УДК 517.518:519:652

М. М. Пагіря, Р. А. Кацала (Ужгородский нац. ун-т)

РОЗВИТКИ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ У ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

The problem of the approximation functions of one real variable of the continued fractions is studied. The expansion of some functions in continued fractions are obtained.

Вивчається задача апроксимації функцій однієї дійсної змінної ланцюговими дробами. Отримані розвитки деяких функцій у ланцюгові дроби.

Вступ. Розвинення функцій однієї дійсної змінної в ланцюговий дріб належить до важливих задач наближення функцій, оскільки такі розвинення широко використовуються в прикладних задачах поряд із наближеннями степеневими ряди, ортогональними многочленами і т.п. Часто ланцюговий дріб має більш широку область збіжності і володіє властивістю не накопичення похибки при обчисленнях.

Джерелом отримання розвитків багатьох елементарних функцій в ланцюговий дріб слугує, так зване, основне диференціальне рівняння ([1, 2])

$$(\alpha+\alpha' x^k)xy'+(\beta+\beta' x^k)y+\gamma y^2=\delta x^k, \qquad y(0)=0\ . \tag{1}$$

Розв'язок диференціального рівняння (1) подається у вигляді функціонального ланцюгового дробу. Таким чином, якщо функція $f(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (1), то її розвиток в ланцюговий дріб в околі нуля є відомий. Багато розвитків елементарних функцій у ланцюговий дріб, наприклад таких як $(1+x)^\nu, e^x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{tg} x, \operatorname{th} x$, були отримані Лагранжем, Ойлером, Ламбертом за допомогою диференціального рівняння (1).

Інший спосіб отримання розвитків функцій в ланцюговий дріб полягає у використанні розвитку цієї функції в степеневий ряд і побудові відповідного даному степеневому ряду правильного ланцюгового C-дробу. Як добре відомо ([3–6]), коефіцієнти такого дробу визначаються через коефіцієнти степеневого ряду через відношення визначників Ганкеля.

Оскільки розвитки багатьох елементарних та спеціальних функцій в степеневий ряд є спеціальним випадком гіпергеометричних функцій або відношення гіпергеометричних функцій, то розвитки цих функцій отримують із розвитку відношення гіпергеометричних функцій в ланцюговий дріб [7–9].

Тісно пов'язані із теорією ланцюгових дробів дробово-раціональні наближення" — апроксимації Паде [10]. Джерелом для побудови апроксимацій Паде також служать розвитки функцій у степеневі ряди.

В книзі В.К.Дзядика [11] запропоновані способи отримання дробово-раціонального наближення деяких елементарних функцій, які є розв'язками задачі Коші для лінійного диференціального рівняння k-го порядку.

Дана робота присвячена ще одному способу розвинення елементарних функцій в ланцюговий дріб за допомогою формули Т.Н.Тіле [12] та новому способу побудови правильних ланцюгових C-дробів.

Розглянемо функціональний ланцюговий дріб (ФЛД) [7,8]

$$b_0(x) + \frac{a_1(x)}{b_1(x)} \underset{+}{} \frac{a_2(x)}{b_2(x)} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{a_n(x)}{b_n(x)} \underset{+}{} \cdots = b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x)}{b_k(x)}\,, \qquad (2)$$

де $a_k(x), b_k(x) \in \mathbf{C}[\Omega]$, $a_k(x) \not\equiv 0$.

Оскільки, задача розвинення функції тісно пов'язана із інтерполяцією функцій ланцюговими дробами, то перейдемо до викладу необхідних відомостей про цю задачу [13–19].

Інтерполяційні ланцюгові дроби Нехай на $\Omega \subset \mathbb{R}$, де Ω — компакт, вибрано множину вузлів $X = \{x_i : x_i \in \Omega,\, x_i \neq x_j, \text{коли}\, i \neq j,\ i,j = 0,\dots,n\}$. Нехай $Y = \{y_i : y_i = f(x_i), i = 0,1,\cdots,n\}$. За значеннями функції $f(x)$ у вузлах X побудується інтерполяційний ланцюговий дріб (ІЛД) Тіле [6,12]

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{b_k}, \qquad (3)$$

де коефіцієнти b_k ІЛД (3) визначаються: або через обернені поділені різниці [6,20]

$$\Phi_k[x_0,\dots,x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0,\dots,x_{k-2},x_k] - \Phi_{k-1}[x_0,\dots,x_{k-1}]}, \qquad (4)$$

