УДК 519.21

В. І. Масол, С. Я. Слободян (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ДО НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ЧИСЛА ХИБНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ БУЛЕВИХ РІВНЯНЬ, ЯКА МАЄ ЛІНІЙНУ ЧАСТИНУ

Beforehand consistent system of nonlinear random equations over the field GF(2) consisting of two elements is considered. We assume that coefficients of equations are independent random variables with known distribution. Conditions under which the number of solutions of the specified system has asymptotically (as $n \to \infty$, where n – the size of a unknown vector) standard normal distribution are found. It is supposed, that each equation has a linear part with positive probability, as against received before results.

Розглядається наперед сумісна система нелінійних рівнянь над полем GF(2), що складається з двох елементів. Припускається, що коефіцієнти рівнянь є незалежними випадковими величинами з відомим розподілом. Знайдені умови, при яких число розв'язків зазначеної системи має асимптотично (при $n \to \infty$, де n – розмір невідомого (0,1)-вектора) стандартний нормальний розподіл. На відміну від отриманих раніше результатів, припускається, що кожне рівняння з додатною імовірністю має лінійну частину.

1. Вступ. Постановка задачі.

Розглянемо над полем GF(2), що складається з двох елементів, систему рівнянь

$$\sum_{k=1}^{g_q(n)} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} a^{(q)}_{j_1 \ldots j_k} x_{j_1} \ldots\ x_{j_k} = b_q, \;\; q = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

яка задовольняє умову (A).

Умова (A): 1) Коефіцієнти $a^{(q)}_{j_1 \ldots j_k}$, $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$, $k = 1, \ldots, g_q(n)$, $q = 1, \ldots, N$, є незалежними випадковими величинами, які приймають значення 1 з ймовірністю $P\left\{ a^{(q)}_{j_1 \ldots j_k} = 1 \right\} = p_{qk}$ і значення 0 з ймовірністю $P\left\{ a^{(q)}_{j_1 \ldots j_k} = 0 \right\} = 1 - p_{qk}$.

2) Елементи b_q, $q = 1, ..., N$, являють собою результат підстановки в ліву частину системи (1) фіксованого n- вимірного (0,1)-вектора $\bar{x}^0$.

3) Функція $g_q(n)$, $q = 1, ..., N$, – невипадкова, $g_q(n) \in \{2, ..., n\}$, $q = 1, ..., N$.

Через ν_n позначимо число хибних розв'язків системи (1), тобто число розв'язків системи (1), відмінних від вектора $\bar{x}^0$.

Нас цікавлять умови, при яких випадкова величина ν_n має граничний ($n \to \infty$) нормальний розподіл.

Покладемо $[\lambda] = 2^m$, $m = n - N$, $[\cdot]$ – знак цілої частини.

2. Формулювання результатів.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (A), *при* $n \to \infty$

$$\lambda = \frac{1}{1 + \alpha + \omega} \log_2 \left(\log_2 \frac{n}{\varphi(n) \ln n} \right),$$
$$\varphi(n) > 0, \;\; \alpha - const, \;\; \alpha > \exp\{1 + \alpha^{-1}\}, \;\; \omega - const, \;\; \omega > 0, \tag{2}$$

$$\lambda \to \infty; \tag{3}$$

$$\delta_{q1}(n) \le p_{q1} \le 1 - \delta_{q1}(n), \;\; q = 1, ..., N, \tag{4}$$

$$\sum_{q=1}^{N} exp\left\{-\varepsilon n \delta_{q1}(n)\right\} \to 0, \;\; n \to \infty, \tag{5}$$

де $\varepsilon = 2p\left(\log_2 \frac{n}{\varphi(n)\ln n}\right)^{-1}$, $p - const, \;\; 0 < p < \frac{1}{1+\ln 2}$;
для довільного $q, \;\; q = 1, ..., N$, *існує множина* T_q *така, що при всіх достатньо великих* n

$$T_q \subseteq \left\{2, 3, ..., g_q(n)\right\}, \;\; T_q \ne \emptyset, \tag{6}$$

$$\delta_{qt}(n) \le p_{qt} \le 1 - \delta_{qt}(n), \quad t \in T_q; \tag{7}$$

$$(2 + (1 + \alpha + \omega)\ln 2)\lambda - \frac{\ln \lambda}{2} + \ln\left(\sum_{q=1}^{N} B_n\left(q\right)\right) \to -\infty \;\; (n \to \infty), \tag{8}$$

де $B_n\left(q\right) = \exp\left\{-2 \sum\limits_{t \in T_q} \delta_{qt}(n) C^t_{\varepsilon_1 \varphi(n)}\right\}$, $\varepsilon_1 - const, \; 0 < \varepsilon_1 < 1$.

Тоді функція розподілу випадкової величини $\frac{\nu_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ *прямує* $(n \to \infty)$ *до стандартної нормальної функції розподілу.*

3. Допоміжні твердження.

Твердження 1. *Якщо виконуються умови (2)– (5), то буде мати місце співвідношення*

$$\varepsilon \sum_{q=1}^{N} \delta_q(n, \varepsilon) - \ln n \to \infty, \;\; n \to \infty, \tag{9}$$

де $\delta_q\left(n, \varepsilon\right) = \min\left\{\delta_{q1}(n), \; \frac{2\ln n}{\varepsilon n}\right\}, \;\; q = 1, ..., N.$

Доведення. Оскільки

$$\sum_{q=1}^{N} \exp\left\{-\varepsilon n \delta_q(n, \varepsilon)\right\} \le \sum_{q=1}^{N} \exp\left\{-\varepsilon n \delta_{q1}(n)\right\} + N n^{-2},$$

то згідно умов (2)–(5) та прийнятих вище позначень $(N = n - m, \;\; [\lambda] = 2^m)$ маємо

$$\sum_{q=1}^{N} \exp\left\{-\varepsilon n \delta_{q1}(n)\right\} + N n^{-2} \to 0. \tag{10}$$

Далі, за допомогою нерівності Йенсена отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{N} \exp\left\{-\varepsilon n \delta_q(n, \varepsilon)\right\} &\ge N \exp\left\{-\frac{1}{N} \varepsilon n \sum_{q=1}^{N} \delta_q(n, \varepsilon)\right\} = \\ &= \exp\left\{\ln N - \frac{n}{N} \varepsilon \sum_{q=1}^{N} \delta_q(n, \varepsilon)\right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Із (10) та (11), з урахуванням умов (2) і (3), безпосередньо приходимо до (9).

4. Доведення теореми.

Покажемо, що за умов теореми можна скористатися лемою 2 роботи [1]. Нехай у зазначеній лемі випадкова величина Y має розподіл Пуассона з параметром 2^m; розподіл випадкової величини X співпадає з розподілом випадкової величини ν_n; параметр $\gamma = 1 + \omega$.

