УДК 519.21

В. І. Масол, М. В. Слободян (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ РОЗПОДІЛУ ЧИСЛА НЕПРАВДИВИХ РОЗВ'ЯЗКІВ З ОБМЕЖЕННЯМИ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ВИПАДКОВИХ БУЛЕВИХ РІВНЯНЬ ДО РОЗПОДІЛУ ПУАССОНА

The theorem on a estimation of the rate of convergence ($n \to \infty$) to the Poisson with a parameter 2^m distribution of the number of false solutions of a beforehand consistent system of nonlinear random Boolean equations is proved ($m = const$, $m = n - N$, n is a number of unknown variables, N is a number of system equations). The estimation with the additional condition about the number nonzero components of the solutions is obtained.

Доведена теорема про оцінку швидкості збіжності ($n \to \infty$) до пуассонівського з параметром 2^m розподілу числа хибних розв'язків наперед сумісної системи нелінійних випадкових булевих рівнянь ($m = const$, $m = n - N$, n — кількість невідомих, N — кількість рівнянь системи). Дана оцінка одержана з додатковою умовою на кількість ненульових компонент цих розв'язків.

1. Вступ. Постановка задачі. Розглянемо систему рівнянь

$$\sum_{k=1}^{g_i(n)} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} a^{(i)}_{j_1 \cdots j_k} x_{j_1} \cdots x_{j_k} = b_i, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{1}$$

у полі $GF(2)$ при умові (A):

коефіцієнти $a^{(i)}_{j_1 \cdots j_k}$ $(1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n, \ k = 1, 2, ..., g_i(n), \ i = 1, 2, ..., N)$ — незалежні випадкові величини, $P\{a^{(i)}_{j_1 \cdots j_k} = 1\} = 1 - P\{a^{(i)}_{j_1 \cdots j_k} = 0\} = p_{ik}$;

елементи b_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ — результат підстановки в ліву частину системи (1) фіксованого n-вимірного (0, 1)-вектора $\bar{x}^0$, який має $\rho(n)$ ненульових компонент;

функція $g_i(n)$ — невипадкова, $g_i(n) \in \{2, 3, \dots, n\}$ $(i = 1, 2, \dots, N)$.

Позначимо через $M(\bar{x}^0, f(n))$ сукупність усіх попарно різних n-вимірних векторів $\overline{x}$, які не співпадають з $\overline{x}^0$, що мають кількість $|\bar{x}|$ ненульових компонент, яка задовольняє нерівності

$$|\bar{x}| \ge f(n), \quad f(n) \in \{0, 1, 2, ..., n\}. \tag{2}$$

Число всіх розв'язків $\bar{x}, \bar{x} \in M(\bar{x}^0, f(n))$, системи (1) позначимо через ν_n. В роботі [1] вивчено збіжність розподілу випадкової величини ν_n до граничного $(n \to \infty)$ для $f(n) = 0$, $n \to \infty$; в [2, 3] цей же розподіл розглянуто при додатковій умові на число ненульових компонент ($\rho(n) \to \infty$, $n \to \infty$) вектора $\overline{x}^0$. В [4] (див. теорему 1) досліджено граничний розподіл випадкової величини ν_n з обмеженнями (2) та $n - \rho(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Нас цікавлять оцінки швидкості збіжності до граничного розподілу в зазначеній теоремі 1 з [4].

2. Формулювання результатів.

Теорема. *Нехай виконуються умови:* (A)*;*

$$n - N = m, \ m = const, \ -\infty < m < \infty; \tag{3}$$

знайдеться функція $\varphi(n)$, $\varphi(n) \le n$, *при якій* $f(n) = [o(\varphi(n))]$, $f(n) \ge 2$ *при* $n \to \infty$, *де* $[\,\cdot\,]$ — *знак цілої частини;*
для довільного $i = 1, 2, ..., N$ *існує така множина* T_i, $T_i \neq \varnothing$, *що при всіх достатньо великих* n

$$T_i \subseteq \{2, ..., g_i(n)\} \cap \{2, ..., f(n)\}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{nE_n} \le p_{it} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{nE_n}, \tag{5}$$

де $t \in T_i$, $E_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$;
для фіксованого цілого невід'ємного l *при всіх достатньо великих* $n = n(l)$

$$\min\left\{\hat{E}_n, \sqrt[\tau]{\mu(n)}\right\} \ge 2^l, \tag{6}$$

де $\mu(n) = \frac{n-\rho(n)}{\varphi(n)\ln n}$, $\tau > 0$, $\frac{\hat{E}_n}{E_n} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Тоді для фіксованого $k = 0, 1, 2, ...$

$$\left|P\{\nu_n = k\} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right| \le \left(\frac{2e\lambda}{\gamma}\right)^{\gamma} \times$$
$$\times \left[2 + 2^{\gamma+2}(E_n)^{-1} + (\Theta_1 + \Theta_2)\left(1 + 2^{\gamma+2}(E_n)^{-1}\right) + 4\left(1 + 2^{\gamma}(E_n)^{-1}\right)\Theta_3\right] +$$
$$+ 4\gamma\left(\frac{2e\lambda}{k}\right)^k e^{2\lambda}(E_n)^{-1} + \gamma\left(\frac{e\lambda}{k}\right)^k e^{\lambda}\left[(\Theta_1 + \Theta_2)\left(1 + 2^{\gamma+2}(E_n)^{-1}\right)\right] +$$
$$+ 4\gamma\left(\frac{e\lambda}{k}\right)^k e^{\lambda}\left(1 + 2^{\gamma}(E_n)^{-1}\right)\Theta_3, \tag{7}$$

де $\lambda = 2^m$, $\gamma = \min\left\{\left[\log_2 \hat{E}_n\right], \left[\frac{1}{\tau}\log_2 \mu(n)\right]\right\}$, $\gamma \ge 0$,

$\Theta_1 = \gamma 2^{-(n-\rho(n))+(\gamma-1)\varepsilon\varphi(n)}\sqrt{\varepsilon\varphi(n)}\left(\frac{(n-\rho(n))e}{\varepsilon\varphi(n)}\right)^{\varepsilon\varphi(n)}$,

$\Theta_2 = 2^{-n}\exp\left\{\varepsilon 2^{\gamma}\varphi(n)\left(\gamma + \ln\left(\frac{ne}{\varepsilon 2^{\gamma}\varphi(n)}\right)\right) + 2^{\gamma} + 2\ln(\varepsilon 2^{\gamma}\varphi(n))\right\}$,

$\Theta_3 = 2^{-m}\times$
$\times \exp\left\{-\frac{n-\rho(n)}{2^{\gamma}} + 2\gamma 2^{\gamma}\varepsilon\varphi(n) + 2^{\gamma} + 2\ln(2^{\gamma}\varepsilon\varphi(n)) + 2^{\gamma+1}\varepsilon\varphi(n)\ln\left(\frac{\tilde{\rho}(n)e}{2^{\gamma}\varepsilon\varphi(n)}\right)\right\}$,

$\tilde{\rho}(n) = \max\{\rho(n), n - \rho(n)\}$, $\varepsilon \in (0; 1)$.

