Н. В. Юрченко (Ужгородський нац. ун-т)

СИЛОВСЬКІ p-ПІДГРУПИ ПОВНОЇ ЛІНІЙНОЇ ГРУПИ НАД КІЛЬЦЕМ ВСІХ ЦІЛИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЧИСЕЛ

Let R be a ring of all algebraic integers. It is have been proved that there are exists infinity many pairwise nonisomorphic Sylow p-subgroups of the general linear group $GL(n,R)(n>1)$.

Доводиться, що в повній лінійній групі $GL(n,R)(n>1)$ над кільцем R всіх цілих алгебраїчних чисел, існує нескінченно багато попарно неізоморфних силовських p-підгруп.

Нехай $GL(n,K)$ — повна лінійна група над комутативним кільцем K з одиницею і p — довільне просте число. Якщо $K=T$ — поле, то силовські p-підгрупи групи $GL(n,T)$ описані в роботах Д. О. Супруненка, Р. Т. Вольвачова, В. С. Конюха, В. М. Петечука та ін. [1–5]. Як правило силовські p-підгрупи групи $GL(n,T)$ спряжені в цій групі. Виключення можливі лише у випадку $p=2$ для деяких полів T характеристики нуль. Якщо K — довільне кільце, то задача про спряженість, а також задача про ізоморфізм силовських p-підгруп групи $GL(n,K)$ далекі до повного розв'язання. Якщо $K=\mathbf{Z}$ — кільце цілих раціональних чисел, то задачу про спряженість силовських p-підгруп групи $GL(n,\mathbf{Z})$ розв'язав П. М. Гудивок [6]. Задача про ізоморфізм силовських p-підгруп в групі $GL(n,\mathbf{Z})$ розв'язана в роботі [7]. Ряд цікавих рузультатів про силовські підгрупи в повних лінійних групах над кільцями одержано в роботах [8–16]. Для K — кільця головних ідеалів характеристики нуль в роботі [15] розв'язана задача про спряженість силовських p-підгруп групи $GL(n,K)$. В цій роботі розглядалась також задача про ізоморфізм цих підгруп. В [17] для деяких кілець K в групі $GL(n,K)$ побудовано приклади силовських p-підгруп як незвідних неабелевих так і звідних абелевих.

Нехай далі R — кільце всіх цілих алгебраїчних чисел. В даній роботі доводиться наступний результат.

Теорема 1. *В групі $GL(n,R)(n>1)$ існує нескінченно багато попарно неізоморфних силовських p-підгруп.*

Доведення опирається на ряд допоміжних результатів.

Нехай T — поле всіх алгебраїчних чисел, $\mathbf{C}$ — поле комплексних чисел, ξ_n — первісний корінь степеня p^n із одиниці, вибраний так, що $\xi_n^p=\xi_{n-1}\,(n=1,2,\ldots;\xi_0= =1), P_p=\langle\xi_n|n=1,2,\ldots\rangle$ — силовська p-підгрупа мультиплікативних груп R^*, T^*, $\mathbf{C}^*$ кільця R та полів T і $\mathbf{C}$ відповідно. Відмітимо, що P_p є групою типу p^∞. Нехай

$$G_p=P_p\wr C_p$$

— сплетіння групи $P_p\subset GL(1,R)$ і циклічної порядку p групи C_p підстановок степеня p, породженої циклом $\sigma=(1\,2\,\ldots,p)$. Група G_p породжується матрицями

$$diag[\alpha_1,\ldots\alpha_p]\quad(\alpha_j\in P_p,\,j=1,\ldots,p)$$

і матрицею b підстановки σ. Відмітимо, що група G_p є напівпрямий добуток нормальної абелевої підгрупи, що є прямим добутком p екземплярів групи p^∞, та циклічної групи порядку p. Окрім цього, група G_p буде незвідною силовською p-підгрупою груп $GL(p,R)$, $GL(p,T)$, $GL(p,\mathbf{C})$. Введемо індуктивно групи $W_j(G_p)$:

$$W_0(P_p)=P_p,\quad W_1(P_p)=W_0(P_p)\wr C_p,\quad W_j(P_p)=W_{j-1}(P_p)\wr C_p\quad(j=1,2,\ldots).$$

Теорема 2 ([18]). *Нехай*

$$n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_s p^s$$

— p-ічний розклад натурального числа n. Будь-яка силовська p-підгрупа в групі $GL(n, T)$ (і в групі $GL(n, \boldsymbol{C})$) буде спряжена з прямим добутком

$$W_0(P_p)^{n_0} \times W_1(P_p)^{n_1} \times \times W_s(P_p)^{n_s}.$$

(Нагадаємо, прямий добуток $G \times H$ матричних груп G, H є групою всіх матриць виду $diag[g, h]$ $(g \in G,\, h \in H)$, $G^m = G^{m-1} \times G$, $G^0 \times H = H$, $G \times H^0 = G$).

