УДК 517.518:519.652

Т. С. Гапак (ДВНЗ "Ужгородський національний університет")

КВАЗІОБЕРНЕНИЙ ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ

The problem of the interpolation function of two real variables by inverse function two-dimension interpolation continued fraction. The were found rates of remaining terms of the corresponding continued fraction.

У статті розглядається задача інтерполяції функції двох дійсних змінних квазіоберненим двовимірним функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом . Знайдена оцінка залишкового члена.

Вступ Багато задач математики, механіки, фізики потребують наближене значення тих чи інших функцій. Є багато агрегатів наближення функцій, одним з них є інтерполяція функцій ланцюговими дробами. Було досліджено наближення функцій двох змінних двовимірними інтерполяційними ланцюговими дробами. Вперше ці дроби розглядалися Х.Й.Кучмінської [1] та А.Коут [2]. Подальші дослідження були проведенні в [3–7]. Дана робота присвячена деяким типам двовимірних інтерполяційних ланцюгових дробів, так званим квазіоберненим двовимірним ланцюговим дробам і є продовженням досліджень з роботи [8].

Квазіоберненні двовимірні ланцюгові дроби Нехай маємо функціональний двовимірний ланцюговий дріб [8] виду

$$D(x,y) = \left(\Phi_0(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}(x,y)}{\Phi_i(x,y)}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де

$$\Phi_i(x,y) = b_{ii}(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ji}(x,y)}{b_{ji}(x,y)} + \mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ij}(x,y)}{b_{ij}(x,y)}\ , \qquad i = 0, 1, \ldots$$

$a_{ij}(x,y) \not\equiv 0$, $b_{ij}(x,y)$ — функції від двох змінних, який назвемо квазіоберненим двовимірним ланцюговим дробом (КОДЛД)

Означення 1. *[8] Скінчений функціональний двовимірний ланцюговий дріб*

$$D_{n_*}(x,y) = \left(\Phi_0^{n_*}(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}(x,y)}{\Phi_i^{n_*}(x,y)}\right)^{-1}, \qquad n = min\{n_1, n_2\}, \tag{2}$$

де

$$\Phi_i^{n_*}(x,y) = b_{ii}(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{n_1} \frac{a_{ji}(x,y)}{b_{ji}(x,y)} + \mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{n_2} \frac{a_{ij}(x,y)}{b_{ij}(x,y)}\ , \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

називається (n_1, n_2) підхідним дробом КОДЛД (1).

Будемо вважаємо, що $\mathop{\mathrm{K}}\limits_{s=r}^{t} a_s/b_s = 0$, якщо $r > t$.

Скориставшись аналогом квазіоберненого рекурентного алгоритму [3] поставимо у відповідність (2) відношення двох многочленів $P_{n_*}(x,y)$, $Q_{n_*}(x,y)$, тобто $D_{n_*}(x,y) = \dfrac{P_{n_*}(x,y)}{Q_{n_*}(x,y)}$, де $P_{n_*}(x,y)$ — чисельник і $Q_{n_*}(x,y)$ — знаменник підхідного дробу (2).

Позначимо при $k = 0,\ldots,n-1$

$$F_k^{n_*} = \frac{P_k^{n_*}}{Q_k^{n_*}} = \Phi_k^{n_*}(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{i=k+1}^{n} \frac{a_{ii}(x,y)}{\Phi_i^{n_*}(x,y)}, \quad F_n^{n_*} = \Phi_n^{n_*}(x,y), \tag{3}$$

залишок КОДЛД (2). Тоді справедливі наступні рівності $D_{n_*} = \dfrac{1}{F_0^{n_*}} = \dfrac{P_0^{n_*}}{Q_0^{n_*}}$, отже $P_{n_*} = Q_0^{n_*}$, $Q_{n_*} = P_0^{n_*}$.

