УДК 517.946

А. В. Добридень (Ужгородський нац. ун-т)

КРАЙОВА ЗАДАЧА ГУРСА–ДАРБУ

The boundary problem of Gursa-Darbu for system of two quazilinear differential equations has been researched and one two-sided method's modification of the approximate integration of this problem has been constructed.

За допомогою монотонного двостороннього методу досліджено крайову задачу для системи двох квазілінійних диференціальних рівнянь, доведено теорему існування та єдиності розв'язку, отримано достатню умову існування знакосталих розв'язків та теорему порівняння.

Розглянемо систему двох квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних вигляду

$$D^{(1.1)}u_i(x,y) = f_i(x,y,u_1(x,y),u_2(x,y),D^{(1.0)}u_1(x,y),D^{(1.0)}u_2(x,y)) \equiv \\ \equiv f_i[u_1(x,y),u_2(x,y)], \quad i=1,2, \quad (1)$$

де $(x,y)\in\overline{B}$, $B=\{(x,y)\mid x\in(0,\alpha),\, y\in(0,x)\}$, $f_i: D\to R$, $D\subset R^6$, $i=1,2$.

Постановка задачі: в просторі функцій $C^2(B)\cap C(\overline{B})$ знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь (1), який задовольняє умови (див. [1,2])

$$\begin{aligned} u_1(x,0) &= \phi_1(x), \quad u_1(y,y)=\psi_1(y),\\ u_2(x,0) &= \phi_2(x), \quad u_1(\alpha,y)=\psi_2(y). \end{aligned} \quad (2)$$

Функції $\phi_i(x)$, $\psi_i(y)$, $i=1,2$ належать простору $C'([0,\alpha])$ і задовольняють умови узгодженості

$$\phi_1(0)=\psi_1(0), \quad \phi_2(\alpha)=\psi_2(0). \quad (3)$$

Задача (1)–(3) еквівалентна системі інтегральних рівнянь

$$u_1(x,y) = \phi_1(x)+\psi_1(y)-\phi_1(y)+\int_0^y\int_y^x f_1[u_1(\xi,\eta);u_2(\xi,\eta)]d\xi d\eta,$$
$$u_2(x,y) = \phi_2(x)+\psi_2(y)-\phi_2(0)+\int_0^y\int_\alpha^x f_2[u_1(\xi,\eta);u_2(\xi,\eta)]d\xi d\eta.$$

Нехай праві частини рівнянь системи (1) $f_i[u_1(x,y);u_2(x,y)]$ належать простору $C_1(\overline{D})$, де $C_1(\overline{D})$ — простір функцій, які задовольняють наступні умови:

1) $f_i[u_1(x,y);u_2(x,y)]\in C(\bar{D})$, $i=1,2$;

2) функції $f_i[u_1(x,y);u_2(x,y)]$ можна подати у вигляді

$$f_i[u_1(x,y);u_2(x,y)] \equiv f_i[u_1^+(x,y),u_2^+(x,y);u_1^-(x,y),u_2^-(x,y)],$$

$f_i: D_1\to R$, $D_1\subset R^{10}$, таким чином, що для довільних з простору $C^2(B)\cap C(\overline{B})$ функцій $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $v_1(x,y)$,$v_2(x,y)$, $z_1^*(x,y)$, $z_2^*(x,y)$, $v_1^*(x,y)$, $v_2^*(x,y)$, які належать області $\overline{D}_1$ і задовольняють нерівності

$$D^{(j.0)}z_1(x,y)\ge D^{(j.0)}z_1^*(x,y), \quad D^{(j.0)}v_1(x,y)\le D^{(j.0)}v_1^*(x,y), \quad j=0,1,$$
$$D^{(j.0)}z_2(x,y)\le(\ge)D^{(j.0)}z_2^*(x,y),$$
$$D^{(j.0)}v_2(x,y)\ge(\le)D^{(j.0)}v_2^*(x,y), \quad j=0\ (j=1), \quad (4)$$

виконується умова

$$f_i[z_1(x,y),z_2(x,y);v_1(x,y),v_2(x,y)] \geq$$
$$\geq f_i[z_1^*(x,y),z_2^*(x,y);v_1^*(x,y),v_2^*(x,y)]; \quad (5)$$

