Н. В. Салдіна (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

СИЛЬНО ВИРОДЖЕНА ОБЕРНЕНА ПАРАБОЛІЧНА ЗАДАЧА ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ ПОВЕДІНКОЮ МОЛОДШИХ ЧЛЕНІВ РІВНЯННЯ

We consider an inverse problem for determining a time-dependent coefficient at the higher order derivative which vanishes at the initial moment. Conditions of existence and uniqueness of solution for the problem are established. The behaviour of minor terms are given by known functions.

Розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта при старшій похідній, який перетворюється в нуль у початковий момент часу. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі. Поведінка молодших членів описується деякими заданими функціями загального вигляду.

В прямокутнику $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу визначення пари функцій $(a(t), u(x,t)) \in C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T), u_x(0,t) \in \in C(0,T], a(t) > 0, t \in (0,T]$, для якої існує скінченна додатна границя $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{a(t)}{t^\beta}$, де $\beta > 1-$ задане число, і яка задовольняє рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умову перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Подібна обернена задача, але для рівняння теплопровідності була розглянута в [1]. Випадок $0 < \beta < 1$ для рівняння теплопровідності, рівняння з молодшим членом та повного параболічного рівняння був досліджений в [2]- [4]. У випадку сильного виродження від молодших членів рівняння вимагається прямування до 0 при $t \to +0$ на відміну від слабкого виродження, де поведінка молодших членів при $t \to +0$ не задається.

Припускаючи, що функція $a(t)$ відома, зведемо задачу (1)–(4) до системи рівнянь стосовно функцій $u(x,t), v(x,t), a(t)$, де $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{5}$$

$$v(x,t) = v_0(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{6}$$

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{v(0,t)}, \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

де $u_0(x,t)-$ розв'язок рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{8}$$

що задовольняє умови (2), (3). Він має вигляд

$$u_0(x,t) = \int_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau -$$
$$-\int_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{9}$$

Диференціюючи та інтегруючи частинами цей вираз, отримаємо $v_0(x,t)$:

$$v_0(x,t) = \int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi + \int_0^t G_2(x,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau +$$
$$+\int_0^t G_2(x,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h,\tau))d\tau + \int_0^t\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{10}$$

Через $G_k(x,t,\xi,\tau)$ позначено функції Гріна першої та другої крайових задач рівняння (8), які мають вигляд

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right), \quad k=1,2, \quad \theta(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau. \tag{11}$$

Основні результати містяться у наступній теоремі.

Теорема існування та єдиності. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^1[0,h]$; $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i=1,2$; $\mu_3 \in C[0,T]$; $f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$; $b,c \in C(\overline{Q}_T)$, *функції* b,c *задовольняють умову Гельдера в області* $\overline{Q}_T$ *по змінній* x *з показником* $\alpha, 0<\alpha<1$;

2) $f(0,t)-\mu_1'(t) > 0, t \in [0,T]$; $\mu_3(t) > 0, t \in (0,T]$, *існує границя* $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\mu_3(t)}{t^{\frac{\beta+1}{2}}} \equiv$ $\equiv M, |b(x,t)| \le Bt^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(t), |c(x,t)| \le C\psi_2(t), (x,t) \in \overline{Q}_T$, *де* $\psi_i(t)-$ *монотонно зростаючі функції,* $\psi_i(t) > 0$, $t \in (0,T]$, $\psi_i(0)=0, i=1,$ *2,* $\int_0^t \frac{\psi_1^2(\tau)}{\tau}d\tau < \infty, t \in [0,T]$, $\beta > 1$, M, C, $B > 0-$ *деякі константи;*

3) $\varphi(0)=\mu_1(0), \quad \varphi(h)=\mu_2(0)$.

