

К ВОПРОСУ О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ψ -ФУНКЦИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Чаварга Н.Н.

Ужгородский национальный университет 88 000, ул. Пидгирна, 46.

E-mail: nikolay.chavarga@mail.ru

Предложена энергетическая интерпретация физического смысла ψ -функции, которая базируется на предположении, что все элементарные частицы являются солитонными образованиями электромагнитного поля. Предложено условие нормировки для энергетической интерпретации.

*С одним лишь «вероятно» теории не построишь.
Даже правильная эмпирически и логически, она в
глубине своей ложна.* А. Эйнштейн

1. Введение.

В настоящее время вопрос физического смысла ψ -функции волнового уравнения подавляющим большинством физиков считается решенным в пользу вероятностной интерпретации, которая была предложена М.Борном и поддержана Бором, Гейзенбергом, Паули, Дираком. Известно, однако, что такие ученые как Эйнштейн, Лорентц, Планк, де Бройль, Фейнман, и даже автор волнового уравнения Шредингер, не приняли этой точки зрения. В литературе можно найти очень много эффектных высказываний выдающихся ученых против вероятностной интерпретации. Одним из наиболее ярких мы считаем высказывание Шредингера, сделанное им уже в преклонном возрасте – в 1957 году: «Я хочу ясно сказать, что отныне и впредь беру на себя всю ответственность за свое упрямство. Я иду против течения, но направление потока изменится», [1, с. 295]. У Эйнштейна подобных высказываний имеется значительно больше. Вот одно из них, сделанное в письме Шредингеру: «Философия успокоения Гейзенберга – Борна – или религия? – так тонко продумана, что представляет верующему до поры до времени мягкую подушку, с которой не так легко спугнуть его. Пусть спит», [2]. Мы надеемся, что эти слова творцов квантовой теории хоть в какой-то мере воспрепятствуют предубежденному отношению читателя к обсуждаемой здесь проблеме.

Упрямое неприятие Эйнштейном вероятностной интерпретации приверженцы квантовой теории объясняют недостаточным уровнем его способностей. М.Борн, например, в своей книге открыто заявил: «Соображения Эйнштейна и сегодня (1965) представляются мне покоящимися на недостаточном понимании квантовой механики», [3]. Самый простой вывод, который можно сделать из этой информации, следующий – или вероятностная интерпретация является некорректной, или для того, чтобы ее понять, нужны действительно особые интеллектуальные способности, которые отсутствовали даже у целого ряда классиков. Сегодня эти способности просто должны присутствовать у рядовых преподавателей физики и даже у студентов.

Предлагаемая вниманию читателя интерпретация смысла ψ -функции базируется на понятии солитона. Известно, что солитоны имеют не только волновые свойства, но и свойства корпускул – при столкновениях ведут себя как упругие шары, не теряют энергии движения (выполняется закон инерции), не отдают среде сконцентрированную в них энергию (не прекращают своего существования без контакта с антисолитонами), не расплываются (в отличие от волновых пакетов), и т.д., [4]. Образ элементарных частиц как электромагнитных солитонов позволил нам предложить простую и непротиворечивую теорию относительности, [5]. Очевидно, что эта модель не согласуется с образом точечных частиц, каковыми в настоящее время считаются практически все элементарные частицы (или близкими к точечным). Очевидно также, что для солитонных образований волновая функция должна описывать реальные колебательные процессы, происходящие в этих объектах. Это означает, что в данном случае для волновой функции нужно искать новую интерпретацию, не связанную с вероятностью обнаружения точечной частицы в том или ином месте, в той или иной ситуации.

2. Энергетическая интерпретация физического смысла ψ -функции

При решении задачи построения физических теорий, объясняющих некоторые экспериментальные факты, обычно сначала выдвигается физическая идея, объясняющая явление качественно, «на пальцах». Затем идея проверяется на количественное согласие с экспериментом, если ее удастся корректно представить в понятиях математики. В этой процедуре все величины, входящие в уравнения, получают свое истолкование на стадии составления уравнений, поэтому проблем с интерпретацией их физического смысла не возникает.

В ряде случаев, однако, за неимением иной возможности, поступают противоположным образом. Сначала, после ряда математических операций, добывают результат, а затем решают вопрос физического смысла входящих в решение уравнения величин. Так было в случае с уравнениями Максвелла, преобразованиями Лорентца, соотношением неопределенности, так было и с уравнением Шредингера.

Известно, что уравнение Шредингера не выводится строго, но его можно получить из так называемого классического волнового уравнения, которое описывает любое волновое движение – от колебаний струны или маятника до звуковой или электромагнитной волны:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

Физический смысл величины ψ зависит от того, какой процесс мы собираемся описать с помощью этого уравнения. Это может быть величина линейного отклонения от среднего положения (осциллятор, струна), угловое отклонение (маятник), величина заряда на обкладке конденсатора (в электрических цепях), степень деформации среды, напряженность электрического или магнитного полей, если это электромагнитная волна и т.д.