Справедлива наступна формула різниці підхідних дробів [8]

$$D_{n_*+1} - D_{n_*} = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{(-1)^{n_1} \prod\limits_{j=m+1}^{n_1+1} a_{jm}}{Q_{n_1,m}\, Q_{n_1+1,m}} + \frac{(-1)^{n_2} \prod\limits_{j=m+1}^{n_2+1} a_{mj}}{Q_{m,n_2}\, Q_{m,n_2+1}} \right) \frac{\prod\limits_{s=1}^{m} a_{ss}}{\prod\limits_{s=0}^{m} F_s^{n_*}\, F_s^{n_*+1}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} \prod\limits_{s=1}^{n+1} a_{ss}}{F_{n+1}^{n_*+1} \prod\limits_{s=0}^{n} F_s^{n_*}\, F_s^{n_*+1}}. \tag{4}$$

де $Q_{n_1,m}, Q_{n_1+1,m}, Q_{n_2,m}, Q_{n_2+1,m}$ — знаменники відповідних ланцюгових дробів

$$\frac{P_{n_1,m}}{Q_{n_1,m}} = \mathop{\mathrm{K}}\limits_{j=m+1}^{n_1} \frac{a_{jm}}{b_{jm}}, \; \frac{P_{n_1+1,m}}{Q_{n_1+1,m}} = \mathop{\mathrm{K}}\limits_{j=m+1}^{n_1+1} \frac{a_{jm}}{b_{jm}},$$

$$\frac{P_{n_2,m}}{Q_{n_2,m}} = \mathop{\mathrm{K}}\limits_{j=m+1}^{n_2} \frac{a_{mj}}{b_{mj}}, \; \frac{P_{n_2+1,m}}{Q_{n_2+1,m}} = \mathop{\mathrm{K}}\limits_{j=m+1}^{n_2+1} \frac{a_{mj}}{b_{mj}}.$$

Лема 1. *[8] Нехай частинні чисельники $a_{ij}(x,y)$ та знаменники $b_{ij}(x,y)$ КОДЛД (2) для всіх значень $(x,y) \in G$ задовольняють нерівності*

$$|a_{ij}(x,y)| \leqslant d_1, \; |b_{ij}(x,y)| \geqslant d_1 + 1, \; |a_{ji}(x,y)| \leqslant d_2, \; |b_{ji}(x,y)| \geqslant d_2 + 1, \; i > j,$$

$$|a_{ii}(x,y)| \leqslant d_1 d_2, \; d_1 d_2 + 3 \leqslant |b_{ii}(x,y)| \leqslant \beta, \; i = 0,1,\ldots,n,$$

де d_1, d_2, β деякі сталі. Тоді

$$d_1 d_2 + 1 \leqslant |\Phi_i^{n_*}| \leqslant \beta + 2, \; i = 0,1,\ldots,n. \tag{5}$$

Інтерполяційні КОДЛД Нехай функція двох змінних $f(x,y)$ неперервна на множині $G=[\alpha_x,\beta_x]\times[\alpha_y,\beta_y]$.

Вибираємо розбиття $X=\{x_i : x_i\in[\alpha_x,\beta_x],\ x_i\neq x_l$ при $i\neq l,\ i,l=0,1,\ldots,k_1\}$, та $Y=\{y_j : y_j\in[\alpha_y,\beta_y],\ y_j\neq y_l$ при $j\neq l,\ j,l=0,1,\ldots,k_2\}$. Декартів добуток цих множин $G_{k_{xy}}=X\times Y=\{(x_i,y_j) : x_i\in X,\ y_j\in Y\}$ буде утворювати сітку вузлів в множині G. Нехай маємо функціональний КОДЛД (2) де $n_1=n_1(k_1)$, $n_2=n_2(k_2)$.

Означення 2. *[8] Скінчений функціональний двовимірний ланцюговий дріб (2) називається квазіоберненим двовимірним інтерполяційним ланцюговим дробом (КОДІЛД), якщо в точках сітки $G_{k_{xy}}$ виконуються співвідношення*

$$D_{n_*}(x_i,y_j)=c_{ij},\qquad \text{де}\quad c_{ij}=f(x_i,y_j),\ i=0,1,\ldots,k_1,\ j=0,1,\ldots,k_2. \tag{6}$$

Якщо КОДЛД (2) інтерполяційний, то різниця

$$R_{n_*}(x,y)=f(x,y)-\frac{P_{n_*}(x,y)}{Q_{n_*}(x,y)}$$

називається залишковим членом КОДІЛД.

