УДК 517.9

С. І. Балога (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ДІАГОНАЛІЗАЦІЮ ЗМІННОЇ МАТРИЦІ

In the article variable matrix of reduction on the tore are under the consideration to the diagonal form and problems of reduction to the L-diagonal form for the systems of the differential equations.

В даній статті розглядається зведення змінної матриці, визначеної торі, до діагонального вигляду та зведення систем диференціальних рівнянь до L-діагонального вигляду.

Нехай $A(\varphi)$ неперервна по $\varphi \in T^m$ квадратна $n \times n$ матриця і

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \tag{1}$$

задана на торі T^m динамічна система з гладкою 2π-періодичною функцією $a(\varphi) = col(a_1(\varphi), ..., a_m(\varphi))$, $a_j(\varphi + 2\pi) = a_j(\varphi)$, $j = 1, 2, ..., m$, $\varphi \in T^m$. Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, а через Ω_φ — ω-граничну множину цього розв'язку. Зрозуміло, що $\Omega_\varphi \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in T^m$ в силу компактності фазового простору системи (1). Через Ω позначимо об'єднання ω-граничних множин для всіх $\varphi \in T^m$:

$$\Omega = \bigcup_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi.$$

Лема 1. *Для будь-якого фіксованого околу $U(\Omega)$ множини Ω знайдеться момент часу T такий, що для всіх $t \geq T$ і всіх $\varphi \in T^m$ $\varphi_t(\varphi) \in U(\Omega)$.*

Дійсно, кожна траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ скінченний проміжок часу проводить поза деяким околом своєї ω-граничної множини Ω_φ, а отже і поза деяким околом множини Ω. Тому, зафіксувавши окіл $U(\Omega)$ множини Ω, можемо стверджувати, що для кожної точки $\varphi \in T^m$ існує скінченний момент часу T_φ такий, що $\varphi_t(\varphi) \in U(\Omega)$ для $t > T_\varphi$. Переконаємося, що $\sup\limits_{\varphi \in T^m} T_\varphi$ скінченний. Припустимо, що це не так. Тоді можна вказати послідовність точок $\varphi_j \in T^m$, $j = 1, 2, ...,$ для якої $\lim\limits_{j \to \infty} T_{\varphi_j} = \infty$. В силу компактності T^m можна вважати послідовність φ_j збіжною: $\lim\limits_{j \to \infty} \varphi_j = \varphi^*$, отже момент T_{φ^*} скінченний, що суперечить припущенню.

Теорема 1. *Нехай для квадратної $n \times n$ неперервної матриці $A(\varphi)$, $\varphi \in T^m$ існує рівномірно по $\varphi \in T^m$ границя*

$$\lim_{t \to \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A$$

і власні числа граничної матриці A прості. Тоді в деякому околі $U(\Omega)$ множини Ω існує неперервна, обмежена матриця $T(\varphi)$ з неперервною, обмеженою оберненою матрицею $T^{-1}(\varphi)$, що

$$A(\varphi) = T^{-1}(\varphi) diag(\lambda_1(\varphi), ..., \lambda_n(\varphi)) T(\varphi).$$

Якщо крім того, матриця $A(\varphi)$ неперервно диференційовна по φ і матриця

$$D(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$$

абсолютно інтегровна вздовж будь-якої траєкторії $\varphi_t(\varphi)$, то матриці $T(\varphi)$, $T^{-1}(\varphi)$ неперервно диференційовні по $\varphi \in U(\Omega)$ і матриці

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) \quad i \quad \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial T^{-1}(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$$

абсолютно інтегровні рівномірно по $\varphi \in T^m$ на проміжку $[T, \infty)$.

Доведення. Для матриці $A(\varphi)$ запишемо характеристичне рівняння

$$\Delta(\lambda, \varphi) \equiv det(A(\varphi) - \lambda E) = 0 \tag{2}$$

і позначимо через $\lambda_j = \lambda_j(\varphi), j = 1, 2, ..., n$ корені цього рівняння. Так як власні числа граничної матриці A різні, то і різними будуть корені рівняння (2), якщо тільки $\varphi \in U(\Omega)$, де $U(\Omega)$ можливо досить малий окіл множини Ω. Подальший розгляд будемо проводити в множині $U(\Omega)$, вважаючи функції $\lambda_j(\varphi), j = 1, 2, ..., n$ неперервними гілками багатозначної функції, визначеної рівнянням (2). Нехай $T(\varphi) = (t_{ij}(\varphi))$ — невироджена матриця, яка приводить матрицю $A(\varphi)$ до діагонального вигляду $T^{-1}(\varphi)A(\varphi)T(\varphi) = \Lambda(\varphi)$, де $\Lambda(\varphi) = diag(\lambda_1(\varphi), ..., \lambda_n(\varphi))$. Так як $A(\varphi)T(\varphi) = T(\varphi)\Lambda(\varphi)$, то елементи матриці $T(\varphi)$ визначаються із системи алгебраїчних рівнянь

$$(A(\varphi) - \lambda E)t(\varphi) = 0, t(\varphi) = col(t_1(\varphi), ..., t_n(\varphi)). \tag{3}$$

