ПРО РЕЛЯТИВІСТСЬКУ КВАНТОВУ МЕХАНІКУ ЧАСТИНКИ ДОВІЛЬНИХ МАСИ І СПІНУ У КАНОНІЧНОМУ ПРЕДСТАВЛЕННІ ФОЛДІ – ВОТХОЙЗЕНА

І.Ю. Кривський, В.М. Симулик

Інститут електронної фізики НАН України, відділ теорії елементарних взаємодій, 88000, Ужгород, вул. Університетська, 21,
e-mail: sim@iep.uzhgorod.ua

У канонічному представленні Фолді – Вотхойзена запропоновано релятивістськи інваріантне формулювання квантової механіки частинки маси $m \geq 0$ і спіну $s = 1/2$, а також його узагальнення для довільного мультиплету, який визначається спіновими матрицями $\vec{s} = (s_{23},\ s_{31},\ s_{12})$ як генераторами будь-якого зображення спінової групи SU_2. Математично коректно й фізично аргументовано визначена алгебра спостережуваних $\vec{s}$-мультиплету у гільбертовому просторі його станів з мірою Лебега d^3x. Елементами цієї алгебри є функції породжуючих операторів – ермітових операторів координати $\vec{x}$, імпульсу $\vec{k}$ та спіну $\vec{s}$ (у довільно-фіксованій інерціальній системі відліку). Одержані динамічні змінні, які є наслідками Пуанкаре-симетрії теорії та важливих додаткових симетрій. Додаткові динамічні змінні є наслідками того факту що у представленні Фолді - Вотхойзена окремо зберігаються і орбітальна, і спінова частини 4-моменту кількості руху. Визначено поняття центра енергії $\vec{s}$-мультиплету як релятивістського аналогу поняття центра мас у нерелятивістській теорії суцільних середовищ.

1. Вступ

Представлена тут робота є безпосереднім продовженням нашої статті [1]. Використовуються позначення та домовленості [1]. З метою скорочення викладок на формули з [1] даються безпосередні посилання.

У випадку вільного рівняння Дірака (див. формули (10) в [1]) перетворення Фолді – Вотхойзена [2] (скорочено ФВ) має вигляд

$$\psi(x) \to \phi(x) = V\psi(x), \quad V \equiv \frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + \omega + m}{\sqrt{2\omega(\omega+m)}},$$
$$V^{-1} \equiv \frac{-\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + \omega + m}{\sqrt{2\omega(\omega+m)}}, \qquad (1)$$

де

$$\omega \equiv \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} = \sqrt{-\Delta + m^2}, \ \ \vec{p} = -i\nabla, \quad (2)$$

$\Delta -$ оператор Лапласа, а рівності $VV^{-1} = V^{-1}V = 1$ є наслідками комутаційних співвідношень (12) в [1] для матриць γ^{μ}.

Оператор V з (1) переводить рівняння Дірака ((10) в [1]) у рівняння

$$(i\partial_0 - \gamma^0\omega)\phi(x) = 0, \qquad (3)$$

тобто у систему двох (незалежних) рівнянь для 2-компонентних функцій ξ та η^*

$$\begin{cases}(i\partial_0 - \omega)\xi(x) = 0, \\ (-i\partial_0 - \omega)\eta^*(x) = 0,\end{cases} \quad \begin{vmatrix}\xi \\ \eta^*\end{vmatrix} \equiv \phi \in \mathbb{S}^{4,4}. \ (4)$$

Останні два рівняння – це релятивістські рівняння для частинки-античастинки, а саме, перше з (4) – це квантовомеханічне рівняння для хвильової функції $\varphi(x) = \varphi(t,\vec{x})$ частинки, а друге з (4) – це рівняння для функції η^* комплексно спряженої до хвильової функції $\eta(t,\vec{x})$ античастинки.

Наведені твердження означають, що ідентифікація та фізичний зміст спостережуваних для ФВ-поля ϕ однозначно визначаються ідентифікацією та фізичним змістом спостережуваних у релятивістській квантовій механіці частинки (яка описується першим (або другим) рівнянням із (4)). Однак, виклад релятивістської квантової механіки, як правило (див., наприклад, [3]), проводиться з використанням лише явно коваріантних понять. При цьому у явно коваріантних формулюваннях релятивістської квантової механіки алгебра спостережуваних та її зв'язок з безпосередньо спостережуваними на експерименті величинами виглядають значно складніше, ніж у звичайній нерелятивістській теорії. Все це не притаманно представленням типу ФВ, у яких, як і у нерелятивістських теоріях, часова та три координатні (просторові) змінні не фігурують рівноправно. Тому нижче коротко (але з дотриманням вимог математичної коректності) наводимо основну схему релятивістської квантової механіки частинки у її канонічній формі, яка базується на першому з рівнянь системи (4) (надалі це рівняння називаємо рівнянням Шредінгера – Фолді (ШФ)).