3) для довільних з простору $C^2(B)\cap C(\overline{B})$ функцій $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $v_1(x,y)$, $v_2(x,y)$, $z_1^*(x,y)$, $z_2^*(x,y)$, $v_1^*(x,y)$, $v_2^*(x,y)$ $f_i[u_1^+(x,y),u_2^+(x,y);u_1^-(x,y),u_2^-(x,y)]$ задовольняють умову Ліпшіца зі сталою K:

$$|f_i[z_1(x,y),z_2(x,y);v_1(x,y),v_2(x,y)]-$$
$$-f_i[z_1^*(x,y),z_2^*(x,y);v_1^*(x,y),v_2^*(x,y)]| \leq$$
$$\leq K\sum_{j=0}^{1}(|D^{(j.0)}(z_1(x,y)-z_1^*(x,y))|+|D^{(j.0)}(z_2(x,y)-z_2^*(x,y))|+$$
$$+|D^{(j.0)}(v_1(x,y)-v_1^*(x,y))|+|D^{(j.0)}(v_2(x,y)-v_2^*(x,y))|).$$

Означення 1. *Довільні з простору* $C^2(B)\cap C(\overline{B})$ *функції* $z_{1,0}(x,y)$, $z_{2,0}(x,y)$, $v_{1,0}(x,y)$, $v_{2,0}(x,y)$, *що задовольняють умови* (2), (3) *і нерівності*

$$D^{(j,0)}w_{1,0}(x,y)\geq 0,\ j=0,1,$$
$$D^{(j,0)}w_{2,0}(x,y)\leq(\geq)0,\ j=0(j=1),\quad w_{i,0}(x,y)=z_{i,0}(x,y)-v_{i,0}(x,y),$$

називаються функціями порівняння задачі (1)–(3).

Введемо наступні позначення

$$\overline{f}_i^p(x,y)=f_i[\overline{z}_{1,p}(x,y),\overline{z}_{2,p}(x,y);\overline{v}_{1,p}(x,y),\overline{v}_{2,p}(x,y)],$$
$$\overline{f}_{i,p}(x,y)=f_i[\overline{v}_{1,p}(x,y),\overline{v}_{2,p}(x,y);\overline{z}_{1,p}(x,y),\overline{z}_{2,p}(x,y)],$$
$$f_i^p(x,y)=f_i[z_{1,p}(x,y),z_{2,p}(x,y);v_{1,p}(x,y),v_{2,p}(x,y)],$$
$$f_{i,p}(x,y)=f_i[v_{1,p}(x,y),v_{2,p}(x,y);z_{1,p}(x,y),z_{2,p}(x,y)],$$
$$\overline{z}_{i,p}(x,y)=z_{i,p}(x,y)-d_{i,p}(x,y)w_{i,p}(x,y),$$
$$\overline{v}_{i,p}(x,y)=v_{i,p}(x,y)+q_{i,p}(x,y)w_{i,p}(x,y),$$
$$\alpha_{i,p}=D^{(1.1)}z_{i,p}(x,y)-f_i^p(x,y),\beta_{i,p}=D^{(1.1)}v_{i,p}(x,y)-fi,p(x,y),$$

де $d_{i,p}(x,y)$, $q_{i,p}(x,y)$ — довільні з простору $C^{(1.0)}(\overline{B})$ функції, що задовольняють нерівності

$$\begin{gathered}D^{(j.0)}d_{1,p}(x,y)\geq 0,\quad D^{(j.0)}q_{0,p}(x,y)\geq 0,\\ D^{(j.0)}d_{2,p}(x,y)\geq(\leq)0,\quad D^{(j.0)}q_{2,p}(x,y)\geq(\leq)0,\quad j=0\ (j=1),\\ \sup_{\overline{B}}|D^{(j,0)}d_{i,p}(x,y)|<0.5,\quad \sup_{\overline{B}}|D^{(j,0)}q_{i,p}(x,y)|<0.5,\quad j=0,1,\ i=1,2.\end{gathered} \tag{6}$$