Нехай $t^{(j)}(\varphi) = col(t_{1j}(\varphi), ..., t_{nj}(\varphi)), j = 1, 2, ..., n$ власний вектор матриці $A(\varphi)$, що відповідає власному числу $\lambda_j(\varphi)$: $(A(\varphi) - \lambda_j(\varphi)E)t^{(j)}(\varphi) = 0$. Легко переконатися, що кожна матриця $(A(\varphi) - \lambda_j(\varphi)E), j = 1, 2, ..., n$ при $\varphi \in U(\Omega)$ має ранг $n - 1$. Справді, позначивши алгебраїчні доповнення визначника $\Delta(\lambda, \varphi)$, одержані в результаті викреслення ν-го рядка і μ-го стовпця через $\Delta_{\nu\mu}(\lambda, \varphi)$, і врахувавши правило диференціювання функціонального визначника, матимемо

$$\frac{\partial \Delta(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} det(\delta_{\nu\mu}\lambda(\varphi) - a_{\nu\mu}(\varphi)) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{jj}(\lambda, \varphi),$$

тут $\delta_{\nu\mu}$ — символ Кронекера. Так як $\lambda_j(\varphi)$ прості при $\varphi \in U(\Omega)$, то $\frac{\partial \Delta(\lambda,\varphi)}{\partial \lambda} \neq 0$ при $\lambda = \lambda_j(\varphi), j = 1, 2, ..., n$. Отже, для кожного кореня рівняння (2) знайдеться діагональний мінор

$$\Delta_{\xi\xi}(\lambda_j(\varphi), \varphi) \neq 0, \varphi \in U(\Omega), \tag{4}$$

де номер ξ залежить від j, причому число ξ можна вибрати незалежним від φ. Справді, в силу неперервності алгебраїчних доповнень $\Delta_{\nu\mu}(\lambda, \varphi)$ і коренів $\lambda_\mu(\varphi)$ для деякого ξ виконується нерівність

$$\Delta_{\xi\xi}(\lambda_\mu(\varphi), \varphi) = \lim_{t \to \infty} \Delta_{\xi\xi}(\lambda_\mu(\varphi_t(\varphi)), \varphi_t(\varphi)) \neq 0,$$

то для того ж ξ виконуватиметься нерівність $\Delta_{\xi\xi}(\lambda_\mu(\varphi_t(\varphi)), \varphi_t(\varphi)) \neq 0$ для $\varphi \in$ $\in U(\Omega)$.

Але визначник $\Delta_{\xi\xi}(\lambda_\mu(\varphi), \varphi)$ є мінором $(n-1)$-го порядку матриці $A(\varphi) -$ $-\lambda_\mu(\varphi)E$, а тому ця матриця має ранг $n - 1$ $(\mu = 1, 2, ..., n)$. Оскільки ненульові розв'язки системи рівнянь пропорційні відповідним алгебраїчним доповненням:

$$\frac{t_{1j}(\varphi)}{\Delta_{\xi 1}(\lambda_j(\varphi), \varphi)} = \frac{t_{2j}(\varphi)}{\Delta_{\xi 2}(\lambda_j(\varphi), \varphi)} = ... = \frac{t_{nj}(\varphi)}{\Delta_{\xi n}(\lambda_j(\varphi), \varphi)},$$

то, покладаючи коефіцієнт пропорційності одиницею, дістаємо

$$t_{\nu j}(\varphi) = \Delta_{\xi\nu}(\lambda_j(\varphi), \varphi), \qquad (\nu = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., n).$$

Таким чином, елементами матриці $T(\varphi)$, котра приводить вихідну матрицю $A(\varphi)$ до діагонального вигляду, є цілі раціональні функції власних чисел $\lambda_1(\varphi)$, $\lambda_2(\varphi)$, ..., $\lambda_n(\varphi)$ і елементів $a_{\nu\mu}(\varphi)$ матриці $A(\varphi)$:

$$t_{\nu j}(\varphi) = P_{\nu j}[\lambda_j(\varphi), a_{\nu\mu}(\varphi)], \tag{5}$$

а тому робимо висновок, що $T(\varphi)$ є неперервною по $\varphi \in U(\Omega)$ матричною функцією.