Канонічне формулювання використовує нелокальне унітарне зображення групи $\mathcal{P}$, релятивістськи неінваріантну міру Лебега та інші поняття, у яких втрачена явна релятивістська інваріантність, але при цьому ніяк не ушкоджена, як буде продемонстровано нижче, релятивістська інваріантність теорії в цілому. Відмітимо, що тут, на відміну від явно коваріантних формулювань, фізичний зміст теорії, зокрема фізична інтерпретація будь-яких спостережуваних, так само наочні, як і у відповідній нерелятивістській теорії.

Представлення спінорного поля, у якому це поле задовольняє рівнянню Дірака (10) в [1], називаємо нижче *представленням Паулі – Дірака (ПД)*, на відміну від *представлення ФВ*, у якому спінорне поле задовольняє рівнянню ФВ (3).

2. Релятивістська квантова механіка електрона у канонічному представленні ФВ

Розглянемо спочатку релятивістську квантову механіку окремо взятого електрона (без позитрона) у канонічному представленні, яке базується на 2-компонентному рівнянні ШФ – першому з рівнянь (4).

Простір еволюціонуючих у часі станів $\mathbb{H}=\{f\}$ вільного електрона у довільно фіксованій інерціальній системі відліку (ІСВ) та у його координатній реалізації (у якій простір $\mathrm{R}^3 \subset \mathbb{M}(1,3)$ є спектром оператора координати електрона) визначаємо як простір Гільберта

$$\mathbb{H}_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{ f \equiv \begin{vmatrix} f^1 \\ f^2 \end{vmatrix} : \ \mathbb{M}(1,3) \to \mathrm{C}^2 \right\} \qquad (5)$$

з квадратом норми елементів

$$0 \le \int d^3x f^{\dagger}(x) f(x) < \infty \qquad (6)$$

2-компонентних комплекснозначних функцій $f(x)=f(t,\vec{x})$ над $\mathbb{M}(1,3)$. Ці функції задовольняють рівнянню ШФ

$$(i\partial_0 - \omega) f(x) = 0, \quad f \in \mathbb{S}(\mathrm{R}^3)\times \mathrm{C}^2 \equiv \mathbb{S}^{3,2}, \qquad (7)$$

де оператор ω (2), є оператором енергії, $\vec{p}$ є оператор імпульсу електрона, а $\mathbb{S}(\mathrm{R}^3)$ - це простір основних функцій Шварца (компонент $f^{\mathrm{r}}(t,\vec{x})$, $\mathrm{r}=1,2$, з довільно фіксованим параметром $t \subset (-\infty,\infty)$). Припущення $f \in \mathbb{S}^{3,2}$ (за змінною $\vec{x} \in \mathrm{R}^3$) технічно корисне і фізично та математично виправдане. Дійсно, $\mathbb{S}^{3,2}$ - це *ядерний простір* у оснащеному гільбертовому просторі

$$\mathbb{S}^{3,2} \subset \mathbb{H}^{3,2} \subset \mathbb{S}^{3,2\prime}, \quad \mathbb{H}^{3,2} = \mathbb{H}_1, \qquad (8)$$

(де $\mathbb{S}^{3,2\prime}$ - це простір узагальнених 2-компонентних комплекснозначних функцій Шварца). Ядерність простору $\mathbb{S}^{3,2}$ означає, що він є щільним як у $\mathbb{H}_1$, так і у $\mathbb{S}^{3,2\prime}$. Як відомо, всі функції з $\mathbb{S}^{3,2}$ є нескінчено гладкими (тобто нескінчено диференційованими) та разом зі своїми похідними (при $\forall t$) вони швидко спадають при $|\vec{x}| \to \infty$. Тому будь-який елемент з $\mathbb{H}_1$ чи $\mathbb{S}^{3,2\prime}$ можна апроксимувати деяким (нескінчено гладким) елементом з $\mathbb{S}^{3,2}$ з будь-якою наперед заданою точністю (і тим самим задовольнити потреби експериментальних вимірювань приладами з будь-якою високою класністю).

У канонічному формулюванні квантової механіки електрона оператор будь-якої спостережуваної є функцією операторів канонічно спряжених динамічних змінних - координати $\vec{x}$, імпульсу $\vec{p}$, а також спіна $\vec{s}$. При виборі простору $\mathbb{S}^{3,2}$ в якості області визначення операторів $\vec{x}$, $\vec{p}$, та $\vec{s}$, він виявляється також і областю значень будь-якої спостережуваної (при фізично несуттєво обмежуючих припущеннях на оператор-функцію від $\vec{x}$, $\vec{p}$, та $\vec{s}$).

Важливими прикладами множини спостережуваних є повні набори

$$(\vec{x}, s_z),\ \ (\vec{p}, s_z),\ \ (\vec{p}, h),\ \ (\omega, p_\theta, p_\varphi, s_z), \quad (9)$$

де

$$s_z = \frac{1}{2}\sigma^3 \equiv \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\quad h = \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}. \quad (10)$$

Наведені набори, крім першого, є стаціонарними: кожний оператор з цих наборів комутує з оператором енергії ω електрона. Нагадаємо, див, наприклад, [3], що *повним набором* спостережуваних електрона називають набір взаємно комутуючих функціонально незалежних операторів (його називають також центром алгебри спостережуваних у представленні, де кожен оператор повного набору є діагональним). Характерною особливістю повного набору є те, що спільні власні вектори такого набору є невиродженими, тобто кожній точці спільного спектра операторів повного набору відповідає лише один елемент у (оснащеному) просторі Гільберта.