Если мы хотим исследовать, как это уравнение описывает поведение электрона, можно воспользоваться тем фактом, что электрон обладает волновыми свойствами, которые описываются соотношениями де Бройля. Предположим, что величина ψ в уравнении (2.1) представляет гармоническую волну де Бройля в пространстве с постоянным потенциалом φ и зависит от времени следующим образом, [6]:

$$\psi(t) \sim e^{-i\omega t} \quad (2.2)$$

где ω – частота колебаний, связанная, согласно де Бройлю, с полной энергией частицы выражением:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad (2.3)$$

Путем дифференцирования из (2.2) можно получить:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega e^{-i\omega t} = -i\omega \psi \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \omega^2 \psi \quad (2.5)$$

Для электромагнитной волны $V=C$, поэтому вместо (2.1) можно записать:

$$\Delta \psi + \frac{\omega^2}{C^2} \psi = 0 \quad (2.6)$$

где Δ – лапласиан.

Далее:

$$\frac{\omega^2}{C^2} = \frac{4\pi^2 \nu^2}{C^2} = \frac{4\pi^2}{T^2 C^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \quad (2.7)$$

где T – период колебания, λ – длина волны. Теперь (2.6) можно переписать следующим образом:

$$\Delta \psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi = 0 \quad (2.8)$$

Согласно закону сохранения полная энергия электрона равна сумме кинетической T и потенциальной U , которая определяется потенциалом поля. Поскольку $T = p^2/2m$, где p – импульс частицы, имеем:

$$E = \frac{p^2}{2m} + U \quad (2.9)$$

отсюда:
$$p^2 = 2m(E - U) \quad (2.10)$$

В соответствии с гипотезой де Бройля электрон характеризуется не только импульсом, но и длиной волны, а фотон характеризуется не только длиной волны, но и импульсом:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2.11)$$

По сути дела, именно в (2.11) содержится информация о том, что исследуемые объекты имеют свойства солитонов. Учитывая (2.10), имеем:

$$\lambda^2 = \frac{h^2}{2m(E - U)} \quad (2.12)$$

Теперь вместо (2.8) можно написать:

$$\Delta\psi + \frac{4\pi^2 2m(E - U)}{h^2} \psi = 0 \quad (2.13)$$

откуда
$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + (E - U) \psi = 0 \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) – это наиболее часто встречающаяся в литературе форма записи уравнения Шредингера, не содержащего времени.

Учитывая, что $\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\omega\psi = -i\frac{E}{\hbar}\psi$, величину $E\psi$ можно представить как

$$E\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} i\hbar \quad (2.15)$$

Учитывая (2.15), уравнение (2.14) можно также представить в виде:

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) – это форма записи уравнения Шредингера, учитывающая зависимость ψ -функции от времени. Все было бы хорошо, если бы только при использовании выражения (2.2) мы не забыли уточнить, какой физический смысл имеет величина ψ .

Один из наиболее существенных шагов, которые делают при исследовании этого уравнения, состоит в предположении, что уравнения (2.14) или (2.16) справедливы и в случае, если потенциальная энергия U зависит от расстояния, т.е. потенциал силового поля имеет пространственное распределение. Если в (2.14) вместо $U(x,y,z)$ подставить выражение для потенциальной энергии электрона в поле протона, то решение уравнения можно получить только для дискретных значений энергии E_n . Известно, что эти значения энергий с высокой точностью совпадают с положениями экспериментально наблюдаемых энергетических уровней атома водорода. Именно экспериментальное подтверждение полученных результатов снимает вопросы относительно законности сделанных предположений.

Что касается физического смысла ψ -функции, то официально принятая точка зрения не нуждается в особых комментариях, однако мы все же остановимся на этом вопросе. Очень часто в литературе его представляют с помощью следующего примера. Если предположить, что кривая потенциала силового поля, действующего на электрон, имеет вид $\varphi = kx^2$, то кривая потенциальной энергии точечного электрона имеет вид $U = ekx^2$. Если это выражение подставить в (2.14), то, как и в случае атома водорода, решение можно получить только для дискретного ряда значений энергии – так называемых собственных значений. Это один из немногих случаев, когда уравнение Шредингера можно решить аналитически:

$$E_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.17)$$

где $n=0,1,2,\dots$

Каждому значению n соответствует свой вид ψ -функции, т.н. собственные функции. На рисунке 1 приведен график зависимости потенциальной энергии $U(x)$ точечного электрона в силовом поле $\varphi = kx^2$, а также график $|\psi_n(x)|^2$ для $n=2$. Согласно вероятностной интерпретации высота ординаты на графике $|\psi_n(x)|^2$ соответствует вероятности обнаружить частицу в пространстве с координатой x . Более конкретной информации о частице мы как будто не можем получить принципиально. Как видно из графика, наибольшая вероятность обнаружения частицы наблюдается вблизи поворотных точек – точек A и B на кривой потенциальной энергии, она же – кривая взаимодействия точечного электрона с силовым полем $\varphi(x)$. Масштабы осей φ и U подобраны таким образом, что кривые совпадают. В отличие от классической физики, квантовую частицу, в соответствии с вероятностной интерпретацией, можно обнаружить с относительно большой вероятностью и под кривыми взаимодействия – в точках с отрицательной энергией движения (например, точки C и D). Объяснение причины такой ситуации (как в этом, так и в других аналогичных случаях) в квантовой теории предлагают одно и то же – «специфически квантовое явление».

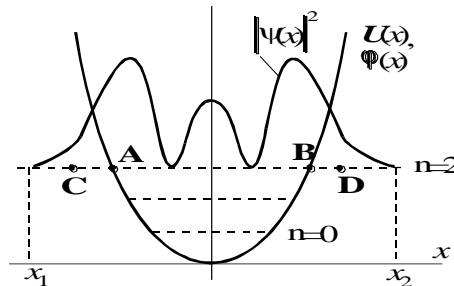


Рис1. Волна де Бройля в силовом поле $U = kx^2$.