Перевіримо умову (35) зазначеної леми 2, тобто знайдемо сталу C таку, що для усіх $r \le (\alpha + \gamma)\lambda^*$

$$M(Y)_r \le C(\lambda^*)^r.$$

З цією метою покажемо, що при великих значеннях n має місце рівність

$$M\nu_n = 2^m \left(1 + r(n)\right), \tag{12}$$

де $r(n) \to 0, \ \ n \to \infty$.
Зазначимо, що в прийнятих позначеннях (12) можна записати у вигляді

$$\lambda^* = [\lambda] \left(1 + r(n)\right). \tag{13}$$

Користуючись рівністю (23) роботи [2], маємо

$$M\nu_n = 2^{-N} S(n, 1; Q_1), \tag{14}$$

де

$$\begin{gathered} S(n,1;Q_1) = \sum_{i=0}^{n-\rho(n)} C^i_{n-\rho(n)} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j\ge 1}}^{\rho(n)} C^j_{\rho(n)} Q_1, \\ Q_1 = \prod_{q=1}^{N} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \prod_{t=1}^{g_q(n)} \left(1 - 2p_{qt}\right)^{\Gamma_t(i,j)} \right), \end{gathered} \tag{15}$$

$$\Gamma_t(i,j) = C^t_{i+\rho(n)-j} + C^t_{\rho(n)} - 2C^t_{\rho(n)-j}\,, \ \ t = 1, ..., g_q(n), \ \ q = 1, ..., N.$$

Користуючись співвідношеннями (14), математичне сподівання $M\nu_n$ можна подати у виді

$$M\nu_n = 2^{-N} \sum_{\Delta=0}^{1} S^{(\Delta)}(n, 1; Q_1), \tag{16}$$

де $S^{(\Delta)}(n, 1; Q_1)$ відрізняється від $S(n, 1; Q_1)$ тим, що i та j, які приймають участь у записі $S(n, 1; Q_1)$ згідно з (15), набувають лише таких значень, що при $\Delta = 1$ знайдеться число $t \in \{2, ..., k\}$, для якого

$$\Gamma_t(i,j) < C^t_k, \ \ k = [\varepsilon_1 \varphi(n)], \tag{17}$$

при $\Delta = 0$ має місце

$$\Gamma_t(i,j) \ge C^t_k, \ \ k = [\varepsilon_1 \varphi(n)], \tag{18}$$

для всіх $t \in \{2, ..., k\}$.

Покажемо, що

$$2^{-N} S^{(0)}(n, 1; Q_1) = 2^m \left(1 + r_1(n)\right), \tag{19}$$

де $r_1(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Спочатку переконаємося, що параметр Δ може набувати значення $\Delta = 0$.

Справді, у правій частині рівності (14) при достатньо малому $\varepsilon_1 > 0$ може виконуватися принаймні одна з двох нерівностей $i \geq k$ або $j \geq k$, але, якщо $i \geq k$ та (або) $j \geq k$, то внаслідок співвідношення (2.12) наведеного в [3], згідно якого

$$\Gamma_t(i,j) \geq C_i^t + C_j^t, \tag{20}$$

оцінка (18) буде мати місце для всіх $t \in \{2, ..., k\}$.

Отже, параметр Δ може набувати значення $\Delta = 0$.

При $\Delta = 0$, з урахуванням (18) та умов (6), (7), знаходимо

$$\prod_{q=1}^{N} (1 - B_n(q)) \leq Q_1 \leq \prod_{q=1}^{N} (1 + B_n(q)). \tag{21}$$

Із умови (8) випливає

$$\sum_{q=1}^{N} B_n(q) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{22}$$

Використовуючи (21), (22) та співвідношення $\ln(1+u) = u + O(u^2)$, $|u| < 1$, $\max\limits_{1 \leq q \leq N} B_n(q) \to 0$, $n \to \infty$, $\prod\limits_{i=1}^{N} (1 - x_i) \geq 1 - \sum\limits_{i=1}^{N} x_i$, $0 < x_i < 1$, добуток Q_1 можна подати у вигляді при $n \to \infty$

$$Q_1 = 1 + \varsigma(n) \sum_{q=1}^{N} B_n(q) + O\left(\left(\sum_{q=1}^{N} B_n(q)\right)^2\right), \quad |\varsigma(n)| \leq 1. \tag{23}$$

З урахуванням останньої рівності, доданок $S^{(0)}(n, 1; Q_1)$ в правій частині (16) допускає представлення при $n \to \infty$

$$S^{(0)}(n, 1; Q_1) = S^{(0)}(n, 1; 1) \left(1 + \varsigma(n) \sum_{q=1}^{N} B_n(q) + O\left(\left(\sum_{q=1}^{N} B_n(q)\right)^2\right)\right). \tag{24}$$

При $\Delta = 0$ реалізуються наступні три варіанти $i \geq k$ та $j \geq k$, $i \geq k$ та $j < k$, $i < k$ та $j \geq k$, що дають можливість записати $S^{(0)}(n, 1; 1)$ у вигляді

$$S^{(0)}(n, 1; 1) = 2^n - \widetilde{\sigma}_0, \tag{25}$$

де $\widetilde{\sigma}_0 = 1 + \sum\limits_{i=0}^{k} \sum\limits_{j=0}^{k} C_{n-\rho(n)}^i C_{\rho(n)}^j \leq \sum\limits_{i=0}^{\varepsilon_1 n} \sum\limits_{j=0}^{\varepsilon_1 n} C_n^i C_n^j \leq \exp\left\{(\sigma(\varepsilon_1) + o(1))\, n\right\}$, $\sigma(\varepsilon_1) > 0$, $\sigma(\varepsilon_1) \to o$ при $\varepsilon_1 \to 0$, $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тут була використана, зокрема, нерівність

$$\sum_{i=1}^{k} C_n^i \leq \exp\left\{(\sigma(\varepsilon_1) + o(1))\, n\right\}, \quad n \to \infty.$$

Співвідношення (24), (25) дають

$$2^{-N} S^{(0)}(n, 1; Q_1) = 2^m (1 + r_1(n)),$$

де $r_1(n) = O\left(\exp\left\{n\left(\sigma(\varepsilon_1) + o(1) - \ln 2\right)\right\}\right)$, що доводить (19).

Покажемо, що при $\Delta = 1$

$$2^{-N} S^{(1)}\left(n, 1; Q_1\right) = r_2(n), \tag{26}$$

де $r_2(n) \to 0,\ \ n \to \infty$.

Дійсно, при $\Delta = 1$ із (17) та (20) випливає, що виконуються наступні обмеження:

$$0 \le i \le k \quad \text{та} \quad 0 \le j \le k. \tag{27}$$

Застосовуючи (20) при $t = 1$ та умову (4), маємо для q, $q = 1, ..., N$, оцінку

$$\left| \prod_{t=1}^{g_q(n)} \left(1 - 2p_{qt}\right)^{\Gamma_t(i,j)} \right| \le \exp\left\{-2\delta_{q1}(n)(i+j)\right\}.$$

Останнє співвідношення, згідно обмеження (27) та рівності $e^{-y} = 1 - y + O(y^2)$, $0 \le y < \infty$, можна подати наступним чином:

$$\left| \prod_{t=1}^{g_q(n)} \left(1 - 2p_{qt}\right)^{\Gamma_t(i,j)} \right| \le 1 - 2\delta_q\left(n, \varepsilon\right)\left(i + j\right)\left(1 + o(1)\right),\ \ n \to \infty. \tag{28}$$

Згідно (28) отримуємо

$$2^{-N} S^{(1)}\left(n, 1; Q_1\right) \le 2 \exp\left\{ (\ln n) - (1 + o(1)) \sum_{q=1}^{N} \delta_q\left(n, \varepsilon\right) \right\} (1 + o(1)),\ \ n \to \infty. \tag{29}$$