при $\Phi_0[x] = f(x)$, а тоді $b_k = \Phi_k[x_0,\dots,x_k]$, $k = 0,1,\dots,n$; або за допомогою рекурентного співвідношення [13,14]

$$b_0 = y_0,\ b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{x_k - x_1}{-b_1} \underset{+}{} \frac{x_k - x_0}{y_k - b_0},\ k = 1,\dots,n. \qquad (5)$$

Можна, також, шукати наближення у вигляді правильного інтерполяційного ланцюгового C-дробу [15,17–19]

$$D_n^{(c)}(x) = \frac{P_n^{(c)}(x)}{Q_n^{(c)}(x)} = b_0^{(c)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(c)}\,(x - x_{k-1})}{1}. \qquad (6)$$

Як показано в [18], коефіцієнти $b_k^{(c)}$, $k = 0,\dots,n$, визначаються наступним чином $b_0^{(c)} = y_0$, $b_1^{(c)} = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$,

$$b_k^{(c)} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \left(-1 + \frac{b_{k-1}^{(c)}\,(x_k - x_{k-2})}{-1} \underset{+}{} \frac{b_{k-2}^{(c)}\,(x_k - x_{k-3})}{-1} \underset{+}{} \right.$$
$$\left. \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{b_2^{(c)}\,(x_k - x_1)}{-1} \underset{+}{} \frac{b_1^{(c)}\,(x_k - x_0)}{y_k - b_0^{(c)}} \right), \qquad k = 2,3,\cdots,n. \qquad (7)$$

ІЛД (6) еквівалентний ІЛД (3), бо між коефіцієнтами b_i та $b_i^{(c)}$ цих дробів існує взаємозв'язок

$$b_0^{(c)} = b_0,\ b_1^{(c)} = 1/b_1,\ b_i^{(c)} = 1/(b_i\, b_{i-1}), \qquad i = 2,\dots,n. \qquad (8)$$

Однак зауважимо, що формула (7) дозволяє знаходити коефіцієнти правильного інтерполяційного C-дробу (6) безпосередньо через значення функції в інтерполяційних вузлах.

Апроксимуючий ланцюговий дріб Тіле. В 1909 році Т.Н. Тіле ([12]) запропонував поряд із інтерполяційним ланцюговим дробом розглядати і апроксимуючий ланцюговий дріб, як граничний випадок першого.

Із формули (4) випливає, що обернена поділена різниця $\Phi_k[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k]$ буде симетрична відносно двох останніх аргументів x_{k-1} та x_k. В [20, 21] показано, що лінійна комбінація обернених поділених різниць

$$\rho_k[x_0, \ldots, x_k] = \Phi_k[x_0, \ldots, x_k] + \Phi_{k-2}[x_0, \ldots, x_{k-2}] + \cdots + \Phi_{k-2[k/2]}\left[x_0, x_{k-2[k/2]}\right] \quad (9)$$

симетрична відносно всіх своїх $k+1$ аргументу. Вираз $\rho_k[x_0, \ldots, x_k]$ називається оберненою різницею k-го порядку. Тоді

$$b_k = \Phi_k[x_0, \ldots, x_k] = \rho_k[x_0, \ldots, x_k] - \rho_{k-2}[x_0, \ldots, x_{k-2}], \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Перейшовши до границі при $x_0, x_1, \ldots, x_k \to x_*$ отримуємо, що

$$b_k(x_*) = \lim_{x_0, \ldots, x_k \to x_*} \{\rho_k[x_0, \ldots, x_k] - \rho_{k-2}[x_0, \ldots, x_{k-2}]\} = k\,{}^{\backprime}\!\left[{}^{(k-1)}f(x_*)\right], \quad (10)$$

де ${}^{(k)}f(x_*)$ — значення оберненої похідної k-го порядку функції $f(x)$ в точці x_*. Обернені похідні обчислюються за допомогою наступних рекурентних співвідношень:

$${}^{(0)}f(x) = f(x),\ {}^{\backprime}f(x) = \frac{1}{f'(x)},\ {}^{(k)}f(x) = k\,{}^{\backprime}\!\left[{}^{(k-1)}f(x)\right] + {}^{(k-2)}f(x),\ k \geqslant 2. \quad (11)$$

Якщо припустити, що існують обернені похідні функції $f(x)$ в точці x_*, то отримаємо апроксимуючу формулу Тіле

$$f(x) \approx f(x_*) + \frac{x - x_*}{{}^{\backprime}f(x_*)} \; + \; \frac{x - x_*}{2\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime}f(x_*)]} \; + \; \frac{x - x_*}{3\,{}^{\backprime}[{}^{(2)}f(x_*)]} \; + \; \cdots \; + \; \frac{x - x_*}{n\,{}^{\backprime}[{}^{(n-1)}f(x_*)]}, \quad (12)$$

яку можна вважати аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів.