Побудуємо послідовності функцій $\{z_{i,p}(x,y)\}$, $\{v_{i,p}(x,y)\}$, $i=1,2$ згідно формул (див. [2,3])

$$\begin{aligned}
z_{1,p+1}(x,y) &= \int\limits_0^y \int\limits_y^x \left[\overline{f}_1^p(\xi,\eta) - c_{1,p}(\xi,\eta)(\overline{f}_1^p(\xi,\eta) - \overline{f}_{1,p}(\xi,\eta))\right] d\xi d\eta, \\
z_{2,p+1}(x,y) &= \int\limits_0^y \int\limits_\alpha^x \left[\overline{f}_2^p(\xi,\eta) - c_{2,p}(\xi,\eta)(\overline{f}_2^p(\xi,\eta) - \overline{f}_{2,p}(\xi,\eta))\right] d\xi d\eta, \\
v_{1,p+1}(x,y) &= \int\limits_0^y \int\limits_y^x \left[\overline{f}_{1,p}(\xi,\eta) + c_{1,p}(\xi,\eta)(\overline{f}_1^p(\xi,\eta) - \overline{f}_{1,p}(\xi,\eta))\right] d\xi d\eta, \\
v_{2,p+1}(x,y) &= \int\limits_0^y \int\limits_\alpha^x \left[\overline{f}_{2,p}(\xi,\eta) + c_{2,p}(\xi,\eta)(\overline{f}_2^p(\xi,\eta) - \overline{f}_{2,p}(\xi,\eta))\right] d\xi d\eta,
\end{aligned} \tag{7}$$

де $c_{i,p}(x,y)$ — довільні невід'ємні з простору $C(\overline{B})$ функції, що задовольняють нерівності

$$\sup_{\overline{B}} c_{i,p}(x,y) < 0.5, \quad i=1,2. \tag{8}$$

За нульове наближення вибираємо довільні функції порівняння задачі (1)–(3) $z_{i,0}(x,y)$, $v_{i,0}(x,y)$, $i=1,2$, що задовольняють умови

$$\alpha_{i,0}(x,y) \geq 0, \quad \beta_{i,0}(x,y) \leq 0, \quad i=1,2. \tag{9}$$

Нехай $z_{i,0}(x,y)$, $v_{i,0}(x,y)$, $i=1,2$ — довільні функції порівняння задачі (1)–(3), для яких виконується умова (9). Виберемо функції $d_{i,0}(x,y)$, $q_{i,0}(x,y)$ так, щоб виконувалися нерівності (6) і

$$\begin{gathered}
D^{(j.0)}((1-d_{1,0}(x,y)-q_{1,0}(x,y))w_{1,0}(x,y)) \geq 0, \\
D^{(j.0)}(\overline{z}_{1,0}(x,y)-z_{1,1}(x,y)) \geq 0, \quad D^{(j,0)}(\overline{v}_{1,0}(x,y)-v_{1,1}(x,y)) \leq 0, \\
D^{(j.0)}((1-d_{2,0}(x,y)-q_{2,0}(x,y))w_{2,0}(x,y)) \leq (\geq) 0, \\
D^{(j.0)}(\overline{z}_{2,0}(x,y)-z_{2,1}(x,y)) \leq (\geq) 0, \quad D^{(j.0)}(\overline{v}_{2,0}(x,y)-v_{2,1}(x,y)) \geq (\leq) 0, \\
j=0 \quad (j=1).
\end{gathered}$$

Тоді, враховуючи (4), (5) одержимо

$$\begin{gathered}
f_i^0(x,y) - \overline{f}_i^0(x,y) \geq 0, \quad f_{i,0}(x,y) - \overline{f}_{i,0}(x,y) \leq 0, \\
\overline{f}_i^0(x,y) - f_i^1(x,y) \geq 0, \quad \overline{f}_{i,0}(x,y) - f_{i,0}(x,y) \leq 0, \\
D^{(1.1)}w_{i,1}(x,y) = (1-2c_{i,0}(x,y))\left(f_i^0(x,y) - f_{i,0}(x,y)\right) \geq 0.
\end{gathered}$$