Тут і далі вважаємо, що $0^0 \equiv 1$.

Аналізуючи праву частину (7) неважко зробити наступні зауваження.

Зауваження 1. *При виконанні умов* (3–6), $\gamma \to \infty$ *(*$n \to \infty$*)*, $\tau \ge 2$, *права частина нерівності* (7) *прямує до нуля при* $n \to \infty$. *Якщо ж виконуються* (3–6) *і* $0 < \tau < 2$ *або* $\gamma < 2\sqrt[\gamma]{3}\,e\lambda$, *то оцінка* (7) *тривіальна.*

Зауваження 2. *Якщо виконуються умови (3)-(6),* $\tau \ge 2$ *, то при всіх достатньо великих* n, *починаючи з деякого* n_1, $n \ge n_1$, *має місце оцінка*

$$\left|P\{\nu_n = k\} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right| \le 3\left(\frac{2e\lambda}{\gamma}\right)^{\gamma} + 4\gamma e^{4\lambda}(E_n)^{-1} + 9\gamma e^{2\lambda}\Theta_3.$$

Зауваження 3. *Якщо виконуються умови: (3)-(6), $\varphi(n) < \ln^2 n$, $E_n = (\ln n)^{3/2}$, $\hat{E}_n = \ln n$, $\tau \geq 2$, то при всіх достатньо великих n, починаючи з деякого n_2, $n \geq n_2$, має місце оцінка*

$$\left| P\{\nu_n = k\} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq 8\gamma e^{4\lambda} \left(E_n\right)^{-1}.$$

Зауваження 4. *Якщо виконуються умови (3)-(6), $\tau \geq 2$ та $\left(E_n \Theta_3\right)^{-1} \to 0$, $n \to \infty$, то при всіх достатньо великих n, починаючи з деякого n_3, $n \geq n_3$, має місце оцінка*

$$\left| P\{\nu_n = k\} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq 3 \left(\frac{2e\lambda}{\gamma}\right)^{\gamma} + 10\gamma e^{2\lambda} \Theta_3.$$

3. Допоміжні твердження. Позначимо $\overline{x}^1, ..., \overline{x}^k$ — попарно різні, відмінні від $\overline{x}^0$, n-вимірні $(0,1)$-вектори, $\overline{x}^\nu = (\overline{x}_1^\nu, ..., \overline{x}_n^\nu)$, $\nu = \overline{0,k}$, $1 \leq k < \infty$.

Означення. $i_{\{u_1 \ldots u_\nu\}}$ $\left(j_{\{u_1 \ldots u_\nu\}}\right)$ *— це кількість одиниць (нулів) розміщених на тих і тільки тих позиціях в усіх векторах $\overline{x}^{u_1}, ..., \overline{x}^{u_s}$, на яких в усіх векторах $\overline{x}^{u_{s+1}}, ..., \overline{x}^{u_k}, \overline{x}^0$ розміщені нулі (одиниці).*

Позначимо через $M\nu_n^{[k]}$ — k-й факторіальний момент випадкової величини ν_n $(k = 1, 2, ...)$; покладемо $M\nu_n^{[0]} \equiv 1$.

В роботі [3] показано, що при виконанні умови (A), для $k \geqslant 1$

$$M\nu_n^{[k]} = 2^{-kN} S(n,\ k;\ Q), \tag{8}$$

де

$$S(n,\ k;\ Q) = \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} \sum (n - \rho(n))! \left((n - \rho(n) - s)! \prod_{i \in I} i! \right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\substack{s'=0 \\ s'+s \geqslant 1}}^{\rho(n)} \sum{}' \rho(n)! \left((\rho(n) - s')! \prod_{j \in J} j! \right)^{-1} Q, \tag{9}$$

$$Q = \prod_{i=1}^{N} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{1 \leqslant u_1 < \cdots < u_\nu \leqslant k} \prod_{t=1}^{g_i(n)} (1 - 2p_{it})^{\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \ldots, u_\nu\}}} \right), \tag{10}$$

сумування $\sum$ $\left(\sum{}'\right)$ здійснюється по всіх $i \in I$ $(j \in J)$, де $I = \{i_{\{u_1,...,u_\nu\}} : 1 \leqslant u_1 < \cdots < u_\nu \leqslant k,\ \nu = 1, ..., k\}$ $(J = \{j_{\{u_1,...,u_\nu\}} : 1 \leq u_1 < \cdots < u_\nu \leq k, \nu = 1, ..., k\})$, таких, що

$$\sum_{i \in I} i = s \quad \left(\sum_{j \in J} j = s' \right).$$

Крім того, в [3] доведено, що для $1 \leqslant u_1 < ... < u_\nu \leqslant k$, $\nu \in \{1, ..., k\}$ і $t \in \{1, ..., n\}$ виконується нерівність

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1,...,u_\nu\}} \geqslant \sum_{(i,j) \in T} \left(C_i^t + C_j^t \right), \tag{11}$$

де $T = I_{\{u_1,...,u_\nu\}} \times J_{\{u_1,...,u_\nu\}}$.

Тут

$$I_{\{u_1,...,u_\nu\}} = \left\{ i_{\left\{\sigma_1,...,\sigma_\psi,\,\mu_1,...,\mu_l\right\}} : A\left(\psi,\,l,\,k\right)\right\},$$

$$J_{\{u_1,...,u_\nu\}} = \left\{ j_{\left\{\sigma_1,...,\sigma_\psi,\,\mu_1,...,\mu_l\right\}} : A\left(\psi,\,l,\,k\right)\right\},$$

де $A\left(\psi,\,l,\,k\right)$ — скорочений запис наступного набору обмежень: $1 \leqslant \sigma_1 < ... < \sigma_\psi \leqslant k$, $\sigma_z \in \{u_1, ..., u_\nu\}$, $z = 1, ..., \psi$, $\psi = 1, ..., \nu$, $\psi \equiv 1\,(\mathrm{mod}2)$, $1 \leqslant \mu_1 < ... < \mu_l \leqslant k$, $\mu_1, ..., \mu_l \notin \{u_1, ..., u_\nu\}$, $l = 0, ..., k - \nu$.