З урахуванням твердження 1 та (29), маємо (26) при обмеженнях (27).
Рівності (19) та (26) дають співвідношення (12), в якому

$$r(n) = r_1(n) + 2^{-m} r_2(n), \tag{30}$$

де $r_2(n) = O(\exp\{(\ln n) - (1 + o(1)) \sum\limits_{q=1}^{N} \delta_q\left(n, \varepsilon\right)\})$ при $n \to \infty$.
За допомогою (12) переконуємося у справедливості співвідношення (35) роботи [1] при $r \le (1 + \alpha + \omega)\lambda^*$, якщо сталу $C < \infty$ вибрати таким чином, щоб $C > (1 + r(n))^{-r}$ для $r \le (1 + \alpha + \omega)\lambda^*$, оскільки

$$\max_{0 \le r \le (1+\alpha+\omega)\lambda^*} \left(1 + r(n)\right)^{-r} = \exp\left\{O\left(2^m r_1(n) + r_2(n)\right)\right\} \to 1, \quad n \to \infty.$$

Перейдемо до перевірки умови (38) (лема 2, [1]), згідно якої для усіх $r \le (\alpha + \gamma)\lambda^*$ повинно виконуватись при $n \to \infty$

$$\max_{1 \le r \le (\alpha+\gamma)\lambda^*} \left| M(X)_r (M(Y)_r)^{-1} - 1 \right| \frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0.$$

З цією метою скористаємося рівністю (2.21) роботи [3]

$$M\left(\nu_n\right)_r = 2^{-r\,N} S(n, r; Q),\ \ r \ge 1, \tag{31}$$

де

$$S(n,r;Q)=\sum_{s=0}^{n-\rho(n)}\sum (n-\rho(n))!\left((n-\rho(n)-s)!\prod_{i\in I} i!\right)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{\substack{s'=0\\ s'+s\geq 1}}^{\rho(n)}\sum{}'(\rho(n))!\left((\rho(n)-s')!\prod_{j\in J} j!\right)^{-1}Q, \tag{32}$$

$$Q=\prod_{q=1}^{N}\left(1+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{1\leq u_1<\ldots<u_\nu\leq r}\prod_{t=1}^{g_q(n)}(1-2p_{qt})^{\Gamma_{t,r}^{\{u_1,\ldots,u_\nu\}}}\right),$$

сумування $\sum$ ($\sum{}'$) здійснюється по всім $i\in I$ $(j\in J)$, де I (J)– сукупність цілих невід'ємних чисел, $I=\left\{\ i_{\{u_1,\ldots,u_\nu\}}:\ 1\leq u_1<\ldots<u_\nu\leq r,\ \nu=1,\ldots,r\ \right\}$, $\left(J=\left\{\ j_{\{u_1,\ldots,u_\nu\}}:\ 1\leq u_1<\ldots<u_\nu\leq r,\ \nu=1,\ldots,r\ \right\}\right)$, така, що

$$\sum_{i\in I} i=s\quad\left(\sum_{j\in J} j=s'\right);$$

в рівності (32) числа i $(i\in I)$, j $(j\in J)$ задовольняють співвідношення

$$\sum_{i\in I_{\{u\}},j\in J_{\{u\}}}(i+j)\geq 1,\ \ u=1,\ldots,r, \tag{33}$$

$$\sum_{l=0}^{r-2}\sum_{1\leq\mu_1<\ldots<\mu_l\leq r}\left(i_{\{u_1,\mu_1,\ldots,\mu_l\}}+j_{\{u_1,\mu_1,\ldots,\mu_l\}}+i_{\{u_2,\mu_1,\ldots,\mu_l\}}+j_{\{u_2,\mu_1,\ldots,\mu_l\}}\right)\geq 1,$$
$$1\leq u_1<u_2\leq r. \tag{34}$$

Явний вигляд виразу $\Gamma_{t,r}^{\{u_1,\ldots,u_\nu\}}$ для $1\leq u_1<\ldots<u_\nu\leq r$, $\nu\in\{1,\ldots,r\}$, $t=1,\ 2,\ \ldots,g_q(n)$, $q=1,\ldots,N$, наведено в ([3], рівність (2.11)).
Подамо рівність (31) наступним чином:

$$M\left(\nu_n\right)_r=\frac{1}{2^{rN}}\sum_{\Delta=0}^{2^r-1}S^{(\Delta)}(n,r;Q), \tag{35}$$

де $S^{(\Delta)}(n,r;Q)$ відрізняється від $S(n,r;Q)$ тим, що усі i та j, $i\in I$, $j\in J$, які приймають участь у записі $S(n,r;Q)$ згідно з (32), набувають лише таких значень, що існує точно Δ різних наборів

$$\omega_\alpha=\left\{u_1^{(\alpha)},\ldots,u_{\xi_\alpha}^{(\alpha)}\right\},\ \ 1\leq u_1^{(\alpha)}<\ldots<u_{\xi_\alpha}^{(\alpha)}\leq r,$$
$$\xi_\alpha\in\{1,\ 2,\ldots,\ r\},\ \ \alpha=1,\ 2,\ldots,\Delta,$$

для кожного з яких знайдеться число $t^{(\alpha)}\in\{2,\ldots,k\}$ таке, що

$$\Gamma_{t^{(\alpha)},r}^{\omega_\alpha}<C_k^{t^{(\alpha)}},\ \ k=\left[\varepsilon_1\varphi(n)\right], \tag{36}$$

і для наборів $\{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_q\}$, $1\leq\vartheta_1<\ldots<\vartheta_q\leq r$, $q=1,\ldots,r$, що задовольняють співвідношенню

$$\{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_q\}\neq\omega_\alpha,\ \ \alpha=1,\ 2,\ldots,\ \Delta,$$

має місце оцінка
$$\Gamma_{t,r}^{\{\vartheta_1,...,\vartheta_q\}} \geq C_k^t, \tag{37}$$
для усіх $t \in \{2, ..., k\}$.

Покажемо, що при $n \to \infty$
$$\sup_{1\leq r\leq(\alpha+\gamma)\lambda^*} \left| \frac{S^{(0)}(n,\, r;\, Q)}{2^{r\,N} M\,(Y)_r} - 1 \right| \frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0. \tag{38}$$

Спочатку зазначимо, що рівність $\Delta = 0$ дійсно може виконуватись.

Справді, якщо для всіх i, $i \in I$, та (або) j, $j \in J$, має місце принаймні одна з двох нерівностей $i \geq k$ або $j \geq k$, то згідно (2.12) роботи [3], оцінка (37) справджується для всіх наборів $\{\vartheta_1, ..., \vartheta_q\}$, $1 \leq \vartheta_1 < ... < \vartheta_q \leq r$, $q = 1, ..., r$ та $t \in \{2, ..., k\}$. У свою чергу рівність $i = k$ та (або) $j = k$ може виконуватися для всіх $i \in I$, та (або) $j \in J$, оскільки для $r \leq (\alpha + \gamma)\lambda^*$ з урахуванням умови (2) та рівностей (12), (13)
$$2^r k \leq \max\left(n - \rho(n), \rho(n)\right). \tag{39}$$

Отже, параметр Δ може набувати значення $\Delta = 0$.

Нехай $u = (2^r - 1) \sum\limits_{q=1}^{N} B_n\,(q)$, тоді при $\Delta = 0$, використовуючи нерівності (37), (4) та співвідношення
$$u \to 0 \;\; (n \to \infty), \tag{40}$$
яке випливає з (8), добуток Q можна подати у вигляді
$$Q = 1 + \varsigma(n)u + O\left(u^2\right), \quad |\varsigma(n)| \leq 1$$
аналогічно (23).