Обращаем внимание читателя на то, что рисунок 1 выполнен в предположении, что закон сохранения энергии в микромире выполняется, и это подтверждает прямолинейность отрезка $A-B$. Если бы $A-B$ не был отрезком прямой линии, это означало бы, что закон сохранения энергии не выполняется. Этот закон введен в волновое уравнение через выражение (2.9). С другой стороны, согласно вероятностной интерпретации из графика кривой $|\psi(x)|^2$ следует, что в микромире закон сохранения энергии не выполняется – объект может находиться под кривой потенциальной энергии, точки C и D . Какой смысл использовать для анализа ситуации кривую, построенную на законе сохранения, если мы параллельно утверждаем, что он же не выполняется?

Попробуем теперь предложить интерпретацию физического смысла ψ -функции, не выходя при этом за рамки классической физики. В основе уравнения (2.1) лежит уравнение движения Ньютона, которое мы всегда пишем для отдельного объекта, но уравнение (2.1) уже описывает не движение отдельного объекта, а волновой процесс – процесс распространения некоторого возмущения. Если мы исследуем электромагнитную волну, например радиоволну, то физический смысл ψ -функции рационально связать с напряженностью электрического или магнитного полей:

$$\Delta E = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

Напомним, что уравнение (2.6) получено путем ввода в (2.1) зависимости (2.2), представляющей волну де Бройля. Соотношения де Бройля (2.2), (2.3) и (2.11) в одинаковой мере справедливы как для фотонов, так и для «твердых» частиц. С одной стороны это означает, что, поскольку волна де Бройля может представлять фотон, в электромагнитной природе которого мы не сомневаемся, ψ -функции в уравнении (2.6) рационально приписать смысл

напряженности E электрического поля. Между электромагнитной волной радиодиапазона и рентгеновским квантом нет принципиальной разницы – в конце концов, обе волны могут быть испущены (с небольшой разницей во времени) одним и тем же атомом. С другой стороны, та же волна де Бройля может представлять и «твердую» частицу, в частности электрон, следовательно и в уравнениях (2.14) и (2.16) под ψ -функцией логично понимать напряженность электрического поля. Почему смысл ψ -функции должен изменяться кардинально при относительно незначительном переходе – переходе от фотона к электрону? В качестве дополнительного аргумента можно напомнить, что электрон может образоваться в паре с позитроном при столкновении двух фотонов с энергиями не меньше 0.51 МэВ (процесс рождения пар), и наоборот – электрон и позитрон при их взаимодействии превращаются в пару фотонов с энергиями по 0.51 МэВ (аннигиляция). Более того, все «твердые» частицы при взаимодействии со своими античастицами в конечном итоге могут превратиться в фотоны. Другими словами, глубинная сущность фотонов и «твердых» частиц является общей.

Наиболее простой вывод, который можно сделать из сказанного, следующий: все «твердые» частицы – это волновые образования, ограниченные в пространстве и способные покоиться, двигаться без потери энергии движения (выполняется закон инерции) а также без потерь сконцентрированной в них энергии. Волновые образования с такими свойствами называют солитонами. Таким образом, для того, чтобы возвратиться в рамки классической физики, достаточно предположить, что фотоны, и все «твердые» частицы – это солитонные образования электромагнитного поля.

Что касается выхода графика $|\psi(x)|^2$ за пределы графика $U(x)$, то ответ здесь очень простой. Кривая $U(x)$ на рисунке 1 представляет зависимость потенциальной энергии точечного электрона в силовом поле $\varphi(x)$, а кривая $|\psi(x)|^2$, согласно энергетической интерпретации, представляет распределение энергии, сконцентрированной в волновом образовании, называемом электроном. В соответствии с энергетической интерпретацией электрон не двигается от точки x_1 до x_2 и обратно – это просто стоячая волна, зажатая в силовом поле. Причина дискретности величины энергии, которую может воспринять или отдать электрон в потенциальной яме, состоит в том, что волновой объект может изменить свое состояние только изменив число узлов. Если энергии возбуждающей частицы, например фотона, налетающего на электрон, недостаточно для того, чтобы увеличить число узлов в стоячей волне хотя бы на единицу, то выполняется принцип суперпозиции, и система «электрон+силовое поле $\varphi(x)$ », т.е. атом, оказывается прозрачной для фотона и взаимодействие не происходит.

Наоборот, если энергии фотона достаточно для увеличения числа узлов на единицу, происходит неупругое взаимодействие. При этом фотон оказывается поглощенным, и электрон (а вместе с ним и весь атом) переходит в качественно новое состояние. В соответствии с рисунком 1 он просто увеличивает свои размеры, и в ряде случаев может в этом состоянии находиться довольно долго – метастабильные возбужденные состояния атомов.

В физике столкновений полагают, как само собой разумеющееся, что минимальное сечение взаимодействия определяется геометрическими размерами сталкивающихся объектов. На основании этого предположения (и соответствующих экспериментальных данных) делают вывод, что электрон – это почти точечный объект, $\sim 10^{-13} \text{ м}$. Этот вывод, справедливый для твердых корпускул (если бы такие существовали на самом деле), не является обязательным для волновых объектов. Например, оконное стекло размером $2 \times 2 \text{ метра}$ для фотонов видимого диапазона практически не существует, однако мы не делаем из этого вывода, что геометрические размеры стекла $\sim 10^{-13} \text{ м}$.