Нехай

$$F_{u_1...u_\nu} = \sum_{l=0}^{k-\nu} \sum_{\substack{1\leq\mu_1<...<\mu_l\leq k \\ \mu_l\notin\{u_1,...,u_\nu\}}} i_{\{u_1...u_\nu\mu_1...\mu_l\}}, \tag{12}$$

$$\Phi_{u_1...u_\nu} = \rho(n) - \sum_{q=1}^{\nu} \sum_{\substack{v_1<...<v_q \\ v_q\in\{u_1,...,u_\nu\}}} \sum_{l=0}^{k-\nu} \sum_{\substack{1\leq\mu_1<...<\mu_l\leq k \\ \mu_l\notin\{u_1,...,u_\nu\}}} j_{\{v_1...v_q\mu_1...\mu_l\}}, \tag{13}$$

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1...u_\nu\}} = \sum_{\psi=1}^{\nu} (-2)^{\psi-1} \sum_{\substack{\sigma_1<...<\sigma_\psi \\ \sigma_\psi\in\{u_1,...,u_\nu\}}} C^t_{F_{\sigma_1...\sigma_\psi}+\Phi_{\sigma_1...\sigma_\psi}} + \\ + \frac{1-(-1)^\nu}{2}\left(C^t_{\rho(n)} + \sum_{\psi=1}^{\nu} (-2)^{\psi} \sum_{\substack{\sigma_1<...<\sigma_\psi \\ \sigma_\psi\in\{u_1,...,u_\nu\}}} C^t_{\Phi_{\sigma_1...\sigma_\psi}} \right), \tag{14}$$

де $1 \leqslant u_1 < ... < u_\nu \leqslant k$, $\nu \in \{1, ..., k\}$, $t = 1, 2, ..., g_i\,(n)$, $i = 1, ..., N$. Тут $F_{u_1...u_\nu}$ $(\Phi_{u_1...u_\nu})$ — це кількість одиниць (нулів) розміщених на одних і тих же позиціях в усіх векторах $\overline{x}^{u_1}, ..., \overline{x}^{u_\nu}$, а у векторі $\overline{x}^0$ на цих позиціях знаходяться нулі (одиниці).

Лема 1. *Нехай має місце умова*

$$\sum_{l=0}^{k-1} \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1<...<\mu_l\leqslant k \\ \mu_l\neq u}} \left(i_{\{u\mu_1...\mu_l\}} + j_{\{u\mu_1...\mu_l\}}\right) \geqslant 1,\ u = \overline{1, k}. \tag{15}$$

Тоді виконується нерівність

$$\Gamma_{t,k}^{\{u\}} \geq C^{t-1}_{f(n)-1},\ \ i = \overline{1, N}. \tag{16}$$

Доведення. Використовуючи рівності (12), (13) та (14), одержимо

$$\Gamma_{t,k}^{\{u\}} = C^t_{F_u+\Phi_u} + C^t_{\rho(n)} - 2C^t_{\Phi_u},\ \ u = \overline{1, k}. \tag{17}$$

Тут $F_u = \sum\limits_{l=0}^{k-1} \sum\limits_{\substack{1\leq\mu_1<...<\mu_l\leq k \\ \mu_l\neq u}} i_{u\mu_1...\mu_l}$, $\Phi_u = \rho(n) - \Phi_u^*$, де $\Phi_u^* = \sum\limits_{l=0}^{k-1} \sum\limits_{\substack{1\leq\mu_1<...<\mu_l\leq k \\ \mu_l\neq u}} j_{u\mu_1...\mu_l}$.

Згідно (15) очевидно, що $F_u + \Phi_u^* \geq 1$. Тому, щоб довести лему 1, достатньо знайти оцінку для $\Gamma_{t,k}^{\{u\}}$ у двох випадках: $\Phi_u^* = 0$ та $\Phi_u^* \geq 1$.

Нехай $\Phi_u^* = 0$. Тоді із (17) слідує, що

$$\Gamma_{t,k}^{\{u\}} \geq C^t_{F_u+\rho(n)} - C^t_{\rho(n)} \geq C^t_{1+\rho(n)} - C^t_{\rho(n)} \geq C^{t-1}_{f(n)-1}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{18}$$

Із останніх співвідношень випливає (16). Тут було використано лему 7 з [5] ($C^t_\alpha - C^t_{\alpha-\beta} \geq \beta C^{t-1}_{\alpha-\frac{1}{2}(1+\beta)}$ для цілих додатних α, β та такого цілого t, що $\alpha - \beta \geq$ $\geq t$) та той факт, що $F_u + \rho(n) - \Phi_u^* \geq f(n)$, який випливає з (2) та рівності $F_u + \Phi_u = |\bar{x}|$.

Нехай тепер $\Phi_u^* \geq 1$. Тоді із (17), аналогічно до (18), маємо

$$\Gamma_{t,k}^{\{u\}} \geq C^t_{\rho(n)} - C^t_{\rho(n)-\Phi_u^*} \geq C^t_{\rho(n)} - C^t_{\rho(n)-1} \geq C^{t-1}_{\rho(n)-1} \geq C^{t-1}_{f(n)} \geq C^{t-1}_{f(n)-1}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{19}$$

Таким чином, беручи до уваги рівність (17), оцінки (18) та (19), одержимо (16).

Лема 2. *Нехай має місце умова*

$$\sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1<\ldots<\mu_l\leqslant k \\ \mu_l\notin\{u_1,u_2\}}} \left(i_{\{u_1\mu_1\ldots\mu_l\}} + j_{\{u_1\mu_1\ldots\mu_l\}} + i_{\{u_2\mu_1\ldots\mu_l\}} + j_{\{u_2\mu_1\ldots\mu_l\}}\right) \geqslant 1, \tag{20}$$

$1 \leq u_1 < u_2 \leq k$.

Тоді виконується нерівність

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1,u_2\}} \geq C^{t-1}_{f(n)-1}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{21}$$

Доведення. Використовуючи рівності (12), (13) та (14), одержимо

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1,u_2\}} = C^t_{F_{u_1}+\Phi_{u_1}} + C^t_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}} - 2C^t_{F_{u_1u_2}+\Phi_{u_1u_2}}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{22}$$

де

$$F_u = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1<\ldots<\mu_l\leqslant k \\ \mu_l\notin\{u\}}} i_{\{u\mu_1\ldots\mu_l\}},\ \Phi_u = \rho(n) - \Phi'_u,\ \Phi'_u = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1<\ldots<\mu_l\leqslant k \\ \mu_l\notin\{u\}}} j_{\{u\mu_1\ldots\mu_l\}},$$

$(u = u_1, u_2)$,

$$F_{u_1u_2} = \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1<\ldots<\mu_l\leqslant k \\ \mu_l\notin\{u_1,u_2\}}} i_{\{u_1u_2\mu_1\ldots\mu_l\}},$$

$$\Phi_{u_1,u_2} = \rho(n) - \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1<\ldots<\mu_l\leqslant k \\ \mu_l\notin\{u_1,u_2\}}} \left(j_{\{u_1\mu_1\ldots\mu_l\}} + j_{\{u_2\mu_1\ldots\mu_l\}}\right) - \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1<\ldots<\mu_l\leqslant k \\ \mu_l\notin\{u_1,u_2\}}} j_{\{u_1u_2\mu_1\ldots\mu_l\}}.$$

Далі перепишемо (22) у наступному вигляді

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1,u_2\}} = C^t_{F_{u_1}+\Phi_{u_1}} - C^t_{F_{u_1u_2}+\Phi_{u_1u_2}} + C^t_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}} - C^t_{F_{u_1u_2}+\Phi_{u_1u_2}}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{23}$$

Використовуючи визначення чисел F_u, Φ_u, $(u = u_1,\ u_2)$ та $F_{u_1u_2}$, $\Phi_{u_1u_2}$, представимо (23) наступним чином

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1,u_2\}} = C^t_{F_{u_1}+\Phi_{u_1}} - C^t_{F_{u_1}+\Phi_{u_1}-\psi_*} + C^t_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}} - C^t_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}-\psi^*}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{24}$$

де

$$\psi_* = \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1<\ldots<\mu_l\leqslant k \\ \mu_l\notin\{u_1,u_2\}}} \left(i_{\{u_1\mu_1\ldots\mu_l\}} + j_{\{u_2\mu_1\ldots\mu_l\}}\right),$$

$$\psi^* = \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\substack{1\leqslant\mu_1<\ldots<\mu_l\leqslant k \\ \mu_l\notin\{u_1,u_2\}}} \left(i_{\{u_2\mu_1\ldots\mu_l\}} + j_{\{u_1\mu_1\ldots\mu_l\}}\right).$$

Згідно умови (20) має місце нерівність

$$\psi_* + \psi^* \geq 1.$$

Далі знайдемо оцінку для $\Gamma_{t,k}^{\{u_1,u_2\}}$ на випадок, коли $\psi_* = 0$ та $\psi_* \geq 1$.