Відмітимо, що p-підгрупи матричних груп над полями характеристики нуль будуть черніковськими групами.

Лема 1. *Нехай p-група G має таку абелеву нормальну підгрупу A, яка є прямим добутком скінченного числа груп типу p^∞ і скінченної групи, що факторгрупа G/A є скінченною групою. Тоді будь-яка власна підгрупа H групи G буде нормальною індекса p підгрупою в деякій підгрупі H_1 групи G.*

Доведення. Лема є частинним випадком однієї з теорем Чернікова про гіперцентральні p-групи. Дамо незалежне доведення. Нехай $A_1 = H \cap A$ і $\overline{H} = H/A_1$. Тоді $\overline{H} \cong (HA)/A$ — підгрупа скінченної групи $\overline{G} = G/A$. Група $\overline{G}$ (і група $\overline{H}$) діють в групі A:

$$\bar{g}(x) = g^{-1} x g \quad (g \in G, \bar{g} = gA,\, x \in A).$$

Окрім цього, група $\overline{H}$ діє в підгрупі A_1 групи A і ця дія індукується дією $\overline{H}$ в A:

$$\bar{g}(x) = g^{-1} x g \quad (g \in H, \bar{g} = gA_1,\, x \in A_1).$$

Тоді група $\overline{H}$ діє в факторгрупі $\overline{A} = A/A_1$. Нехай F — підгрупа елементів порядку p в групі $\overline{A}$. Тоді F — скінченновимірний лінійний простір над полем Z_p з P елементів і група F є інваріантною відносно групи $\overline{H}$, тобто простір F є модулем модулярного зображення скінченної p-групи $\overline{H}$. В такому просторі існує ненульовий вектор $\bar{a} = aA_1$ (a — деякий елемент з A, такий, що $a^p \in A_1$), нерухомий відносно групи $\overline{H}$: $\bar{g}(\bar{a}) = \bar{a}$ $(g \in H)$. Тоді для кожного елемента $g \in H$ комутатор $[g, a]$ буде міститись в групі A_1. Це значить, що група H є інваріантною індекса p підгрупою в підгрупі $H_1 = \langle H, a\rangle$ групи G.

Нехай $A_1 = A$. Тоді за a потрібно взяти такий елемент з групи G, що суміжний клас aA буде елементом порядку p в центрі факторгрупи G/A. Лема доведена.

Введемо в розгляд деякі підгрупи групи G_p. Нехай

$$A_n = \langle \eta E,\, d_j = diag[1, \ldots, 1, \xi_n, 1, \ldots, 1] | \eta \in P_p; j = 1, \ldots, p-1\rangle,$$

де E — одиниця групи $GL(p, R)$, в d_j корінь ξ_n знаходиться на j-му місті діагоналі. Нехай

$$H_n = \langle A_n,\, b\rangle.$$

Неважко бачити, що

$$Z(H_n) = \langle \eta E\rangle$$

— центр групи H_n є групою типу p^∞. Факторгрупа $H_n/Z(H_n)$ є розширення абелевої групи

$$\overline{A_n} = \langle \bar{d_j} = d_j Z(H_n) | j = 1, \ldots, p-1\rangle$$

типу $(p^n, \ldots, p^n)$ $(p-1$ раз) за допомогою циклічної групи $\langle \bar{b} = bZ(H_n) \rangle$ порядку p і з співвідношеннями:

$$\bar{b}^{-1}\bar{d}_j\bar{b} = \bar{d}_{j-1} \quad (j > 1),\, \bar{b}^{-1}\bar{d}_1\bar{b} = \bar{d}_1^{-1} \cdots \bar{d}_{p-1}^{-1}.$$

Група $H_n/Z(H_n)$ має порядок

$$|H_n/Z(H_n)| = p^{(p-1)n+1}.$$

Якщо $n \neq n'$, то групи H_n і $H_{n'}$ не ізоморфні.