Изложенное здесь относительно вероятностной интерпретации можно проиллюстрировать на примере из макромира. В железнодорожной практике известны случаи, когда состав вагонов, съехав с широкой сортировочной горки, преодолевает горку большей высоты в случае, если он целиком не помещается на плато второй горки, рис.2. Ситуация на первый взгляд похожа на эмиссию α -частиц из ядра, когда энергии точечного объекта недостаточно для преодоления барьера, но он все же оказывается за барьером (α -распад ядер).

Для получения кривой взаимодействия 2 поезд не обязательно нужно пропускать через горки, как это изображено на рисунке 2. Мы можем допустить, что поезд движется по прямой линии, но распределение потенциала силового поля, действующего на вагоны вдоль оси x , имеет такой вид, что кривая потенциала при соответствующем выборе цены деления оси y совпадает с геометрической формой горок. Для обоих случаев кривая потенциальной энергии будет одинаковой, однако во втором случае аналогия с кривой потенциальной энергии на рисунке 1 будет более понятной. Для точечного объекта (с хорошим приближением и для отдельного вагона) кривая потенциальной энергии совпадает с формой кривой потенциала, т.е. с формой горок. Однако для системы тел, для состава вагонов, ситуация существенно отличается. И математические выражения, и соответствующую им графику (в нашем случае кривую потенциальной энергии) мы строим только для центров объектов. Из рисунка 2 видно, что если отдельный вагон начинает съезжать с горки при расстоянии x_2 , то центр состава при этом находится в точке x_1 , но состав как целое тоже начинает съезжать, только по энергетической кривой. Это значит, что для длинного состава кривую потенциальной энергии нужно начинать строить с точки x_1 , кривая 2. Как видим, кривая взаимодействия длинного состава существенно отличается от кривой взаимодействия отдельного вагона.

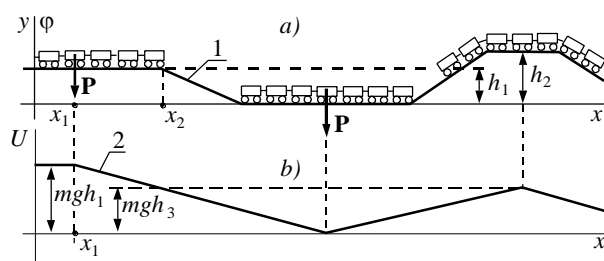


Рис.2. Преодоление длинным составом сортировочной горки.

Для длинного состава высота второй горки на кривой взаимодействия (кривая 2) может оказаться меньше, чем высота, с которой съезжает поезд. h_3 – геометрическая высота, на которую поднимается центр масс поезда

Если состав целиком не помещается на плато второй горки, то энергетическая высота mgh_3 второй горки для этого состава понижается, и может оказаться даже меньше, чем энергетическая высота первой горки, кривая 2 на рисунке 2. Это значит, что состав может преодолеть геометрически более высокую горку, чем горка, с которой он съехал. Здесь нет никакого парадокса. Энергетическую ситуацию нужно анализировать с использованием энергетической кривой, только нужно ее корректно построить. Именно непонимание того, что кривая потенциала может существенно отличаться по форме от кривой потенциальной энергии в случае, если объект нельзя рассматривать как точечный (обе кривые имеют общее название – потенциальная кривая), является причиной многих заблуждений.

Рассмотрим далее поведение состава в симметричной потенциальной яме. Пусть в момент, когда состав находился (и покоился) в точке A на кривой потенциальной энергии, были отпущены тормоза. Если мы пренебрегаем всякого вида трением, то центр состава поднимется до точки B противоположной потенциальной стенки, после чего возвратится в точку A и т.д., до бесконечности, т.е. мы получим некий колебательный процесс. Если мы теперь ответим на вопрос, как в этом процессе изменяется, например, количество веса (или массы) состава на единицу длины по оси x , или как изменяется вертикальная составляющая скорости вагонов, и представим это графически, то получим некое наглядное изображение этого процесса в виде волны, кривая 2 на рисунке 3 (на рисунке представлена зависимость квадрата вертикальной составляющей скорости – чтобы аналогия была как можно полнее). Как видно из рисунка, последний вагон в крайнем левом положении может перемещаться до точки x_1 , а первый в крайнем правом положении – до точки x_4 , но разве можем мы при этом говорить о проникновении объекта (в нашем случае – состава) в область отрицательных значений энергии движения? Отметим, что кривая 1 на рисунке 3 построена с учетом того, что исследуемый объект не является точечным и, несмотря на это, кривая 2 все-таки выходит за пределы кривой 1, а ведь можно было ее наложить и на кривую взаимодействия точечного

объекта (кривая 3), как это делают в литературе, рисунок 1. В этом случае состав «туннелировал» бы еще глубже под потенциальную кривую.

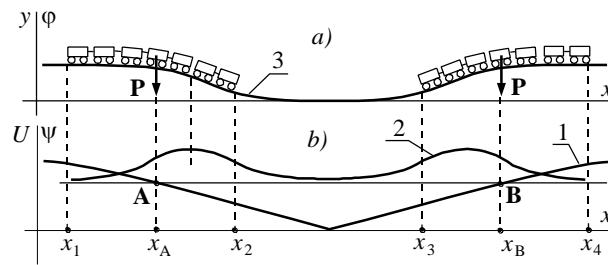


Рис.3. Колебательное движение состава в симметричной потенциальной яме.