Якщо $\psi_* = 0$, то із рівності (24), використовуючи лему 7 з [5], беручи до уваги співвідношення

$$F_u + \rho(n) - \Phi_u^{'} \geq f(n), \;\; u = u_1,\, u_2, \;\; i = \overline{1,N}, \tag{25}$$

яке має місце згідно рівності $F_u + \Phi_u = |\bar{x}|$ та умови (2), одержимо

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1,u_2\}} \geq C_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}}^{t} - C_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}-1}^{t} \geq C_{F_{u_2}+\rho(n)-\Phi'_{u_2}-1}^{t-1} \geq C_{f(n)-1}^{t-1}, \tag{26}$$

а звідси, в свою чергу, слідує (21).

Якщо $\psi_* \geq 1$, то аналогічними міркуваннями неважко одержати оцінку

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1,u_2\}} \geq C_{F_{u_1}+\Phi_{u_1}}^{t} - C_{F_{u_1}+\Phi_{u_1}-1}^{t} \geq C_{F_{u_1}+\rho(n)-\Phi'_{u_1}-1}^{t-1} \geq C_{f(n)-1}^{t-1}, \;\; i = \overline{1,N}. \tag{27}$$

Співвідношення (22), (26) та (27) доводять лему 2.

Лема 3. *В умовах теореми для цілих невід'ємних k,*

$$0 < k \leq \gamma, \tag{28}$$

при всіх достатньо великих n

$$M\nu_n^{[k]} = \lambda^k + \Delta(k,n), \tag{29}$$

де

$$|\Delta(k,\, n)| \leq$$
$$2^{(m+1)k+2}(E_n)^{-1} + 2^{mk}(\Theta_1+\Theta_2)\left(1+2^{k+2}(E_n)^{-1}\right) + 4\left(2^{m(k-1)}\right)\left(1+2^{k}(E_n)^{-1}\right)\times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{n-\rho(n)}{2^k} + 2k2^k\varepsilon\varphi(n) + 2^k + 2\ln(2^k\varepsilon\varphi(n)) + 2^{k+1}\varepsilon\varphi(n)\ln\left(\frac{\tilde{\rho}(n)e}{2^k\varepsilon\varphi(n)}\right)\right\}. \tag{30}$$

Доведення. Представимо $M\nu_n^{[k]}$ у вигляді

$$M\nu_n^{[k]} = 2^{-kN}\sum_{\Delta\geq 0} S^{(\Delta)}(n,\; k;\; Q), \tag{31}$$

де $S^{(\Delta)}(n,\,k;\,Q)$ відрізняється від $S(n,\,k;\,Q)$ тим, що всі i та j $(i \in I,\ j \in J)$, які беруть участь в записі $S(n,\,k;\,Q)$ згідно (9), приймають лише такі значення, що існує рівно Δ попарно різних наборів $\omega_\alpha = \{u_1^{(\alpha)}, ..., u_{\xi_\alpha}^{(\alpha)}\}$, $1 \le u_1^{(\alpha)} < \cdots < u_{\xi_\alpha}^{(\alpha)} \le k$, $\xi_\alpha \in \{1, ..., k\}$, $\alpha = 1, ..., \Delta$, для кожного з яких знайдеться таке $t^{(\alpha)} \in \{2,\ ...,\ r\}$, що виконується

$$\Gamma^{\omega_\alpha}_{t^{(\alpha)},\,k} = 0, \tag{32}$$

і для наборів $\{\upsilon_1,\ ...,\upsilon_\gamma\}$, $1 \le \upsilon_1 < \cdots < \upsilon_\gamma \le k$, $\gamma = 1,\ ...,\ k$, які задовольняють співвідношенню $\{\upsilon_1,\ ...,\upsilon_\gamma\} \ne \omega_\alpha$, $\alpha = 1,\ ...\ ,\ \Delta$, має місце оцінка

$$\Gamma^{\{\upsilon_1,\,...\,,\upsilon_\gamma\}}_{t,\,k} \ge 1 \tag{33}$$

для всіх $t \in \{2,\ \ldots,\ r\}$, $r = [\varepsilon\varphi(n)]$.

Подамо (31) у вигляді

$$M\nu_n^{[k]} = S_1 + p_1, \tag{34}$$

де $S_1 = 2^{-kN} S^{(0)}(n,k;\,Q)$, $p_1 = 2^{-kN} \sum\limits_{\Delta=1}^{2^k-1} S^{(\Delta)}(n,k;\,Q)$.

Покажемо, що

$$\lambda^k - 2^{mk}\left(\frac{2^{k+2}}{E_n} + (\Theta_1+\Theta_2)\left(1+\frac{2^{k+2}}{E_n}\right)\right) \le S_1 \le$$
$$\le \lambda^k + 2^{mk}\left(\frac{2^{k+2}}{E_n} + (\Theta_1+\Theta_2)\left(1+\frac{2^{k+2}}{E_n}\right)\right). \tag{35}$$

З цією метою при $\Delta = 0$ з урахуванням оцінки (33), умов (4) та (5) від рівності (10) перейдемо до оцінки

$$1 - \frac{2^{k+2}}{E_n} \le Q \le 1 + \frac{2^{k+2}}{E_n}. \tag{36}$$

Далі, згідно поліноміальної теореми та співвідношення (36), отримуємо

$$2^{-kN}(2^{nk} - \sigma_0 - \sigma_1)\left(1 - \frac{2^{k+2}}{E_n}\right) \le S_1 \le 2^{-kN}(2^{nk} - \sigma_0 - \sigma_1)\left(1 + \frac{2^{k+2}}{E_n}\right), \tag{37}$$