Отже $w_{1,1}(x,y) \geq 0$, $D^{(1.0)}w_{1,1}(x,y) \geq 0$, $w_{2,1}(x,y) \leq 0$, $D^{(1.0)}w_{2,1}(x,y) \geq 0$. Виберемо $c_{i,0}(x,y)$ таким чином, щоб виконувалися умови (8) і

$$\begin{gathered}
\alpha_{i,1}(x,y) = \overline{f}_i^0(x,y) - f_i^1(x,y) - c_{i,0}(x,y)(\overline{f}_i^0(x,y) - \overline{f}_{i,0}(x,y)) \geq 0, \\
\beta_{i,1}(x,y) = \overline{f}_{0,i}(x,y) - f_{1,i}(x,y) + c_{i,0}(x,y)(\overline{f}_i^0(x,y) - \overline{f}_{i,0}(x,y)) \leq 0, \ i=1,2.
\end{gathered}$$

Тоді $z_{i,1}(x,y)$, $v_{i,1}(x,y)$, $i=1,2$ є функціями порівняння задачі (1)–(3) , що задовольняють умову (9). Приймаючи функції $z_{i,1}(x,y)$, $v_{i,1}(x,y)$, $i=1,2$, за вихідні та повторюючи попередні міркування, переконуємося, що якщо на кожному кроці ітерації функції $d_{i,p}(x,y)$,$q_{i,p}(x,y)$, $c_{i,p}(x,y)$ вибирати таким чином, щоб виконувалися умови (6), (8) і нерівності

$$\begin{gathered}
\overline{z}_{i,p}(x,y) - z_{i,p+1}(x,y) \geq (\leq) 0, \overline{v}_{i,p}(x,y) - v_{i,p+1}(x,y) \leq (\geq) 0, \quad i = 1\ (i = 2) \\
D^{(1.0)}(\overline{z}_{i,p}(x,y) - z_{i,p+1}(x,y)) \geq 0, D^{(1.0)}(\overline{v}_{i,p}(x,y) - v_{i,p+1}(x,y)) \leq 0, \\
D^{(1.0)}((1 - d_{i,p}(x,y) - q_{i,p}(x,y))w_{i,p}) \geq 0, \\
\overline{f}_i^p(x,y) - f_i^{p+1}(x,y) - c_{i,p}(x,y)(\overline{f}_i^p(x,y) - \overline{f}_{i,p}(x,y)) \geq 0, \\
\overline{f}_{p,i}(x,y) - f_{p+1,i}(x,y) + c_{i,p}(x,y)(\overline{f}_i^p(x,y) - \overline{f}_{i,p}(x,y)) \leq 0, \quad i = 1, 2.
\end{gathered} \tag{10}$$

то мають місце нерівності

$$\begin{gathered}
z_{1,p}(x,y) \geq z_{1,p+1}(x,y) \geq v_{1,p+1}(x,y) \geq v_{1,p}(x,y), \\
z_{2,p}(x,y) \leq z_{2,p+1}(x,y) \leq v_{2,p+1}(x,y) \leq v_{2,p}(x,y), \\
D^{(1.0)} z_{i,p}(x,y) \geq D^{(1.0)} z_{i,p+1}(x,y) \geq \\
\geq D^{(1.0)} v_{i,p+1}(x,y) \geq D^{(1.0)} v_{i,p}(x,y), \quad i = 1, 2.
\end{gathered} \tag{11}$$

Функції $d_{i,p}(x,y)$, $q_{i,p}(x,y)$ можна вибирати у вигляді

$$d_{1,p}(x,y) = \frac{\int_0^y \int_y^x \alpha_{1,p}(\xi,\eta) d\xi d\eta}{2 + w_{1,p}(x,y)}, \qquad d_{2,p}(x,y) = \frac{\int_0^y \int_\alpha^x \alpha_{1,p}(\xi,\eta) d\xi d\eta}{2 - w_{2,p}(x,y)},$$

$$q_{1,p}(x,y) = \frac{\int_0^y \int_y^x \beta_{1,p}(\xi,\eta) d\xi d\eta}{2 + w_{1,p}(x,y)}, \qquad q_{2,p}(x,y) = \frac{\int_0^y \int_\alpha^x \beta_{1,p}(\xi,\eta) d\xi d\eta}{2 - w_{2,p}(x,y)}.$$

При такому виборі функцій $d_{i,p}(x,y)$, $q_{i,p}(x,y)$ легко бачити, що умови (6) виконуються, і мають місце нерівності (10).