Звідси отримуємо за допомогою поліноміальної теореми та рівності (32)
$$S^{(0)}(n,\, r;\, Q) = (2^{r\,n} - \sigma_0)\left(1 + \varsigma(n)u + O\left(u^2\right)\right), \tag{41}$$
де
$$\sigma_0 = 1 + \sum_{q=1}^{2^r-1} S_q^{(0)}(n,\, r;\, 1), \tag{42}$$
$S_q^{(0)}(n,\, r;\, 1)$ відрізняється від $S\,(n,\, r;\, 1)$ тим, що числа $i \in I$ та $j \in J$ в правій частині рівності (32) змінюються таким чином, що існує точно q виразів виду $\Gamma_{t,r}^{\{u_1,...,u_\nu\}}$, для кожного з яких
$$\Gamma_{t,r}^{\{u_1,...,u_\nu\}} < C_k^t, \tag{43}$$
де $q = 1,\, 2,\, 3, ...,\, 2^r - 1$.

Нехай усі вирази виду $\Gamma_{t,r}^{\{u_1,...,u_\nu\}}$, $1 \leq u_1 < ... < u_\nu \leq r$, $\nu \in \{1, ..., r\}$, занумеровані числами $1,\, 2,\, 3, ...,\, 2^r - 1$. Тоді суму $S_q^{(0)}(n,\, r;\, 1)$ можна представити наступним чином:
$$S_q^{(0)}(n,\, r;\, 1) = \sum_{1\leq\gamma_1<...<\gamma_q\leq 2^r-1} S_{\langle\gamma_1,...,\gamma_q\rangle}^{(0)}(n,\, r;\, 1), \tag{44}$$

$q = 1,\, 2,\, 3, ..., \, 2^r - 1$, де $S^{(0)}_{\langle\gamma_1,...,\gamma_q\rangle}\,(n,\, r;\, 1)$ відрізняється від $S^{(0)}_q\,(n,\, r;\, 1)$ тим, що співвідношення (43) виконується тільки для виразів $\Gamma^{\{u_1,...,u_\nu\}}_{t,r}$, яким відповідають номери $\gamma_1,\, \gamma_2, ..., \, \gamma_q$. Позначимо через $A\,(\gamma_1, ..., \, \gamma_q)$ $/B\,(\gamma_1, ..., \, \gamma_q)\,/$ множину усіх тих $i \in I$ $/j \in J/$, які використовуються при записі оцінки (2.12) роботи [3] для усіх $\gamma_1,\, \gamma_2, ..., \, \gamma_q$. Згідно (43) та (2.12) роботи [3] число елементів множини $A\,(\gamma_1, ..., \, \gamma_q)$ $/B\,(\gamma_1, ..., \, \gamma_q)\,/$ не менша, ніж 2^{r-1}:

$$|A\,(\gamma_1, ..., \, \gamma_q)| \geq 2^{r-1}, \tag{45}$$

$$|B\,(\gamma_1, ..., \, \gamma_q)| \geq 2^{r-1}. \tag{46}$$

Тепер суму $S^{(0)}_q\,(n,\, r;\, 1)$ можна подати так:

$$\begin{gathered}
S^{(0)}_q\,(n,\, r;\, 1) = \sum_{1\leq\gamma_1<...<\gamma_q\leq 2^r-1}\; \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C^s_{n-\rho(n)} \times \\
\times \sum_{s_1+s_2=s} C^{s_1}_s \left\{ \sum\nolimits_1 \frac{s_1\,!}{\prod\limits_{i\in A(\gamma_1,...,\gamma_q)} i\,!} \right\} \left(\sum\nolimits_2 \frac{s_2\,!}{\prod\limits_{i\in I\setminus A(\gamma_1,...,\gamma_q)} i\,!} \right) \times \\
\times \sum_{s'=0}^{\rho(n)}\; \sum_{s'_1+s'_2=s'} C^{s'_1}_{s'} \left\{ \sum\nolimits_3 \frac{s'_1!}{\prod\limits_{j\in B(\gamma_1,...,\gamma_q)} j\,!} \right\} \left(\sum\nolimits_4 \frac{s'_2!}{\prod\limits_{j\in J\setminus B(\gamma_1,...,\gamma_q)} j\,!} \right),
\end{gathered} \tag{47}$$

де $\sum_1$ — це сума за всіма $i \in A\,(\gamma_1, ..., \, \gamma_q)$ такими, що $\sum i = s_1$, $\sum_2$ — це сума за всіма $i \in I\setminus A\,(\gamma_1, ..., \, \gamma_q)$ такими, що $\sum i = s_2$, $\sum_3$ — це сума за всіма $j \in B\,(\gamma_1, ..., \, \gamma_q)$ такими, що $\sum j = s'_1$, $\sum_4$ — це сума за всіма $j \in J\setminus B\,(\gamma_1, ..., \, \gamma_q)$ такими, що $\sum j = s'_2$.

Співвідношення (42), (44)-(47) та поліноміальна формула дозволяють отримати для σ_0 наступну оцінку:

$$\begin{gathered}
\sigma_0 \leq 1 + \sum_{q=1}^{2^r-1} C^q_{2^r-1} \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C^s_{n-\rho(n)} \sum_{s_1+s_2=s} C^{s_1}_s \left(2^{r-1}\right)^{s_1} \left(2^{r-1}-1\right)^{s_2} \times \\
\times \sum_{s'=0}^{\rho(n)} C^{s'}_{\rho(n)} \sum_{s'_1+s'_2=s'} C^{s'_1}_{s'} \left(2^{r-1}\right)^{s'_1} \left(2^{r-1}-1\right)^{s'_2} \leq \\
\leq 2^{2^r-1} 2^{(r-1)n} \left(\sum_{s_1} C^{s_1}_{n-\rho(n)} \left(2^{r-1}\right)^{s_1} \right) \left(\sum_{s'_1} C^{s'_1}_{\rho(n)} \left(2^{r-1}\right)^{s'_1} \right),
\end{gathered} \tag{48}$$

де сумування по s_1 та s'_1 відбуваються на проміжку $0 \leq s_1 \leq 2^{r-1}k$ та $0 \leq s'_1 \leq 2^{r-1}k$ відповідно. Верхні обмеження для s_1 та s'_1 в останніх співвідношеннях випливають із (2.12) роботи [3], (36) та припущення $i \in A\,(\gamma_1, ..., \gamma_q)$, $j \in B\,(\gamma_1, ..., \gamma_q)$.