В своїй книзі Тіле [12] наводить наступне твердження.

Твердження 1. *Обернена похідна функції $y = (c + x)^\alpha$ n-го порядку, де $\alpha, c \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, дорівнює*

$${}^{(2m-1)}(c+x)^\alpha = \frac{m(2-\alpha)(3-\alpha)\ldots(m-\alpha)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)}\,(c+x)^{1-\alpha}, \text{ коли } n = 2m-1, \quad (13)$$

$${}^{(2m)}(c+x)^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(m-\alpha)}\,(c+x)^\alpha, \qquad \text{коли} \quad n = 2m. \quad (14)$$

Дане твердження легко довести за допомогою методу повної математичної індукції. Із цього твердження безпосередньо випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. *Обернена похідна $2n$-го порядку від функції $y = (c + x)^{-n}$ дорівнює нулеві, $n \in \mathbb{N}$.*

Наслідок 2. *Обернена похідна $2n - 1$-го порядку від функції $y = (c + x)^n$ дорівнює нулеві, $n \in \mathbb{N}$.*

Наслідок 3. *Обернена похідна n-го порядку, $n \in \mathbb{N}$, від функції $y = \sqrt{c+x}$ визначається за формулою*

$$^{(n)}\!\left(\sqrt{c+x}\,\right) = (n+1)\sqrt{c+x}.$$

Доведення. Згідно із формулами (13)–(14)

$$^{(2n)}\!\left(\sqrt{c+x}\,\right) = \frac{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n+1}{2}}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2}}\sqrt{c+x} = (2n+1)\sqrt{c+x},$$

$$^{(2n-1)}\!\left(\sqrt{c+x}\,\right) = \frac{n\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2}}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2}}\sqrt{c+x} = 2n\sqrt{c+x}.$$

З наслідку 3 випливає, що $n{}^{\backprime}\!\left[{}^{(n-1)}\sqrt{c+x}\right] = 2\sqrt{c+x}$, а тоді в околі точки x_0 отримуємо розвиток функції $y = \sqrt{c+x}$ в ланцюговий дріб Тіле

$$\sqrt{c+x} \approx b + \frac{x-x_0}{2b}\underset{+}{}\;\frac{x-x_0}{2b}\underset{+}{}\;\cdots\underset{+}{}\;\frac{x-x_0}{2b}\underset{+}{}\;\cdots,$$

де $b = \sqrt{c+x_0}$. В [1,2] цей розвиток отриманий за допомогою основного диференціального рівняння (1).

Визначимо коефіцієнти розвитку функції $y = (c+x)^\alpha$ в ланцюговий дріб Тіле. З твердження 1 та формули (11) маємо, що у випадку, коли $n = 2m$, то

$$2m\;{}^{\backprime}\!\left[{}^{(2m-1)}(c+x)^\alpha\right] = \frac{2\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(m-\alpha)}\,(c+x)^\alpha, \tag{15}$$

аналогічно при $n = 2m-1$ отримуємо

$$(2m-1)\;{}^{\backprime}\!\left[{}^{(2m-2)}(c+x)^\alpha\right] = \frac{(2m-1)(1-\alpha)\ldots(m-1-\alpha)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}\,(c+x)^{1-\alpha}. \tag{16}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у формулу (12) та виконавши перетворення, отримуємо розвиток функції в околі точки x_*

$$\begin{aligned}(c+x)^\alpha = (c+x_*)\Bigg(1 + &\frac{\alpha(x-x_*)}{c+x_*}\underset{+}{}\;\frac{(1-\alpha)(x-x_*)}{2}\underset{+}{}\;\frac{(1+\alpha)(x-x_*)}{3(c+x_*)}\underset{+}{} \\ &\underset{+}{}\;\frac{(2-\alpha)(x-x_*)}{2}\underset{+}{}\;\frac{(2+\alpha)(x-x_*)}{5(c+x_*)}\underset{+}{}\;\cdots\underset{+}{}\;\frac{(m-\alpha)(x-x_*)}{2}\underset{+}{} \\ &\underset{+}{}\;\frac{(m+\alpha)(x-x_*)}{(2m+1)(c+x_*)}\underset{+}{}\;\cdots\Bigg).\end{aligned} \tag{17}$$

Якщо у формулі (17) підставити $x_* = 0$ і $c = 1$, то отримаємо розвиток Лагранжа [1,2] степеневої функції $y = (1+x)^\alpha$ в околі нуля.