Нехай в КОДІЛД (2) частинні чисельники $a_{ij}(x,y)$ визначені наступним чином:

$$a_{ij}(x,y)=\begin{cases} g_1(x-x_{i-1}), & \text{коли} \quad i>j,\\ g_2(y-y_{j-1}), & \text{коли} \quad i<j,\\ g_1(x-x_{i-1})g_2(y-y_{i-1}), & \text{коли} \quad i=j,\end{cases}$$

знаменники b_{ij} — коефіцієнти, $n_1=k_1, n_2=k_2$. Де $g_1(x)$ деяка неперервна функція на $[\alpha_x,\beta_x]$, $g_2(y)$– неперервна функція на $[\alpha_y,\beta_y]$ і для них виконуються умови $g_1(0)=0, g_2(0)=0$.

$$D_{n_*}(x,y)=\frac{P_{n_*}(x,y)}{Q_{n_*}(x,y)}=\left(\Phi_0^{n_*}(x,y)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{g_1(x-x_{k-1})g_2(y-y_{k-1})}{\Phi_k^{n_*}(x,y)}\right)^{-1}, \tag{7}$$

де $n=min\{n_1,n_2\}$ і

$$\Phi_k^{n_*}(x,y)=b_{kk}+\mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n_1}\frac{g_1(x-x_{i-1})}{b_{ik}}+\mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n_2}\frac{g_2(y-y_{i-1})}{b_{ki}}.$$

Для встановлення формул обчислення коефіцієнтів (7) розглянемо матриці

$$\mathbf{X}=(g_1(x_{ij}))_{i,j=0,1,\ldots,n_1},\quad \text{де}\quad g_1(x_{ij})=\begin{cases} g_1(x_i-x_j), & \text{при} \quad i>j,\\ 1, & \text{при} \quad i\leqslant j,\end{cases}$$

та

$$\mathbf{Y}=(g_2(y_{ij}))_{i,j=0,1,\ldots,n_2},\quad \text{де}\quad g_2(y_{ij})=\begin{cases} g_2(y_i-y_j), & \text{при} \quad i>j,\\ 1, & \text{при} \quad i\leqslant j.\end{cases}$$

Визначимо елементи послідовності

$$\{\delta_{ij}^k :\ i=0,1,\ldots,n_1, j=0,1,\ldots,n_2, k=0,\ldots,N-1, N=\max\{n_1,n_2\}, i,j>k.\}$$

наступним чином:

$$\delta_{ij}^{k}=\frac{g_1(x_{ik})\cdot g_2(y_{jk})}{\delta_{ij}^{k-1}+\theta_j^k\cdot\delta_{ik}^{k-1}+\theta_i^k\cdot\delta_{kj}^{k-1}+\theta_i^k\cdot\theta_j^k\cdot\delta_{kk}^{k-1}},$$

$$\delta_{ij}^{-1}=\frac{1}{c_{ij}},\quad \theta_s^t=\begin{cases}-1, & \text{коли} \quad s>t,\\ 0, & \text{коли} \quad s\leqslant t,\end{cases}$$

Твердження 1. *Коефіцієнти КОДІЛД (7) визначають із співвідношення*

$$b_{ij}=\delta_{ij}^{s-1},\quad \text{де } i=0,1,\dots,n_1,\ j=0,1,\dots,n_2,\ s=\max\{i,j\}. \tag{8}$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції . Легко бачити, що формула вірна для коефіцієнтів $\Phi_0^{n_*}(x,y)$. Для $k=0,\dots,n_1,\ m=0,\dots,n_2$ виконується рівність

$$\Phi_0^{n_*}(x_k,y_m)=b_{00}+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n_1}\frac{g_1(x_k-x_{i-1})}{b_{i0}}+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n_2}\frac{g_2(y_m-y_{i-1})}{b_{0i}}=\frac{1}{c_{k0}}+\frac{1}{c_{0m}}-\frac{1}{c_{00}}. \tag{9}$$