Розглянемо

$$\begin{gathered}
\overline{f}_i^p(x,y) - \overline{f}_{i,p}(x,y) \leq 2K \sum_{j=0,1} |D^{(j.0)} \overline{w}_{1,p}(x,y)| + |D^{(j.0)} \overline{w}_{2,p}(x,y)| \leq \\
\leq 2K((1 - d_{1,p}(x,y) - q_{1,p}(x,y) + |D^{(1.0)} d_{1,p}(x,y)| + |D^{(1.0)} q_{1,p}(x,y)|)|w_{1,p}(x,y)| + \\
+ (1 - d_{1,p}(x,y) - q_{1,p}(x,y))|D^{(1,0)} w_{i,p}(x,y)| + \\
+ (1 - d_{2,p}(x,y) - q_{2,p}(x,y) + |D^{(1,0)} d_{2,p}(x,y)| + |D^{(1,0)} q_{2,p}(x,y)|)|w_{2,p}(x,y)| + \\
+ (1 - d_{2,p}(x,y) - q_{2,p}(x,y))|D^{(1,0)} w_{2,p}(x,y)|), \quad i = 1, 2.
\end{gathered}$$

Позначимо

$$\begin{gathered}
d = \max_{p,i} \sup_{(x,y) \in \overline{B}} \{1 - d_{i,p}(x,y) - q_{i,p}(x,y), |D^{(1,0)} d_{i,p}(x,y)| + |D^{(1,0)} q_{i,p}(x,y)|, \}, \\
\epsilon = \max_i \sup_{(x,y) \in \overline{B}} \{|w_{i,0}(x,y)|, |D^{(1,0)} w_{i,0}(x,y)|\}, \quad q = \max_{p,i} \sup_{(x,y) \in \overline{B}} \{1 - 2c_{i,p}(x,y)\},
\end{gathered}$$

одержимо

$$\begin{gathered}
\overline{f}_i^0 - \overline{f}_{0,i} \leq 12Kd\epsilon, \quad i = 1, 2 \\
w_{1,1} \leq 12Kqd\epsilon y(x - y), \quad w_{2,1} \leq 12Kqd\epsilon y(\alpha - x).
\end{gathered}$$

Припустимо, що мають місце оцінки $w_{1,p}(x,y) \le 3(4Kdq)^p \epsilon \frac{y^p}{p!}(\alpha+1)^{p-1}(x-y)$, $w_{2,p}(x,y) \le 3(4Kdq)^p \epsilon \frac{y^p}{p!}(\alpha+1)^{p-1}(\alpha-x)$. Тоді з (11) при $p+1$ одержимо

$$D^{(1,1)} w_{i,p+1}(x,y) \le 3 \cdot 4^{p+1} K^{p+1} d^{p+1} q^p \epsilon \frac{y^p}{p!}(\alpha+1)^p.$$

Інтегруючи $D^{(1,1)} w_{1,p+1}(x,y)$ по x в межах від y до x, по y в межах від 0 до y, $D^{(1,1)} w_{2,p+1}(x,y)$ по x в межах від x до α, по y в межах від 0 до y, одержимо

$$\begin{gathered} w_{1,p+1}(x,y) \le 3(4Kdq)^{p+1} \epsilon (\alpha+1)^p \tfrac{y^{p+1}}{(p+1)!}(x-y), \\ w_{2,p+1}(x,y) \le 3(4Kdq)^{p+1} \epsilon (\alpha+1)^p \tfrac{y^{p+1}}{(p+1)!}(\alpha-x). \end{gathered}$$

З останніх нерівностей випливає $|w_{i,p}(x,y)|$ прямує до нуля при $p \to \infty$, що й треба було довести. Покажемо, що розв'язок задачі (1)–(3) єдиний. Нехай $u_1(x,y)$,$u_2(x,y)$, $v_1(x,y)$,$v_2(x,y)$, – два розв'язки задачі (1)–(3), позначимо $w_i(x,y) = u_i(x,y) - v_i(x,y)$. Аналогічно, як і в попередньому випадку, одержимо оцінки

$$\begin{gathered} w_1(x,y) \le 3(4Kdq)^p \epsilon_1 (\alpha+1)^{p-1} \tfrac{y^p}{p!}(x-y), \\ w_2(x,y) \le 3(4Kdq)^{p+1} \epsilon (\alpha+1)^{p-1} \tfrac{y^p}{p!}(\alpha-x), \\ \epsilon_1 = \max_i \sup_{(x,y)\in \overline{B}} \{|w_i(x,y)|, |D^{(1.0)} w_i(x,y)|\} \end{gathered}$$