Центр состава, который находится на колебательном уровне AB , не перемещается левее точки A и правее точки B , но волновой процесс распространяется по оси x левее точки x_A и правее точки x_B .

Между рисунками 1 и 3b имеется высокая степень аналогии. На обоих рисунках изображены кривые потенциальной энергии, на которые наложены графики колебательных процессов объектов, которые находятся на определенных энергетических уровнях. Очевидно, что если в точке с координатой x_A отпустить не целый состав, а отдельный вагон, который будем считать точечным, то кривая колебательного процесса не будет распространяться левее x_A и правее x_B , и мы получим картину, близкую к той, которую ожидали (но не получили) для электрона. Из того факта, что график колебательного процесса на рисунке 3b выходит за пределы потенциальной кривой, мы не делаем абсолютно никакого далеко идущего вывода, ибо сами строили этот график, и понимаем, что он касается не точечного объекта, не отдельного вагона, а системы тел – целого состава. Анализируя кривую 2 на рисунке 3, мы можем только сказать, что колебательный процесс не распространяется левее точки x_1 и правее точки x_4 , но центр состава при этом изменяет свое положение только между x_A и x_B .

Теперь воспользуемся полученным результатом для анализа рисунка 1. В уравнение Шредингера мы заложили информацию о виде потенциальной кривой для точечного объекта (математическое выражение для кривой $U(x)$), а также информацию о том, что объект является некоторой волной со свойствами корпускулы (солитона) – через соотношения де Бройля (2.11). После решения уравнения мы получили возможность построить график $|\psi(x)|^2$, который оказался аналогичным графику 2 на рисунке 3 (аналогия заключается в том, что его кривая также заходит под кривую потенциальной энергии – до точек x_1 и x_2 , рис.1). Логичный и самый простой вывод, который можно сделать в этой ситуации, состоит в том, что электрон на самом деле не является точечным объектом, и кривая $|\psi(x)|^2$ на рисунке 1 иллюстрирует некий колебательный процесс, который осуществляется в электроне, помещенном в силовое поле. Другими словами, мы имеем дело не с отдельным «вагоном», а с более или менее «длинным составом». При этом размеры электрона уже не могут быть точечными. Во всяком случае, именно так ситуацию «понимает» уравнение Шредингера.

Если электрон считать солитонным электромагнитным образованием (хотя и специфическим, но все-таки волновым образованием, которому можно сопоставить некий колебательный процесс с определенной частотой и длиной волны), то в полученном результате нет ничего необычного – все рассуждения находятся в рамках волновой механики как раздела классической физики. Примерно так ситуацию представлял себе Шредингер: «...вообще существуют только волны. Как свет, так и то, что раньше принималось за частицы, на самом деле являются волнами. Значит, вообще не существует частиц, и материю, которую раньше считали состоящей из частиц, мы должны представить себе как состоящую из волн. Это в значительной степени способствовало бы достижению единства нашей картины мира», [2,с.17].

Обращаем внимание читателя на то, что кривая 1 на рисунке 2, в отличие от кривой 3 на рисунке 3, не имеет дна – левая потенциальная стенка сразу переходит в правую. Это объясняется тем, что в приведенном примере длина состава совпадает с размерами дна на кривой 1. Состав начинает подниматься на правую горку в тот самый момент, когда завершает спуск

с левой горки. Если бы состав был немного короче, то на кривой появилось бы дно. Наоборот, если бы состав был еще длиннее, то глубина потенциальной ямы бы уменьшилась.

3. Условие нормировки

Известно, что в стоячей электромагнитной волне пучности электрической и магнитной компонент сдвинуты друг относительно друга на $\frac{1}{4}$ длины волны в пространстве и на $\frac{1}{4}$ периода колебаний во времени. При этом для волны в целом половина энергии содержится в электрической компоненте, а половина – в магнитной. Объемная плотность u энергии, содержащейся в электрической компоненте, может быть представлена как [7]:

$$u = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \quad (3.1)$$

Если ψ соответствует напряженности E , величину E^2 можно вычислить как произведение ψ на комплексно сопряженную с ней величину ψ^* (при $\varepsilon=1$):

$$u = \frac{\psi \psi^*}{8\pi} \quad (3.2)$$

Умножив эту величину на элементарный объем dV , получим количество энергии dW , сосредоточенной в объеме dV :

$$dW = u dV = \frac{\psi \psi^*}{8\pi} dV \quad (3.3)$$

Интеграл от этой величины по всему объему определит энергию, заключенную в электрической компоненте частицы, т.е. половину от mC^2 :

$$\int_V \frac{\psi \psi^*}{8\pi} dV = \frac{mC^2}{2} \quad (3.4)$$

или:

$$\frac{1}{4\pi mC^2} \int_V \psi \psi^* dV = 1 \quad (3.5)$$

Как видно, несмотря на то, что с физической точки зрения энергетическая и вероятностная интерпретации отличаются более, чем просто существенно, с математической точки зрения предлагаемое условие нормировки отличается от известного только коэффициентом перед интегралом, т.е. ценой деления шкалы на оси величины ψ . Это означает, что все расчеты, выполненные для вероятностной интерпретации, фактически пригодны и для энергетической. Этим и объясняются успехи квантовой теории. Графическое изображение зависимости $|\psi(x)|^2$ в разных интерпретациях отличается только ценой деления ординаты.