Позначимо через λ_j^* — власні числа граничної матриці A. Оскільки за умовою вони прості, то можна вказати таке число T(можливо досить велике) і додатні числа $\rho_j > 0$, $(j = 1, 2, ..., n)$, що власні числа $\lambda_j(\varphi_t(\varphi))$ матриці $A(\varphi)$ будуть міститися всередині кругів $|\lambda - \lambda_j^*| \leq \rho_j$ комплексної площини λ, що не перетинаються між собою при $t \geq T$ і $\varphi \in T^m$. Тому при $\varphi \in U(\Omega)$, $|a_{\nu\mu}(\varphi)| \leq a_1$, $|\lambda_j(\varphi)| \leq a_2$ з (5) робимо висновок про обмеженість матриці $T(\varphi)$, $\varphi \in U(\Omega)$. Граничні значення власних векторів $t_*^j = \lim\limits_{t\to\infty} t^{(j)}(\varphi_t(\varphi))$ є власними векторами граничної матриці A, а тому в силу лінійної незалежності цих векторів $|detT_*| \geq a_3 > 0$, де $T_* = \lim\limits_{t\to\infty} T(\varphi_t(\varphi))$.

Звідси випливає, що $|detT(\varphi_t(\varphi))| \geq a_4 > 0$ при $t \geq T$ або ж $|detT(\varphi)| \geq a_4 > 0$ для всіх $\varphi \in U(\Omega)$. Цього достатньо, щоб зробити висновок про обмеженість при $\varphi \in U(\Omega)$ оберненої до $T(\varphi)$ матриці: $\|T^{-1}(\varphi)\| \leq a_4$, при $\varphi \in U(\Omega)$. Нехай тепер $A(\varphi)$ — неперервно диференційовна при $\varphi \in T^m$. Оскільки власні числа матриці $A(\varphi)$ за умовою прості, то вони є неперервно диференційовними по φ і похідні по t від $\lambda_j(\varphi_t(\varphi))$ $\frac{d}{dt}\lambda_j(\varphi_t(\varphi))$ можна визначити із рівняння

$$\frac{d}{dt}\Delta(\lambda_j(\varphi_t(\varphi)), \varphi_t(\varphi)) = 0.$$

Звідси маємо

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}(\lambda_j(\varphi_t(\varphi)), \varphi_t(\varphi)) \cdot \frac{d\lambda_j(\varphi_t(\varphi))}{dt} + \frac{\partial\Delta}{\partial t} \cdot \dot{\varphi}_t(\varphi) = 0.$$

Так як

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}(\lambda_j(\varphi_t(\varphi)), \varphi_t(\varphi)) = \frac{\partial det(A - \lambda E)}{\partial\lambda} \neq 0,$$

то $| \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}(\lambda_j(\varphi), \varphi) | \geq a_5 > 0$ при $\varphi \in U(\Omega)$. Крім того, маємо

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi} \cdot \dot{\varphi}_t(\varphi) = \frac{d}{dt} detA(\varphi_t(\varphi)) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{da_{\nu\mu}(\varphi_t(\varphi))}{dt} \cdot \Delta_{\nu\mu}(\varphi_t(\varphi)),$$

де $\Delta_{\nu\mu}(\varphi_t(\varphi))$ — алгебраїчне доповнення до елемента $\dot{a}_{\nu\mu}(\varphi_t(\varphi))$. Враховуючи вираз (4) і нерівність (3) дістаємо

$$| \frac{d}{dt}\lambda_j(\varphi_t(\varphi)) | \leq a_6 \, | \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{da_{\nu\mu}(\varphi_t(\varphi))}{dt} | \leq a_7 \, \| D(\varphi_t(\varphi)) \| .$$

Отже $\int\limits_T^{\infty} \frac{d}{dt}\lambda_j(\varphi_t(\varphi))dt < \infty$, якщо матриця $D(\varphi_t(\varphi))$ абсолютно інтегровна на $[0,\infty)$ вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$. На основі формули (5) при $t \geq T$ маємо

$$\mid \frac{d}{dt}t_{\nu j}(\varphi_t(\varphi)) \mid \leq a_7 \mid \frac{d}{dt}\lambda_j(\varphi_t(\varphi)) \mid + a_8 \parallel D(\varphi_t(\varphi)) \parallel .$$