де

$$\sigma_0 = 1 + \sum_{d=1}^{2^k-1} S_d^{(0)}(n,k;1),$$

$S_d^{(0)}(n,\,k;\,1)$ відрізняється від $S(n,\,k;\,1)$ тим, що числа $i \in I$ $(j \in J)$ в правій частині рівності (9) змінюються таким чином, що існує рівно d елементів з множини $\{\Gamma^{\{u_1,\,...\,,u_\nu\}}_{t,k}$, $1 \le u_1 < ... < u_\nu \le k$, $\nu = 1, ..., k\}$, для кожного з яких має місце

$$\Gamma^{\{u_1,...,u_\nu\}}_{t,k} = 0,$$

$d = 1,\,2, ...,\,2^k - 1$,

$$\sigma_1 \le \sum_{p=1}^{k} S_p^{(0)}(n,k;1). \tag{38}$$

$S_p^{(0)}(n,\,k;\,1)$ відрізняється від $S(n,\,k;\,1)$ тим, що сумування в правій частині рівності (9) здійснюється по таких $i \in I$ ($j \in J$), що хоча б для одного p, $p \in \{1,...,k\}$,

$$\sum_{i\in I_{\{p\}}} i + \rho(n) - \sum_{j\in I_{\{p\}}} j < f(n). \tag{39}$$

Проводячи міркування аналогічні до тих, які були зроблені в [2], щодо оцінки для σ_0 (див. [2], співвід. (25)-(29)), неважко одержати

$$0 \le \sigma_0 \le 2^{kn}\Theta_2. \tag{40}$$

Покажемо, що

$$0 \le \sigma_1 \le 2^{nk}\Theta_1. \tag{41}$$

Для цього, з урахуванням (39), подамо $S_p^{(0)}(n,k;1)$ наступним чином:

$$S_p^{(0)}(n,k;1) = \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C^s_{n-\rho(n)} \sum_{s_1+s_2=s} C_s^{s_1} \left(\sum_{\sum\limits_{i\in I_{\{p\}}} i = s_1} \frac{s_1!}{\prod\limits_{i\in I_{\{p\}}} i!} \right) \left(\sum_{\sum\limits_{i\in I\setminus I_{\{p\}}} i = s_2} \frac{s_2!}{\prod\limits_{i\in I\setminus I_{\{p\}}} i!} \right) \times$$
$$\times \sum_{s'=0}^{\rho(n)} C^{s'}_{\rho(n)} \left(\sum_{\sum\limits_{j\in J_{\{p\}}} j = s'} \frac{s'!}{\prod\limits_{j\in J_{\{p\}}} j!} \right). \tag{42}$$

Використовуючи поліноміальну теорему, співвідношення (38), (39) та (42), одержимо

$$\sigma_1 \le k \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C^s_{n-\rho(n)} \left(2^{k-1}-1\right)^s \left(\sum_{s_1=0}^{f(n)} C_s^{s_1} \left(2^{k-1}\right)^{s_1} \right) \sum_{s'=0}^{\rho(n)} C^{s'}_{\rho(n)} \left(2^k - 1\right)^{s'}.$$

Звідси, використовуючи нерівність $r > f(n)$, матимемо

$$\sigma_1 \le k 2^{nk-(n-\rho(n))+(k-1)r} \left(\sum_{s_1=0}^{r} C^{s_1}_{n-\rho(n)} \right). \tag{43}$$

Тоді з (43), згідно нерівності

$$n! > n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{1}{12n+1}}, \tag{44}$$

яка доведена в [6], одержимо (41).

Беручи до уваги (3), (34), (37), (40) та (41), одержимо (35).

Далі покажемо, що для $\Delta \ge 1$ має місце оцінка

$$p_1 \le 4\left(2^{m(k-1)}\right)\left(1+\frac{2^k}{E_n}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{n-\rho(n)}{2^k} + 2k2^k\varepsilon\varphi(n) + 2^k + 2\ln(2^k\varepsilon\varphi(n)) + 2^{k+1}\varepsilon\varphi(n)\ln\left(\frac{\tilde\rho(n)e}{2^k\varepsilon\varphi(n)}\right)\right\}. \tag{45}$$

З цією метою, позначимо через M_1 $\left(\tilde{M}_1\right)$ сукупність усіх $i,\ i \in I\ \ (j,\ j \in J)$, що не належать I_{ω_α} (J_{ω_α}), $\alpha = 1, ..., \Delta$ і покладемо $M_2 = I \backslash M_1,\ \tilde{M}_2 = J \backslash \tilde{M}_1$. Для потужності множини M_1 $\left(\tilde{M}_1\right)$ приймемо запис R_1 $\left(\tilde{R}_1\right)$. Нехай z — найменше ціле число, для якого

$$\Delta \leq 2^z - 1,\ \ 1 \leq z \leq k. \tag{46}$$

Згідно твердження 1 з [1] одержуємо:

$$R_1 \leq 2^{k-z} - 1;\ \ \tilde{R}_1 \leq 2^{k-z} - 1. \tag{47}$$

Далі покладемо

$$p_2 = p_1 - S_2,$$

де

$$S_2 = 2^{-kN} \sum_{\Delta=1}^{2^k-1} S^{(\Delta)}_{(2^z-2)}(n, k;\, Q).$$

$S^{(\Delta)}_{(2^z-2)}(n, k;\, Q)$ відрізняється від $S^{(\Delta)}(n,\ k;\ Q)$ тим, що сумування в (9) здійснюється з урахуванням умови

$$\Delta < 2^z - 1. \tag{48}$$

Покажемо, що

$$S_2 \leq 2^{mk-m} \left(1 - 2^{-k}\right)^N \left(1 + 2^k (E_n)^{-1}\right) \times \\ \times \exp\left\{k 2^k \varepsilon\varphi(n) + 2^k + 2\ln(2^k \varepsilon\varphi(n)) + 2^{k+1}\varepsilon\varphi(n) \ln\left(\frac{\tilde{\rho}(n) e}{2^k \varepsilon\varphi(n)}\right)\right\}. \tag{49}$$

При виконанні (33), з урахуванням умов (4) та (5), маємо наступну нерівність для Q з (10):

$$Q \leq Q^*, \tag{50}$$

де $Q^* = (\Delta + 1)^N \left(1 + \frac{2^{-z+1}(2^k - \Delta - 1)}{E_n}\right)$.

Далі, з (11) та (32) слідує, що

$$0 \leq i < r\ \ (0 \leq j < r) \tag{51}$$

для всіх $i \in M_2$ $(j \in \tilde{M}_2)$.

Використовуючи (50), оцінимо S_2 наступним чином

$$S_2 \leq 2^{-kN+2^k} \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C^s_{n-\rho(n)} \sum_{s_1=0}^{s} R_1^{s-s_1} \left(\sum_{\sum\limits_{i \in M_2} i = s_1} C_s^{s_1} \frac{s_1!}{\prod\limits_{i \in M_2} i!}\right) \times \\ \times \sum_{s'=0}^{\rho(n)} C^{s'}_{\rho(n)} \sum_{s_1'=0}^{s'} \tilde{R}_1^{s'-s_1'} \left(\sum_{\sum\limits_{j \in \tilde{M}_2} j = s_1'} C_{s'}^{s_1'} \frac{s_1'!}{\prod\limits_{j \in \tilde{M}_2} j!}\right) Q^*.$$

Звідси, згідно (47), (48) та (51) маємо

$$S_2 \le 2^{-N(k-z)+2^k+(k-z)n}\left(1-2^{-k}\right)^N\left(1+2^k(E_n)^{-1}\right)\sum_{s_1=0}^{2^k r} C_{n-\rho(n)}^{s_1}2^{ks_1}\sum_{s_1'=0}^{2^k r} C_{\rho(n)}^{s_1'}2^{ks_1'} \le$$
$$\le 2^{-(k-z)N+2^k+(k-z)n+k2^k\varepsilon\varphi(n)}\left(1-2^{-k}\right)^N\left(1+2^k(E_n)^{-1}\right)(2^k\varepsilon\varphi(n))^2\left(C_{\tilde\rho(n)}^{2^k\varepsilon\varphi(n)}\right)^2. \tag{52}$$

Використовуючи співвідношення (3), (44) та (52), отримаємо (49).