Т.Н.Тіле в [12] наводить наступні формули для знаходження обернених похідних функції $y=\operatorname{tg} x$, які легко довести за допомогою методу повної математичної індукції. Для довільному $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ мають місце співвідношення

$$ {}^{(4n)}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} x,\qquad {}^{(4n+1)}\operatorname{tg} x=(2n+1)(n+\cos^2 x), \tag{18}$$

$$ {}^{(4n+2)}\operatorname{tg} x=-\operatorname{ctg} x,\quad {}^{(4n+3)}\operatorname{tg} x=(n+1)(2n+1+2\sin^2 x)\ . \tag{19}$$

Далі, легко отримати

$$4n\cdot{}^{\backprime}[{}^{(4n-1)}\operatorname{tg} x]=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x,\qquad (4k+1)\cdot{}^{\backprime}[{}^{(4k)}\operatorname{tg} x]=(4k+1)\cos^2 x,$$

$$(4k+2)\cdot{}^{\backprime}[{}^{(4k+1)}\operatorname{tg} x]=-\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x,\qquad (4k+3)\cdot{}^{\backprime}[{}^{(4k+2)}\operatorname{tg} x]=(4k+3)\sin^2 x\ .$$

Звідси одержимо наступний розвиток тангенса за формулою Тіле (12)

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} x_*+\frac{x-x_*}{\cos^2 x_*}\ \underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x_*}\ \underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{3\sin^2 x_*}\ \underset{+}{}$$

$$\underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{\operatorname{tg} x_*+\operatorname{ctg} x_*}\ \underset{+}{}\ \cdots\ \underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{(4k-3)\cos^2 x_*}\ \underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{-\operatorname{tg} x_*-\operatorname{ctg} x_*}\ \underset{+}{}$$

$$\underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{(4k-1)\sin^2 x_*}\ \underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{tgx_*+\operatorname{ctg} x_*}\ \underset{+}{}\ \cdots\ .$$

Згідно із формулою Тіле для функції $y=\operatorname{ctg} x$ маємо:

$$ {}^{(1)}\operatorname{ctg} x=\frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 x},\ {}^{(2)}\operatorname{ctg} x=\frac{-1}{\operatorname{ctg} x},\ {}^{(3)}\operatorname{ctg} x=-\frac{3\operatorname{ctg}^2 x+1}{1+\operatorname{ctg}^2 x},\ {}^{(4)}\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} x.$$

За допомогою методу повної математичної індукції легко довести, що

$$ {}^{(4k)}\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} x,\quad {}^{(4k+1)}\operatorname{ctg} x=-\frac{(2k+1)(k\cdot\operatorname{ctg}^2 x+k+1)}{1+\operatorname{ctg}^2 x},$$

$$ {}^{(4k+2)}\operatorname{ctg} x=\frac{-1}{\operatorname{ctg} x},\quad {}^{(4k+3)}\operatorname{ctg} x=-\frac{(2k+1)((k+3)\cdot\operatorname{ctg}^2 x+k+1)}{1+\operatorname{ctg}^2 x},$$

і

$$2k\cdot{}^{\backprime}\left[{}^{(2k-1)}\operatorname{ctg} x\right]=(-1)^k\frac{\operatorname{ctg}^2 x+1}{\operatorname{ctg} x},\quad (4k+1)\cdot{}^{\backprime}\left[{}^{(4k)}\operatorname{ctg} x\right]=-\frac{4k+1}{1+\operatorname{ctg}^2 x},$$

$$(4k+3){}^{\backprime}\left[{}^{(4k+3)}\operatorname{ctg} x\right]=-\frac{(4k+3)\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\ .$$

