П. В. Слюсарчук, Т. В. Боярищева (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКА БЛИЗЬКОСТІ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

The paper contains the estimates of approximation of distribution of two sums of independent random variables are contained. From this results as a conclusion the rate of convergence to the stable laws of distribution are made.

Робота містить оцінки близькості розподілів двох сум незалежних випадкових величин. З цих результатів можна отримати оцінки швидкості збіжності до стійких законів.

Задача про близькість розподілів двох сум розглядається у працях [2]–[3], причому у [3] досліджується наближення представником із певного класу розподілів. Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в [4]–[5], використовуючи характеристики, введені Золотарьовим у [1].

Нехай $\xi_1,\dots\xi_n,\dots$ і $\eta_1,\dots\eta_n,\dots$ – дві послідовності випадкових величин відповідно з функціями розподілу $F_i(x)$ і $G_i(x)$; характеристичними функціями $f_i(t)$ і $g_i(t)$, $\Phi_n(x)$ і $Q_n(x)$ – відповідно функції розподілу випадкових величин $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ і $\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i$, а $H_i(x)=F_i(x)-G_i(x)$.

Розглянемо наступні умови: існує число $\alpha\in(0,2]$ і стала $\lambda>0$ такі, що

$$\mid g_k(t)\mid\le e^{-\lambda|t|^{\alpha}}; \tag{1}$$

$$\mu_{ik}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k dH_i(x)=0 \quad (i=1,2,\dots,\ k=0,1,m), \tag{2}$$

де $m=\begin{cases}1, & \alpha\le 1,\\ 2, & \alpha>1.\end{cases}$

Введемо псевдомоменти

$$\chi_{i0}^{(1)}(y)=\int\limits_{|x|\le y}\max\left(1,\mid x\mid^{\alpha}\right)\mid H_i(x)\mid dx,\quad \chi_{i0}^{(2)}(y)=\int\limits_{|x|>y}\max\left(1,\mid x\mid^{m-1}\right)\mid H_i(x)\mid dx;$$

$$\chi_0^{(1)}(y)=\max_{1\le i\le n}\chi_{i0}^{(1)}(y),\quad \chi_0^{(2)}(y)=\max_{1\le i\le n}\chi_{i0}^{(2)}(y);$$

$$\nu_{i0}^{(1)}(y)=\int\limits_{|x|\le y}\max\left(1,\mid x\mid^{\alpha+1}\right)\mid H_i(x)\mid dx,\quad \nu_0^{(1)}(y)=\max_{1\le i\le n}\nu_{i0}^{(1)}(y);$$

$$\nu_{i0}^{(2)}(y)=\int\limits_{|x|>y}\max\left(1,\mid x\mid^{m}\right)\mid H_i(x)\mid dx,\quad \nu_0^{(2)}(y)=\max_{1\le i\le n}\nu_{i0}^{(2)}(y).$$

Нехай $\rho_n=\sup\limits_X\mid\Phi_n(x)-Q_n(x)\mid$.

Теорема. *Для всіх натуральних n справедливими є оцінки*:

$$\rho_n\le C^{(1)}\inf_{y>0}\left\{\frac{\chi_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}+\chi_0^{(2)}(y)+\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\max\left(\chi_0(y),(\chi_0(y))^{\frac{n}{n+1}}\right)\right\}, \tag{3}$$

$$\rho_n \le C^{(2)} \inf_{y>0} \left\{ \frac{\nu_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \nu_0^{(2)}(y) \right\}, \tag{4}$$

де $\chi_0(y) = \max\left(\chi_0^{(1)}(y); \chi_0^{(2)}(y)\right)$, $C^{(i)}$ $(j = 1, 2)$ – *сталі, що залежать від* α *і* λ.