4. Зависимость формы волновой функции от формы потенциальной ямы

Теперь рассмотрим вопрос зависимости формы волновой функции от формы потенциальной ямы, в которой находится волновой объект. Информация о форме потенциальной ямы закладывается в волновое уравнение через выражение для потенциальной энергии частицы U . Если в волновое уравнение вместо U подставить выражение B/r , которое учитывает действие на электрон электрического поля ядра, в частности, протона или позитрона, решение волнового уравнения можно получить аналитически, но лишь для определенных, дискретно задаваемых значений E_n , которые с достаточно хорошей точностью совпадают со значениями энергетических уровней электрона в атоме водорода. Отметим, что в этом случае потенциальная яма не является полноценной – в наличии имеется только потенциальная стенка справа, а левая стенка и дно потенциальной ямы отсутствуют, рисунок 4, а. Ордината U есть лишь математическая абстракция и силовой нагрузки нести не может, т.е. ее нельзя рассматривать как потенциальную стенку слева и заканчивать на ней изображение энергетических уровней, как это делают в литературе.

Еще более хорошее совпадение теории с экспериментом наблюдается для атома водорода в случае, если волновой объект (электрон) поместить в потенциальную яму вида:

$$U = \frac{B}{r^n} - \frac{A}{r} \quad (4.1)$$

На рисунке 4, *b* представлено графическое изображение этой зависимости. Как видно, в этом случае потенциальная яма получается полноценной, а для $n=2$ решение волнового уравнения можно получить аналитически. При $n=2$ величину A/r^n можно трактовать как результат действия центробежных сил. Количество энергетических уровней электрона в потенциальной яме, и их положение на энергетической шкале, зависят от формы и глубины ямы.

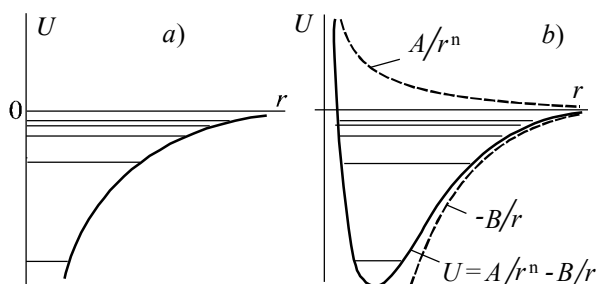


Рис.4. Потенциальная энергия электрона в поле притягивающего центра.

a) на электрон действует только сил притягивания, левая стенка и дно отсутствуют, *b*) на электрон действуют одновременно силы притягивания и отталкивания.

Целенаправленно вопрос зависимости вида волновых функций от крутизны потенциальных стенок в литературе, по-видимому, не исследовался. Представление о нем можно получить при анализе результатов по исследованию вида волновой функции электрона в потенциальной яме типа (4.1) или в потенциальной яме $U=kx^2/2$, описывающей изменение потенциальной энергии тела в линейном гармоническом осцилляторе. В последнем случае обе стенки потенциальной ямы симметрично уходят в бесконечность. Поместить электрон в эту яму извне нельзя. Теоретически он должен там родиться и оставаться навсегда. Энергетические уровни в такой яме размещены эквидистантно. Зависимость вида ψ -функции (вернее, квадрата ее модуля) показана на рисунке 5, [8, 9]. По мере увеличения номера уровня увеличивается крутизна стенок потенциальной ямы. Из рисунков видно, что при этом возрастает относительная высота пиков, соответствующих «вероятности обнаружения электрона около поворотных точек», т.е. точек пересечения энергетических уровней с кривой потенциальной энергии. Если для $n=2$ все пики примерно одинаковой высоты, то для $n=10$ крайние пики уже почти в два раза выше центрального. Вполне логично предположить, что эта тенденция будет соблюдаться и при больших значениях n , т.е. когда потенциальные стенки уже будут практически вертикальными.

Ситуация, изображенная на рисунке 5 не является, конечно, чистой иллюстрацией зависимости вида волновой функции от крутизны потенциальных стенок, поскольку при этом изменяется и расстояние между поворотными точками. Подчеркнем особо, что все, что нам нужно было сделать для получения графиков на рис.5, это подставить в уравнение Шредингера вместо U выражение $U = kx^2/2$, а дальше уравнение уже «само знает», при каких значениях x для данного уровня находятся поворотные точки, какой вид имеет ψ -функция для данного уровня, до каких пределов она распространяется, и т.д.. В литературе этот результат почему-то не принимается во внимание при решении вопроса, каким будет вид ψ -функции, если частицу поместить в потенциальную яму с вертикальными стенками бесконечной высоты.

Аналитически эту задачу решить нельзя в принципе, поскольку аналитически нельзя задать такую форму потенциальной ямы, стенки которой были бы вертикальными. На первый взгляд кажется, что можно исследовать поведение волнового объекта в потенциальной яме с линейными наклонными стенками, где уравнения боковых стенок имеют вид: $U=\pm kx$ и за-

тем исследовать поведение ψ -функции при $k \rightarrow \pm\infty$. К сожалению, потенциальную яму такой формы также нельзя задать аналитически, т.е. таким путем задачу также нельзя решить.