Враховуючи нерівності $0 \leq s_1 \leq 2^{r-1}k$ та $0 \leq s'_1 \leq 2^{r-1}k$, співвідношення (48) можна переписати у вигляді

$$\sigma_0 \leq 2^{2^r-1} 2^{(r-1)n} 2^{(r-1)\,2^r[\varepsilon_1\varphi(n)]} \left(\sum_{s_1=0}^{2^{r-1}[\varepsilon_1\varphi(n)]} C^{s_1}_{n-\rho(n)} \right) \left(\sum_{s'_1=0}^{2^{r-1}[\varepsilon_1\varphi(n)]} C^{s'_1}_{\rho(n)} \right).$$

Останню нерівність, з урахуванням (39), можна записати так

$$\sigma_0 \le 2^{2^r-1} 2^{(r-1)\,n} 2^{(r-1)\,2^r[\varepsilon_1\varphi(n)]} \left(\left(2^{r-1}[\varepsilon_1\varphi\left(n\right)] - 1\right) C_n^{2^{r-1}[\varepsilon_1\varphi(n)]} \right)^2,$$

звідки за допомогою формули Стірлінга отримуємо

$$\sigma_0 \le 2^{2^r-1} 2^{(r-1)\,n} 2^{(r-2)}[\varepsilon_1\varphi\left(n\right)] \left(\frac{ne}{[\varepsilon_1\varphi(n)]} \right)^{2^r[\varepsilon_1\varphi(n)]}. \tag{49}$$

З урахуванням (41), дріб $\frac{S^{(0)}(n,r;Q)}{2^{rN}2^{mr}}$ можна подати у вигляді $1 - \frac{\sigma_0}{2^{r\,n}} + |O\left(u\right)|$, за допомогою якого співвідношення (38) можна записати наступним чином:

$$\sup_{1\le r\le(\alpha+\gamma)\lambda^*} \left(\frac{\sigma_0}{2^{r\,n}} + |O\left(u\right)| \right) \frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0, \;\; n\to\infty. \tag{50}$$

Користуючись умовами (2), (3), (8) та співвідношенням (13) неважко показати, що

$$u\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0, \;\; n\to\infty. \tag{51}$$

За допомогою умов (2), (3) та співвідношень (13), (49) встановлюємо

$$\frac{\sigma_0}{2^{r\,n}}\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0, \;\; n\to\infty. \tag{52}$$

Використовуючи (51) та (52), отримаємо (50).
Із співвідношення (50) та рівності $M\left(Y\right)_r = 2^{r\,m}$ безпосередньо випливає (38).

Згідно (35) та (38) для завершення перевірки умови (38) (лема 2, [1]) потрібно встановити, що для $1 \le r \le (\alpha+\gamma)\lambda^*$ і $\Delta \ge 1$

$$\frac{1}{2^{r\,N+r\,m}} \left(\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\left(n,\, r;\, Q\right) \right) \frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0, \;\; n\to\infty. \tag{53}$$

Позначимо через M_1 $/\tilde{M}_1/$ сукупність усіх i, $i \in I$ $/j$, $j \in J/$, що не належать I_{ω_α} $/J_{\omega_\alpha}/$, $\alpha = 1,...,\Delta$, і покладемо $M_2 = I\backslash M_1$, $\tilde{M}_2 = J\backslash\tilde{M}_1$.

Нехай $z-$ найменше ціле число, для якого

$$\Delta \le 2^z - 1, \;\; 1 \le z \le r. \tag{54}$$

Тоді число елементів множини M_1 $\left(\tilde{M}_1\right)$, згідно ([3], твердження 2.1), задовольняє нерівності:

$$|M_1| \le 2^{r-z} - 1, \qquad \left(\left|\tilde{M}_1\right| \le 2^{r-z} - 1\right). \tag{55}$$

Використовуючи (4) та (36), для $q = 1,...,N$ та $\alpha = 1,...,\Delta$, знаходимо оцінку

$$\left| \prod_{t=1}^{g_q(n)} \left(1 - p_{qt}\right)^{\Gamma_{t,r}^{\omega_\alpha}} \right| \le \left(1 - 2\delta_{q1}(n)\right)^{\Gamma_{1,r}^{\omega_\alpha}}. \tag{56}$$

Нехай виконується обмеження (Ч$_1$): існує $i \in M_2$ та (або) $j \in \widetilde{M}_2$ таке, що $0 \le i \le k$ та (або) $0 \le j \le k$.
За допомогою (2.12) роботи [3] та (56) маємо для q, $q = 1, ..., N$, та α, $\alpha = 1, ..., \Delta$, наступну оцінку:

$$\left| \prod_{t=1}^{g_q(n)} (1 - 2p_{qt})^{\Gamma_{t,r}^{\omega_\alpha}} \right| \le \exp\left\{ -2\delta_{q1}(n) \left(s^{(\alpha)} + \tilde{s}^{(\alpha)} \right) \right\}, \tag{57}$$

де $s^{(\alpha)} = \sum\limits_{i \in I_{\omega_\alpha}} i$, $\tilde{s}^{(\alpha)} = \sum\limits_{j \in J_{\omega_\alpha}} j$.
Згідно обмежень (Ч$_1$), співвідношення (57) можна подати наступним чином:

$$\left| \prod_{t=1}^{g_q(n)} (1 - 2p_{qt})^{\Gamma_{t,r}^{\omega_\alpha}} \right| \le 1 - 2\delta_q(n, \varepsilon) \left(s^{(\alpha)} + \tilde{s}^{(\alpha)} \right) (1 + o(1)), \;\; n \to \infty. \tag{58}$$

З урахуванням (58) отримуємо для $\Delta < 2^z - 1$

$$|Q| \le 2^{zN} Q_2, \tag{59}$$

де $Q_2 = (2^z - 1)^N \exp\left\{ -2^{-z+1} (1 + o(1)) \sum\limits_{q=1}^{N} \delta_q(n, \varepsilon) \sum\limits_{\alpha=1}^{\Delta} \left(s^{(\alpha)} + \tilde{s}^{(\alpha)} \right) + \frac{(2^r - \Delta - 1)u}{(2^z - 1)(2^r - 1)} \right\}$.

При виконанні обмеження (Ч$_1$) маємо

$$\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}(n, r; Q) = \sum_{z=1}^{r} \sum_{\Delta=2^{z-1}}^{2^z-1} \sum_{1 \le \gamma_1 < ... < \gamma_\Delta \le 2^r - 1} S^{(\Delta)}_{\langle (\text{Ч}_1);\, \gamma_1, ..., \gamma_\Delta \rangle}(n, r; Q), \tag{60}$$

де $S^{(\Delta)}_{\langle (\text{Ч}_1);\, \gamma_1, ..., \gamma_\Delta \rangle}(n, r; Q)$ визначається аналогічно $S^{(\Delta)}(n, r; Q)$ з додатковою умовою $\langle (\text{Ч}_1);\, \gamma_1, ..., \gamma_\Delta \rangle$.
З урахуванням (59) кожен доданок у правій частині (60) допускає оцінку

$$S^{(\Delta)}_{\langle (\text{Ч}_1);\, \gamma_1, ..., \gamma_\Delta \rangle}(n, r; Q) \le 2^{zN} S^{(\Delta)}_{\langle (\text{Ч}_1);\, \gamma_1, ..., \gamma_\Delta \rangle}(n, r; 1)\, Q_2. \tag{61}$$

Використовуючи (55), знаходимо

$$\begin{gathered} S^{(\Delta)}_{\langle (\text{Ч}_1);\, \gamma_1, ..., \gamma_\Delta \rangle}(n, r; 1) \le \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C^{s}_{n-\rho(n)} \left(2^{r-z} - 1 \right)^{s} \times \\ \times \sum_{\substack{s_2=0 \\ s_2 \le (2^r-1)\,k}}^{s} C_s^{s_2} (2^r - 1)^{s_2} \sum_{s'=0}^{\rho(n)} C^{s'}_{\rho(n)} \left(2^{r-z} - 1 \right)^{s'} \sum_{\substack{s'_2=0 \\ s'_2 \le (2^r-1)\,k}}^{s'} C^{s'_2}_{s'} (2^r - 1)^{s'_2}. \end{gathered} \tag{62}$$