Спільні вектори повного набору утворюють ортонормовану повну систему (базис) векторів у просторі (8), тобто є ортами цього простору, за якими можна розкласти будь-який елемент простору (8). Наприклад, базисні вектори для стаціонарного повного набору $(\vec{p}, s_z)$ мають вигляд

$$\mathrm{e}_{\vec{k}\mathrm{r}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} d_{\mathrm{r}} e^{-ikx}, \quad (11)$$

де $kx \equiv \tilde{\omega}t - \vec{k}\vec{x},\ \ \tilde{\omega} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2},\ \ \vec{k} \in \mathrm{R}^3_{\vec{k}}$, d_{r} - власні вектори оператора s_z (10), їх явний вигляд див. (16) в [1], а $\mathrm{R}^3_{\vec{k}}$ - спектр оператора $\vec{p}$. Орти (11) задовольняють умовам ортонормованості й повноти у вигляді

$$\begin{aligned} &\int d^3x \mathrm{e}^{\dagger}_{\vec{k}\mathrm{r}}(x)\mathrm{e}_{\vec{k}'\mathrm{r}'}(x) = \delta_{\mathrm{rr}'}\delta(\vec{k} - \vec{k}'), \\ &\int d^3k \mathrm{e}^{\dagger}_{\vec{k}\mathrm{r}}(t,\vec{x})\mathrm{e}_{\vec{k}\mathrm{r}}(t,\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (12)$$

Вектори (11) називають релятивістськими плоскими хвилями де Бройля для електрона з певним імпульсом $\vec{k}$ та спіном s_z $(\mp 1/2$ для $r = 1,2)$. Вони є істотно узагальненими станами електрона (не належать до $\mathbb{H}_1$), тобто вони не реалізуються у природі (відповідні стани з $\mathbb{S}^{3,2}$, які апроксимують стани (11), логічно називати квазі-плоскими хвилями). Однак у виразі для загального розв'язку рівняння (7), розкладеного за ортами (11), а саме, у формулі

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k a^{\mathrm{r}}(\vec{k}) d_{\mathrm{r}} e^{-ikx},\quad f \in \mathbb{S}^{3,2}, \quad (13)$$

амплітуди $a^{\mathrm{r}}(\vec{k})$ належать простору $\mathbb{S}\left(\mathrm{R}^3_{\vec{k}}\right)$, отже вектори станів

$$\tilde{f}(t,\vec{k}) \equiv \begin{vmatrix} a^1(t,\vec{k}) \\ a^2(t,\vec{k}) \end{vmatrix} = e^{-i\omega t} \begin{vmatrix} a^1(\vec{k}) \\ a^2(\vec{k}) \end{vmatrix} \quad (14)$$

у імпульсній реалізації простору $\mathbb{H}_1$ належать до $\tilde{\mathbb{S}}^{3,2} = \mathbb{S}(\mathrm{R}^3_{\vec{k}}) \otimes \mathrm{C}^2$.

Апелюючи до інших повних наборів спостережуваних електрона (кожний з яких неодмінно включає три оператори з неперервним спектром та один – з дискретним) і розкладаючи вектори $f(t,\vec{x})$ за відповідними базисами, можна одержати будь-які інші реалізації простору станів електрона. При цьому для стаціонарних повних наборів амплітуди ймовірностей за їх спектром залежать гармонічно від часу, а густини ймовірностей не залежать від часу.

Незважаючи на використання тут явно неінваріантних понять (таких, як міри Лебега $d^3x,\ d^3k$ і т.п.) та на виділеність часової змінної, наведене формулювання є релятивістськи інваріантним, а саме, $\mathcal{P}$–інваріантним, внаслідок того, що справедлива наступна

Теорема 1. А. Ермітові у просторі $\mathbb{H}_1$ оператори (ермітові функції структурних породжуючих операторів $\vec{x},\ \vec{p},\ \vec{s} = \vec{\sigma}/2$ з областю визначення і значень $\mathbb{S}^{3,2}$)

$$\begin{gathered} p_0 = \omega,\ \ p_l = i\partial_l,\ \ j_{ln} = x_l p_n - x_n p_l + s_{ln}, \\ j_{0l} = -j_{l0} = tp_l - \frac{1}{2}\{x_l, \omega\} + \frac{(\vec{s}\times\vec{p})_l}{\omega + m}, \end{gathered} \quad (15)$$

де $s_{ln} = \varepsilon^{lnk}\sigma^k/2$, задовольняють комутаційним співвідношенням (5), (6) із [1] $\mathcal{P}$–алгебри у явно коваріантній формі, комутують з оператором рівняння ШФ (7) і, отже, визначають за формулою (7) із [1] унітарне в $\mathbb{H}_1$ зображення $U(a,\ \omega;\ p_\mu,\ j_{\mu\nu})$ групи $\mathcal{P}$, яке є групою інваріантності релятивістської квантової механіки електрона.