Тоді можна вказати таке число $t_0, 0<t_0 \le T$, *яке визначається вихідними даними задачі, що існує єдиний розв'язок* $(a(t),u(x,t))$ *задачі (1)-(4) при* $x \in [0,h], t \in$ $\in [0,t_0]$. Встановимо апріорні оцінки розв'язку системи (5)-(7). З принципу максимуму [5, с. 25], випливає

$$|u(x,t)| \le U < \infty \quad \text{в} \quad \overline{Q}_T. \tag{12}$$

Оцінимо вираз $v(0,t)$, для чого встановимо поведінку $|v(x,t)|$. З рівності

$$\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi = 1$$

робимо висновок про те, що перший та четвертий доданки з формули (10) обмежені:

$$\left|\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi\right| \le C_1, \quad \left|\int_0^t \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \le C_2. \tag{13}$$

Враховуючи відому оцінку $G_2(x,t,\xi,\tau) \le \dfrac{C_3}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_4$ [6, с. 12] та явний вигляд функції Гріна, маємо

$$\int_0^t G_2(x,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau \le C_5 + C_6 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

$$\left|\int_0^t G_2(x,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h,\tau))d\tau\right| \le C_7 + C_8 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{14}$$

Тоді для $|v_0(x,t)|$ отримуємо

$$|v_0(x,t)| \le C_9 + C_{10} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{15}$$

Вводячи позначення $V(t) \equiv \max\limits_{x\in[0,h]} |v(x,t)|$ та враховуючи оцінку $\int_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|d\xi \le$ $\le \dfrac{C_{11}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$, з (6) маємо

$$V(t) \le C_{12} + C_{13} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{14} \int_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{15} \int_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{16}$$

Введемо позначення

$$a_0(t) \equiv \frac{a(t)}{t^\beta}, \quad a_{\max}(t) \equiv \max_{0\le\tau\le t} a_0(\tau), \quad a_{\min}(t) \equiv \min_{0\le\tau\le t} a_0(\tau). \tag{17}$$

Тоді (16) зведеться до вигляду

$$V(t) \le C_{12} + \frac{C_{16}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} + \frac{C_{17}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau. \tag{18}$$

Встановимо поведінку кожного з доданків (18). Для цього розглянемо наступний інтеграл, використовуючи заміну $z = \dfrac{\tau}{t}$:

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} = \frac{1}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{\beta+1}}} \le \frac{1}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} = \frac{C_{18}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}. \tag{19}$$

Легко бачити, що другий інтеграл з (18) має порядок особливості менший ніж $\dfrac{1}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}$. Отже, функція $v(x,t)$ поводить себе як $\dfrac{C_{19}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}$ при $t \to +0$.

Отримавши поведінку $v(x,t)$, оцінимо $v(0,t)$ знизу та зверху. Поклавши в (6) $x = 0$, використавши оцінки (13), (14) та умови теореми, легко бачити, що

$$v(0,t) \ge \int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau - C_{20} - C_{21} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}} \psi_1(\tau) V(\tau) + \psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{20}$$

Перетворимо перший доданок з (20), відокремлюючи з ряду доданок, що відповідає $n = 0$:

$$\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(- \frac{n^2 h^2}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \right) d\tau \ge \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau.$$

Тоді з (20) маємо

$$v(0,t) \ge \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau - C_{20} - C_{21} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}} \psi_1(\tau) V(\tau) + \psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{21}$$

Враховуючи (19), легко бачити, що особливість другого інтеграла з (21) менша за особливість першого при $t \to +0$, тому для довільного фіксованого $q, 0 < q < 1$ існує таке значення $t_1, 0 < t_1 \le T$, що

$$C_{21} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}} \psi_1(\tau) V(\tau) + \psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau + C_{20} \le \frac{q}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Остаточно отримаємо для $v(0,t)$ таку оцінку:

$$v(0,t) \ge \frac{(1-q)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{22}$$

Враховуючи (22), з (7) маємо

$$a(t) \le \frac{\sqrt{\pi} \mu_3(t)}{(1-q) \int\limits_0^t \dfrac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau}.$$

Використовуючи (17), знаходимо

$$a_0(t) \le \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)\sqrt{a_{\max}(t)}}{(1-q)\sqrt{\beta+1}t^\beta \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau}.$$

Введемо позначення

$$H(t) \equiv \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\sqrt{\beta+1}t^\beta \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau}. \tag{23}$$