при довільних p, а це можливо лише при $w_i(x,y) \equiv 0$. Тим самим доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай праві частини рівнянь системи* (1) $f_i[u_1(x,y); u_2(x,y)] \in C_1(\overline{D})$, $i = 1,2$, *існують функції порівняння задачі* (1)–(3) $z_{i,0}(x,y)$, $v_{i,0}(x,y)$, $i = 1,2$, *що задовольняють нерівності* (9). *Тоді якщо на кожному кроці ітерації функції* $c_{i,p}(x,y)$, $d_{i,p}(x,y)$, $q_{i,p}(x,y)$ *вибирати таким чином, щоб виконувалися нерівності* (6), (8), (10), *то послідовності функцій* $\{z_{i,p}(x,y)\}$, $\{v_{i,p}(x,y)\}$, $i = 1,2$, *побудовані за формулами* (7), *збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного розв'язку задачі* (1)–(3) *і в області мають місце нерівності*

$$\begin{gathered} z_{1,p}(x,y) \ge z_{1,p+1}(x,y) \ge u_1(x,y) \ge v_{1,p+1}(x,y) \ge v_{1,p}(x,y), \\ z_{2,p}(x,y) \le z_{2,p+1}(x,y) \le u_2(x,y) \le v_{2,p+1}(x,y) \le v_{2,p}(x,y), \\ D^{(1.0)} z_{i,p}(x,y) \ge D^{(1.0)} z_{i,p+1}(x,y) \ge D^{(1.0)} u_i(x,y) \ge \\ \ge D^{(1.0)} v_{i,p+1}(x,y) \ge D^{(1.0)} v_{i,p}(x,y) \end{gathered} \tag{12}$$

при $(x,y) \in \overline{B}$, $i = 1,2$.

Справедливість нерівностей (12) доводиться аналогічно, як в [1].

З теореми 1 безпосередньо випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай праві частини рівнянь системи* (1) $f_i[u_1(x,y); u_2(x,y)] \in C_1(\overline{D})$, $i = 1,2$, *існують функції* $z_{i,0}(x,y)$, $(v_{i,0}(x,y))$, $i = 1,2$, *що* *задовольняють однорідні умови* (2) *та*

$$\begin{gathered}z_{1,0}(x,y)\geq 0, z_{2,0}(x,y)\leq 0, D^{(1.0)}z_{i,0}(x,y)\geq 0,\\ D^{(1.1)}z_{i,0}(x,y)-f_i[z_{1,0}(x,y),z_{2,0}(x,y);0,0]\geq 0,\\ f_i[0,0;z_{1,0}(x,y),z_{2,0}(x,y)]\geq 0, i=1,2,\\ (v_{1,0}(x,y)\leq 0, v_{2,0}(x,y)\geq 0, D^{(1.0)}v_{i,0}(x,y)\leq 0,\\ D^{(1.1)}v_{i,0}(x,y)-f_i[v_{1,0}(x,y),v_{2,0}(x,y);0,0]\leq 0,\\ f_i[0,0;v_{1,0}(x,y),v_{2,0}(x,y)]\leq 0, i=1,2).\end{gathered}\tag{13}$$

Тоді розв'язок системи (1) *з однорідними умовами* (2) *задовольняє нерівності*

$$\begin{gathered}u_1(x,y)\geq 0,\quad u_2(x,y)\leq 0,\quad D^{(1.0)}u_i(x,y)\geq 0,\\ (u_1(x,y)\leq 0,\quad u_2(x,y)\geq 0,\quad D^{(1.0)}u_i(x,y)\leq 0),\quad i=1,2.\end{gathered}$$

