + \xi, \end{gathered} \tag{6}$$

якщо покласти

$$\alpha = b - a, \quad \beta = b, \quad \gamma = a, \quad \delta = a - b + c, \quad \varepsilon = d, \quad \xi = 0 \tag{7}$$

або

$$\alpha = b - a, \quad \beta = c, \quad \gamma = d, \quad \delta = b - c + d, \quad \varepsilon = a, \quad \xi = a - b + c - d \ \text{ і т. п.} \tag{8}$$

Практичні дії, наприклад, для реалізації комбінації $D^\gamma \left(x^\beta \left(D^\alpha f(x)\right)\right)$ виконуються у такій послідовності:

1) оператором D^α диференціюється твірне диференціальне рівняння, яке справджує функцію $f(x)$ і яке записується із правою частиною відповідно до (5);

2) в одержаному рівнянні проводиться заміна $u = x^\beta D^\alpha f(x)$;

3) диференціальне рівняння із новою невідомою $u(x)$ диференціюється оператором D^γ;

4) робиться заміна $\nu(x) = D^\gamma \left(x^\beta D^\alpha f(x)\right)$.

Нижче будуть розглянуті деякі приклади таких перетворень.

2. Гіпергеометричне рівняння. Нехай

$$f(x) = (1-x)^{-b}, \quad |x| < 1, \quad b \in R. \tag{9}$$

Очевидно, що (9) справджує диференціальне рівняння

$$(1-x)y' - by = 0. \tag{10}$$

Для його перетворення скористаємось набором операцій $D^\gamma \left(x^\beta \left(D^\alpha f(x)\right)\right)$, $\beta = \alpha + \gamma$. Записуємо (10) відповідно до (5):

$$(1-x)y' - by = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)}, \quad \alpha \notin Z. \tag{11}$$

Беремо від (11) невизначену похідну порядку α:

$$D^{\alpha+1}y-(xD^{\alpha+1}y+\alpha D^{\alpha}y)-bD^{\alpha}y=\sum_{j=1}^{\infty}B_j\frac{x^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}. \qquad (12)$$

Приймаємо $x^{\beta}D^{\alpha}y=u$, $\beta\notin Z$.

$$(1-x)(u'x^{-\beta}-\beta ux^{-\beta-1})-(\alpha+\beta)ux^{-\beta}=\sum_{j=1}^{\infty}B_j\frac{x^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}. \qquad (13)$$

Множимо праву і ліву частини одержаного рівняння на $x^{\beta+1}$:

$$x(1-x)u'-[\beta+(\alpha-\beta+b)x]u=\sum_{j=1}^{\infty}B_j\frac{x^{1-\alpha+\beta-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}. \qquad (14)$$

І, нарешті, диференціюємо (14) оператором $D^{\gamma+1}$ (зважаючи при цьому, що молодша похідна повинна мати порядок r):

$$D^{\gamma+2}u+[1-\beta+\gamma-(\alpha-\beta+2\gamma+b+2)x]D^{\gamma+1}u-(1+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma+b)D^{\gamma}u=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}B_j\frac{\Gamma(2-\alpha+\beta-j)x^{-\alpha+\beta-\gamma-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)\Gamma(1-\alpha+\beta-\gamma-j)}+\sum_{i=1}^{\infty}C_i\frac{x^{-\gamma-1-i}}{\Gamma(-\gamma-i)}.$$

Покладемо $D^{\gamma}u=\nu$, $\alpha=1-c$, $\beta=a-c$, $\gamma=a-1$, $C_i=0$, і одержуємо гіпергеометричне рівняння [3, 4]:

$$x(1-x)\nu''+[c-(a+b+1)x]\nu'-ab\nu=0. \qquad (15)$$

А тепер проведемо такі ж перетворення із розв'язками рівняння (11). Частинний розв'язок неоднорідного рівняння та його перетворені аналоги будемо позначати зірочкою.

$$y=(1-x)^{-b}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b+i)x^i}{i!\,\Gamma(b)}={}_1F_0(b;x);$$

$$y*=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2+b-c+i-k)x^{2+c-k+i}}{\Gamma(3-c-k+i)}=D^{b-1}\left(\frac{x^{b-c+1-k}}{1-x}\right),\quad b-c\notin Z,\quad k=1,2,...$$

Відповідно до виконаних над (11) дій записуємо інтеграли (15):

$$\nu=D^{a-1}\left(x^{a-c}D^{1-c}(1-x)^{-b}\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,{}_2F_1(a,b;c;x);$$

$$\nu*=D^{a-1}\left(x^{a-c}D^{b-c}\,\frac{x^{b-c+1-k}}{1-x}\right)=\frac{\Gamma(2-c)x^{1-c}}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}\cdot{}_2F_1(a+1-c,b+1-c;2-c;x). \qquad (16)$$

Якщо скористатися співвідношеннями (6) і (7), то твірне рівняння (10) мало би інший вигляд, але завершальний результат був би незмінним. Наприклад, перший розв'язок (15) при цьому виглядав би так: $\nu=x^{1-c}D^{a-c}\left(x^{a-1}(1-x)^{-b}\right)$, а твірне рівняння повинно справджувати функцію $f(x)=x^{a-1}(1-x)^{-b}$.