З умов теореми випливає, що функція $H(t)$ має скінченну додатну границю при $t \to +0$, додатна на проміжку $(0,T]$ та належить класу $C[0,T]$. Використаємо означення функції $H(t)$ для продовження оцінки $a_0(t)$:

$$a_0(t) \le \frac{1}{1-q}H(t)\sqrt{a_{\max}(t)} \quad \text{або} \quad a_{\max}(t) \le \frac{1}{1-q}H_{\max}(t)\sqrt{a_{\max}(t)},$$

де $H_{\max}(t) = \max\limits_{0\le\tau\le t} H(\tau)$. Звідси маємо

$$a_{\max}(t) \le \frac{1}{(1-q)^2}H^2_{\max}(t), \quad t \in [0,t_1]. \tag{24}$$

Остаточно отримаємо для $a(t)$:

$$a(t) \le A_1 t^\beta, \quad \text{де} \quad A_1 = \frac{1}{(1-q)^2}H^2_{\max}(T) > 0, \quad t \in [0,t_1]. \tag{25}$$

Для оцінки $a(t)$ знизу використаємо означення функції $V(t)$ та наступну оцінку $v(0,t)$:

$$v(0,t) \le C_{22} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{23}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{24}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Підставимо цей вираз у рівняння (7), використовуючи означення функції $a_{\min}(t)$:

$$a(t) \ge \mu_3(t)\Bigg(C_{22} + \frac{\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{\pi a_{\min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau + \frac{C_{23}\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau +$$

$$+ \frac{C_{24}\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\Bigg)^{-1}.$$

Зведемо цю нерівність до вигляду

$$a_0(t) \ge \sqrt{a_{\min}(t)}\Bigg(\frac{C_{22}\sqrt{a_{\min}(t)}t^\beta}{\mu_3(t)} + \frac{\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{\pi}}\frac{t^\beta}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau +$$

$$+ C_{25}\frac{t^\beta}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau + C_{26}\frac{t^\beta}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\Bigg)^{-1}.$$

Враховуючи умову на поведінку функції $\mu_3(t)$ та означення $H(t)$, маємо

$$a_0(t) \geq \sqrt{a_{\min}(t)}\Bigg(C_{27}\sqrt{a_{\min}}(t)t^{\frac{\beta-1}{2}} + \frac{1}{H(t)} + C_{28}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau +$$

$$+ C_{29}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\Bigg)^{-1} \geq \sqrt{a_{\min}(t)}H(t)\Bigg(C_{30}t^{\frac{\beta-1}{2}} + 1 +$$

$$+ C_{31}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau + C_{32}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\Bigg)^{-1}. \tag{26}$$

З того, що функція $V(t)$ поводить себе як $\dfrac{1}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}$, робимо висновок, що існує таке значення $t_2, 0 < t_2 \leq T$, що

$$C_{30}t^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{31}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau + C_{32}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \leq q, \quad t \in [0, t_2].$$

Тоді маємо з (26)

$$a_0(t) \geq \frac{\sqrt{a_{\min}(t)}H(t)}{1+q} \quad \text{або} \quad a_{\min}(t) \geq \frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}, \quad t \in [0, t_2], \tag{27}$$

де $H_{\min}(t) = \min\limits_{0\leq\tau\leq t} H(\tau)$. Остаточно отримаємо для $a(t)$:

$$a(t) \geq A_0 t^{\beta}, \quad t \in [0, t_2], \quad \text{де} \quad A_0 = \frac{1}{(1+q)^2}H^2_{\min}(T) > 0. \tag{28}$$

Підставимо в (18) отриману оцінку $a_{\min}(t)$ з (27):

$$V(t) \leq C_{12} + \frac{C_{33}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + \frac{C_{34}}{t^{\beta/2}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \frac{C_{35}}{t^{\beta/2}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{29}$$

Ввівши нову функцію $w(t) \equiv V(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}$, зведемо (29) до нерівності

$$w(t) \leq C_{36} + \frac{C_{34}}{\sqrt{t}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \frac{C_{35}}{\sqrt{t}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{30}$$