Тоді розвиток в ланцюговий дріб Тіле цієї функції буде таким

$$\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} x_*+\frac{x-x_*}{(-1/(1+\operatorname{ctg}^2 x_*))}\ \underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{(-(1+\operatorname{ctg}^2 x_*)/\operatorname{ctg} x_*)}\ \underset{+}{}$$

$$\underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{(-3\operatorname{ctg}^2 x_*/(1+\operatorname{ctg}^2 x_*))}\ \underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{(1+\operatorname{ctg}^2 x_*)/\operatorname{ctg} x_*}\ \underset{+}{}\ \cdots\ \underset{+}{}$$

$$\underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{(-(4k-3)/(1+\operatorname{ctg}^2 x_*))}\ \underset{+}{}\ \frac{x-x_*}{(-(1+\operatorname{ctg}^2 x_*)/\operatorname{ctg} x_*)}\ \underset{+}{}$$

$$+\ \frac{x-x_*}{(-(4k-1)\operatorname{ctg}^2 x_*/(1+\operatorname{ctg}^2 x_*))}\ +\ \frac{x-x_*}{(1+\operatorname{ctg}^2 x_*)/\operatorname{ctg} x_*}\ +\ \cdots\ .$$

Для функцій $y=\operatorname{th} x$ та $y=\operatorname{cth} x$ аналогічно можна отримати:

$${}^{(4k)}\operatorname{th} x=\operatorname{th} x,\quad {}^{(4k+1)}\operatorname{th} x=\frac{(2k+1)(k\operatorname{th} x-(k+1))}{\operatorname{th}^2 x-1},$$

$${}^{(4k+2)}\operatorname{th} x=\frac{1}{\operatorname{th} x},\quad {}^{(4k+3)}\operatorname{th} x=\frac{(2k+1)((k+3)\ \operatorname{th} x-(k+1))}{\operatorname{th}^2 x-1},$$

а тоді

$$4k\cdot{\backprime}\big[{}^{(4k-1)}\operatorname{th} x\big]=\frac{\operatorname{th}^2 x-1}{\operatorname{th} x},\quad (4k+1)\cdot{\backprime}\big[{}^{(4k)}\operatorname{th} x\big]=\frac{-(4k+1)}{\operatorname{th}^2 x-1},$$

$$(4k+2)\cdot{\backprime}\big[{}^{(4k+1)}\operatorname{th} x\big]=\frac{1-\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th} x},\quad (4k+3)\cdot{\backprime}\big[{}^{(4k+2)}\operatorname{th} x\big]=\frac{(4k+3)\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th}^2 x-1};$$

аналогічно маємо:

$${}^{(4k)}\operatorname{cth} x=\operatorname{cth} x,\quad {}^{(4k+1)}\operatorname{cth} x=\frac{(2k+1)(k\ \operatorname{cth} x-(k+1))}{\operatorname{cth}^2 x-1},$$

$${}^{(4k+2)}\operatorname{cth} x=\frac{1}{\operatorname{cth} x},\quad {}^{(4k+3)}\operatorname{cth} x=\frac{(2k+1)((k+3)\ \operatorname{cth} x-(k+1))}{\operatorname{cth}^2 x-1},$$

а тоді

$$4k\cdot{\backprime}\big[{}^{(4k-1)}\operatorname{cth} x\big]=\frac{\operatorname{cth}^2 x-1}{\operatorname{cth} x},\quad (4k+1)\cdot{\backprime}\big[{}^{(4k)}\operatorname{cth} x\big]=\frac{-(4k+1)}{\operatorname{cth}^2 x-1},$$

$$(4k+2)\cdot{\backprime}\big[{}^{(4k+1)}\operatorname{cth} x\big]=\frac{1-\operatorname{cth}^2 x}{\operatorname{cth} x},\quad (4k+3)\cdot{\backprime}\big[{}^{(4k+2)}\operatorname{cth} x\big]=\frac{(4k+3)\operatorname{cth}^2 x}{\operatorname{cth}^2 x-1}\ .$$

Звідси маємо розвитки цих функцій в ланцюговий дріб за формулою (12)

$$\operatorname{th} x=\operatorname{th} x_*+\frac{x-x_*}{(-1/(\operatorname{th}^2 x_*-1))}\ +\ \frac{x-x_*}{(-(\operatorname{th}^2 x_*-1)/\operatorname{th} x_*)}\ +$$
$$+\ \frac{x-x_*}{3\operatorname{th}^2 x_*/(\operatorname{th}^2 x_*-1)}\ +\ \frac{x-x_*}{(\operatorname{th}^2 x_*-1)/\operatorname{th} x_*}\ +\ \cdots\ +$$
$$+\ \frac{x-x_*}{(-(4k-3)/(\operatorname{th}^2 x_*-1))}\ +\ \frac{x-x_*}{(-(\operatorname{th}^2 x_*-1)/\operatorname{th} x_*)}\ +$$
$$+\ \frac{x-x_*}{(4k-1)\operatorname{th}^2 x_*/(\operatorname{th}^2 x_*-1)}\ +\ \frac{x-x_*}{(\operatorname{th}^2 x_*-1)/\operatorname{th} x_*}\ +\ \cdots\ ,$$