Лема 1. *Якщо виконується умова* (2), *то для будь-яких дійсних* t *і* $y > 0$ *виконується нерівність*

$$\omega_i(t) = \mid f_i(t) - g_i(t) \mid \le$$

$$\le \min\left\{ \frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta} \mid t \mid^{\alpha+1} \nu_{i0}^{(1)}(y) + \frac{2}{m!} \mid t \mid^m \nu_{i0}^{(2)}(y), \nu_{i0}^{(1)}(y) + \nu_{i0}^{(2)}(y) \right.,$$

$$\left. \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta} \mid t \mid^\alpha \left(\nu_{i0}^{(1)}(y) + \nu_{i0}^{(2)}(y)\right) \right\},$$

де $\delta = \alpha + 1 - m$.

Доведення. За умовою (2)

$$\omega_j(t) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH_j(x) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ux} - \sum_{k=o}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right) dH_j(x) \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{ux} - \sum_{k=o}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right| \mid dH_j(x) \mid =$$

$$= \int_{|x|\le y} \left| e^{ux} - \sum_{k=o}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right| \mid dH_j(x) \mid + \int_{|x|>y} \left| e^{ux} - \sum_{k=o}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right| \mid dH_j(x) \mid \le$$

$$\le \int_{|x|\le y} \frac{2^{1-\delta} \mid tx \mid^{m+\delta}}{m!(m+1)^\delta} \mid dH_j(x) \mid + \int_{|x|>y} \frac{2 \mid tx \mid^m}{m!} \mid dH_j(x) \mid =$$

$$= \frac{2^{1-\delta} \mid t \mid^{m+\delta}}{m!(m+1)^\delta} \int_{|x|\le y} \mid x \mid^{m+\delta} \mid dH_j(x) \mid + \frac{2 \mid t \mid^m}{m!} \int_{|x|>y} \mid x \mid^m \mid dH_j(x) \mid =$$

$$\frac{2^{1-\delta} \mid t \mid^{\alpha+1}}{m!(m+1)^\delta} \int_{|x|\le y} \mid x \mid^{\alpha+1} \mid dH_j(x) \mid + \frac{2 \mid t \mid^m}{m!} \int_{|x|>y} \mid x \mid^m \mid dH_j(x) \mid \le$$

$$\le \frac{2^{1-\delta} \mid t \mid^{\alpha+1}}{m!(m+1)^\delta} \nu_{j\,0}^{(1)}(y) + \frac{2 \mid x \mid^m}{m!} \nu_{j\,0}^{(2)}(y).$$

$$\omega_j(t) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH_j(x) \right| \le \nu_{j\,0}^{(1)}(y) + \nu_{j\,0}^{(2)}(y),$$

$$\omega_j(t) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - \sum_{k=o}^{m-1} \frac{(itx)^k}{k!} \right) dH_j(x) \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{1-\delta} |tx|^{m-1+\delta}}{(m-1)! m^\delta} \mid dH_j(x) \mid \le$$

$$\le \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta} \mid t \mid^\alpha \left(\nu_{j\,0}^{(1)}(y) + \nu_{j\,0}^{(2)}(y) \right).$$

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай*

$$0 < c < \min\left\{ \lambda^2 e^{2(\alpha-m-2)}; \frac{\lambda m}{4} e^{-\lambda} \right\}; \; y > 0, \; \nu_0(y) = \max\left(\nu_0^{(1)}(y), \nu_0^{(2)}(y)\right),$$

виконуються умови (1) *і* (2), *а також* $\nu_0^{(2)}(y) \le c$. *Тоді при* $\nu_0(y) \le c$ *і* $| t | \le T_1 = \left(-\frac{1}{\lambda}\ln \nu_0(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ *виконується нерівність*

$$|f_i(t)| \le e^{-|t|^\alpha c_1}, \tag{5}$$

де $c_1 = \frac{\lambda}{2} - \sqrt{c}\,\frac{2^{1+m-\alpha}}{m^{\alpha+1-m}} > 0$.

Якщо $\nu_0(y) \le c$ *і* $| t | > T_1$, *то*

$$|f_i(t)| \le 3\nu_0(y). \tag{6}$$

Якщо $\nu_0(y) > c$ *і* $| t | \le T_2 = \frac{c}{\nu_0^{(1)}(y)}$, *тоді виконується нерівність*

$$|f_i(t)| \le e^{-|t|^\alpha c_2}, \tag{7}$$

де $c_2 = \lambda - e^{\lambda}\frac{4}{m}c > 0$.