Нехай

$$\pi_n = \xi_n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Лема 2. *$\pi_t \pi_n^{-1} \in R$ тоді і тільки тоді, коли $n \geq t$. Нехай $\eta \in P_p$ і $s > 1$. Тоді $(\eta - 1)\,\pi_n^s \in R$ в тому і тільки в тому випадку, коли $\eta \in \langle \xi_{n-1} \rangle$.*

Доведення леми очевидне.

Нехай L — RG_p-модуль з R-базисом $\{e_1, \ldots, e_p\}$ буде таким, що для кожного лінійного оператора $g \in G_p$ його матриця у вказаному базисі співпадає з матрицею g. Нехай в позначеннях леми 2

$$M_n = \langle u_1 = \pi_n e_1, u_2 = e_2 - e_1, \ldots, u_p = e_p - e_{p-1} \rangle$$

— вільний над кільцем R підмодуль в L з вказаним R-базисом $u_1, \ldots, u_p$.

Лема 3. *Модуль M_n буде RH_n-підмодулем в L. Група H_n буде максимальною з усіх таких підгруп H групи G, що $HM_n = M_n$ і $H \supseteq H_n$.*

Доведення. Неважко бачити, що модуль M_n містить $\pi_n L$. Всі елементи виду $e_j - -e_i$ містяться в M_n. Звідси випливає, що $bM_n = M_n$. Нехай $g = diag[\xi_n^{t_1}, \ldots, \xi_n^{t_p}]$ $(t_1, \ldots, t_p-$ цілі числа). Тоді

$$g(e_i - e_j) = \xi_n^{t_i} e_i - \xi_n^{t_j} e_j = (\xi_n^{t_i} - 1)e_i - (\xi_n^{t_j} - 1)e_j + (e_i - e_j) \in M_n,$$

тобто M_n буде RH_n-модулем.

Нехай a — такий елемент групи G_p, що a не міститься в H_n але $a^p \in H_n$ і $aM_n = M_n$. Можна обмежитись випадком, коли a — діагональна матриця. Тоді a не буде матрицею виду g, тобто серед діагональних елементів матриці $a = (\alpha_{ij})$ будуть міститись твірні елементи групи $\langle \xi_{n+1} \rangle$ і ця група містить всі діагональні елементи матриці a, тобто

$$a = diag[\xi_{n+1}^{s_1}, \ldots, \xi_{n+1}^{s_p}]; \quad s_1, \ldots, s_p$$

— цілі числа. Нехай, наприклад, s_1 не ділиться на p. Якщо для всіх s_j

$$s_j - s_1 \equiv 0 (mod p),$$

то $a \in H_n$. Нехай, наприклад, $s_2 - s_1$ не ділиться на p. Тоді

$$au_2 = \xi_{n+1}^{s_2} e_2 - \xi_{n+1}^{s_1} e_1 = \xi_{n+1}^{s_2}(e_2 - e_1) + (\xi_{n+1}^{s_2} - \xi_{n+1}^{s_1})e_1.$$

В силу обмежень на s_1, s_2 маємо

$$\xi_{n+1}^{s_2} - \xi_{n+1}^{s_1} = \pi_{n+1}\theta,$$

де θ — деякий оборотний елемент кільця R. Звідси випливає, що коли $au_2 \in M_n$, то

$$\frac{\pi_{n+1}}{\pi_n} u_1 = \pi_{n+1} e_1 \in M_n,$$

що неможливо, так як π_n не ділить π_{n+1} в кільці R. Отже, елемента a з вказаними властивостями не існує. Лема доведена.

Лема 4. *Нехай $n \geq 2$. Другий центр $Z^2(H_n)$ групи H_n породжується центром $Z(H_n)$ цієї групи і матрицею $a = diag[1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}]$ ($\varepsilon = \xi_1$ — корінь степеня p із одиниці.*

Доведення. З визначальних співвідношень в факторгрупі $H_n/Z(H_n)$ випливає, що центр $Z(H_n/Z(H_n))$ цієї групи породжується елементом $\bar{a} = aZ(H_n)$. Звідси випливає доведення леми. Відмітимо, що $a^p = E$, $b^{-1}ab = a(\varepsilon E)$.