Нехай мають місце обмеження:

$$\Delta = 2^z - 1,\ 1 \le z \le k, \tag{53}$$

$$R_1 < 2^{k-z} - 1,\ \tilde R_1 \le 2^{k-z} - 1. \tag{54}$$

Покладемо

$$p_3 = p_2 - S_3,$$
$$S_3 = 2^{-kN}\sum_{\Delta=1}^{2^k-1} S_{(2^z-1)}^{(\Delta)}(n,k;\,Q).$$

$S_{(2^z-1)}^{(\Delta)}(n,k;\,Q)$ відрізняється від $S^{(\Delta)}(n,\,k;\,Q)$ тим, що сумування в (9) здійснюється з урахуванням обмежень (53) та (54).

Покажемо, що при обмеженнях (53) та (54) має місце оцінка

$$S_3 \le 2^{mk-m}\left(1-2^{-k}\right)^{n-\rho(n)}\left(1+2^k(E_n)^{-1}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{2k2^k\varepsilon\varphi(n)+2^k+2\ln(2^k\varepsilon\varphi(n))+2^{k+1}\varepsilon\varphi(n)\ln\left(\frac{\tilde\rho(n)e}{2^k\varepsilon\varphi(n)}\right)\right\}. \tag{55}$$

Беручи до уваги (50), з урахуванням (53), запишемо оцінку

$$S_3 \le 2^{-N(k-z)+2^k}\sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C_{n-\rho(n)}^{s}\sum_{s_1=0}^{s} R_1^{s-s_1}\left(\sum_{\sum\limits_{i\in M_2} i=s_1} C_s^{s_1}\frac{s_1!}{\prod\limits_{i\in M_2} i!}\right)\times$$
$$\times\sum_{s'=0}^{\rho(n)} C_{\rho(n)}^{s'}\sum_{s_1'=0}^{s'}\tilde R_1^{s'-s_1'}\left(\sum_{\sum\limits_{j\in\tilde M_2} j=s_1'} C_{s'}^{s_1'}\frac{s_1'!}{\prod\limits_{j\in\tilde M_2} j!}\right)\left(1+2^k(E_n)^{-1}\right).$$

Звідси, згідно (3) та (54), одержимо

$$S_3 \le 2^{2^k+m(k-1)}\left(1+2^k(E_n)^{-1}\right)\left(1-2^{-k}\right)^{n-\rho(n)}2^{2k2^k\varepsilon\varphi(n)}(2^k\varepsilon\varphi(n))^2\left(C_{\tilde\rho(n)}^{2^k\varepsilon\varphi(n)}\right)^2. \tag{56}$$

Тепер, використовуючи (44) та (56), отримаємо (55).

Далі перевіримо, що коли $\Delta = 2^z - 1$, $1 \le z \le k$, і $z \in \{k, k-1\}$ або $k \in \{1,2\}$, то існує таке α, $\alpha \in \{1,2,...,\Delta\}$, для якого $\xi_\alpha \le 2$. Дійсно, якщо

$z = k$ або $k \in \{1, 2\}$, то, очевидно існує зазначене α. Якщо $z = k - 1$, то на основі зауваження 2 в [1] існує зазначений параметр α, для якого $\xi_\alpha \le 2$. Тоді лема 1, лема 2 та умова (4) дозволяють встановити, що якщо $\xi_\alpha \le 2$ для деякого α, то $\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha} \ge 1$.

Нехай мають місце обмеження

$$\xi_\alpha \ge 3, \quad \alpha = 1, \dots, \Delta, \qquad \Delta = 2^z - 1, \quad 1 \le z \le k - 2, \qquad 3 \le k < \infty, \tag{57}$$

$$R_1 = \tilde{R}_1 = 2^{k-z} - 1. \tag{58}$$

Покладемо

$$p_4 = p_3 - S_4,$$

$$S_4 = 2^{-kN} \sum_{\Delta=1}^{2^k-1} S_{(R_1,\tilde{R}_1)}^{(\Delta)}(n, k;\, Q).$$

$S_{(R_1,\tilde{R}_1)}^{(\Delta)}(n, k;\, Q)$ відрізняється від $S^{(\Delta)}(n,\, k;\, Q)$ тим, що сумування в (9) здійснюється з урахуванням обмежень (57) та (58).

Переконаємося у тому, що якщо виконуються (57) та (58), то

$$S_4 \le 2^{mk-m} \left(1 - 2^{-k}\right)^n \left(1 + 2^k (E_n)^{-1}\right) \times$$
$$\times\, 2^{2^k} 2^{2k2^k\varepsilon\varphi(n)} (2^k \varepsilon\varphi(n))^2 \left(\frac{\tilde{\rho}(n)}{\sqrt{\varepsilon}\varphi(n)}\right)^{2\sqrt{\varepsilon}\varphi(n)} \left(\frac{\tilde{\rho}(n)}{2^k\varepsilon\varphi(n)}\right)^{2\varepsilon 2^k\varphi(n)} (\sqrt{\varepsilon}\varphi(n))^2. \tag{59}$$

Якщо мають місце (57) та (58), то згідно твердження 2 в [1] множина M_1 ($\tilde{M}_1$) містить не менше трьох елементів $i_{m_\nu} \in M_1$ ($j_{\tilde{m}_\nu} \in \tilde{M}_1$), $\nu = \overline{1,3}$, таких, що для декого $\alpha \in \{1, \dots, \Delta\}$ ($\tilde{\alpha} \in \{1, \dots, \Delta\}$)

$$|\omega_\eta \cap m(\eta,\nu)| = 2,\ \ \nu = \overline{1,3},\ \ |\omega_\eta \cap (a_\eta \cup b_\eta)| = 3,\ \ \eta \in \{\alpha, \tilde{\alpha}\} \tag{60}$$

для довільних $a_\eta, b_\eta \in \{m(\eta,\nu) : \nu = \overline{1,3}\}, a_\eta \ne b_\eta$, де $m(\eta,\nu) = \{m_\nu, \text{якщо}\, \eta = \alpha;\, \tilde{m}_\nu, \text{якщо}\, \eta = \tilde{\alpha}\}$, $\nu = \overline{1,3}$. Для заданого η, внаслідок (20) з [1] і (60),

$$\Gamma_{t,k}^{\omega_{\tilde{\alpha}}} \ge \gamma_t^{\{a_{\tilde{\alpha}} \cup b_{\tilde{\alpha}}\}}, \quad t \in \{2, \dots, r\}, \tag{61}$$

$$\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha} \ge \gamma_t^{\{a_\alpha \cap b_\alpha\}}. \tag{62}$$