Припустимо, що коефіцієнти $\Phi_k^{n_*}(x,y), k=1,2,\dots,n$ визначаються за формулою (8) при $n=t-1$. Маємо

$$D_{n_*}(x,y)=\left(\Phi_0^{n_*}(x,y)+\cfrac{g_1(x-x_0)g_2(y-y_0)}{\Phi_1^{n_*}(x,y)+\mathop{\mathrm{K}}\limits_{i=2}^{t}\cfrac{g_1(x-x_{i-1})g_2(y-y_{i-1})}{\Phi_i^{n_*}(x,y)}}\right)^{-1}. \tag{10}$$

Позначимо

$$\mu(x,y)=\Phi_1^{n_*}(x,y)+\mathop{\mathrm{K}}_{i=2}^{t}\frac{g_1(x-x_{i-1})g_2(y-y_{i-1})}{\Phi_i^{n_*}(x,y)}. \tag{11}$$

Тоді (10) запишеться у вигляді $D_{n_*}(x,y)=\left(\Phi_0^{n_*}(x,y)+\dfrac{g_1(x-x_0)g_2(y-y_0)}{\mu(x,y)}\right)^{-1}$.
Оскільки $D_{n_*}(x_i,y_j)=c_{ij}$ при $i=0,1,\dots,n_1,\ j=0,1,\dots,n_2$, то з урахуванням (9) маємо

$$\mu_{ij}=\mu(x_i,y_j)=\cfrac{g_1(x_{i0})g_2(y_{j0})}{\cfrac{1}{c_{ij}}-\cfrac{1}{c_{i0}}-\cfrac{1}{c_{0j}}+\cfrac{1}{c_{00}}}.$$

Ланцюговий дріб (11) має $t-1$ поверх, а його коефіцієнти, згідно з припущенням, визначаються за формулою (8). Отже, $b_{ij}=\tilde{\delta}_{ij}^{s-1}$, де

$$\tilde{\delta}_{ij}^{k}=\frac{g_1(x_{ik})\cdot g_2(y_{jk})}{\tilde{\delta}_{ij}^{k-1}+\theta_j^k\cdot\tilde{\delta}_{ik}^{k-1}+\theta_i^k\cdot\tilde{\delta}_{kj}^{k-1}+\theta_i^k\cdot\theta_j^k\cdot\tilde{\delta}_{kk}^{k-1}},$$

при $\tilde{\delta}_{ij}^1=\mu_{ij}$. Очевидно, що $\tilde{\delta}_{ij}^1=\delta_{ij}^1$. Легко переконатися, що $\tilde{\delta}_{ij}^k=\delta_{ij}^k, i=2,\dots,t_1,\ j=2,\dots,t_2$. Отже, формула (8) вірна.

Далі будемо спиратися на наступне твердження для ланцюгових дробів.

Теорема 1. *[6] Якщо всі частинні чисельники* a_k *та частинні знаменники* b_k *ланцюгового дробу* $P_m^{(n)}/Q_m^{(n)} = \underset{k=m}{\overset{n}{\mathrm{K}}} a_k/b_k$ *задовольняють умови* $|\, a_k \,| \leqslant d,\ |\, b_k \,| \geqslant d+1,$ *то*

$$|\ Q_m^{(n)}\ | \geqslant \begin{cases} \dfrac{d^{n+1-m}-1}{d-1}, & \text{коли} \quad d \neq 1, \\ n+1-m, & \text{коли} \quad d = 1. \end{cases}$$

Теорема 2. *1. Нехай для функції* $f(x,y)$ *неперервної в області* G *визначений КОДІЛД (7) коефіцієнти якого обчислюються за значеннями функції в точках сітки* G_{n_*} *за формулами (8).*