Лема 5. *Нехай x — такий елемент групи $GL(p, T)$, що*

$$x^p \in H_n, \quad x^{-1}H_n x = H_n.$$

Тоді $x \in G_p$.

Доведення. Так як $Z^2(H_n)$ — характеристична підгрупа в H_n, то $x^{-1}ax \in Z^2(H_n)$, а оскільки група порядку p не має автоморфізмів порядку p, то

$$x^{-1}ax = \alpha\, a\, (\alpha \in P_p).$$

Порівнявши сліди матриць, отримаємо, що α — корінь степеня p із одиниці. Тоді для деякого степеня b^j елемент xb^j буде комутувати з a, а звідси випливає, що xb^j — діагональна матриця. А так як xb^j є p-елементом, то $xb^j \in G_p$ і тоді $x \in G_p$. Лема доведена.

Нехай T_n — матриця переходу від R-базису $e_1, \ldots, e_p$ в R-модулі L до R-базису $u_1, \ldots, u_p$ в R-підмодулі M_n цього модуля:

$$T_n = \begin{pmatrix} \pi_n & -1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$V_n = T_n^{-1} H_n T_n \, (n = 2, 3, \ldots).$$

З леми 3 випливає, що кожна з груп V_n належить групі $GL(p, R)$. Група V_n є незвідною p-підгрупою в $GL(p, R)$, ізоморфною групі H_n. Якщо $n \neq n'$, то групи V_n і $V_{n'}$ не ізоморфні.

Теорема 3. *Групи V_n ($n = 2, 3, \ldots$) утворюють нескінченну серію попарно неізоморфних незвідних силовських p-підгруп в групі $GL(p, R)$.*

Доведення. Нехай для деякого n група V_n не буде силовською p-підгрупою групи $GL(p, R)$. З леми 1 випливає, що група V_n буде нормальною індекса p підгрупою в деякій підгрупі $U = \langle V_n, y \rangle$, де

$$y \in GL(p, R), \quad y^p \in V_n, y^{-1}V_n y = V_n.$$

Нехай $x = T_n^{-1} y T_n$. Тоді $x^p \in H_n$, $x^{-1}H_n x \in H_n$. З леми 5 випливає, що $x \in G_p$. Так як $y \in GL(p, R)$, то $yL = L$. Нехай $\tau : L \to M_n$ є тим ізоморфізмом R-модулів, при якому $\tau(e_j) = u_j \quad (j = 1, \ldots, p)$. Тоді

$$xM_n = \tau y \tau^{-1}(\tau L) = \tau y L = \tau L = M_n.$$

З леми 3 випливає, що $x \in H_n$ і тоді $y \in V_n$, тобто групи U не існує. Теорема доведена.

Лема 6. *Нехай H — така незвідна силовська p-підгрупа в групі $GL(m,R)$, яка містить всі скалярні матриці $\eta E\,(\eta \in P_p)$. Тоді сплетіння $G = H \wr C_p$ групи H з циклічною порядку p групою підстановок C_p буде незвідною силовською p-підгрупою групи $GL(mp,R)$.*

Доведення. Група G містить прямий добуток $H^p\,p$ екземплярів групи H. На компоненти цього добутку транзитивно діє група C_p. Звідси випливає, що група G буде незвідною підгрупою групи $GL(mp,R)$. Центр $Z(G)$ групи G співпадає з групою скалярних матриць, діагональні елементи яких належать групі P_p. Нехай

$$a_j = diag[E, \ldots, \varepsilon E, \ldots, E],$$

де εE займає j-те місце серед p діагональних блоків. Нехай $g \in Z^2(G)$. Розглянувши комутатори $[a_j, g]$, неважко впевнитись в тому, що другий центр $Z^2(G)$ групи G породжується $Z(G)$ і матрицею $a = diag[E, \varepsilon E, \ldots, \varepsilon^{p-1}E]$. Припустимо, що група G не буде силовською p-підгрупою групи $GL(mp,R)$. Тоді група G буде нормальною індекса p підгрупою в деякій p-підгрупі G_1. Легко бачити, що $Z(G_1) = Z(G)$. Нехай $x \in Z^2(G_1)$. Розгянувши комутатори $[a_j, x]$, переконуємось в тому, що $x = diag[x_1, \ldots, x_p]$, де x_j — p-елемент групи $GL(m,R)$ для всіх j. Так як $x^{-1}Gx = G$, то $x_j^{-1}Hx_j = H$. Тоді $\langle H, x_j\rangle = H$ (H — силовська підгрупа). Це значить, що $x \in G$ і тоді $Z(G_1) = Z(G)$. Нехай $X = (x_{ij}) \in G_1\,(x_{ij}$ — матриці порядку m над кільцем $R)$. З рівності $Xa = \eta\, aX$, де $\eta\langle\varepsilon\rangle$ випливають наступні рівняння

$$(\varepsilon^{i-1} - \eta\varepsilon^{j-1})x_{ij} = 0 \quad (1 \le i, j \le p)$$