Співвідношення (54), (59)-(62) дають нерівність

$$\begin{gathered} \sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}(n, r; Q) \le 2^{2^r + r\,n - m} (2^r - 1)^{2(2^r-1)\,\varepsilon_1 \varphi(n)} \times \\ \times \left(\sum_{s_2=0}^{(2^r-1)\,k} C^{s_2}_{n-\rho(n)} \right) \left(\sum_{s'_2=0}^{(2^r-1)\,k} C^{s'_2}_{\rho(n)} \right) Q_2. \end{gathered} \tag{63}$$

Враховуючи, далі, що

$$\sum_{l=0}^{(2^r-1)\,k} C_W^l \leq \left(\frac{We}{(2^r-1)\,\varepsilon_1\varphi\,(n)}\right)^{(2^r-1)\,\varepsilon_1\varphi\,(n)} \sqrt{(2^r-1)\,\varepsilon_1\varphi\,(n)},$$

де $W \in \{n-\rho(n), \rho(n)\}$, оцінку (63) можна переписати у вигляді:

$$\begin{gathered}\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\,(n,\,r;\,Q) \leq 2^{2^r+r\,n-m}\times \\ \times\left(\frac{(n-\rho(n))\,\rho(n)\,e^2}{\varepsilon_1^2\varphi^2\,(n)}\right)^{(2^r-1)\,\varepsilon_1\varphi\,(n)}(2^r-1)\,\varepsilon_1\varphi\,(n)\,Q_2.\end{gathered} \tag{64}$$

Співвідношення (59) та (64) дають нерівність:

$$\frac{1}{2^{r\,N+r\,m}}\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\,(n,\,r;\,Q)\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \leq \exp\left\{-\frac{N}{2^z}\left(1-\frac{2^z}{N}2^r\ln 2+\frac{2^z}{N}m\ln 2-\right.\right.$$
$$-\frac{2^z}{N}r\ln 2-\frac{2^z}{N}\ln\left(\varepsilon_1\varphi\,(n)\right)-\frac{2^z(2^r-1)\,\varepsilon_1\varphi\ (n)}{N}\ln\left(\frac{(n-\rho(n))\,\rho(n)\,e^2}{\varepsilon_1^2\varphi^2\,(n)}\right)-\frac{2^z}{N}2\lambda^*+$$
$$\left.\left.+\frac{2^{z-1}}{N}\ln\lambda^*+\frac{2}{N}\left(1+o(1)\right)\sum_{q=1}^{N}\delta_q(n,\varepsilon)\sum_{\alpha=1}^{\Delta}\left(s^{(\alpha)}+\tilde{s}^{(\alpha)}\right)-\frac{2(2^r-\Delta-1)}{N(2^z-1)(2^r-1)}u\right)\right\},$$

права частина якої прямує до нуля при $n\to\infty$ згідно (2), (3), (13) та (40).

Отже, співвідношення (53) має місце при обмеженнях (Ч_1) та $\Delta < 2^z-1$ для $1 \leq r \leq (\alpha+\gamma)\lambda^*$, $n\to\infty$.

Нехай тепер

$$\Delta = 2^z-1,\ \ s_*+\tilde{s}_* \geq 1, \tag{65}$$

де $s_* = \sum\limits_{i\in M_2} i,\ \tilde{s}_* = \sum\limits_{j\in \tilde{M}_2} j.$

Враховуючи (40), (65), та нерівність $\sum\limits_{\alpha=1}^{\Delta}\left(s^{(\alpha)}+\tilde{s}^{(\alpha)}\right) \geq s_*+\tilde{s}_*$, отримуємо наступну оцінку для Q в правій частині (60):

$$|Q| \leq 2^{zN}Q_3, \tag{66}$$

де $Q_3 = \exp\left\{-2^{-z+1}\left(1+o(1)\right)(s_*+\tilde{s}_*)\sum\limits_{q=1}^{N}\delta_q(n,\varepsilon)+\frac{2^r-\Delta-1}{2^z(2^r-1)}u\right\},\ \ n\to\infty.$

З урахуванням (66), кожен доданок у правій частині (60) допускає оцінку

$$S^{(\Delta)}_{\langle(\text{Ч}_1);\,\gamma_1,\ldots,\gamma_\Delta\rangle}\,(n,\,r;\,Q) \leq 2^{zN}S^{(\Delta)}_{\langle(\text{Ч}_1);\,\gamma_1,\ldots,\gamma_\Delta\rangle}\,(n,\,r;\,1)\,Q_3. \tag{67}$$

Використовуючи (55), (66), (67), знаходимо наступну оцінку при $n \to \infty$:

$$\frac{1}{2^{r\,N+r\,m}} \sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\,(n,\,r;\,Q) \frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \leq \frac{2^{2^r-m}}{\sqrt{\lambda^*}} \exp\left\{e^{2\lambda^*} + \frac{2^r-\Delta-1}{2^z(2^r-1)}u\right\} \times$$
$$\times(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}((n-\rho(n))(2^r-1)\exp\{-2^{-z+1}(1+o(1))\sum_{q=1}^{N}\delta_q(n,\varepsilon)\})^l)\times \qquad (68)$$
$$\times(\sum_{\substack{\tilde{l}=0\\ \tilde{l}+l\geq 1}}^{\infty} \frac{1}{\tilde{l}!}(\rho(n)(2^r-1)\exp\{-2^{-z+1}(1+o(1))\sum_{q=1}^{N}\delta_q(n,\varepsilon)\})^{\tilde{l}}).$$

Згідно умов (2), (3), представлення (13), (40) та твердження 1, права частина нерівності (68) прямує до нуля, що доводить (53) при обмеженнях (Ч$_1$), (65) для $1 \leq r \leq (\alpha+\gamma)\lambda^*$, $n \to \infty$.

Покажемо, що нерівність $s_*+\tilde{s}_* \geq 1$ виконується, якщо в співвідношенні (54) або $r \in \{1,\,2\}$, або $z \in \{r,\,r-1\}$. Якщо $z = r$ (або $r \in \{1,\,2\}$), то, очевидно, існує $\alpha \in \{1,\,2,\,...,\,\Delta\}$, для якого $|\omega_\alpha| \leq 2$. Якщо $z = r-1$, то згідно [4], зауваження 2, переконуємося в існуванні такого $\alpha \in \{1,\,2,\,...,\,\Delta\}$, що $|\omega_\alpha| \leq 2$. Далі, за допомогою співвідношень (33) та (34) можна встановити, що якщо $|\omega_\alpha| \leq 2$ для деякого $\alpha \in \{1,\,2,\,...,\,\Delta\}$, то $s^{(\alpha)} + \tilde{s}^{(\alpha)} \geq 1$.

Отже, для завершення доведення (53) залишилось перевірити, що при обмеженнях (Ч$_2$) має місце

$$s_* + \tilde{s}_* = 0; \qquad (69)$$

$$|\omega_\alpha| \geq 3,\;\; \alpha = 1,\,...,\,\Delta,\;\; \Delta = 2^z-1,\;\; 1 \leq z \leq r-2,\;\; 3 \leq r < \infty. \qquad (70)$$

Згідно (69), $\Delta = 2^z - 1$, отримаємо наступну оцінку для Q:

$$|Q| \leq 2^{zN} Q_4, \qquad (71)$$

де $Q_4 = \exp\left\{\frac{2^r-\Delta-1}{2^z(2^r-1)}u\right\}$.