Доведення. Розглянемо випадок $\nu_0(y) \le c$ і $| t | \le T_1$. Тоді із леми 1 ($\delta = \alpha+1-m$):

$$|f_i(t)| \le g_i(t) + \omega_i(t) \le e^{-\lambda|t|^\alpha} + \omega_i(t) = e^{-\frac{\lambda|t|^\alpha}{2}}\left(e^{-\frac{\lambda|t|^\alpha}{2}} + e^{\frac{\lambda|t|^\alpha}{2}}\omega_i(t)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{\lambda|t|^\alpha}{2}}\left(1 + e^{\frac{\lambda|t|^\alpha}{2}}\,\frac{2^{1-\delta}|t|^\alpha}{m^\delta}\left(\nu_{i0}^{(1)}(y) + \nu_{i0}^{(2)}(y)\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{\lambda|t|^\alpha}{2}}\left(1 + e^{\frac{\lambda}{2}T_1^\alpha}\nu_0(y)\frac{2^{2-\delta}}{m^\delta}\right) \le e^{-\frac{\lambda|t|^\alpha}{2}}\left(1 + \sqrt{c}\frac{2^{2-\delta}}{m^\delta}\right) \le e^{-|t|^\alpha c_1}.$$

Нехай $\nu_0(y) \le c$ і $| t | > T_1$. Тоді із леми 1

$$|f_i(t)| \le e^{-\lambda|t|^\alpha} + \omega_i(t) \le e^{-\lambda|t^\alpha|} + \nu_{i0}^{(1)}(y) + \nu_{i0}^{(2)}(y) \le 3\nu_0(y).$$

Нехай $\nu_0(y) > c$, $\nu_0^{(2)}(y) \le c$ і $| t | \le T_2$. Тоді із леми 1 (враховуючи, що $T_2 \le 1$)

$$|f_i(t)| \le e^{-\lambda|t|^\alpha} + \omega_i(t) = e^{-\lambda|t|^\alpha}\left(1 + e^{\lambda|t^\alpha|}\omega_i(t)\right) \le$$

$$\le e^{-\lambda|t|^\alpha}\left(1 + e^{\lambda T_2^\alpha}\,| t |^\alpha\left(\frac{2^{1-\delta}|t|}{m!(m!+1)^\delta}\,\nu_{i0}^{(1)}(y) + \frac{2|t|^{m-\alpha}}{m!}\,\nu_{i0}^{(2)}(y)\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\lambda|t|^\alpha}\left(1 + e^{\lambda}\,| t |^\alpha\left(\frac{2^{1-\delta}|t|}{m!(m!+1)^\delta}\,\frac{c}{\nu_0^{(1)}(y)}\,\nu_0^{(1)}(y) + \frac{2|t|^{m-\alpha}}{m!}\,c\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\lambda|t|^\alpha}\left(1 + e^{\lambda}\,| t |^\alpha\,\frac{4}{m!}\,c\right) \le e^{-|t|^\alpha c_2}.$$

Лему доведено.

Доведення теореми. Нехай $y > 0$ і виконується умова $\nu_0^{(2)}(y) \le c$, де стала c визначена у лемі 2. Оскільки у випадку $\nu_0^{(2)}(y) > c$ $\rho_n \le \frac{\nu_0^{(2)}(y)}{c}$ і теорема стає очевидною.