Оцінюючи праву частину (61) з допомогою співвідношення (23), встановленого в [1], знаходимо

$$\gamma_t^{\{a_{\tilde{\alpha}} \cup b_{\tilde{\alpha}}\}} \ge t^{-1} j_*(j^* - 2^{-1}(j_* - 1)) C_{(j^*/2)+(3j_*/4)+5/4}^{t-2} \tag{63}$$

за умови, що $j_* \ge t$, де $j_* = \min\{j_{a_{\tilde{\alpha}}}, j_{b_{\tilde{\alpha}}}\}$, $j^* = \max\{j_{a_{\tilde{\alpha}}}, j_{b_{\tilde{\alpha}}}\}$. Аналогічно до (23) з [1], одержимо

$$\gamma_t^{\{a_\alpha \cap b_\alpha\}} \ge t^{-1} i_*(i^* - 2^{-1}(i_* - 1)) C_{(i^*/2)+(3i_*/4)+5/4}^{t-2} \tag{64}$$

за умови, що $i_* \ge t$, де $i_* = \min\{i_{a_\alpha}, i_{b_\alpha}\}$, $i^* = \max\{i_{a_\alpha}, i_{b_\alpha}\}$.

Якщо $i_* \geq \sqrt{\varepsilon}\varphi(n)$, $j_* \geq \sqrt{\varepsilon}\varphi(n)$, то нерівності $i_* \geq t$, $j_* \geq t$, $t \in \{2, ..., r\}$ очевидно, виконуються для $0 < \varepsilon < 1$ і тому із (63) та (64) випливає

$$\Gamma_{t,k}^{\omega_\eta} \geq \varepsilon(2t)^{-1}(\varphi(n))^2 C_{(5\sqrt{\varepsilon}\varphi(n)/4)-5/4}^{t-2}, \ \ \eta \in \{\alpha, \tilde{\alpha}\},$$

що суперечить (32) при достатньо малому $\varepsilon > 0$ і $t \in \{2, ..., r\}$.

Таким чином, при обмеженнях (57) та (58) принаймні один елемент $i_* \in M_1$ ($j_* \in \tilde{M}_1$) задовольняє нерівності

$$i_* < \sqrt{\varepsilon}\varphi(n) \ (j_* < \sqrt{\varepsilon}\varphi(n)). \tag{65}$$

Беручи до уваги (50), оцінимо S_4 наступним чином

$$S_4 \leq 2^{-kN+2^k} \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C_{n-\rho(n)}^{s} \sum_{s_1+s_2=s} C_s^{s_1} \left(\sum_{\sum\limits_{i \in M_2} i = s_2} \frac{s_2!}{\prod\limits_{i \in M_2} i!} \right) \times$$
$$\times \sum_{i_*+s_*=s_1} C_{s_1}^{i_*} \left(\sum_{\sum\limits_{i \in M_1 \setminus i_*} i = s_*} \frac{s_*!}{\prod\limits_{i \in M_1 \setminus i_*} i!} \right) \times$$
$$\times \sum_{s'=0}^{\rho(n)} C_{\rho(n)}^{s} \sum_{s'_1+s'_2=s} C_{s'}^{s'_1} \left(\sum_{\sum\limits_{j \in \tilde{M}_2} j = s'_2} \frac{s'_2!}{\prod\limits_{j \in \tilde{M}_2} i!} \right) \sum_{j_*+s'_*=s'_1} C_{s'_1}^{j_*} \left(\sum_{\sum\limits_{j \in \tilde{M}_1 \setminus j_*} j = s'_*} \frac{s'_*!}{\prod\limits_{j \in \tilde{M}_1 \setminus j_*} j!} \right) Q^*.$$

Звідси, використовуючи (57) та (58), одержимо

$$S_4 \leq 2^{-kN+2^k} \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C_{n-\rho(n)}^{s} \sum_{s_1+s_2=s} C_s^{s_1} 2^{ks_2} \sum_{i_*+s_*=s_1} C_{s_1}^{i_*} \left(2^{k-z} - 2\right)^{s_*} \times$$
$$\times \sum_{s'=0}^{\rho(n)} C_{\rho(n)}^{s'} \sum_{s'_1+s'_2=s'} C_{s'}^{s'_1} 2^{ks'_2} \sum_{i_*+s'_*=s'_1} C_{s'_1}^{i_*} \left(2^{k-z} - 2\right)^{s'_*} Q^*. \tag{66}$$

Оцінюючи праву частину (66) за допомогою (65), знаходимо

$$S_4 \leq 2^{-kN+2^k} \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C_{n-\rho(n)}^{s} \left(2^{k-z} - 2\right)^{s} 2^{k2^k r} \sum_{s_1=0}^{2^k r} C_{n-\rho(n)}^{s_1} \sum_{i_*=0}^{\sqrt{\varepsilon}\varphi(n)} C_{n-\rho(n)}^{i_*} \times$$
$$\times \sum_{s'=0}^{\rho(n)} C_{\rho(n)}^{s'} \left(2^{k-z} - 2\right)^{s'} 2^{k2^k r} \sum_{s'_1=0}^{2^k r} C_{\rho(n)}^{s'_1} \sum_{j_*=0}^{\sqrt{\varepsilon}\varphi(n)} C_{\rho(n)}^{j_*} Q^*. \tag{67}$$

Беручи до уваги (3), (44), (57), (58) та (67), отримаємо (59).

Якщо

$$R_1 = 2^{k-z} - 1, \ \tilde{R}_1 < 2^{k-z} - 1, \tag{68}$$

то міркування, за допомогою яких одержано (55) та (59), дають, з урахуванням (57), оцінку

$$S_5 \le 2^{mk-m}\left(1-2^{-k}\right)^n\left(1+2^k(E_n)^{-1}\right)\times$$
$$\times\, 2^{2^k}2^{2k2^k\varepsilon\varphi(n)}(2^k\varepsilon\varphi(n))^2\left(\frac{\tilde\rho(n)}{\sqrt{\varepsilon}\varphi(n)}\right)^{\sqrt{\varepsilon}\varphi(n)}\left(\frac{\tilde\rho(n)}{2^k\varepsilon\varphi(n)}\right)^{2\varepsilon 2^k\varphi(n)}(\sqrt{\varepsilon}\varphi(n)),\quad (69)$$

де $S_5 = p_4 = 2^{-kN}\sum\limits_{\Delta=1}^{2^k-1} S^{(\Delta)}_{(R_1)}(n,k;\,Q)$. Тут $S^{(\Delta)}_{(R_1)}(n,k;\,Q)$ відрізняється від $S^{(\Delta)}(n,k;\,Q)$ тим, що сумування в (9) здійснюється з урахуванням (57) та (68).

Аналізуючи обмеження (48), (53), (54), (57), (58) та (68), неважко переконатися у тому, що ними вичерпуються усі можливі варіанти підсумовування за параметрами s, s', i, j ($i\in I$, $j\in J$) в (9), при яких нерівність (45) має місце для $\Delta\ge 1$.

Таким чином, співвідношення (49), (55), (59) та (69) в умовах леми доводять (45).