В. Набір ермітових у просторі $\mathbb{H}_1$ операторів $q^{\mathrm{orb}} = (p_\mu, m_{\mu\nu})$, одержаний з набору $q = (p_\mu, j_{\mu\nu})$ (41) при $\vec{s} = 0$, тобто набір

$$\begin{gathered} p_0 = \omega,\ \ p_l = i\partial_l,\ \ m_{ln} = x_l p_n - x_n p_l, \\ m_{0l} = tp_l - \frac{1}{2}\{x_l, \omega\}, \end{gathered} \quad (16)$$

який містить лише орбітальні моменти кількості руху, також задовольняє комутаційним співвідношенням (5), (6) із [1] $\mathcal{P}$–алгебри, комутує з оператором рівняння ШФ (7) і визначає за формулою (7) із [1] унітарне в $\mathbb{H}_1$ зображення $U(a,\ \omega;\ p_\mu,\ m_{\mu\nu})$ групи $\mathcal{P}$, яке теж є групою інваріантності релятивістської квантової механіки електрона.

С. Оператори спіна електрона $\vec{s} = (s^l)$ та доданку $\breve{s}^l$ до орбітальної частини m^{0l} бусту j^{0l}

$$s^l = \frac{1}{2}\sigma^l \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{lmn}s_{mn},\ \ \breve{s}^l = \breve{s}^{0l} = \frac{(\vec{s}\times\vec{p})}{\omega + m} \quad (17)$$

комутують як з гамільтоніаном ω, так і з повним оператором рівняння ШФ (7), тобто задають перетворення інваріантності рівняння ШФ (7). На відміну від операторів $j_{\mu\nu}$ (15) та $m_{\mu\nu}$ (16), а також на відміну від генераторів $s_{\mu\nu} = (s_{mn},\ s_{0l})$ (18) в [1] матричного зображення групи $\mathcal{L}$, яке визначає відому [4 – 6] локальну групу інваріантності $\mathcal{P}^{\mathrm{loc}}$ рівняння Дірака (10) (див. (8) з $s_{\mu\nu}$(18) в [1]), генератори $s_{\mu\nu} = (s_{mn},\ \breve{s}_{0l})$ (в даній реалізації (17)) не задовольняють комутаційним співвідношенням (6) $\mathcal{L}$-алгебри.

Доведення всіх трьох тверджень теореми проводиться безпосередніми обчисленнями відповідних комутаторів, **q. e. d.**

Нелокальність даних $\mathcal{P}$–зображень зумовлена тим, що чотири з операторів (15) та чотири з операторів (16), а саме $(p_0,\ j_{0l})$ та $(p_0,\ m_{0l})$, є нелокальними (не належать класу операторів Лі і є матрично-псевдодиференціальними операторами, що коректно визначені в $\mathbb{S}^{3,2}$).

У відповідності до прийнятого у математичній фізиці означення інваріантності деякого рівняння відносно перетворень з певної групи [4,5], $\mathcal{P}$–

інваріантність рівняння руху електрона (7) визначається як $\mathcal{P}$–інваріантність множини $\{f\}$ всіх можливих розв'язків (13) рівняння (7). Даний факт виражає *динамічний зміст* $\mathcal{P}$–інваріантності представленої тут квантової механіки, а саме. По-перше, це означає, що рівняння руху вільного електрона є однаковим у будь-якій ІСВ. По-друге, це виражає однорідність та ізотропність простору-часу $\mathbb{M}(1,3)$, у якому рухається вільний електрон, внаслідок чого середні значення $\mathcal{P}$–генераторів $(p_\mu, j_{\mu\nu})$ (15) (тобто середні значення операторів енергії-імпульсу P_μ та 4-моменту $J_{\mu\nu}$) у будь-якому еволюціонуючому у часі t стані $f \in \mathbb{H}_1$ не залежать від *t*.

Другий зміст $\mathcal{P}$–інваріантності обговорюваної теорії (який називаємо *кінематичним*) полягає у наступному. Кожний фіксований розв'язок $f \in \mathbb{H}_1$ рівняння (7), тобто кожний фіксований еволюціонуючий стан електрона (у даній ІСВ) визначається фіксованими імпульсно-спіновими амплітудами $a^{\mathrm{r}}(\vec{k})$. Маючи унітарне $\mathcal{P}$–зображення (7) із [1] з генераторами (15), можна знайти, як міняються дані амплітуди $a^{\mathrm{r}}(\vec{k})$ при переході від однієї ІСВ до довільної іншої ІСВ′ (зв'язаної з "початковою" ІСВ перетворенням $(a,\omega)\in\mathcal{P}$). У такий спосіб встановлюється зв'язок між (фізично заданим) станом електрона для спостерігача у даній ІСВ та (фізично тим самим) станом електрона для спостерігача у (a,ω)-перетвореній ІСВ′