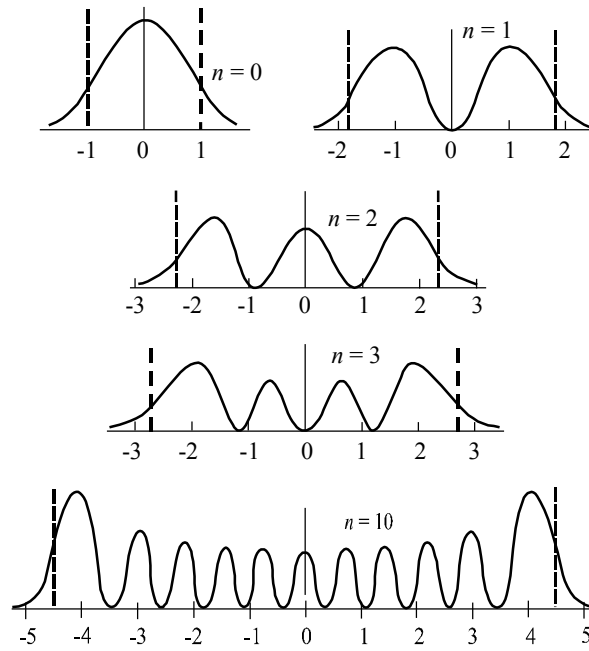


Рис.5. Распределение $|\psi_n(x)|^2$ для $n = 0, 1, 2, 3$ и 10 , [8, с.533]. Штрихованными вертикальными линиями изображены координаты поворотных точек, которые находятся в местах пересечения кривой взаимодействия $U(x)$ с положением соответствующего энергетического уровня.

В литературе эта задача считается решенной, и «решена» она следующим образом, [8]. Предполагается, что потенциальная энергия частицы в некотором силовом поле удовлетворяет условию:

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq l \\ \infty & \text{при } x = 0 \text{ и } x = l \end{cases} \quad (4.2)$$

обозначив $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ через ψ'' уравнение Шредингера (2.14) можно представить в виде:

$$\frac{\psi''}{\psi} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - U) \quad (4.3)$$

В пределах потенциальной ямы $U = 0$, поэтому соотношение ψ''/ψ имеет конкретное, конечное значение

$$\frac{\psi''}{\psi} = -\frac{2m}{\hbar^2}E \quad (4.4)$$

Решение задачи по нахождению вида ψ -функции сводят теперь к интегрированию этого уравнения при начальных условиях $\psi(0) = 0$, $\psi(l) = 0$. Собственные функции уравнения (4.4) имеют вид:

$$\psi_n = \sin n \frac{\pi x}{l} \quad (4.5)$$

На рисунке 6 представлены графики собственных функций (4.5) и их квадратов модулей для уровней с номерами $n = 1, 2, 3$ и 4 . Если иметь в виду тенденцию, представленную на графиках рисунка 5 (где амплитуда возрастала по мере увеличения крутизны стенки), то полученный результат сильно отличается от того, который мы ожидали получить – для всех n графики собственных функций имеют вид обычной синусоиды, изменяется лишь количество узлов.

На самом деле в этом нет ничего удивительного, ибо, в отличие от гармонического осциллятора, в данном случае мы не закладываем в волновое уравнение информации о виде потенциальной ямы. Хотя это нигде и не подчеркивается, но уравнение (4.4) получено из волнового уравнения в предположении, что частица является фактически свободной (в уравнение (4.3) мы подставили $U = 0$). Ординатам графиков собственных функций в поворотных точках (на потенциальных стенках) мы приписали нулевые значения через начальные условия, т.е. принудительно. Таким образом, графики собственных функций, типа изображенных на рис.6, представляют собой не что иное, как волны де Бройля, которые характеризуют свободные микрочастицы. Как известно, длина волны де Бройля зависит от скорости движения частицы – чем больше скорость, тем меньше длина волны. Этим и определяется зависимость графиков собственных функций на рис.6 от номера энергетического уровня. Все это означает, что задача нахождения вида собственных функций в потенциальной яме с вертикальными стенками бесконечной высоты в литературе решена некорректно. Для нас теперь очевидно, что корректно (строго) такую задачу нельзя решить в принципе.

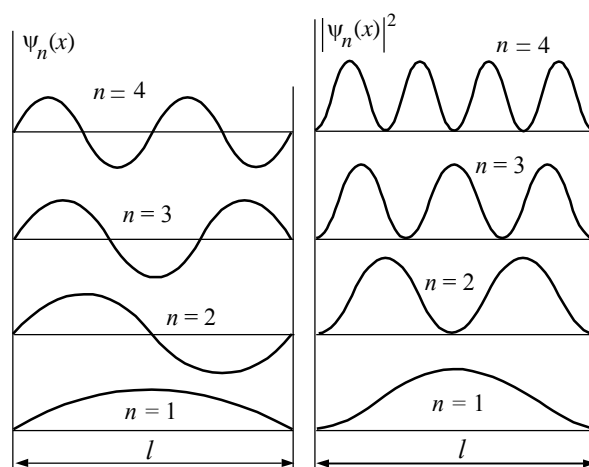


Рис.6. Графики собственных функций и плотности вероятности для частицы, помещенной в потенциальный колодец с вертикальными и бесконечно высокими стенками, [8, с.514]

Вертикальность стенки на кривой потенциальной энергии означает, что в данном месте имеется скачок потенциала (бесконечно большая напряженность силового поля), а также, что объект является точечным или недеформируемым (бесконечно твердым). Если же объект считается деформируемым, а его размерами пренебрегать нельзя, то стенка на кривой потенциальной энергии должна иметь наклон в пределах деформируемости объекта. Это должно иметь место даже в том случае, если поле для каких-то упрощений характеризуется бесконечно большой напряженностью. В этом случае наклон стенок обусловлен деформацией объекта. Высота же потенциальных стенок определяется прочностными характеристиками объекта и поля – кривая взаимодействия заканчивается тогда, когда объект преодолевает поле, или же сам разрушается.