Покладемо $t = \sigma$, домножимо обидві частини нерівності на $\dfrac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$ і проінтегруємо від 0 до t :

$$\int\limits_0^t \frac{w(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leq 2C_{36}\sqrt{t} + C_{34}\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma(t-\sigma)}}\int\limits_0^\sigma \frac{\psi_1(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\sigma-\tau}}d\tau + C_{35}\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma(t-\sigma)}}\int\limits_0^\sigma \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}}.$$

Змінюючи порядок інтегрування в другому та третьому доданках та використовуючи рівність $\int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\sigma}{\sqrt{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}} = \pi$, отримаємо

$$\int\limits_0^t \frac{w(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leq 2C_{36}\sqrt{t} + C_{34}\pi\psi_1(t)\int\limits_0^t \frac{w(\tau)d\tau}{\sqrt{\tau}} + 2C_{35}\pi\psi_2(t)\sqrt{t}. \tag{31}$$

Перепишемо нерівність (30) у вигляді

$$w(t) \leq C_{36} + \frac{C_{34}\psi_1(t)}{\sqrt{t}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + 2C_{35}\psi_2(t).$$

Підставивши оцінку (31) в дану нерівність, маємо

$$w(t) \leq C_{36} + C_{37}\psi_1(t) + C_{38}\psi_1(t)\psi_2(t) + 2C_{35}\psi_2(t) + \frac{C_{39}\psi_1^2(t)}{\sqrt{t}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

або

$$\frac{w(t)\sqrt{t}}{\psi_1^2(t)} \leq \frac{C_{40}\sqrt{t}}{\psi_1^2(t)} + C_{39}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)d\tau}{\sqrt{\tau}}. \tag{32}$$

Позначимо праву частину нерівності через $\chi(t)$. Тоді

$$\chi'(t) - \frac{C_{39}\psi_1^2(t)}{t}\chi(t) \leq C_{40}\left(\frac{\sqrt{t}}{\psi_1^2(t)}\right)'.$$

Розв'язуючи дану нерівність стосовно $\chi(t)$, отримуємо

$$\chi(t) \leq \frac{C_{40}\sqrt{t}}{\psi_1^2(t)} + C_{41}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}\exp\left(C_{39}\int\limits_{\tau}^t \frac{\psi_1^2(\sigma)}{\sigma}d\sigma\right)d\tau.$$

Підставивши отриману оцінку в (32), одержуємо

$$w(t) \leq C_{40} + C_{42}\psi_1^2(t)\exp\left(\int\limits_0^t \frac{\psi_1^2(\sigma)}{\sigma}d\sigma\right).$$

Тоді з умов теореми маємо

$$V(t) \leq \frac{C_{43}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \quad t \in [0,t_2] \quad \text{або} \quad |v(x,t)| \leq \frac{C_{43}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \quad (x,t) \in [0,h]\times(0,t_2], \tag{33}$$

де $C_{45}-$ константа, що визначається вихідними даними.

Введемо нову функцію $\widetilde{v}(x,t) \equiv v(x,t)t^{\frac{\beta-1}{2}}$ і подамо систему (5)-(7) у вигляді

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\frac{\widetilde{v}(\xi,\tau)}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}} + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{t_0} \tag{34}$$

$$\widetilde{v}(x,t) = v_0(x,t)t^{\frac{\beta-1}{2}} + t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\frac{\widetilde{v}(\xi,\tau)}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}} + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau,$$

$$(x,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{35}$$

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}}{\widetilde{v}(0,t)}, \quad t \in [0,t_0], \quad \text{де} \quad t_0 = \min\{t_1, t_2\}. \tag{36}$$