для матриць x_{ij}. Для кожного символа i існує тільки один символ j, такий, що

$$\varepsilon^{i-1} - \eta\varepsilon^{j-1} = 0.$$

Це означає існування такої, залежної від X, підстановки ρ степеня p, що матриця X буде добутком матриці цієї підстановки та матриці $diag[x_{1\rho(1)}, \ldots, x_{p\rho(p)}]$. Поставивши у відповідність кожній матриці X підстановку ρ, ми одержимо гомоморфізм p-групи G_1 в групу $C_p = \langle \sigma = (12\ldots p)\rangle$ (нагадаємо, що матриця підстановки σ належить групі $G = H \wr C_p \subset G_1$). Звідси випливає, що кожна підстановка ρ буде степенем підстановки σ, і, в силу цього, матриця $diag[x_{1\rho(1)}, \ldots, x_{p\rho(p)}]$ буде належати групі G_1. Так як $\langle H, x_{j\rho(j)}\rangle$ — p-група і H — силовська група, то $z_{j\rho(j)} \in H$. Тоді $X \in G$, і, отже $G_1 = G$. Лема доведена.

Теорема 4. *Нехай*

$$W_0(V_n) = V_n,\; W_j = W_{j-1}(V_n) \wr C_p\,(j > 1).$$

Тоді групи

$$W_j(V_n) \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

утворюють нескінченну серію попарно неізоморфних незвідних силовських p-підгруп в групі $GL(p^{j+1},R)\,(j \ge 0)$.

Теорема 4 є наслідком леми 6 і теореми 3.

Лема 7. *Нехай група H задовільняє умовам леми 6 і $1 \le t < p$. Тоді прямий добуток $H^t = H \times \cdots \times H$ буде силовською p-підгрупою групи $GL(tm,R)$.*

Доведення. Нехай це не так. Тоді група H^t буде нормальною підгрупою індекса p в деякій p-підгрупі $U = \langle H^t, x\rangle$, де x — деякий p-елемент з групи $GL(tm, R)$. Центр $Z(H^t)$ групи H^t співпадає з прямим добутком $(Z(H))^t$. Нехай c_j — такий елемент з $(Z(H))^t$, що j-та компонента цього елемента рівна εE, а всі інші компоненти рівні E. Тоді $x^{-1}a_jx = a_{\delta(j)}$, де δ — деяка підстановка степеня t. Але x — p-елемент, тому δ — p-елемент. Отже, δ — одинична підстановка (нагадаємо, що $t < p$). Таким чином, матриця x комутує з кожним елементом c_j. Це можливо лише тоді, коли $x \in H^t$. Лема доведена.

Будь-яка p-підгрупа V групи $GL(n, R)$ є спряжена в групі $GL(n, T)$ з підпрямим добутком деяких незвідних p-підгруп групи $GL(n, T)$, які будемо називати незвідними компонентами групи V.

Лема 8. *Нехай G_1 і G_2 такі силовські p-підгрупи в групах $GL(n_1, R)$ і $GL(n_2, R)$ відповідно, що жодна незвідна компонента групи G_1 не спряжена з деякою незвідною компонентою групи G_2. Тоді прямий добуток $G = G_1 \times G_2$ буде силовською p-підгрупою в групі $GL(n_1 + n_2, R)$.*