та

$$\operatorname{cth} x=\operatorname{cth} x_*+\frac{x-x_*}{(-1/(\operatorname{cth}^2 x_*-1))}\ +\ \frac{x-x_*}{(-(\operatorname{cth}^2 x_*-1)/\operatorname{cth} x_*)}\ +$$
$$+\ \frac{x-x_*}{3\operatorname{cth}^2 x_*/(\operatorname{cth}^2 x_*-1)}\ +\ \frac{x-x_*}{(\operatorname{cth}^2 x_*-1)/\operatorname{cth} x_*}\ +\ \cdots\ +$$
$$+\ \frac{x-x_*}{(-(4k-3)/(\operatorname{cth}^2 x_*-1))}\ +\ \frac{x-x_*}{(-(\operatorname{cth}^2 x_*-1)/\operatorname{cth} x_*)}\ +$$
$$+\ \frac{x-x_*}{(4k-1)\operatorname{cth}^2 x_*/(\operatorname{cth}^2 x_*-1)}\ +\ \frac{x-x_*}{(\operatorname{cth}^2 x_*-1)/\operatorname{cth} x_*}\ +\ \cdots\ .$$

Правильний апроксимуючий ланцюговий C-дріб. Як вже відзначалося в пункті 13, що ІЛД (3) еквівалентний ІЛД (6), бо між їх коефіцієнтами має місце співвідношення (8). Якщо перейти в (8) до границі та врахувати (9) і (10), то будемо мати

$$b_0^{(1)}(x_*) = f(x_*), \quad b_1^{(1)}(x_*) = \lim_{x_0,x_1\to x_*} b_1^{(1)}(x_0,x_1) = \frac{1}{{}^{\backprime}f(x_*)},$$

$$b_k^{(1)}(x_*) = \lim_{x_0,\dots,x_k\to x_*} b_k^{(1)}(x_0,\dots,x_k) = \frac{1}{k\cdot(k-1)\cdot{}^{\backprime}\big({}^{(k-1)}f(x_*)\big)\cdot{}^{\backprime}\big({}^{(k-2)}f(x_*)\big)},$$

$k = 2,\dots,n$.

Зробивши припущення, що в деякій точці x_* границі в правій частині існують, отримаємо апроксимуючу формулу у вигляді правильного C-дробу

$$f(x) \approx f(x_*) + \frac{(x-x_*)/{}^{\backprime}f(x_*)}{1} + \frac{(x-x_*)/(2\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}f(x_*))\cdot{}^{\backprime}f(x_*))}{1} + \frac{(x-x_*)/(6\,{}^{\backprime}({}^{(2)}f(x_*))\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}f(x_*))}{1} + \dots + \frac{(x-x_*)/(n\cdot(n-1)\,{}^{\backprime}({}^{(n-1)}f(x_*))\cdot{}^{\backprime}({}^{(n-2)}f(x_*)))}{1}.$$

Позначимо через

$$\omega_0 = f(x_*),\ \omega_1 = \frac{1}{{}^{\backprime}f(x_*)},\ \omega_k = \frac{1}{k(k-1){}^{\backprime}({}^{(k-1)}f(x_*)){}^{\backprime}({}^{(k-2)}f(x_*))},\ k \geqslant 2. \tag{20}$$

Отримаємо розвиток функції в правильний ланцюговий С-дріб

$$f(x) = \omega_0 + \frac{\omega_1(x-x_*)}{1} + \frac{\omega_2(x-x_*)}{1} + \dots + \frac{\omega_n(x-x_*)}{1} + \dots\,. \tag{21}$$

Вже відзначалося, що правильні ланцюгові С-дроби є відповідними степеневому ряду

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-x_*)^i,$$

а коефіцієнти ω_i цього дробу визначаються через відношення ганкелевих визначників, які складені із коефіцієнтів c_i даного ряду.