Далі, в силу (34), (35), знаходимо, що $M\nu_n^{[k]} = \lambda^k + \Delta(k,\,n)$, де

$$\Delta(k,\,n) = \psi(k,\,n) + p_1,$$

$$-\,2^{mk}\left(\frac{2^{k+2}}{E_n}+(\Theta_1+\Theta_2)\left(1+\frac{2^{k+2}}{E_n}\right)\right)\le\psi(k,\,n)\le$$
$$\le 2^{mk}\left(\frac{2^{k+2}}{E_n}+(\Theta_1+\Theta_2)\left(1+\frac{2^{k+2}}{E_n}\right)\right).\quad (70)$$

Використовуючи співвідношення (45) та (70), з урахуванням (28), маємо, очевидно, (29) та (30).

4. Доведення теореми. Розглянемо наступну нерівність при фіксованих цілих q, $q\ge 0$:

$$\left|P\{\nu_n=q\}-\frac{\lambda^q}{q!}e^{-\lambda}\right|\le R_1+R_2+R_3,\quad (71)$$

де

$$R_1=\left|P\{\nu_n=q\}-\sum_{k=q}^{q+2\nu-1}(-1)^{k-q}C_k^qB_{kn}\right|,$$

$$R_2=\left|\sum_{k=q}^{q+2\nu-1}(-1)^{k-q}C_k^q\left[B_{kn}-\frac{\lambda^k}{k!}\right]\right|,$$

$$R_3=\left|\sum_{k=q}^{q+2\nu-1}(-1)^{k-q}C_k^q\frac{\lambda^k}{k!}-\frac{\lambda^q}{q!}e^{-\lambda}\right|,$$

B_{kn} – k-й біноміальний момент випадкової величини ν_n, $k\ge 0$.

Виберемо n так, щоб для фіксованого цілого $q\ge 0$

$$\frac{\lambda^{q+2\nu}}{q!(2\nu)!}<\left(\frac{2e\lambda}{\gamma}\right)^{\gamma},\quad (72)$$

де $2\nu = \gamma - q \geq 0$, параметр γ визначений у формулюванні теореми.

Із нерівності

$$R_3 < \frac{\lambda^{q+2\nu}}{q!(2\nu)!}$$

та (72), випливає, що

$$R_3 < \left(\frac{2e\lambda}{\gamma}\right)^{\gamma}. \tag{73}$$

Використовуючи (28)-(30), знаходимо, що

$$\left|B_{q+2\nu,\,n} - \frac{\lambda^{q+2\nu}}{(q+2\nu)!}\right| = \frac{1}{(q+2\nu)!}\left|\Delta(q+2\nu,\,n)\right| \leq$$
$$\leq \frac{2^{(q+2\nu)m}}{(q+2\nu)!}\left(2^{q+2\nu+2}\,(E_n)^{-1} + (\Theta_1+\Theta_2)\left(1+2^{q+2\nu+2}\,(E_n)^{-1}\right)\right) +$$
$$+\,4\frac{2^{(q+2\nu)m}}{(q+2\nu)!}\left(\left(1+2^{q+2\nu}\,(E_n)^{-1}\right)\Theta_3\right). \tag{74}$$

Далі перепишемо (74) наступним чином

$$\left|B_{q+2\nu,\,n} - \frac{\lambda^{q+2\nu}}{(q+2\nu)!}\right| \leq$$
$$\leq \frac{2^{m\gamma}}{\gamma!}\left(2^{\gamma+2}\,(E_n)^{-1} + (\Theta_1+\Theta_2)\left(1+2^{\gamma+2}\,(E_n)^{-1}\right) + 4\left(1+2^{\gamma}\,(E_n)^{-1}\right)\Theta_3\right). \tag{75}$$

Згідно нерівності Бонферроні [7] маємо

$$0 \leq P\{\nu_n = q\} - \sum_{k=q}^{q+2\nu-1}(-1)^{k-q}C_k^q B_{kn} \leq C_{q+2\nu}^q B_{q+2\nu,\,n}. \tag{76}$$

Із (75), використовуючи (72), з урахуванням (76), знаходимо, що

$$R_1 < \left(\frac{2e\lambda}{\gamma}\right)^{\gamma} \times$$
$$\times\left(1+2^{\gamma+2}\,(E_n)^{-1} + (\Theta_1+\Theta_2)\left(1+2^{\gamma+2}\,(E_n)^{-1}\right) + 4\left(1+2^{\gamma}\,(E_n)^{-1}\right)\Theta_3\right). \tag{77}$$

Розглянемо вираз $R_2 = \left|\sum_{k=q}^{q+2\nu-1}(-1)^{k-q}C_k^q\left[B_{kn} - \frac{\lambda^k}{k!}\right]\right|$. Беручи до уваги (28)-(30), неважко показати, що

$$\sup_{q\leq k\leq q+2\nu-1} C_k^q\left|B_{kn} - \frac{\lambda^k}{k!}\right| \leq 4\left(\frac{2e\lambda}{q}\right)^{q} e^{2\lambda}(E_n)^{-1} +$$
$$+\left(\frac{e\lambda}{q}\right)^{q} e^{\lambda}\left((\Theta_1+\Theta_2)\left(1+2^{\gamma+2}\,(E_n)^{-1}\right) + 4\left(1+2^{\gamma}\,(E_n)^{-1}\right)\Theta_3\right). \tag{78}$$

Згідно нерівності (78) запишемо

$$R_2 < \sum_{k=q}^{q+2\nu-1} C_k^q \left| B_{kn} - \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq 4 \left(\frac{2e\lambda}{q} \right)^q \gamma e^{2\lambda} (E_n)^{-1} +$$
$$+ \left(\frac{e\lambda}{q} \right)^q \gamma e^{\lambda} \left((\Theta_1 + \Theta_2) \left(1 + 2^{\gamma+2} \, (E_n)^{-1} \right) + 4 \left(1 + 2^{\gamma} \, (E_n)^{-1} \right) \Theta_3 \right). \quad (79)$$

Таким чином, з урахуванням (71), (73), (77) та (79), отримуємо (7). Теорема доведена.

1. *Масол В. І.* Граничний розподіл числа хибних розв'язків системи випадкових булевих рівнянь, яка має лінійну частину // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, №9. – С. 1214–1226.
2. *Масол В. І., Слободян М. В.* Швидкість збіжності розподілу числа хибних розв'язків системи нелінійних випадкових рівнянь у полі $GF(2)$ до граничного розподілу // ТВіМС. – 2007. – Вип. 77.
3. *Масол В. И.* Теорема о предельном распределении числа ложных решений системы нелинейных случайных булевых уравнений // Теория вероятн. и её применение. – 1998. – **50**, в. 1. – С. 41–56.
4. *Масол В. И.* Пуассоновские теоремы для предельного распределения числа решений системы нелинейных случайных булевых уравнений. II// III Всерос. школа-коллоквиум по стохаст. методам: Тез. докл. – 1996. – С. 21–22.
5. *Masol V. I.* Moments of the number of solutions of a system of random Boolean equtions // Random Oper. Stoch. Eqs. –1993. –Vol. 1, № 2. – P. 169–177.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. –Т.1, М., 1964. – 498 с.
7. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384 с.

Одержано 01.04.2007