Доведення. З групою G пов'язано наступні три її зображення над полем T:

$$\Gamma : G \to GL(n_1 + n_2, T),\ \Gamma(g) = g;$$

$$\Gamma_1 : G \to GL(n_1, T),\ \Gamma_1(g) = g_1;$$

$$\Gamma_2 : G \to GL(n_2, T),\ \Gamma_2(g) = g_2,$$

де $g = (g_1, g_2)$, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$. Очевидно, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Нехай S — така матриця з групи $GL(n_1 + n_2, R)$, що $S^{-1}GS = G$, тобто для деякого автоморфізму φ групи G:

$$S^{-1}\Gamma(g)S = (\Gamma\varphi)(g) \quad (g \in G).$$

З умови леми випливає, що матриця U така, що

$$\Gamma_1(g)U = U(\Gamma_2\varphi)(g) \quad (g \in G)$$

або

$$\Gamma_2(g)U = U(\Gamma_1\varphi)(g) \quad (g \in G)$$

може бути лише нульовою (лема Шура для незвідних матричних зображень груп). Отже, $S = diag[S_1, S_2]$, де $S_j \in GL(n_j, R)$. Якщо S — p-елемент, то S_j також p-елемент, $S_j^{-1}G_jS_j = G_j$ і тоді $S_j \in G_j$ $(j = 1, 2)$. Це доводить лему.

Теорема 5. *Нехай*

$$m = m_0 + m_1p + \cdots + m_sp^s$$

— p-ічний розклад натурального числа $m \geq p$. Тоді групи

$$G_m(V_n) = P_p^{m_0} \times W_0(V_n)^{m_1} \times \cdots \times W_{s-1}(V_n)^{m_s} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

утворюють нескінченну серію попарно неізоморфних силовських p-підгруп в групі $GL(m, R)$.

Доведення випливає з теореми 4 і лем 7,8.

Нехай далі $p > 2$. Введемо в розгляд деякі матриці і деякі матричні групи. Нехай $J_s(0)$ — верхньотрикутна клітка Жордана порядку s з нулями по діагоналі,

$$b_s = diag[\varepsilon^{s-1}, \ldots, \varepsilon, 1] + J_s(0) \quad (1 \leq s \leq p),$$

$$b_{st} = \begin{pmatrix} \xi_t & A \\ 0 & b_s \end{pmatrix}, \quad A = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$B_s = \langle b_s,\, \eta E_s | \eta \in P_p \rangle,$$
$$B_{st} = \langle b_{st},\, \eta E_{s+1} | \eta \in P_p \rangle.$$

(E_r — одинична матриця порядку r.) Очевидно, B_s — абелева типу $(p^\infty,\, p)$ p-підгрупа в групі $GL(s, R)$, B_{st} — абелева типу $(p^\infty,\, p^n)$ p-підгрупа в групі $GL(s+1, R)$.

Лема 9. *Нехай $1 \le s \le p$. Група B_s є максимальна абелева p-підгрупа групи $GL(s, R)$.*

Доведення. Лема очевидна для $s = 1$. Нехай лема вірна для групи B_s, доведемо її для групи B_{s+1}. Досить довести, що, якщо X — такий p-елемент групи $GL(s+1, R)$, для якого $Xb_{s+1} = b_{s+1}X$, то $X \in B_s$. Тоді X — верхньотрикутна матриця, діагональні елементи якої належать групі P_p. Для матриці Y неодиничного порядку позначимо через X' матрицю, що одержується з Y відкиданням першого рядка та першого стовпця. Тоді $b'_{s+1} = b_s$ і $X'b_s = b_sX'$. За індуктивним припущенням

$$X' \in B_s = \langle g' | g \in B_{s+1} \rangle.$$

Тоді існує елемент g групи B_{s+1}, такий, що $(Xg)' = E_s$. Це означає, що з самого початку матрицю X можна вибрати у вигляді:

$$X = \begin{pmatrix} \eta & Y \\ 0 & E_s \end{pmatrix}, \quad \eta \in P_p, \quad Y = (y_s, \ldots, y_s) \in R^s.$$

Тоді з рівності $b_{s+1}X = Xb_{s+1}$ отримуємо систему рівняннь

$$Y(d_s - \varepsilon^s E_s) = (\eta - 1, 0, \ldots, 0)$$

для невідомих $y_1, \ldots, y_s$. Ця система має розв'язок над кільцем R тоді і тільки тоді, коли η буде таким елементом групи P_p, що кільцю R буде належати елемент

$$(\eta - 1)(\varepsilon^s - 1)^{-s}.$$

Якщо $s = 1$, то $\eta \in \langle \varepsilon \rangle$ і тоді $X \in B_2$. Нехай $1 < s \le p$. Тоді $\eta = 1$ і $X = E_{s+1}$. В усіх випадках $X \in B_{st}$. Лема доведена.