При обмеженнях (Ч$_2$) подамо $\sum\limits_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\,(n,\,r;\,Q)$ у вигляді

$$\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\,(n,\,r;\,Q) = \sum_{z=1}^{r}\sum_{\Delta=2^{z-1}}^{2^z-1}\sum_{1\leq\gamma_1<\ldots<\gamma_\Delta\leq 2^r-1} S^{(\Delta)}_{\langle(\text{Ч}_2);\,\gamma_1,\ldots,\gamma_\Delta\rangle}\,(n,\,r;\,Q), \qquad (72)$$

де $S^{(\Delta)}_{\langle(\text{Ч}_2);\,\gamma_1,\ldots,\gamma_\Delta\rangle}\,(n,\,r;\,Q)$ визначається аналогічно $S^{(\Delta)}_{\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_\Delta\rangle}\,(n,\,r;\,Q)$ з додатковою умовою (Ч$_2$).

З урахуванням (71) кожен доданок у правій частині (72) допускає оцінку

$$S^{(\Delta)}_{\langle(\text{Ч}_2);\,\gamma_1,\ldots,\gamma_\Delta\rangle}\,(n,\,r;\,Q) \leq 2^{zN} S^{(\Delta)}_{\langle(\text{Ч}_2);\,\gamma_1,\ldots,\gamma_\Delta\rangle}\,(n,\,r;\,1)\;Q_4. \qquad (73)$$

Якщо виконуються $|M_1| < 2^{r-z}-1$ та $|\tilde{M}_1| < 2^{r-z}-1$, то знаходимо

$$S^{(\Delta)}_{\langle(\text{Ч}_2);\,\gamma_1,\ldots,\gamma_\Delta\rangle}\,(n,\,r;\,1) \leq (2^{r-z}-1)^n. \qquad (74)$$

Співвідношення (71)–(74) дають нерівність

$$\frac{1}{2^{r\,N+r\,m}}\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\,(n,\,r;\,Q)\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \le \exp\left\{-\frac{n}{2^{r-z}}\left(1-\frac{2^{r-z}}{n}2^r\ln 2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2^{r-z}}{n}m\ln 2-\frac{2^{r-z}}{n}2\lambda^*+\frac{2^{r-z-1}}{n}\ln\lambda^*+\frac{2^{r-z}}{n}\frac{2^r-\Delta-1}{2^z(2^r-1)}u\right)\right\},$$

права частина якої прямує до нуля при $n\to\infty$ згідно (2), (3), представлення (13), (40), що доводить (53) при обмеженнях (Ч$_2$), $|M_1|<2^{r-z}-1$, $|\tilde{M}_1|<2^{r-z}-1$, $1\le r\le(\alpha+\gamma)\lambda^*$, $n\to\infty$.

Переконаємося в справедливості (53) за умов (Ч$_2$) та

$$|M_1|=|\tilde{M}_1|=2^{r-z}-1. \tag{75}$$

При виконанні (70) та (75) множина M_1 ($\tilde{M}_1$) містить згідно [4], твердження 2, не менше трьох елементів $i_{m_\nu}\in M_1$ ($j_{\tilde{m}_\nu}\in\tilde{M}_1$), $\nu=\overline{1,3}$, таких, що для деякого $\alpha\in\{1,\,...,\,\Delta\}$ ($\tilde{\alpha}\in\{1,\,...,\,\Delta\}$)

$$|\omega_\zeta\cap m(\zeta,\nu)|=2,\;\;\nu=\overline{1,3},\;\;|\omega_\zeta\cap(a_\zeta\cup b_\zeta)\,|=3,\;\;\zeta\in\{\alpha,\tilde{\alpha}\}, \tag{76}$$

для довільних $a_\zeta,b_\zeta\in\left\{m(\zeta,\nu):\nu=\overline{1,3}\right\}$, $a_\zeta\ne b_\zeta$, де $m(\zeta,\nu)=\{m_\nu$, якщо $\zeta=\alpha$; $\tilde{m}_\nu$, якщо $\zeta=\tilde{\alpha}$, $\nu=\overline{1,3}\}$. Для зазначеного ζ, згідно (76) та рівності для $\Gamma_{t,r}^{\{u_1,\dots,u_\nu\}}$, $1\le u_1<\dots<u_\nu\le r$, $\nu=1,\dots,r$, $t=1,\dots,n$, доведеної в [4], рівність (20), маємо

$$\Gamma_{t,r}^{\omega_\zeta}\ge\gamma_t^{\left\{a_\zeta\cap b_\zeta\right\}},\;\;t\in\{2,\dots,k\}\,,\;\;\zeta\in\{\alpha,\tilde{\alpha}\}. \tag{77}$$

Права частина (77) допускає оцінку

$$\gamma_t^{\left\{a_\zeta\cap b_\zeta\right\}}\ge t^{-1}c_*(\zeta)\left(c^*(\zeta)-2^{-1}\left(c_*(\zeta)-1\right)\right)C^{t-2}_{(c^*(\zeta)/2)+(3c_*(\zeta)/4)-(5/4)} \tag{78}$$

при умові, що $c_*(\zeta)\ge t$, де $\zeta\in\{\alpha,\tilde{\alpha}\}$, $c_*(\alpha)=\min\{i_{a_\alpha},i_{b_\alpha}\}$, $c^*(\alpha)=\max\{i_{a_\alpha},i_{b_\alpha}\}$, $c_*(\tilde{\alpha})=\min\{j_{a_{\tilde{\alpha}}},j_{b_{\tilde{\alpha}}}\}$, $c^*(\tilde{\alpha})=\max\{j_{a_{\tilde{\alpha}}},j_{b_{\tilde{\alpha}}}\}$. Співвідношення (78) доводиться аналогічно тому, як це зроблено в [4], див. (23).

Якщо $c_*(\zeta)\ge\varepsilon_1\varphi\,(n)\ln n$, $\zeta\in\{\alpha,\tilde{\alpha}\}$, то нерівність $c_*(\zeta)\ge t$, $t\in\{2,\dots,k\}$, очевидно, виконується для $0<\varepsilon_1<1$ і тому із (77)–(78) слідує для зазначених $c_*(\zeta)$ та t при $n\to\infty$

$$\Gamma_{t,r}^{\omega_\zeta}\ge(2t)^{-1}\left(\varepsilon_1\varphi\,(n)\ln n\right)^2C^{t-2}_{(5\,\varepsilon_1\varphi(n)\ln n/4)-(5/4)},\;\;\zeta\in\{\alpha,\tilde{\alpha}\},$$

що суперечить (36) при достатньо малому $\varepsilon_1>0$ і $t\in\{2,\dots,k\}$.