Запишемо систему рівнянь (34)-(36) в операторній формі

$$\omega = P\omega, \tag{37}$$

де $\omega = (u, \widetilde{v}, a)$, $\quad P = (P_1, P_2, P_3)$, оператори P_1, P_2, P_3 визначаються правими частинами рівнянь (34)-(36). Визначимо множину $\mathcal{N} = \{(u(x,t), \widetilde{v}(x,t), a(t)) \in C(\overline{Q}_{t_0}) \times \times C(\overline{Q}_{t_0}) \times C[0,t_0] : |u(x,t)| \le U, |\widetilde{v}(x,t)| \le C_{43}, A_0 \le \frac{a(t)}{t^\beta} \le A_1\}$. Згідно з отриманими оцінками (12), (33), (25), (28) оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Покажемо, що оператор P цілком неперервний на $\mathcal{N}$. Згідно з теоремою Арцела-Асколі для цього слід встановити, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$|P_i(x_2,t_2) - P_i(x_1,t_1)| < \varepsilon, \quad i = 1,2, \quad |P_3(t_2) - P_3(t_1)| < \varepsilon,$$
$$\forall\, (u(x,t), \widetilde{v}(x,t), a(t)) \in \mathcal{N},$$

якщо $|t_2 - t_1| < \delta, |x_2 - x_1| < \delta$, де $(x_1,t_1), (x_2,t_2) \in \overline{Q}_{t_0}$. Доведення компактності покажемо на прикладі одного з доданків, що входить до інтегрального оператора P :

$$K \equiv \left| t_2^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^{t_2} (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))G_2(0,t_2,0,\tau)d\tau - t_1^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^{t_1} (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))G_2(0,t_1,0,\tau)d\tau \right|.$$

Припустимо, що $t_i > 0, i = 1,2$ досить малі. Розглянемо наступний інтеграл

$$\widehat{K} \equiv t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))G_2(0,t,0,\tau)d\tau = \frac{t^{\frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau + \right.$$
$$\left. + 2\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta(t) - \theta(\tau)} \right) d\tau \right) \equiv \widehat{K}_1 + \widehat{K}_2.$$

Використаємо позначення (17) та означення функції $\theta(t)$. Тоді для другого доданка отримаємо оцінку:

$$\widehat{K_2} \le \frac{2\sqrt{\beta+1}t^{\frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{\pi a_{\min}(t)}} \max_{t \in [0,T]} (f(0,t) - \mu_1'(t)) \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2(\beta+1)}{a_{\max}(t)(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})} \right) d\tau.$$

З означення множини $\mathcal{N}$ робимо висновок про обмеженість підінтегрального виразу $\widehat{K}_2$. Отже, $\widehat{K}_2$ прямує до нуля при $t \to +0$. Розглянемо перший доданок $\widehat{K}_1$, використовуючи теорему про середнє та заміну змінних $z = \dfrac{\tau}{t}$:

$$\widehat{K}_1 = \frac{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{\pi a_0(\widetilde{t})}}(f(0,\widetilde{t}) - \mu_1'(\widetilde{t}))\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} =$$

$$= \frac{(f(0,\widetilde{t}) - \mu_1'(\widetilde{t}))\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{\pi a_0(\widetilde{t})}}\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{\beta+1}}},$$

де $\widetilde{t} \in [0,T]$. Позначимо $\lim\limits_{t\to+0}\widehat{K}_1 = \varkappa_0$. Тоді, повертаючись до K, отримаємо

$$K \le \left| t_2^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^{t_2}(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))G_2(0,t_2,0,\tau)d\tau - \varkappa_0\right| +$$

$$+ \left| t_1^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^{t_1}(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))G_2(0,t_1,0,\tau)d\tau - \varkappa_0\right|.$$

Можна вказати таке значення t_*, що коли $0 < t_i < t_*, i = 1,2$, будуть виконуватись нерівності:

$$\left| t_i^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^{t_i}(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))G_2(0,t_i,0,\tau)d\tau - \varkappa_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $K < \varepsilon$, коли $0 < t_i < t_*, i = 1,2$. Випадок $t_i > t_*, i = 1,2$ та дослідження інших інтегральних операторів, що входять в P_1, P_2, P_3, проводяться аналогічно до випадку сильного виродження для рівняння теплопровідності [1]. Оператор P цілком неперервний на $\mathcal{N}$. За теоремою Шаудера існує розв'язок системи (34)-(36), який володіє потрібною гладкістю. Існування розв'язку задачі (1)-(4) доведено.