Доведення. Дійсно, з (13) випливає, що функції $z_{i,0}(x,y), v_{i,0}(x,y)\equiv 0$, $(z_{i,0}(x,y)\equiv 0, v_{i,0}(x,y))$, $i=1,2$ задовольняють нерівності

$$\begin{gathered}w_{1,0}(x,y)\geq 0,\quad w_{2,0}(x,y)\leq 0,\quad D^{(1.0)}w_{i,0}(x,y)\geq 0,\\ \alpha_{i,0}(x,y)\geq 0,\quad \beta_{i,0}(x,y)\leq 0,\quad i=1,2,\end{gathered}$$

тому виконуються умови теореми 1 і з (12) випливають нерівності

$$\begin{gathered}z_{1,0}(x,y)\geq u_1(x,y)\geq 0,\\ z_{2,0}(x,y)\leq u_2(x,y)\leq 0,\\ D^{(1.0)}z_{i,0}(x,y)\geq D^{(1.0)}u_i(x,y)\geq 0\end{gathered}\tag{14}$$

і теорема доведена повністю.

Розглянемо три системи диференціальних рівнянь вигляду [4]

$$D^{(1.1)}z_i(x,y)=f_i[z_1(x,y);z_2(x,y)], i=1,2,\tag{15}$$

$$D^{(1.1)}u_i(x,y)=g_i[u_1(x,y);u_2(x,y)], i=1,2,\tag{16}$$

$$D^{(1.1)}v_i(x,y)=h_i[v_1(x,y);v_2(x,y)], i=1,2,\tag{17}$$

де функції $z_i(x,y)$, $u_i(x,y)$, $v_i(x,y)$ задовольняють умови (2), а $f_i[z_1(x,y);z_2(x,y)]$, $g_i[u_1(x,y);u_2(x,y)]$, $h_i[v_1(x,y);v_2(x,y)]$ такі, що виконуються наступні умови:

1) $f_i[z_1(x,y);z_2(x,y)]$, $g_i[u_1(x,y);u_2(x,y)]$, $h_i[v_1(x,y);v_2(x,y)]$ неперервні та мають обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, починаючи з третього;

2)

$$\begin{gathered}f_i[z_1(x,y);z_2(x,y)]\equiv f_i[z_1^+(x,y);z_2^+(x,y)],\\ g_i[u_1(x,y);u_2(x,y)]\equiv g_i[u_1^+(x,y);u_2^+(x,y)],\\ h_i[v_1(x,y);v_2(x,y)]\equiv h_i[v_1^+(x,y);v_2^+(x,y)],\end{gathered}$$

$$\begin{array}{llll}\frac{\partial f_i}{\partial z_1(x,y)}\geq 0, & \frac{\partial f_i}{\partial z_2(x,y)}\leq 0, & \frac{\partial f_i}{\partial D^{(1.0)}z_1(x,y)}\geq 0, & \frac{\partial f_i}{\partial D^{(1.0)}z_2(x,y)}\geq 0,\\ \frac{\partial g_i}{\partial u_1(x,y)}\geq 0, & \frac{\partial g_i}{\partial u_2(x,y)}\leq 0, & \frac{\partial g_i}{\partial D^{(1.0)}u_1(x,y)}\geq 0, & \frac{\partial g_i}{\partial D^{(1.0)}u_2(x,y)}\geq 0,\\ \frac{\partial h_i}{\partial v_1(x,y)}\geq 0, & \frac{\partial h_i}{\partial v_2(x,y)}\leq 0, & \frac{\partial h_i}{\partial D^{(1.0)}v_1(x,y)}\geq 0, & \frac{\partial h_i}{\partial D^{(1.0)}v_2(x,y)}\geq 0;\end{array}$$

3) для довільних з простору $C^{(1.1)}(B) \cup C^{(1.0)}(\overline{B})$ функцій $q_1(x,y)$, $q_2(x,y)$, які належать області визначення функцій $f_i[z_1(x,y); z_2(x,y)]$, $g_i[u_1(x,y); u_2(x,y)]$, $h_i[v_1(x,y); v_2(x,y)]$, справедливі нерівності

$$f_i[q_1(x,y); q_2(x,y)] \geq g_i[q_1(x,y); q_2(x,y)] \geq h_i[q_1(x,y); q_2(x,y)], i = 1, 2.$$