2. Для $\forall x \in [\alpha_x, \beta_x],\ g_1(x) \leqslant d_1,$ *для* $\forall y \in [\alpha_y, \beta_y],\ g_2(y) \leqslant d_2.$

3. Нехай коефіцієнти КОДІЛД задовольняють умови : $|\, b_{ij} \,| \geqslant d_1 + 1, |\, b_{ji} \,| \geqslant d_2 + 1, i > j, |\, b_{ii} \,| \geqslant d_1\, d_2 + 3,\ i = 1, \ldots, n.$

4. Знайдеться точка $(x_*, y_*) \in G,\ x_* \notin X, y_* \notin Y,$ *що* $|\, b_{n_1+1,j}(x_*) \,| \geqslant d_1 + 1,\ |\, b_{i,n_2+1}(y_*) \,| \geqslant d_2 + 1,\ i = 0, 1, \ldots, n_1,\ \ j = 0, \ldots, n_2,\ \ |\ b_{n+1,n+1}(x_*, y_*)\ | \geqslant d_1\, d_2 + 3,$ *де коефіцієнти* $b_{n_1+1,j}(x_*),\ b_{i,n_2+1}(y_*),\ b_{n+1,n+1}(x_*, y_*)$ *визначаються за формулами (8) у випадку, коли* $x_{n_1+1} = x_*,\ y_{n_2+1} = y_*.$

Тоді мають місце оцінки:

$$|\ f(x_*, y_*) - D_{n_*}(x_*, y_*)\ | \leqslant \sum_{m=0}^{n} \frac{d_1^{n_1+3}(d_1-1)^2}{d_2^{m+2}(d_1^{n_1+1}-d_1^m)(d_1^{n_1+2}-d_1^m)} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n} \frac{d_2^{n_2+3}(d_2-1)^2}{d_1^{m+2}(d_2^{n_2+1}-d_2^m)(d_2^{n_2+2}-d_2^m)} + \frac{1}{d_1^{n+2}d_2^{n+2}}, \quad d_1 \neq 1, d_2 \neq 1,$$

де $i = 0, 1, \ldots, n.$

Доведення. Виберемо точку (x_*, y_*). З умов теореми маємо $x_* \notin X,\ y_* \notin Y$. За значеннями функції $f(x,y)$ в точках сітки $G_{n_*+1} = \{x_0, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+1}\} \times \{y_0, \ldots, y_{n_2}, y_{n_2+1}\}$, де $x_{n_1+1} = x_*,\ y_{n_2+1} = y_*$, побудуємо ще один КОДІЛД

$$D_{n_*+1}(x,y) = \left(\Phi_0^{n_*+1}(x,y) + \underset{k=1}{\overset{n+1}{\mathrm{K}}} \frac{g_1(x-x_{k-1})g_2(y-y_{k-1})}{\Phi_k^{n_*+1}(x,y)} \right)^{-1}, \tag{12}$$

де

$$\Phi_k^{n_*+1}(x,y) = b_{kk} + \underset{i=k+1}{\overset{n_1+1}{\mathrm{K}}} \frac{g_1(x-x_{i-1})}{b_{ik}} + \underset{i=k+1}{\overset{n_2+1}{\mathrm{K}}} \frac{g_2(y-y_{i-1})}{b_{ki}}\ , \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Легко бачити, що коефіцієнти $b_{ij},\ i = 0, 1, \ldots, n_1, j = 0, 1, \ldots, n_2$ в КОДІЛД (12) будуть рівні відповідним коефіцієнтам в КОДІЛД (7) за побудовою, а коефіцієнти $b_{n_1+1,i} = b_{n_1+1,i}(x_*),\ b_{i,n_2+1} = b_{i,n_2+1}(y_*),\ b_{n+1,n+1} = b_{n+1,n+1}(x_*, y_*)$ і визначаються за (8).