Звернемо увагу на специфіку спостережуваної j_{0l} з (15), яка є генератором бусту (образом в $\mathbb{H}_1$ генератора відповідних просторово-часових перетворень в $\mathbb{M}(1,3)$). Ця спостережувана (причому - у картині Шредінгера квантової механіки електрона), на відміну від спостережуваних (p_μ, j_{ln}) з (15), явно залежить від часу t і не комутує з оператором енергії ω, але вона, як і інші оператори з набору (15), комутує з оператором рівняння ШФ (7). Тим не менш, середнє значення J_{0l} у будь-якому стані (13), не залежить від часу *t*. Цей факт наочно видно після вираження середніх значень спостережуваних $(p_\mu, j_{\mu\nu})$ (15) через імпульсно-спінові амплітуди $a^{\mathrm{r}}(\vec{k})$. Справедлива

Теорема 2. Середні значення спостережуваних $(p_\mu, j_{\mu\nu})$ (15) мають вигляд

$$q \equiv (p_\mu, j_{\mu\nu}) \to Q \equiv \int d^3x f^\dagger(t,\vec{x}) q f(t,\vec{x})$$
$$= \int d^3k \tilde{f}^\dagger(\vec{k}) \tilde{q} \tilde{f}(\vec{k}), \qquad \tilde{f}(\vec{k}) = \begin{vmatrix} a^1(\vec{k}) \\ a^2(\vec{k}) \end{vmatrix}, \tag{18}$$

де оператори $\tilde{q} = (\tilde{k}_\mu, \tilde{j}_{\mu\nu})$, що діють на імпульсно-спінові амплітуди $\tilde{f}(\vec{k})$, мають вигляд

$$\tilde{k}_0 = \tilde{\omega}, \ \ \tilde{k}_j = k_j, \ \ \tilde{j}_{ln} = \tilde{m}_{ln} + s_{ln},$$
$$\tilde{j}_{0l} = \tilde{m}_{0l} + \frac{(\vec{s}\times\vec{k})_l}{\tilde{\omega}+m}, \tag{19}$$

де використані позначення

$$\tilde{m}_{ln} = \tilde{x}_l k_n - \tilde{x}_n k_l, \ \ \tilde{m}_{0l} = -\frac{1}{2}\{\tilde{x}_l, \tilde{\omega}\},$$
$$\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \ \ \tilde{x}_l \equiv -i\frac{\partial}{\partial k^l}. \tag{20}$$

Оператори $\tilde{q} = (\tilde{k}_\mu, \tilde{j}_{\mu\nu})$ (19) (як і $\tilde{q}^{\mathrm{orb}} \equiv \tilde{q}\big|_{\vec{s}=0} = (\tilde{k}_\mu, \tilde{m}_{\mu\nu})$ (19), (20), які за формулою (18) також задають інтеграли руху), що діють у гільбертовому просторі імпульсно-спінових амплітуд $\{\tilde{f}\}$, задовольняють комутаційним співвідношенням (5), (6) із [1] $\mathcal{P}$–алгебри у явно коваріантній формі.

Доведення теореми здійснюється безпосередніми обчисленнями середніх значень (18) з використанням виразу (13) для $f(t,\vec{x})$ та перевіркою виконання $\mathcal{P}$–таблиці (5), (6) із [1] для операторів

$\tilde{q} = (\tilde{k}_\mu, \tilde{j}_{\mu\nu})$ (19) та $\tilde{q}^{\text{orb}} = (\tilde{k}_\mu, \tilde{m}_{\mu\nu})$, (19), (20), **q.e.d.**

Таким чином, список основних 10 інтегралів руху релятивістської квантової механіки вільного електрона (енергії P_0, імпульсу P_l, моменту кількості руху J_{ln} та інтегралу руху J_{0l}, що має відношення до руху центра енергії електрона) – наслідків однорідності та ізотропності простору-часу – має вигляд

$$P_\mu = \int d^3k \tilde{f}^\dagger(\vec{k}) \tilde{k}_\mu \tilde{f}(\vec{k}), \ \tilde{k}_0 = \tilde{\omega}, \ \tilde{k}_l = k_l, \quad (21)$$

$$J_{ln} = \int d^3k \tilde{f}^\dagger(\vec{k})(\tilde{x}_l k_n - \tilde{x}_n k_l + s_{ln}) \tilde{f}(\vec{k}), \quad (22)$$

$$J_{0l} = \int d^3k \tilde{f}^\dagger(\vec{k}) \left[-\frac{1}{2}\{\tilde{x}_l, \tilde{\omega}\} + \frac{(\vec{s}\times\vec{k})_l}{\tilde{\omega}+m} \right] \tilde{f}(\vec{k}), \quad (23)$$

Цікаво відмітити, що, внаслідок тверджень *B* і *C* теореми 1, додатковими інтегралами руху є також окремо взяті орбітальні та спінові моменти кількості руху електрона, тобто

$$M_{ln} = \int d^3k \tilde{f}^\dagger(\vec{k})(\tilde{x}_l k_n - \tilde{x}_n k) \tilde{f}(\vec{k}),$$
$$S_{ln} = \int d^3k \tilde{f}^\dagger(\vec{k}) s_{ln} \tilde{f}(\vec{k}), \quad (24)$$

$$M_{0l} = -\int d^3k \tilde{f}^\dagger(\vec{k}) \frac{1}{2}\{\tilde{x}_l, \tilde{\omega}\} \tilde{f}(\vec{k}),$$
$$S_{0l} = \int d^3k \tilde{f}^\dagger(\vec{k}) \tilde{\breve{s}}_l \tilde{f}(\vec{k}), \quad (25)$$