Таким чином, при обмеженнях (70) та (75) принаймні один елемент $c_*(\alpha)$ множини M_1, $c_*(\alpha)\in M_1$ (один елемент $c_*(\tilde{\alpha})\in\tilde{M}_1$), задовольняє нерівності $c_*(\alpha)<\varepsilon_1\varphi\,(n)\ln n$ ($c_*(\tilde{\alpha})<\varepsilon_1\varphi\,(n)\ln n$). Враховуючи цей факт, знаходимо, що при (Ч$_2$) та (75)

$$S^{(\Delta)}_{\langle(\text{Ч}_2);\,\gamma_1,\dots,\gamma_\Delta\rangle}\,(n,\,r;\,1)\le\left(2^{r-z}\right)^n\left(1-\frac{1}{2^{r-z}}\right)^n\varepsilon_1\varphi\,(n)\ln n\times$$
$$\times\left(\frac{en}{\varepsilon_1\varphi(n)\ln n}\right)^{2\varepsilon_1\varphi(n)\ln n}. \tag{79}$$

Використовуючи тепер (71)-(73) та (79), маємо

$$\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\left(n,\, r;\, Q\right) \le 2^{2^r+r\,n-m}\left(1-\frac{1}{2^{r-z}}\right)^n \times$$
$$\times \varepsilon_1\varphi\left(n\right)\ln n\left(\frac{n}{\varepsilon_1\varphi(n)\ln n}\right)^{2\varepsilon_1\varphi(n)\ln n} \exp\left\{\varepsilon_1\varphi\left(n\right)\ln n + \frac{2^r-\Delta-1}{2^z\left(2^r-1\right)}u\right\}.$$

Остання нерівність, умови (2), (3), співвідношення (13) та (40) дозволяють переконатися в тому, що

$$\frac{1}{2^{r\,N+r\,m}}\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\left(n,\, r;\, Q\right)\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \le \exp\left\{-\frac{n}{2^{r-z}}\left(1-\frac{2^{r-z}}{n}2^r\ln 2+\frac{2^{r-z}}{n}m\ln 2-\right.\right.$$
$$-\frac{2^{r-z}}{n}\ln\left(\varepsilon_1\varphi\left(n\right)\ln n\right)-\frac{2^{r-z+1}}{n}\varepsilon_1\varphi\left(n\right)\ln n\ln\left(\frac{n}{\varepsilon_1\varphi\left(n\right)\ln n}\right)-\frac{2^{r-z}}{n}\varepsilon_1\varphi\left(n\right)\ln n-$$
$$\left.\left.-\frac{2^{r-z}(2^r-\Delta-1)}{n\,2^z(2^r-1)}u-\frac{2^{r-z+1}}{n}\lambda^*+\frac{2^{r-z-1}}{n}\ln\lambda^*\right)\right\}\to 0,\ \ n\to\infty,$$

що й доводить (53) при при обмеженнях (Ч$_2$) та (75).
Якщо $|M_1| = 2^{r-z}-1$, $|\tilde{M}_1| < 2^{r-z}-1$ або $|M_1| < 2^{r-z}-1$ та $|\tilde{M}_1| = 2^{r-z}-1$, то, комбінуючи попередні міркування, встановлюємо, що має місце (53).

Аналізуючи обмеження (Ч$_1$), (Ч$_2$), переконуємося у тому, що встановлене при цих обмеженнях співвідношення (53) має місце при всіх можливих значеннях параметрів $s,\ s',\ i,\ j\quad (i\in I,\ j\in J)$ підсумовування в (32), при яких нерівність (36) має місце для $\Delta\ge 1$.

Співвідношення (35), (38) та (53) доводять умову (38) роботи [1], в якій випадкова величина Y має розподіл Пуассона з параметром 2^m.

Таким чином, умови леми 2 роботи [1] перевірені і згідно цієї леми маємо, з урахуванням (3) та (13),

$$\max_{0\le t\le(1+\omega)\lambda^*}\left|P\left\{\nu_n\ge t\right\}-P\left\{Y\ge t\right\}\right|\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty. \tag{80}$$

Співвідношення (80) запишемо наступним чином:

$$\max_{-\sqrt{\lambda^*}\le l\le\omega\sqrt{\lambda^*}}\left|P\left\{\frac{\nu_n-\lambda^*}{\sqrt{\lambda^*}}\ge l\right\}-P\left\{\frac{Y-\lambda^*}{\sqrt{\lambda^*}}\ge l\right\}\right|\to 0,\ \ n\to\infty, \tag{81}$$

де $l=\frac{t-\lambda^*}{\sqrt{\lambda^*}}$.

Покажемо, що розподіли випадкових величин $\frac{\nu_n-\lambda^*}{\sqrt{\lambda^*}}$ і $\frac{\nu_n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ співпадають при $n\to\infty$. Дійсно, користуючись представленням $[\lambda]=\lambda-\varepsilon(n)$, де $0\le\varepsilon(n)<1$ при $n\to\infty$ та рівністю (13),

$$\frac{\nu_n-\lambda^*}{\sqrt{\lambda^*}}=\frac{\nu_n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}+\eta_n, \tag{82}$$

де $\eta_n=\frac{\nu_n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\left(O\left(\frac{\varepsilon(n)}{\lambda}\right)+O(r(n))\right)-\frac{\lambda r(n)-\varepsilon(n)(1+r(n))}{\sqrt{\lambda^*}}$.

Випадкова величина η_n прямує за ймовірністю до нуля при $n \to \infty$. Справді, для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left\{|\eta_n| > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon} M\left|\eta_n\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\left|O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right| + \left|O\left(\sqrt{\lambda} r(n)\right)\right|\right) \tag{83}$$

і згідно (2) і (30) права частина (83) прямує до нуля із зростанням n, тобто

$$P\left\{|\eta_n| > \varepsilon\right\} \to 0, \ \ n \to \infty. \tag{84}$$

Із (82), (84) та теореми ([5], ст.157) випливає, що розподіли випадкових величин $\frac{\nu_n - \lambda^*}{\sqrt{\lambda^*}}$ і $\frac{\nu_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ співпадають при $n \to \infty$. Аналогічно можна перевірити, що $\frac{Y - \lambda^*}{\sqrt{\lambda^*}}$ і $\frac{Y - [\lambda]}{\sqrt{[\lambda]}}$ мають однакові розподіли при $n \to \infty$.

Таким чином, співвідношення (81) можна записати

$$\max_{-\sqrt{\lambda} \leq l \leq \omega\sqrt{\lambda}} \left| P\left\{\frac{\nu_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \geq l\right\} - P\left\{\frac{Y - [\lambda]}{\sqrt{[\lambda]}} \geq l\right\}\right| \to 0, \ \ n \to \infty. \tag{85}$$

Далі зазначимо, що випадкова величина $\frac{Y - [\lambda]}{\sqrt{[\lambda]}}$ при $\lambda \to \infty$ має стандартний нормальний розподіл.

Отже, згідно (85), умови (3) та співвідношення (13), випадкова величина $\frac{Y - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ при $n \to \infty$ має також нормальний розподіл з параметрами (0,1). Теорема доведена.

1. *Masol V. I., Slobodyan S. Y.* On the asymptotic normality of the number of false solutions of a system of nonlinear random Boolean equations // Theory of Stochastic Processes. – 2006. – Vol. 12 (28), no. 3–4.
2. *Masol V. I.* Moments of the number of solutions of a system of random Boolean equtions // Random Oper. Stoch. Eqs. –1993. –Vol. 1, no. 2. – P. 169–177.
3. *Масол В. И.* Теорема о предельном распределении числа ложных решений системы нелинейных случайных булевых уравнений // Теория вероятн. и её применение. –1998. –**43**, в. 1. – С. 41–56.
4. *Масол В. І.* Граничний розподіл числа розв'язків системи випадкових булевих рівнянь, яка має лінійну частину // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, №9. – С. 1214–1226.
5. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 2003. – 272 с.

Одержано 24.04.2007