Нехай $j = \begin{cases} 1, & \text{при } \nu_0(y) \le c, \\ 2, & \text{при } \nu_0(y) > c, \end{cases}$ тоді при $| t | \le T_j$ і $\nu_0^{(2)}(y) \le c$ із лем 1 і 2 одержимо

$$\left|\prod_{i=1}^n f_j(t) - \prod_{i=1}^n g_j(t)\right| \le \sum_{i=1}^n\left(\frac{2^{1-\delta}|t|^{\alpha+1}}{m!(m!+1)^\delta}\nu_{i0}^{(1)}(y) + \frac{2}{m!}\,|t|^m\,\nu_{i0}^{(2)}(y)\right)\,e^{-\lambda|t|^\alpha(i-1)}e^{-c_j|t|^\alpha(n-1)} \le$$

$$\le\left(\frac{2^{1-\delta}\,| t |^{\alpha+1}}{m!(m!+1)^\delta}\nu_0^{(1)}(y) + \frac{2}{m!}\,| t |^m\,\nu_0^{(2)}(y)\right)\,ne^{-c_j|t|^\alpha(n-1)}. \tag{8}$$

Із виконання умови (1) випливає, що

$$|Q_n'(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \prod_{i=1}^{n} g_i(t) dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda n|t|^\alpha} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\pi\alpha(\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

тому ([6], стор. 299) $\forall X$:

$$\rho_n \le \frac{2}{\pi} \int\limits_0^X \left| \prod_{i=1}^n f_j(t) - \prod_{i=1}^n g_j(t) \right| \frac{dt}{t} + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi^2 \alpha (\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}} X}. \tag{9}$$

Розглянемо спочатку випадок $\nu_0(y) > c$. У цьому випадку у (9) покладемо $X = T_2$. Тоді для інтеграла в (9) із (8) при $n > 1$ одержимо

$$I = \int\limits_0^{T_2} \left| \prod_{i=1}^n f_j(t) - \prod_{i=1}^n g_j(t) \right| \frac{dt}{t} \le \int\limits_0^{T_2} 2n \left(t^{\alpha+1} \nu_0^{(1)}(y) + t^m \nu_0^{(2)}(y) \right) e^{-t^\alpha c_2 (n-1)} \frac{dt}{t} \le$$

$$\le \frac{2n\nu_0^{(1)}(y)}{(c_2(n-1))^{1+\frac{1}{\alpha}}\alpha} \int\limits_0^\infty z^{\frac{1}{\alpha}} e^{-z} dz + \frac{2n\nu_0^{(2)}(y)}{(c_2(n-1))^{\frac{m}{\alpha}}\alpha} \int\limits_0^\infty z^{\frac{m}{\alpha}-1} e^{-z} dz \le$$

$$\le \nu_0^{(1)}(y) \frac{C_1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \nu_0^{(2)}(y) \frac{C_2}{n^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}. \tag{10}$$

Із (9), (10) і визначення $X = T_2$ при $n > 1$

$$\rho_n \le \frac{2}{\pi} \left(\nu_0^{(1)}(y) \frac{C_1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \nu_0^{(2)}(y) C_2 \right) + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \nu_0(y)}{\pi^2 (\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}} c},$$

а якщо врахувати, що в розглядуваному випадку $\rho_1 < \frac{\nu_0(y)}{c}$, то одержимо справедливість (4).

Нехай $\nu_0^{(1)} \le c$. Покладемо в (9) $X = c(\nu_0(y))^{-1}$. Визначимо $X_1 = \min(X, T_1)$. Тоді для інтеграла в (9) одержимо

$$I = \int\limits_0^X \left| \prod_{k=1}^n f_k(t) - \prod_{k=1}^n g_k(t) \right| \frac{dt}{t} \le$$

$$\le \int\limits_0^{X_1} \left| \prod_{k=1}^n f_k(t) - \prod_{k=1}^n g_k(t) \right| \frac{dt}{t} + \int\limits_{X_1}^X \prod_{k=1}^n |f_k(t)| \frac{dt}{t} + \int\limits_{X_1}^X \prod_{k=1}^n |g_k(t)| \frac{dt}{t} = L_1 + L_2 + L_3. \tag{11}$$

Оскільки $X_1 \le T_1$, то із (8), аналогічно до (10), при $n > 1$

$$L_1 \le \nu_0^{(1)}(y) \frac{C_1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \nu_0^{(2)}(y) \frac{C_2}{n^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}. \tag{12}$$