Перейдемо до доведення єдиності розв'язку. Припускаючи, що існують два розв'язки $(a_i(t), u_i(x,t), v_i(x,t)), i = 1,2$ системи (5)–(7) та вводячи позначення $a(t) \equiv \equiv a_1(t) - a_2(t), u(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t), v(x,t) \equiv v_1(x,t) - v_2(x,t)$, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1^1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t\int\limits_0^h (G_1^1(x,t,\xi,\tau) - G_1^2(x,t,\xi,\tau))(b(\xi,\tau)v_2(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{38}$$

$$v(x,t) = v_0(x,t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}^1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^h (G^1_{1x}(x,t,\xi,\tau)-G^2_{1x}(x,t,\xi,\tau))(b(\xi,\tau)v_2(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau))d\xi d\tau,\ (x,t)\in Q_T, \tag{39}$$

$$a(t)=-a_1(t)a_2(t)\frac{v(0,t)}{\mu_3(t)},\quad t\in[0,T], \tag{40}$$

де $u_0(x,t)=u_{01}(x,t)-u_{02}(x,t), v_0(x,t)=v_{01}(x,t)-v_{02}(x,t)$, $G^i_1(x,t,\xi,\tau)$ – функції Гріна першої крайової задачі для рівнянь $u_t=a_i(t)u_{xx}, i=1,2$.

Доведення єдиності розв'язку базується на встановленні оцінок розв'язку системи рівнянь (38)-(40). Оцінимо доданки, що входять до $v_0(x,t)$. Позначимо

$$\widetilde{a}_{\max}(t)\equiv\max_{0\le\tau\le t}|a_0(\tau)|,\quad a_0(t)\equiv\frac{a(t)}{t^\beta}.$$

Легко переконатися у правильності наступних оцінок:

$$R_1\equiv\int_0^h|(G^1_2(x,t,\xi,0)-G^2_2(x,t,\xi,0))\varphi'(\xi)|d\xi\le C_{44}\widetilde{a}_{\max}(t),$$

$$R_4\equiv\int_0^t\int_0^h|(G^1_2(x,t,\xi,\tau)-G^2_2(x,t,\xi,\tau))f_\xi(\xi,\tau)|d\xi d\tau\le C_{45}t\widetilde{a}_{\max}(t). \tag{41}$$

Для оцінки наступного виразу виділимо з ряду доданок, що відповідає $n=0$:

$$R_2\equiv\int_0^t\left|\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)-\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right|d\tau\le C_{46}\left(\int_0^t\exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\times\right.$$

$$\times\left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}-\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right|d\tau+\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\left|\exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)-\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right|d\tau+\int_0^t\left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\ne0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\ne0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right|d\tau\right)=C_{46}\sum_{i=1}^{3}R_{2i}.$$

Оцінку R_{23} проведемо у такий спосіб

$$R_{23}=\int_0^t\left|\int_{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}^{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\ne0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4z}\right)\right)dz\right|d\tau\le$$

$$\le C_{47}\int_0^t|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)-\theta_2(t)+\theta_2(\tau)|d\tau\le C_{47}\int_0^t d\tau\int_\tau^t|a_1(\sigma)-a_2(\sigma)|d\sigma\le$$

$$\leq C_{48}\widetilde{a}_{\max}(t)t^{\beta+2}.$$

Щоб оцінити R_{22}, використаємо (25) та нерівність $|e^x - e^y| \leq |x-y| \max\{e^x, e^y\}$:

$$R_{22} \leq \frac{x^2}{4}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\left|\frac{1}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)} - \frac{1}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\right| \exp\left(-\frac{x^2}{C_{49}(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1})}\right)d\tau =$$

$$= \frac{x^2}{4}\int\limits_0^t \frac{|\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-\theta_1(t)+\theta_1(\tau)|}{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))^{3/2}(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))} \exp\left(-\frac{x^2}{C_{49}(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1})}\right)d\tau.$$

Враховуючи (27), маємо

$$|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)-\theta_2(t)+\theta_2(\tau)| \leq \int\limits_\tau^t |a_0(\sigma)|\sigma^\beta d\sigma \leq \frac{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}{\beta+1}\widetilde{a}_{\max}(t),$$

$$\theta_i(t)-\theta_i(\tau) = \int\limits_\tau^t a_{i0}(\sigma)\sigma^\beta d\sigma \geq \frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}\frac{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}{\beta+1}, \quad i=1,2. \tag{42}$$