Позначимо $w_i(x,y) = z_i(x,y) - u_i(x,y)$, одержимо

$$\begin{gathered} D^{(1.1)} w_i(x,y) = f_i[z_1(x,y); z_2(x,y)] - g_i[u_1(x,y); u_2(x,y)] = \\ = \tfrac{\partial f_i}{\partial z_1(x,y)} w_1(x,y) + \tfrac{\partial f_i}{\partial z_2(x,y)} w_2(x,y) + \tfrac{\partial f_i}{\partial D^{(1.0)} z_1(x,y)} D^{(1.0)} w_1(x,y) + \\ + \tfrac{\partial f_i}{\partial D^{(1.0)} z_2(x,y)} D^{(1.0)} w_2(x,y) + f_i[u_1(x,y); u_2(x,y)] - g_i[u_1(x,y); u_2(x,y)]. \end{gathered}$$

Розглянемо наступну задачу

$$\begin{gathered} D^{(1.1)} w_i(x,y) = \tfrac{\partial f_i}{\partial z_1(x,y)} w_1(x,y) + \tfrac{\partial f_i}{\partial z_2(x,y)} w_2(x,y) + \tfrac{\partial f_i}{\partial D^{(1.0)} z_1(x,y)} D^{(1.0)} w_1(x,y) + \\ + \tfrac{\partial f_i}{\partial D^{(1.0)} z_2(x,y)} D^{(1.0)} w_2(x,y) + f_i[u_1(x,y); u_2(x,y)] - g_i[u_1(x,y); u_2(x,y)], \\ w_1(x,0) = w_1(y,y) = w_2(x,0) = w_2(\alpha,y) = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

В силу теореми 2 з умов 2), 3) випливає, що розв'язок задачі (18) задовольняє нерівності

$$w_1(x,y) \geq 0, \quad D^{(1.0)} w_1(x,y) \geq 0, \quad w_2(x,y) \leq 0, \quad D^{(1.0)} w_2(x,y) \geq 0,$$

тобто

$$\begin{gathered} z_1(x,y) \geq u_1(x,y), \quad D^{(1.0)} z_1(x,y) \geq D^{(1.0)} u_1(x,y), \\ z_2(x,y) \leq u_2(x,y), \quad D^{(1.0)} z_2(x,y) \geq D^{(1.0)} u_2(x,y). \end{gathered}$$

Аналогічно доводяться нерівності

$$u_1(x,y) \geq v_1(x,y), \quad D^{(1.0)} u_1(x,y) \geq D^{(1.0)} v_1(x,y),$$

$$u_2(x,y) \leq v_2(x,y), \quad D^{(1.0)} u_2(x,y) \geq D^{(1.0)} v_2(x,y).$$

Таким чином має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай праві частини систем рівнянь* (15), (16), (17) *задовольняють умови* 1)-3). *Тоді якщо існують розв'язки задач* (15), (2), (16), (2), (17), (2), *то вони задовольняють нерівності*

$$\begin{gathered} z_1(x,y) \geq u_1(x,y) \geq v_1(x,y), \quad D^{(1.0)} z_1(x,y) \geq D^{(1.0)} u_1(x,y) \geq D^{(1.0)} v_1(x,y), \\ z_2(x,y) \leq u_2(x,y) \leq v_2(x,y), \quad D^{(1.0)} z_2(x,y) \geq D^{(1.0)} u_2(x,y) \geq D^{(1.0)} v_2(x,y). \end{gathered}$$

Останню теорему зручно використовувати у випадку складності функцій в правій частині системи (1), тобто коли реалізація ітераційного процесу (7) практично неможлива. У цьому випадку на підставі вказаної теореми можна певним чином апроксимувавши функції $f_i[u_1(x,y); u_2(x,y)]$, продовжити обчислення.

1. *Маринець В.В.* Аналітичні методи в теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу: Навч. посібник. – Ужгород: УжНУ, 2006. – 130 с.

2. *Маринець В.В., Трошина А.В.* Узагальнена задача Дарбу // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1999. – Вип. 4. – С. 79–84.
3. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторнихуравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
4. *Добридень А.В.* Характеристична задача Коші // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С. 66–77.

Одержано 04.06.2007