де введено позначення

$$\breve{s}^l = \frac{(\vec{s}\times\vec{p})^l}{\omega+m} \to \tilde{\breve{s}}^l = \frac{(\vec{s}\times\vec{k})^l}{\tilde{\omega}+m}. \quad (26)$$

При цьому, на відміну від операторів $\tilde{q}^{\text{orb}} = (\tilde{k}_\mu, \tilde{m}_{\mu\nu})$ з (19), (20), які задовольняють $\mathcal{P}$–таблицю (5), (6), із [1] окремо взяті спінові оператори s_{ln} та $\tilde{\breve{s}}_l$ не задовольняють комутаційним спів-відношенням (6) із [1], хоча їх середні значення S_{ln}, S_{0l} (24), (25) теж не залежать від часу. Це означає, що у канонічному представленні в релятивістській квантовій механіці, завдяки нелокальності $\mathcal{P}$–зображення (15), не існує поняття бустової частини лоренцового спіну як незалежної від $\vec{s}$ величини, принаймні у використовуваній тут реалізації (15), (26).

Фізичний зміст законів збереження P_μ, $J_{\mu\nu}$, M_{ln}, S_{ln} (21) – (25) є очевидним. Зауважимо додатково дещо про фізичний зміст орбітального моменту з (25). Для цього розглянемо оператор спостережуваної $\vec{n} \equiv \frac{1}{2}\{\vec{x}, \omega\}$ та її середнє значення $\vec{N}(t)$. Приймаючи до уваги певну аналогію квантової механіки електрона з нерелятивістською механікою суцільних середовищ, у якій радіус-вектор руху центра мас виражається через величини, які визначають дане середовище (а саме через густину $\rho(t,\vec{x})$ маси та густину $\vec{v}(t,\vec{x})$ швидкості), формулами $\vec{R}^{\text{class}}(t) = \int d^3x \vec{x} \rho(t,\vec{x}) / \int d^3x \rho(t,\vec{x})$, $\vec{V}^{\text{class}}(t) = \int d^3x \vec{v}(t,\vec{x})$, величини

$$\vec{R}(t) = \frac{\int d^3x f^\dagger(t,\vec{x}) \frac{1}{2}(\vec{x}\omega + \omega\vec{x}) f(t,\vec{x})}{\left(P_0 = \int d^3x f^\dagger(t,\vec{x}) \omega f^\dagger(t,\vec{x})\right)}, \quad (27)$$

$$\vec{V}_0 = \frac{\vec{P}}{P_0}$$

природно назвати центром енергії електрона та швидкістю руху цього центру у довільно-фіксованому стані $f = f(t,\vec{x}) \in \mathbb{H}_1$ (у довільно-фіксованій ІСВ). З означення цих величин та з формули (23) випливають наступні формули

$$\vec{R}(t) = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0,$$
$$\vec{R}_0 \equiv R(t=0) \frac{\vec{N}(t=0)}{P_0} = \frac{S^{0l} - J^{0l}}{P_0}. \quad (28)$$

Це означає, що центр енергії вільного електрона рухається по закону руху вільної матеріальної точки, причому величина $(-M^{0l} = S^{0l} - J^{0l}) / P_0$ визначає початкове положення $\vec{R}_0$ цього центру (у даній ІСВ). Таким чином, орбітальна частина m_{0l} бусту j_{0l} має окремий фізичний зміст.

Вкажемо також, що оператор спіна електрона $\vec{s}=\vec{\sigma}/2$ визначає відповідне матричне зображення в $\mathbb{H}_1$ групи $\mathrm{O}^+(3)$ поворотів у реальному просторі $\mathrm{R}^3 \subset \mathbb{M}(1,2)$ (точніше універсальної накриваючої SU_2 групи $\mathrm{O}^+(3)$), а оператор релятивістської швидкості визначається за теоремою Еренфеста

$$\vec{v}(\vec{x},\vec{p}) \equiv i\left[\omega,\vec{x}\right]=\frac{\vec{p}}{\omega}. \qquad (29)$$

Саме такий оператор фігурує у релятивістській квантовій механіці замість оператора швидкості $\vec{v}=\vec{p}/m$ з нерелятивістської квантової механіки матеріальної точки і є аналогом швидкості $\vec{v}(t,\vec{x})$ у класичній теорії середовищ. Компоненти швидкості (29) комутують між собою, вони (як і компоненти оператора спіна $\vec{s}=\vec{\sigma}/2$) комутують з оператором енергії ω, тому середнє значення

$$\begin{aligned}\vec{V} &\equiv \int d^3x f^{\dagger}(t,\vec{x})\vec{v}(\vec{x},\vec{p})\, f(t,\vec{x}) \\ &= \int d^3k f^{\dagger}(\vec{k})\, f(\vec{k})\vec{k}/\omega\end{aligned} \qquad (30)$$

не залежить від часу.