Запишемо розвиток функції $y = (c+x)^\alpha$ в правильний ланцюговий С-дріб. З формул (20) та (15)–(16) маємо

$$\omega_0 = (c+x_*)^\alpha, \qquad \omega_1 = \alpha\,(c+x_*)^{\alpha-1}, \qquad \omega_{2k} = \frac{k-\alpha}{2(2k-1)(c+x_*)},$$

$$\omega_{2k+1} = \frac{k+\alpha}{2(2k+1)(c+x_*)}, \qquad k = 1,2,\dots$$

Дані формули визначають коефіцієнти ω_k для степеневої функції. Тоді її розвиток за формулою (21) має вигляд

$$(c+x)^\nu = (c+x_*)^\nu + \frac{\nu(c+x_*)^{\nu-1}(x-x_*)}{1} + \frac{(1-\nu)(x-x_*)/(2(c+x_*))}{1} +$$

$$+\frac{(1+\nu)(x-x_*)/(6(c+x_*))}{1}+\frac{(2-\nu)(x-x_*)/(6(c+x_*))}{1}+$$
$$+\frac{(2+\nu)(x-x_*)/(10(c+x_*))}{1}+\cdots+\frac{(k-\nu)(x-x_*)/((4k-2)(c+x_*))}{1}+$$
$$+\frac{(k+\nu)(x-x_*)/((4k+2)(c+x_*))}{1}+\cdots.$$

Далі визначимо коефіцієнти ω_k для функції $y=\operatorname{tg} x$, використовуючи, як і в попередньому випадку, формули (20) та виведені вище коефіцієнти розвитку цієї функції в дріб Тіле. Маємо

$$\omega_0=\operatorname{tg} x_*,\quad \omega_1=1+\operatorname{tg}^2 x_*,\quad \omega_{4k}=\frac{1}{4k-1}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x_*},\quad \omega_{4k+1}=\frac{1}{4k+1}\cdot\operatorname{tg} x_*,$$

$$\omega_{4k+2}=-\frac{1}{4k+1}\cdot\operatorname{tg} x_*,\quad \omega_{4k+3}=-\frac{1}{4k+3}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x_*}.$$

Отримані формули можна записати простіше і очевидно, що вони будуть задавати всі коефіцієнти ω_k для розвитку $y=\operatorname{tg} x$ в правильний апроксимуючий ланцюговий С-дріб. Маємо

$$\omega_0=\operatorname{tg} x_*,\quad \omega_1=1+\operatorname{tg}^2 x_*,$$

$$\omega_{2k}=\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot(\operatorname{tg} x_*)^{(-1)^{k-1}},\quad \omega_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot(\operatorname{tg} x_*)^{(-1)^{k}},\qquad k=1,2,\ldots$$

В цьому випадку отримуємо таку апроксимуючу формулу

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} x_*+\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x_*)(x-x_*)}{1}+\frac{(-\operatorname{tg} x_*)(x-x_*)}{1}+\frac{(x-x_*)/(-3\operatorname{tg} x_*)}{1}+$$
$$+\frac{(x-x_*)/(3\operatorname{tg} x_*)}{1}+\frac{\operatorname{tg} x_*(x-x_*)/5}{1}+\frac{(-\operatorname{tg} x_*)(x-x_*)/5}{1}+$$
$$+\frac{(x-x_*)/(-7\operatorname{tg} x_*)}{1}+\cdots+\frac{(-1)^k(\operatorname{tg} x_*)^{(-1)^{k-1}}(x-x_*)/(2k-1)}{1}+$$
$$+\frac{(-1)^k(\operatorname{tg} x_*)^{(-1)^{k}}(x-x_*)/(2k+1)}{1}+\cdots.$$

Аналогічними міркуваннями отримуємо розвитки в правильний ланцюговий С-дріб для функцій $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\operatorname{th} x$, $y=\operatorname{cth} x$. Для котангенса маємо

$$\omega_0=\operatorname{ctg} x_*,\qquad \omega_1=-(1+\operatorname{ctg}^2 x_*),$$
$$\omega_{2k}=\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot(\operatorname{ctg} x_*)^{(-1)^{k-1}},\qquad \omega_{2k+1}=\frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}\cdot(\operatorname{ctg} x_*)^{(-1)^{k}},\ k=1,2,\ldots$$

Звідси його розвиток в ланцюговий дріб виду (21) буде

$$\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} x_*-\frac{(1+\operatorname{ctg}^2 x_*)(x-x_*)}{1}+\frac{\operatorname{ctg} x_*(x-x_*)}{1}+\frac{(x-x_*)/(3\operatorname{ctg} x_*)}{1}+$$
$$+\frac{(x-x_*)/(-3\operatorname{ctg} x_*)}{1}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}(\operatorname{ctg} x_*)^{(-1)^{k-1}}(x-x_*)/(2k-1)}{1}+$$

$$+\frac{(-1)^{k-1}(\operatorname{ctg} x_*)^{(-1)^k}(x-x_*)/(2k+1)}{1}+\cdots.$$

Далі, для функції $y=\operatorname{th} x$ коефіцієнти ω_k будуть такі:

$$\omega_0=\operatorname{th} x_*, \qquad \omega_1=1-\operatorname{th}^2 x_*,$$
$$\omega_{2k}=\frac{1}{2k-1}\cdot(\operatorname{th} x_*)^{(-1)^{k-1}}, \qquad \omega_{2k+1}=\frac{-1}{2k+1}\cdot(\operatorname{th} x_*)^{(-1)^k}, \quad k=1,2,\ldots$$