Зазначимо також, що використаний вище механізм перетворює функції ${}_1F_0()$ до вигляду ${}_2F_1()$. Тому можна чекати, що повторне застосування до (15) подібного перетворення підвищить порядок цього рівняння, а його розв'язки будуть узагальнювати ряд Гауса і містити структури ${}_3F_2()$. Переконаємось у цьому за допомогою комбінації операторів $D^{d-1}\left(x^{d-e}D^{1-e}\nu(x)\right)$, $d \notin e$.

$$x(1-x)\nu'' + [c-(a+b+1)x]\nu' - ab\nu = \sum_{i=1}^{\infty} L_i \frac{x^{1-e-i}}{\Gamma(2-e-i)},\ L_i = const;$$

1) $D^{1-e}:\ (x-x^2)D^{3-e}\nu + [c+1-e-(a+b+2e-1)x]D^{2-e}\nu-$

$$-[(1-e)(a+b-e+1)+ab]D^{1-e}\nu = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \tfrac{x^{e-1-j}}{\Gamma(e-j)},\ M_j = const;$$

2) $x^{d-e}D^{1-e}v = Z:\ x^2(1-x)Z'' + x[c+e-2d+1-(a+b-2d+3)x]Z'-$

$$-[(d-e)(c-d)+(a+1-d)(b+1-d)x]Z = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \tfrac{x^{d-j}}{\Gamma(e-j)};$$

3) $D^d:\ x^2(1-x)D^{d+2}Z + x[c+e+1-x(a+b+d+3)]D^{d+1}Z+$

$$+[ce-(a+b+1)(d+1)x-abx]D^dZ - abdD^{d-1}Z = 0;$$

4) $D^{d-1}Z = w(x)$:

$$x^2(1-x)w''' + x[c+e+1-(a+b+d+3)x]w''+$$
$$+[ce-(a+b+1)(d+1)x-abx]w' - abdw = 0. \tag{17}$$

Якщо $d \neq e$, $c, e \notin Z$, то

$$w_1 = {}_3F_2(a,b,d;\ c,e;\ x) = \tfrac{\Gamma(e)}{\Gamma(d)} D^{d-1}[x^{d-e}D^{1-e}\,{}_2F_1(a,b;\ c;\ x)];$$

$$w_2 = x^{1-c}\,{}_3F_2(a+1-c,\ b+1-c,\ d+1-c;\ 2-c, e+1-c;\ x) =$$
$$= \frac{\Gamma(e+1-c)}{\Gamma(d+1-c)} D^{d-e}\left[x^{d-e}D^{1-e}\left(x^{1-c}\cdot\,{}_2F_1(a+1-c,\ b+1-c;\ 2-c;\ x)\right)\right]; \tag{18}$$

$$w_3^* = x^{1-e}\,{}_3F_2(a+1-e,\ b+1-e,\ d+1-e;\ c+1-e, 2-e;\ x) =$$
$$= \tfrac{\Gamma(2-e)}{\Gamma(d+1-e)} D^{d-1}\left[x^{d-e}\,{}_2F_1(a+1-e,\ b+1-e;\ c+1-e;\ x)\right].$$

Очевидно, що ще одне застосування подібного перетворення дозволить одержати узагальнені гіпергеометричні функції, у складі яких будуть структури ${}_4F_3()$.

3. Вироджене гіпергеометричне рівняння. Тут ми знову скористаємось операційною структурою $D^{\gamma}\left(x^{\beta}\left(D^{\alpha}f(x)\right)\right)$, $\beta = \alpha+\gamma$.

Нехай

$$f(x) = e^{px}, \quad p = const. \tag{19}$$

Тоді твірним буде рівняння

$$y' - py = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)}. \tag{20}$$

Надалі проводимо дії, аналогічні попередньому прикладу.

$$D^{\alpha+1}y - pD^{\alpha}y = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{x^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)};$$

$$x^{\alpha+\gamma} D^{\alpha} y = u : \ xu' - (\alpha+\gamma+px)u = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{x^{\gamma+1-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)};$$

$$D^{\gamma+1} : \ xD^{\gamma+2}u + (1-\alpha-px)D^{\gamma+1}u - p(\gamma+1)D^{\gamma}u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{x^{-\gamma-1-i}}{\Gamma(-\gamma-i)};$$

Приймаємо $D^{\gamma}u = v$, $p = 1$, $\gamma = a-1$, $\alpha = 1-c$, $C_i = 0$, і одержуємо вироджене гіпергеометричне рівняння [4]:

$$xv'' + (c-x)v - av = 0. \tag{21}$$

Його розв'язки мають вигляд:

$v_1 = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots = \Phi(a;\, c;\, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} D^{a-1}(x^{a-c}D^{1-c}e^x);$

$$v_2^* = x^{1-c}\Phi(a+1-c;\, 2-c;\, x) = \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a+1-c)} D^{a-1}\left(x^{a-c}D^{1-c}(D^{c+k-2}e^x)\right) = \tag{22}$$

$$= \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a+1-c)} D^{a-1}\left(x^{a-c}e^x\right), \ c \notin Z, \ k = 1, 2, \ldots$$

Повторне застосування до (21) перетворення $D^{b-1}\left(x^{b-d}D^{1-d}\nu(x)\right)$ приводить його до рівняння третього порядку із двома новими параметрами b і d:

$$x^2 w''' + x(c+d+1-x)w'' + [ad - (a+b+1)x]w' - abw = 0. \tag{23}$$

Інтегралами (23) є узагальнені вироджені гіпергеометричні функції ($b \neq d, c, d \notin Z$).

$$w_1 = 1 + \frac{ab}{cd}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)d(d+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots = \Phi(a, b;\, c, d;\, x) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} D^{b-1}\left[x^{b-d}D^{a-d}(x^{a-c}D^{1-c}e^x)\right]; \tag{24}$$

$$w_2 = x^{1-c}\Phi(a+1-c,\, b+1-c;\, 2-c, d+1-c;\, x) =$$

$$= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(b+1-d)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)} D^{b-1}\left[x^{b-d}(x^{a-c}e^x)\right]; \tag{25}$$

$$w_3^* = x^{1-d}\Phi(a+1-d,\, b+1-d;\, c+1-d, 2-d;\, x) =$$

$$= \frac{\Gamma(c+1-d)\Gamma(2-d)}{\Gamma(a+1-d)\Gamma(b+1-d)} D^{b-1}\left[x^{b-d}D^{a-d}(x^{a-c}D^{d-c}e^x)\right]. \tag{26}$$

4. Рівняння Бесселя. У рівнянні гармонійних коливань — $y'' + y = 0$, $y = y(x)$ – виконуємо заміну незалежної змінної і враховуємо, що наступною буде операція диференціювання по z оператором D^a: $z = x^2$; $y(x) \to u(z)$;

$$4zu'' + 2u' + u = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{z^{a-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)}. \tag{27}$$

$$4zD^{a+2}u + (4a+2)D^{a+1}u + D^a u = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{z^{-a-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}.$$

Проводимо ще одну заміну: $z^\beta D^\alpha u = \nu$;

$$4z^2\nu'' + z(2+4\alpha-8\beta)\nu' + [z + 2\beta(2\beta-2\alpha+1)]\nu = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{z^{\beta-\alpha+1-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}.$$

Повертаємося до початкової незалежної змінної $x = z^{\frac{1}{2}}$, $\nu(z) \to w(x)$:

$$x^2w'' + (2\alpha-4\beta)xw' + [x^2 + 2\beta(2\beta-2\alpha+1)]w = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{x^{2\beta-2\alpha+2-2j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}. \tag{28}$$

Якщо покласти $\alpha = \frac{1}{2} - \nu, \beta = -\frac{\nu}{2},\ B_j = 0$, то рівняння (28) набуває канонічного вигляду [4]:

$$xw'' + xw' + (x^2 - \nu^2)w = 0, \tag{29}$$

а його розв'язки мають таке подання:

$$\begin{aligned} w_1 &= N_1 z^{-\frac{\nu}{2}} D^{\frac{1}{2}-\nu} \sin z^{\frac{1}{2}}\Big|_{z=x^2} = J_\nu(x); \\ w_2 &= N_2 z^{-\frac{\nu}{2}} D^{\frac{1}{2}-\nu} u^*(z)\Big|_{z=x^2} = J_{-\nu}(x), \quad \nu \notin Z, \end{aligned} \tag{30}$$

де N_1 і N_2 — нормувальні множники; $u^* = D^{\nu-\frac{3}{2}-k}\left(z^{\nu-1+k} D^{\nu-\frac{1}{2}+k} \sin z^{\frac{1}{2}}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$ — частинний розв'язок (27).

На закінчення відзначимо, що подібну структуру перетворень мають рівняння ортогональних поліномів та багато інших рівнянь.

Висновки. Наведений тут метод перетворення дозволяє:

1) розвивати диференціальні рівняння і збільшувати таким чином їх інформативність внаслідок підвищення порядку і введення нових параметрів;

2) узагальнювати функції і надавати їм нові властивості.

1. *Рибак В. Я.* Про узагальнення чисел Стірлінга другого роду // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7 – С. 90–95.
2. *Рибак В. Я., Король І. Ю., Рубіш Ю. Ю.* Невизначені інтеграли та похідні дробового порядку // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. – 1999. – Вип. 4 – С. 90–95.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
4. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Одержано 15.09.2006