Для квазіплоского стану власне значення оператора швидкості (29) та середнє значення (30) співпадає з швидкістю $\vec{V}_0$ у формулі (27) і дорівнює

$$\vec{V}=\frac{\vec{k}_0}{\tilde{\omega}_0}, \qquad (31)$$

де $\vec{k}_0$ - імпульс центру пакету плоских хвиль (тобто квазіплоского стану), а $\tilde{\omega}_0=\sqrt{\vec{k}_0+m^2}$ - відповідна йому енергія.

З наведених вище основ релятивістської квантової механіки електрона (як частинки маси m та спіна s=1/2) у її канонічному представленні видно, що тут нема ніяких проблем у визначенні будь-якої з множин спостережуваних електрона (як відповідних функцій від $\vec{x}$, $\vec{p}$, $\vec{s}$) та їх фізичній інтерпретації. Наприклад, знімаються всі відмічені в роботі [1] у пунктах 3.1 – 3.4 труднощі, притаманні спінорному полю у локальному представленні Дірака.

3. Релятивістська квантова механіка довільного $\vec{s}$ -мультиплету

Визначимо $\vec{s}$ -мультиплет як квантовомеханічну частинку маси $m\geq 0$ і довільно-фіксованого SU_2 -спіна

$$\begin{aligned}&\vec{s}=(s^l)\equiv(s_{23},s_{31},s_{12})\in \mathrm{D}(\mathrm{SU}_2);\\ &s_{ln}\equiv\left(s_{ln}{}^{\mathrm{a}}{}_{\mathrm{b}}\right),\ \ \mathrm{a,b}=\overline{1,\mathrm{A}}\end{aligned} \qquad (32)$$

де $\mathrm{A}\times\mathrm{A}$ -матриці s_{ln} (з довільним A) – це ермітові генератори довільно фіксованого матричного зображення групи SU_2 у гільбертовому просторі $\mathbb{S}^{3,\mathrm{A}} \subset \mathbb{H}^{3,\mathrm{A}} \subset \mathbb{S}^{3,\mathrm{A}\prime}$. З наведеного формулювання релятивістської квантової механіки електрона (як частинки маси m та спіна s=1/2) та з відповідних доведень наведених вище тверджень зрозуміло, як формулюється релятивістська квантова механіка довільного $\vec{s}$ -мультиплету.

Зокрема, підкреслимо, що алгебра спостережуваних будь-якого спінового мультиплету у гільбертовому просторі $\mathbb{H}^{3,\mathrm{A}}$ визначається через три 3-векторні оператори, пов’язані з довільно-фіксованою ІСВ, а саме: через оператор координати $\vec{x}\in \mathrm{R}^3 \subset \mathbb{M}(1,3)$, який є “індексом” континуальної степені вільності, оператор імпульсу $\vec{p}$, канонічно спряжений до $\vec{x}$, та оператор спіна $\vec{s}$ (32) - генератор A-мірного матричного зображення спінової групи SU_2, яка є універсальною накриваючою групи поворотів O_3^+ у реальному 3-вимірному просторі $\mathrm{R}^3 \subset \mathbb{M}(1,3)$.

Вкажемо також, що зображення $\mathscr{P}_{\vec{s}}$ групи інваріантності рівняння ШФ $(i\partial_0-\omega)\,f(x)=0,\quad f\in\mathbb{H}^{3,\mathrm{A}}$, визначається генераторами (15), у яких $\vec{s}=\vec{\sigma}/2$ замінено на дане $\vec{s}$ (32) (відповідно здійснюється заміна $\vec{s}=\vec{\sigma}/2$ на матриці $\vec{s}$

(32) даного мультиплету у всіх інших формулах).

Аналогічним чином у канонічному представленні формулюється квантова механіка таких незвідних $\vec{s}$-мультиплетів, для яких $\vec{s}^2$ визначається набором спінів з $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$.

Наголосимо, що, як і у деталізованому вище випадку з $\vec{s} = \vec{\sigma}/2$, тут також нема ніяких проблем у визначенні будь-якої з множин спостережуваних довільного $\vec{s}$-мультиплету (як відповідних функцій від $\vec{x}, \vec{p}, \vec{s}$) та їх фізичній інтерпретації. Це відноситься, наприклад, до релятивістської квантової механіки 4-компонентного електронно-позитронного дублету (де оператор спіна $\vec{s}$ задано в [1] у (18)), у якому стани електрона та позитрона у просторі станів дублета фігурують цілком рівноправно.

Зауважимо, що релятивістська квантова механіка будь-якого $\vec{s}$-мультиплету (зокрема електронно-позитронного дублету) не інваріантна відносно перетворень з повної групи Пуанкаре, яка містить також і дискретні перетворення, оскільки квантово-механічне рівняння ШФ (7) не інваріантне відносно інверсій часової змінної $t \to -t$ (так само, як і відповідні рівняння у нерелятивістській квантовій механіці). Необхідні властивості симетрії відносно повної групи Пуанкаре має польове (не квантовомеханічне) рівняння ФВ (4)=(3).