Звідси робимо висновок, що матриця $T(\varphi_t(\varphi))$ абсолютно інтегровна на проміжку $[T,\infty)$. Враховуючи нерівність (3) і той факт, що

$$\frac{d}{dt}T^{-1}(\varphi_t(\varphi)) = T^{-1}(\varphi_t(\varphi))\frac{d}{dt}T(\varphi_t(\varphi))T^{-1}(\varphi_t(\varphi)),$$

робимо висновок, що і матриця $T^{-1}(\varphi_t(\varphi))$ є неперервно диференційовною на проміжку $[T,\infty)$ і її похідна $\frac{d}{dt}T^{-1}(\varphi_t(\varphi))$ абсолютно інтегровна на проміжку $[T,\infty)$.

Розглянемо лінійне розширення динамічних рівнянь на торі

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \dot{x} = [A(\varphi) + B(\varphi)]x, \tag{6}$$

де $a(\varphi), A(\varphi) \in C^1(T^m)$, $B(\varphi) \in C(T^m)$.

Теорема 2. *Нехай матриця $A(\varphi)$ така, що існує скінченна границя*

$$\lim_{t\to\infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A$$

для всіх $\varphi \in T^m$ і власні числа граничної матриці різні. Припустимо також, що матриці

$$D(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) i B(\varphi)$$

абсолютно інтегровні на $[0,\infty]$ вздовж кожної інтегральної кривої $\varphi_t(\varphi)$, тобто

$$\int\limits_0^{\infty} \|D(\varphi_t(\varphi))\|\, dt < \infty i \int\limits_0^{\infty} \|B(\varphi_t(\varphi))\|\, dt < \infty$$

рівномірно по $\varphi \in T^m$. Тоді в деякому околі $U(\Omega)$ множини Ω система (6) за допомогою лінійного перетворення

$$x = T(\varphi)y,$$

зводиться до L-діагонального вигляду

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \dot{y} = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y, \tag{7}$$

де $\Lambda(\varphi) = diag\{\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), .., \lambda_n(\varphi)\} \in C^1(U(\Omega))$ — діагональна матриця, діагональні елементи якої є власними значеннями матриці $A(\varphi)$, $Q(\varphi) \in C(U(\Omega))$.

Доведення. Нехай $T(\varphi)$ — регулярна в $U(\Omega)$ матриця, що приводить матрицю $A(\varphi)$ до діагонального вигляду в $U(\Omega)$, тобто

$$T^{-1}(\varphi)A(\varphi)T(\varphi) = \Lambda(\varphi), \varphi \in U(\Omega).$$

Проведемо в системі (6) заміну $x = T(\varphi)y$:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), T(\varphi)\dot{y} + \dot{T}(\varphi)y = [A(\varphi)) + B(\varphi)]T(\varphi)y,$$

або ж

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \dot{y} = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y,$$

де $\Lambda(\varphi) = diag\,\{\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), .., \lambda_n(\varphi)\}$ — діагональна матриця, а

$$Q(\varphi) = T^{-1}(\varphi)[B(\varphi)C(\varphi) - \dot{T}(\varphi)], \varphi \in U(\Omega).$$

Оскільки $T(\varphi)$ і $T^{-1}(\varphi)$ обмежені, то з останної рівності випливає, що існують такі додатні сталі a_1, a_2, що

$$\|Q(\varphi)\| \leq a_1 \left\|\dot{T}(\varphi)\right\| + a_2 \|B(\varphi)\|, \varphi \in U(\Omega).$$

Якщо матриці $D(\varphi)$ і $B(\varphi)$ абсолютно інтегровні вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$, то $\dot{T}(\varphi)$ буде абсолютно інтегровною вздовж кожної траєкторії $\varphi_t(\varphi)$ на проміжку $[T, \infty]$, такому, що $\varphi_t(\varphi) \in U(\Omega)$ для всіх $\varphi \in T^m$, а тому

$$\int\limits_T^\infty \|Q(\varphi_t(\varphi))\|\, dt \leq a_1 \int\limits_T^\infty \left\|\dot{T}(\varphi_t(\varphi))\right\| dt + a_2 \int\limits_T^\infty \|B(\varphi_t(\varphi))\|\, dt < \infty.$$

Таким чином, $Q(\varphi)$ абсолютно інтегровна на проміжку $[T, \infty]$ вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$.

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1969. – 472 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

Одержано 20.09.2007