Будемо вважати, що $X_1 = T_1$, бо у випадку $X_1 = X$ $L_2 = L_3 = 0$. Враховуючи нерівність () і умову $T_1 \le 1$ оцінимо інтеграл L_3:

$$L_3 = \int\limits_{X_1}^X \prod_{k=1}^n |g_k(t)| \frac{dt}{t} \le \int\limits_{T_1} X e^{-\lambda t^\alpha n} t^{-1} dt \le \frac{1}{\alpha} \int\limits_{T_1^\alpha \lambda n}^{+\infty} z^{-1} e^{-z} dz \le \frac{e^{-T_1^\alpha \lambda n}}{\alpha T_1^\alpha \lambda n} \le \frac{\nu_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} C_5. \tag{13}$$

Оцінимо інтеграл L_2. Із (8) одержуємо:

$$L_2 = \int\limits_{X_1}^{X} \left| \prod_{k=1}^{n} f_k(t) \right| \frac{dt}{t} \leq \int\limits_{X_1}^{X} \left(5\nu_0(y) \mid t \mid^{\alpha+1}\right)^n t^{-1} dt \leq (5\nu_0(y))^n \int\limits_{T_1} X t^{(\alpha+1)n-1} dt \leq$$

$$\leq (5\nu_0(y))^n \frac{X^{(\alpha+1)n}}{(\alpha+1)n} = \frac{(\nu_0(y))^{n-(\alpha+1)n}}{(\alpha+1)n} \left(5c^{\alpha+1}\right)^n \leq \frac{(\nu_0(y))^{-n\alpha}}{(\alpha+1)n} \left(5c^{\alpha+1}\right).$$

Оскільки за лемою 2 $c < e^{-\frac{\alpha}{2}}$, то $5c^{\alpha+1} < 1$. Тому

$$L_2 \leq \frac{\left(\nu_0^{(1)}(y)\right)^{-1}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} C_6. \tag{14}$$

Із (13), (14)

$$L_2 + L_3 \leq C_7 n^{-\frac{1}{\alpha}} \max\left(\nu_0^{(1)}(y), \nu_0^{(1)}(y)^{-1}\right). \tag{15}$$

Із леми 1 і (9) одержуємо:

$$\rho_1 \leq \tfrac{2}{\pi} \int\limits_0^X |f_1(t) - g_1(t)| \tfrac{dt}{t} + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{X\pi^2\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} \leq$$

$$\leq \tfrac{2}{\pi} \int\limits_0^X \left(\tfrac{2^{m-\alpha}}{m^{\alpha+1-m}} t^{\alpha+1} \nu_{01}^{(1)}(y) + 2t^m \nu_{01}^{(2)}(y)\right) \tfrac{dt}{t} + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{X\pi^2\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} \leq$$

$$\leq \tfrac{2}{\pi} \left(\tfrac{2^{m-\alpha}}{m^{\alpha+1-m}} t^{\alpha+1} \nu_{01}^{(1)}(y) \tfrac{1}{\alpha+1} X^{\alpha+1} + \tfrac{2}{m} \nu_{01}^{(2)} X^m\right) + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\nu_{01}(y)}{\pi^2\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} \leq$$

$$\leq C_8 \left(\nu_{01}^{(1)}(y) + \nu_{01}^{(1)}(y)\right). \tag{16}$$

Із визначення X, нерівності (9) і нерівності (11)–(16) одержуємо справедливість нерівності (4).

Доведення нерівності (3) повністю аналогічне до вищенаведеного. Лише при її доведенні покладаємо $X = c\left(\chi_0(y)\right)^{\frac{n}{n+1}}$.

1. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
2. *Золотарев В. М.* О близости распределений двух сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – Т. 10, вып. 3. – С. 519–526.
3. *Нагаев С. В.* Оценка погрешности приближения устойчивыми законами // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1997. – Вип. 56. – С. 145–160.
4. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка близькості розподілів двох сум для різно розподілених випадкових величин // Науковий вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – Ужгород, 2001. – Вип. 6 – С. 4–8.
5. *Боярищева Т. В.* Наближення розподілів сум випадкових величин // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – Київ, 2003. – Вип. 4. – С. 26–30.
6. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 03.09.2006