Теорема 6. *Нехай $1 \le s < p - 1$. Абелеві групи*

$$B_{st} \quad (t = 2, 3, \ldots)$$

утворюють нескінченну серію попарно неізоморфних силовських $p-$підгруп групи $GL(s+1, R)$.

Доведення. Нехай X — такий p-елемент групи $GL(s+1, R)$, що $Xb_{st} = b_{st}X$. Досить довести, що $X \in B_{st}$. Так як $t > 1$, то X — верхньотрикутна матриця, діагональні елементи якої належать групі P_p. Маємо

$$b'_{st} = b_s, \quad X'b_s = b_sX'.$$

Згідно леми 9, $X' \in B_s$. Тоді доведення зведеться до розгляду матриці такої X, як в лемі 9 і до системи рівняннь сумісної над кільцем R тоді і тільки тоді, коли

$$(\eta - 1)(\xi_t - 1)^{-s} \in R.$$

Якщо $s = 1$, то $\eta \in \langle \xi_t \rangle$ і тоді $X \in B_{1,t}$. Нехай $s > 1$. Тоді $\eta \in \langle \xi_{t+1} \rangle$. Тоді $X \in \in \langle b_{st}^p \rangle$. Отже, в усіх випадках $X \in B_{st}$. В результаті доведено, що група B_{st} буде максимальною абелевою підгрупою групи $GL(s+1, R)$. Так як $s+1 < p$, то в групі $GL(s+1, R)$ нема неабелевих p-підгруп. Теорема доведена.

З теорем 5,6, як наслідок, випливає теорема 1, що приведена на початку цієї роботи.

1. *Супруненко Д. А.* Линейные p-группы // Докл. АН БССР. – 1960. – **4**, № 6. – С. 233–235.
2. *Вольвачев Р. Т.* p-подгруппы Силова полной линейной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, № 5. – С. 1031–1054.
3. *Leedham-Green C. R., Plesken W.* Some remarks of Sylow subgroups of general linear groups // Math. Z. – 1986. – **191**. – P. 529–535.
4. *Конюх В. С.* О линейных p-подгруппах // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. наук. – 1987. – № 1. – С. 3–8.
5. *Петечук В. М.* Линейные p-группы над телами // Докл. АН Украины. Сер. мат. Наук. – 1997. – № 11. – С. 21–24.
6. *Гудивок П. М.* О силовских p-подгруппах полной линейной группы над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ. – 1990. – **2**, № 6. – С. 121–128.
7. *Gudivok P. M., Rudko V. P.* On isomorphism of sylow subgroups of the general linear group over the ring of integers // Jornal of Mathematical Sciences. – 2000. – **102**, – № 3. – P. 3998–4008.
8. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* О неприводимых силовских p-подгруппах полной линейной группы над кольцом целых чисел // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1997. – С. 29–37.
9. *Ващук Ф. Г., Гудивок П. М.* Целочисленные p-адические представления конечных абелевых p-групп // Докл. АН УССР. Сер. **А**. – 1986. – № 1. – С. 3–6.
10. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.* Силовские p-подгруппы полной линейной группы над дискретно нормированными кольцами // Докл. АН УССР. Сер. **А**. – 1979. – № 5. – С. 326–329.
11. *Гудивок П. М.* О силовских подгруппах полной линейной группы над полными дискретно нормированными кольцами // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7–8. – С. 918–924.
12. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* О силовских подгруппах полной линейной группы над областями целостности // Доповіді НАН України. – 1995. – № 8. – С. 5–7.
13. *Тилищак О. А.* Про силовські p-підгрупи повної лінійної групи над комутативним локальним кільцем характеристики p^s // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2000. – С. 95–102.
14. *Кирилюк А. А.* Неприводимые силовские p-подгруппы группы $GL(3, R_p)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – С. 49–57.
15. *Гудивок П. М., Рудько В. П., Юрченко Н. В.* Про силовські p-підгрупи повної лінійної групи над областями цілісності // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – С. 31–46.
16. *Юрченко Н. В.* Про силовські 2-підгрупи групи $GL(2, \mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2004. – С. 110–112.
17. Рудько В. П., Юрченко Н. В. Про силовські підгрупи повної лінійної групи над кільцем // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – С. 111–120.
18. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. – М.: Наука, 1972, – 351 с.

Одержано 03.09.2006