4. Висновки

Сформульована релятивістська квантова механіка частинки маси $m \geq 0$ і спіну $s = 1/2$ у канонічному представленні Фолді – Вотхойзена, у якій алгебра спостережуваних та їх фізична інтерпретація експлуатують явно нековаріантні міри Лебега (у просторах спектрів), і завдяки цьому фізична інтерпретація векторів станів та спостережуваних так само наочна, як і у нерелятивістській квантовій механіці. Наведений формалізм узагальнено на випадок довільного мультиплету, який визначається спіновими матрицями $\vec{s} = (s_{23}, s_{31}, s_{12})$ як генераторами будь-якого зображення спінової групи SU_2. Одержані динамічні змінні, які є наслідками Пуанкаре-симетрії теорії та важливих додаткових симетрій. Додаткові динамічні змінні є наслідками того факту що у представленні Фолді - Вотхойзена окремо зберігаються і орбітальна, і спінова частини 4-моменту кількості руху. Визначено поняття центра енергії $\vec{s}$-мультиплету як релятивістського аналогу поняття центра мас у нерелятивістській теорії суцільних середовищ.

Проілюстровано, що формалізм релятивістської квантової механіки частинки як $\vec{s}$-мультиплету довільної маси у канонічному представленні ШФ принципово аналогічний аксіоматичному формалізму фон Неймана [7] нерелятивістської квантової механіки системи матеріальних точок з довільним числом степенів вільності. Показано, що $\vec{s}$-мультиплет як об’єкт релятивістської квантової механіки у її канонічному формулюванні типу ФВ повністю аналогічний набору суцільних середовищ, як об’єкту нерелятивістської класичної фізики, для якого компоненти (сорти) середовища асоціюються з його дискретними степенями вільності. Однак суттєва різниця між $\vec{s}$-мультиплетом як об’єктом квантової механіки та багатосортним суцільним середовищем як об’єктом класичної фізики полягає у тому, що якщо стани вказаного середовища задаються наборами густин – функціями $(\rho^a(t,\vec{x}),\ v^a(t,\vec{x})),\ a = \overline{1,\mathrm{A}},$ – то стани $\vec{s}$-мультиплету як квантового середовища задаються векторами $f(t,\vec{x}) \equiv (f^a(t,\vec{x}))$ A-мірного гільбертового простору, які визначають амплітуди ймовірностей спостереження динамічних змінних $\vec{s}$-мультиплету. Ця відмінність відображає різнорівневу статистичність вказаних об’єктів, а саме, $\vec{s}$-мультиплету, - на рівні ймовірностей його динамічних спостережуваних, тоді суцільного середовища – на рівні самих його динамічних спостережуваних.

Література

1. Кривський І.Ю., Симулик В.М. Про необхідність канонічного представлення Фолді – Вотхойзена для спінорного поля // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2008. – Вип. 23. – С. 16-22.
2. Foldy L. Wouthuysen S. On the Dirac Theory of Spin ½ Particles and its Non-Relativistic Limit // Phys. Rev. – 1950. – V.78, №1. – P. 29–36.
3. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
4. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
5. Thaller B. The Dirac equation. – Berlin: Springer, 1992. – 357 p.
6. Кривский И.Ю., Симулик В.М. Основы квантовой электродинамики в терминах напряжённостей. – К.: Наук. Думка, 1992. – 288 с.
7. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. – М.: Наука, 1964. – 367 с.

ON THE RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS OF THE PARTICLE WITH ARBITRARY MASS AND SPIN IN THE CANONICAL FOLDY – WOUTHUYSEN REPRESENTATION

I.Yu. Krivsky, V.M. Simulik

Institute of Electron Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Department of the Theory of Elementary Interactions,
88000, Uzhhorod, 21 Universitetska Str.
e-mail: sim@iep.uzhgorod.ua

The relativistic invariant formulation of the quantum mechanics for the particle of mass $m \geq 0$ and spin $s = 1/2$ is suggested. The generalization for the arbitrary multiplet, which is determined by the spin matrices $\vec{s} = (s_{23},\ s_{31},\ s_{12})$ as the generators of the arbitrary representation of the spin group SU_2, is fulfilled. The algebra of observables of $\vec{s}$-multiplet in the Hilbert space of its states with the Lebesque measure by mathematically well-defined and physically justified way is determined. The elements of this algebra are the functions of the generated operators – the Hermit operators of space coordinate $\vec{x}$, momentum $\vec{k}$ and spin $\vec{s}$ in arbitrary-fixed inertial frame of references. The dynamical variables as the consequences of the Poincare symmetry of the theory and the important additional symmetries are found. The additional dynamical variables are the consequences of the fact that both orbital and spin parts of the total 4-angular momentum in the Foldy – Wouthuysen representation are conserved independently. The concept of the centre of energy of $\vec{s}$-multiplet as the relativistic analog of the concept of centre mass in non-relativistic theory of continuous media is determined.