Отметим, что в литературе можно также найти результаты исследований, когда потенциальные стенки являются вертикальными, но не бесконечной высоты, [10]. Вертикальность стенки конечной высоты означает, что материал физической стенки, с которой взаимодействует исследуемый объект, является бесконечно твердым, но хрупким. Как полагают в [10], в этом случае волновые функции заходят довольно далеко внутрь потенциальных стенок, аналогично тому, как показано на рис.1. Физически это означает, что квантовый объект знает заранее, какова прочность стенок, ведет себя очень невоспитанно, и позволяет себе «туннелировать» в область отрицательных энергий движения на довольно большие расстояния, не деформируя и не разрушая при этом самой стенки. В противоположность этому, тот же квантовый объект в яме с бесконечно высокими стенками (бесконечно твердый и бесконечно прочный материал физической стенки) ведет себя очень скромно – только изредка приближается к стенке, но стенки не касается, даже если его энергия является значительной, рис.6.

Учитывая изложенное выше относительно энергетической интерпретации волновой функции, мы считаем углубление в анализ этого вопроса уже излишним. Добавим только, что неспроста, наверное, энергия в волновом уравнении выступает в роли параметра.

Мы полагаем, что вопрос зависимости формы собственных функций от формы потенциальной ямы более или менее корректно можно провести лишь для случаев, когда волновое уравнение удастся решить аналитически, т.е. для гармонического осциллятора или для частицы в потенциальной яме, описываемой уравнением (4.1), рис.4. Варьируя константами A и B можно получать потенциальные ямы различной ширины и глубины, и таким способом достаточно корректно исследовать этот вопрос.

Что касается объяснения в понятиях классической физики некоторых экспериментальных данных, объяснение которых в литературе в настоящее время имеется только в рамках вероятностной интерпретации (α -распад ядер, холодную эмиссию электронов, преддиссоциацию молекул), то мы надеемся изложить ее в одной из следующих работ. Достаточно подробно эти объяснения изложены в [11].

5. Выводы

Основной аргумент против вероятностной интерпретации физического смысла ψ -функции состоит в том, что она приводит к выводу о нарушении принципа причинности и закона сохранения энергии в микромире. Поскольку макромир состоит из большого числа микромиров, логично ожидать, что законы макромира должны действовать и в микромире.

Предложенная в этой работе энергетическая интерпретация базируется на предположении, что фотоны и «твердые» элементарные частицы представляют собой солитонные образования электромагнитного поля. Очевидно, что это предположение не противоречит концепции светоносного эфира, и возвращает волновую механику Шредингера в лоно классической физики, поскольку не противоречит принципу причинности и закону сохранения энергии. Квантовые свойства микрообъектов (квантовые скачки) получают простое объяснение через волновые свойства солитонов – стоячие волны изменяют свое состояние только дискретно, в соответствии с изменением числа узлов. Это очень важный вопрос с точки зрения философии физики. По поводу квантовых скачков Шредингер в дискуссии с Бором сказал следующее: «Если мы собираемся сохранить эти проклятые квантовые скачки, то я вообще сожалею, что имел дело с атомной теорией!», [12].

Поскольку некоторые типы солитонов обладают также свойствами корпускул, корпускулярно-волновой дуализм квантовых объектов получает свое простое объяснение в рамках классической физики, исповедующей философию здравого смысла. Объяснение при этом получается настолько простым, что в подробном изложении уже не нуждается.

Шредингер был, по меньшей мере, столь же, как и Эйнштейн, упрямым в своем консервативном отношении к квантовой механике: ведь он отвергал не только статистическое ее толкование, но и настаивал на том, что его волновая механика означает возврат к классическому мышлению.

М. Борн, [3, с.68].

Литература

1. Шредингер Э. Избранные труды по квантовой механике. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
2. Шредингер Э. Новые пути в физике. – М.: Наука, 1971. – 428 с.
3. Эйнштейновский сборник 1972. – М.: Наука, 1974. – 390 с.
4. Филлипов А.Т. Многоликий солитон. – М.: Наука, 1990. – 288 с.
5. Чаварга М.М. Відносний рух солітонів у світлоносному ефірі. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. Випуск 7, 2000. – С.174–194. Смотри также www.chavarga.iatp.org.ua .
6. Ахиезер А.И. Атомная физика. – Киев: Наукова думка, 1988. – 267 с.
7. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Наука, 1976. – 928 с.
8. Шпольский Э.В. Атомная физика. Т.1. – М.: Наука, 1984. – 440 с.

9. Герцберг Г. Спектры и строение двухатомных молекул. – М.: Изд. Иностранной литературы, 1949. – 403 с.
10. Мэрион Дж.Б. Физика и физический мир. – М.: Мир, 1975. – 624 с.
11. Чаварга Н.Н. Проблема рационального и иррационального в физике. – Ужгород: Патент, 1999. – 236 с.
12. Кузнецов Б.Г. Эйнштейн. – М.: Наука, 1967. – 432 с.

Uzhgorod University SCIENTIFIC HERALD, Series Physics, v.12, 2002, p. 168–177.