За допомогою нерівності $x^p e^{-qx^2} \leq C_{p,q}, x \geq 0, p \geq 0, q > 0$ та оцінки (42) отримаємо

$$R_{22} \leq C_{50}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \leq \frac{C_{51}\widetilde{a}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}.$$

Беручи до уваги (42), оцінимо вираз R_{21}:

$$R_{21} \leq \int\limits_0^t \frac{|\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-\theta_1(t)+\theta_1(\tau)|}{\sqrt{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}(\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}+\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)})}d\tau \leq$$

$$\leq C_{52}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \leq \frac{C_{53}\widetilde{a}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}.$$

Отже,

$$R_2 \leq \frac{C_{54}\widetilde{a}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}.$$

Наступний доданок, що входить до $v_0(x,t)$, оцінюється аналогічно до попереднього:

$$R_3 \equiv \int\limits_0^t \left|\frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+h(2n-1))^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+h(2n-1))^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right|d\tau \leq \frac{C_{55}\widetilde{a}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}. \tag{43}$$

Остаточно маємо

$$|v_0(x,t)| \leq \frac{C_{56}\widetilde{a}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}.$$

Подібними міркуваннями отримуємо таку оцінку виразу $|u_0(x,t)|$:

$$|u_0(x,t)| \le C_{57}\widetilde{a}_{\max}(t).$$

Вводячи позначення $U(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |u(x,t)|$, $V(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |v(x,t)|$ та використовуючи оцінки функцій $v_0(x,t), u_0(x,t)$, з рівнянь (38), (39) отримуємо

$$U(t) \le C_{58}\widetilde{a}_{\max}(t) + C_{59}\int\limits_0^t (\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau) + \psi_2(\tau)U(\tau))d\tau, \tag{44}$$

$$V(t) \le \frac{C_{60}\widetilde{a}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + \frac{C_{61}}{t^{\beta/2}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau) + \psi_2(\tau)U(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \tag{45}$$

Розв'язуючи нерівність (44) стосовно $U(t)$

$$U(t) \le C_{62}\widetilde{a}_{\max}(t) + C_{63}\int\limits_0^t \tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)d\tau \tag{46}$$

і підставляючи (46) в (45), приходимо до нерівності відносно $V(t)$:

$$V(t) \le \frac{C_{64}\widetilde{a}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + \frac{C_{61}}{t^{\beta/2}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \frac{C_{65}}{t^{\beta/2}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^\tau \sigma^{\frac{\beta-1}{2}}\psi_1(\sigma)V(\sigma)d\sigma.$$

Отримана нерівність розв'язується аналогічно до (29). Враховуючи після цього (46), отримаємо

$$V(t) \le \frac{C_{66}\widetilde{a}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \qquad U(t) \le C_{67}\widetilde{a}_{\max}(t), \quad t\in(0,t_0]$$

або

$$|v(x,t)| \le \frac{C_{66}\widetilde{a}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \qquad |u(x,t)| \le C_{67}\widetilde{a}_{\max}(t), \quad (x,t)\in Q_{t_0}. \tag{47}$$

На завершення встановимо оцінку $|v(0,t)|$, яка дещо відрізняється від оцінки $|v(x,t)|$. Зауважуючи, що підінтегральний вираз R_3 при $x=0$ обмежений, отримуємо $R_3 \le C_{68}\widetilde{a}_{\max}(t)$. Оцінки R_1, R_4 не змінюються. Оцінку виразу R_2 проведемо точніше. Підставляючи $x=0$ в R_2 та виділяючи з рядів доданки, що відповідають $n=0$, маємо

$$\widetilde{R}_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right|(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))\left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\right)\right|d\tau \equiv \widetilde{R}_{21}+\widetilde{R}_{22}.$$

Оцінимо $\widetilde{R}_{22}$:

$$\widetilde{R}_{22} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)) \left| \int\limits_{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}^{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{z} \right) \right) dz \right| d\tau \leq$$
$$\leq C_{69} \widetilde{a}_{\max}(t).$$