І відповідно розвиток

$$\operatorname{th} x=\operatorname{th} x_*+\frac{(1-\operatorname{th}^2 x_*)(x-x_*)}{1}+\frac{\operatorname{th} x_*(x-x_*)}{1}+\frac{(x-x_*)/(-3\operatorname{th} x_*)}{1}+$$
$$+\frac{(x-x_*)/(3\operatorname{th} x_*)}{1}+\cdots+\frac{(\operatorname{th} x_*)^{(-1)^{k-1}}(x-x_*)/(2k-1)}{1}+$$
$$+\frac{(-\operatorname{th} x_*)^{(-1)^k}(x-x_*)/(2k+1)}{1}+\cdots.$$

Аналогічно для $y=\operatorname{cth} x$:

$$\omega_0=\operatorname{cth} x_*, \qquad \omega_1=1-\operatorname{cth}^2 x_*,$$
$$\omega_{2k}=\frac{1}{2k-1}\cdot(\operatorname{cth} x_*)^{(-1)^{k-1}}, \qquad \omega_{2k+1}=\frac{-1}{2k+1}\cdot(\operatorname{cth} x_*)^{(-1)^k}, \quad k=1,2,\ldots$$

Звідси

$$\operatorname{cth} x=\operatorname{cth} x_*+\frac{(1-\operatorname{cth}^2 x_*)(x-x_*)}{1}+\frac{\operatorname{cth} x_*(x-x_*)}{1}+\frac{(x-x_*)/(-3\operatorname{cth} x_*)}{1}+$$
$$+\frac{(x-x_*)/(3\operatorname{cth} x_*)}{1}+\cdots+\frac{(\operatorname{cth} x_*)^{(-1)^{k-1}}(x-x_*)/(2k-1)}{1}+$$
$$+\frac{(-\operatorname{cth} x_*)^{(-1)^k}(x-x_*)/(2k+1)}{1}+\cdots.$$

Очевидно, що розвитки розглянутих функцій в правильні ланцюгові С-дроби виглядають простіше, ніж відповідні їм розвитки за формулою Тіле.

1. *Khovanskii A. N.* The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory. – Groningen: P. Noordhoff, 1963. – 212 p.
2. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). – М.: ГИФМЛ, 1961. – 440 с.
3. *Wall H. S.* Analytic Theory of Continued Fractions. – New York: D. Van Nostrand Co., 1948. – 433 p.
4. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. – Stuttgart: Teubner, 1954. – 194 s.
5. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band II. – Stuttgart: Teubner, 1957. – 315 s.
6. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
7. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
8. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continue Fraction with Applications. – Amsterdam–London–New York–Tokyo: North–Holland, 1992. – 606 p.

9. *Шмойлов В. И., Заяц И. А., Слобода М. З.* Расходящиеся непрерывные дроби. – Львов: Меркатор, 2000. – 820 с.
10. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
11. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – К.: Наукова думка, 1988. – 304 с.
12. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909.– XII + 175 s.
13. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. Вип. I. – С. 72–79.
14. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом Тіле // Збірник наук. праць з обчислювальної математики – Ужгород, 1997. – С. 21–26.
15. *Пагіря М. М.* Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень. Зб. наук. праць.– Т. 1. – Київ, Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2001. – С. 328–333.
16. *Pahirya M.* Some New Aspects of Thiele Interpolation Continued Fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2001. – Vol. IX, Summer 2001. – P. 21–29.
17. *Pahirya M.* Interpolation Function of Non–Tiele Continued Fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2002. – Vol. X, Summer 2002. – P. 59–62.
18. *Пагіря М. М.* Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. **46**, № 4. – С. 57–64.
19. *Пагіря М.М.* Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10-11. – С. 77-87.
20. *Hildebrand F. B.* Introduction to Numerical Analysis. 2^{nd} ed. – New York: Dover Publications,Inc, 1987. – 669 p.
21. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 527 с.

Одержано 04.06.2007