Для оцінки $\widetilde{R}_{21}$ використаємо (42) та означення функції $H(t)$:

$$\widetilde{R}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{|\theta_1(t) - \theta_1(\tau) - \theta_2(t) + \theta_2(\tau)|(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))}{\sqrt{(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}(\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)} + \sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)})} d\tau \leq$$
$$\leq \frac{\sqrt{\beta+1}(1+q)^3 \widetilde{a}_{\max}(t)}{2\sqrt{\pi} H^3_{\min}(t)} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau \leq \frac{(1+q)^3 \mu_3(t) \widetilde{a}_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t) t^\beta}.$$

Отже, маємо таку оцінку

$$|v_0(0,t)| \leq \frac{(1+q)^3 \mu_3(t) \widetilde{a}_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t) t^\beta} + C_{70} \widetilde{a}_{\max}(t). \tag{48}$$

Підставляючи (48) у (39) та враховуючи (47), отримуємо

$$|v(0,t)| \leq \frac{(1+q)^3 \mu_3(t) \widetilde{a}_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t) t^\beta} + C_{71} \widetilde{a}_{\max}(t) + C_{72} \widetilde{a}_{\max}(t) \frac{\psi_1(t) + \psi_2(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}. \tag{49}$$

Використовуючи (24) та (49), з рівняння (40) знаходимо

$$|a_0(t)| \leq \frac{H^4_{\max}(t)}{(1-q)^4} \frac{t^\beta}{\mu_3(t)} |v(0,t)| \leq$$
$$\leq \left(\frac{(1+q)^3 H^4_{\max}(t)}{2(1-q)^4 H^4_{\min}(t)} + C_{73} t^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{74}(\psi_1(t) + \psi_2(t)) \right) \widetilde{a}_{\max}(t)$$

або

$$\widetilde{a}_{\max}(t) \leq \left(\frac{(1+q)^4 H^4_{\max}(t)}{2(1-q)^4 H^4_{\min}(t)} + C_{73} t^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{74}(\psi_1(t) + \psi_2(t)) \right) \widetilde{a}_{\max}(t). \tag{50}$$

З того, що $\lim\limits_{t\to+0} H_{\max}(t) = \lim\limits_{t\to+0} H_{\min}(t)$, випливає, що для заданого $q, 0 < q < 1$, існує таке число t^*, $0 < t^* \leq T$, що $\dfrac{H^4_{\max}(t)}{H^4_{\min}(t)} \leq 1+q$, $C_{73} t^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{74}(\psi_1(t) + \psi_2(t)) \leq q$, $t \in [0, t^*]$. Зафіксуємо число q так, щоб $0 < q < \dfrac{\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{2}+1}$. Отримаємо

$$\frac{(1+q)^4 H^4_{\max}(t)}{2(1-q)^4 H^4_{\min}(t)} + C_{73} t^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{74}(\psi_1(t) + \psi_2(t)) \leq \frac{(1+q)^4}{2(1-q)^4}(1+q) + q < 1.$$

Тоді з (50) випливає $\widetilde{a}_{\max}(t) \equiv 0$ при $t \in [0, t_0]$, де $t_0 = \min\{t_1, t_2, t^*\}$. Звідси отримуємо $a(t) \equiv 0, t \in [0, t_0]$, $u(x,t) \equiv 0$, $v(x,t) \equiv 0, x \in [0,h], t \in [0, t_0]$. Отже, єдиність розв'язку задачі (1)-(4) встановлено, що завершує доведення теореми.

1. *Ivanchov M., Saldina N.* An inverse problem for strongly degenerate heat equation // J. Inv. Ill-Posed Probl. – 2006. – **14**, №5. – P.1–16.
2. *Іванчов М. І., Салдіна Н. В.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, №11. – С. 1563–1570.
3. *Салдіна Н. В.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип.64. – С.245–257.
4. *Салдіна Н. В.* Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2006. – №288. – С. 99–106.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.
6. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publishers, 2003.

Одержано 15.08.2006