КОДІЛД (8) є інтерполяційний, тобто $D_{n_*+1}(x_*, y_*) = f(x_*, y_*)$ за побудовою, а тоді

$$f(x_*, y_*) - D_{n_*}(x_*, y_*) = D_{n_*+1}(x_*, y_*) - D_{n_*}(x_*, y_*).$$

Різниця між підхідними дробами $D_{n_*+1}(x_*, y_*) - D_{n_*}(x_*, y_*)$ визначається за формулою (4), коли $a_{jm} = g_1(x - x_{j-1}),\ j = m+1, \ldots, n_1+1,\ a_{mj} = g_2(y - y_{j-1}),\ j = m+1, \ldots, n_2+1,\ m = 0, 1, \ldots, n,\ a_{ss} = g_1(x - x_{s-1})g_2(y - y_{s-1}),\ s = 1, 2, \ldots, n.$ Тобто

$$D_{n_*+1} - D_{n_*} = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{(-1)^{n_1+1} \prod\limits_{j=m+1}^{n_1+1} g_1(x - x_{j-1})}{Q_{n_1,m}\, Q_{n_1+1,m}} + \frac{(-1)^{n_2+1} \prod\limits_{j=m+1}^{n_2+1} g_2(y - y_{j-1})}{Q_{n_2,m}\, Q_{n_2+1,m}} \right) \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{s=1}^{m} g_1(x - x_{s-1}) g_2(y - y_{s-1})}{\prod\limits_{s=0}^{m} F_s^{n_*} F_s^{n_*+1}} + \frac{(-1)^n \prod\limits_{s=1}^{n+1} g_1(x - x_{s-1}) g_2(y - y_{s-1})}{F_{n+1}^{n_*+1} \prod\limits_{s=0}^{n} F_s^{n_*} F_s^{n_*+1}}, \qquad (13)$$

де $Q_{n_1,m}, Q_{n_1+1,m}, Q_{n_2,m}, Q_{n_2+1,m}$ — знаменники відповідних ланцюгових дробів

Скориставшись методом повної математичної індукції покажемо, що

$$|F_k^{n_*}| \geqslant d_1 d_2 \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad |F_k^{n_*+1}| \geqslant d_1 d_2, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Згідно (3) $F_k^{n_*} = \Phi_k^{n_*}(x, y) + \dfrac{g_1(x - x_{i-1}) g_2(y - y_{i-1})}{F_{k+1}^{n_*}}, \quad F_n^{n_*} = \Phi_n^{n_*}(x, y).$

При $k = n$ згідно леми1 маємо $|F_n^{n_*}| = |\Phi_n^{n_*}(x, y)| \geqslant d_1 d_2 + 1 \geqslant d_1 d_2$. Припустимо що нерівність вірна при $t = k+1$, доведемо при $t = k$.

$$|F_k^{n_*}| = \left| \Phi_k^{n_*}(x, y) + \frac{g_1(x - x_{i-1}) g_2(y - y_{i-1})}{F_{k+1}^{n_*}} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| |\Phi_k^{n_*}(x, y)| - \left| \frac{g_1(x - x_{i-1}) g_2(y - y_{i-1})}{F_{k+1}^{n_*}} \right| \right|.$$

Згідно леми1 $|\Phi_k^{n_*}(x, y)| \geqslant d_1 d_2 + 1$ та в силу припущення, отримаємо

$$\left| |\Phi_k^{n_*}(x, y)| - \left| \frac{g_1(x - x_{i-1}) g_2(y - y_{i-1})}{F_{k+1}^{n_*}} \right| \right| \geqslant d_1 d_2.$$

Нерівність $\left| F_k^{n_*+1} \right| \geqslant d_1 d_2,\ k = 1, 2, \ldots, n+1$ доводиться анологічно.

Знаменники $Q_{n_1,m}, Q_{n_1+1,m}, Q_{n_2,m}, Q_{n_2+1,m}$ оцінюються за абсолютним значенням згідно теореми 1. І тоді, оцінивши по модулю всі величини у співвідношенні (13) $|D_{n_*+1}(x_*, y_*) - D_{n_*}(x_*, y_*)|$, ми отримуємо оцінку зверху.

1. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
2. *Cuyt A., Verdonk B.* Different Technique for the Construction of Multivariate Rational Interpolation and Pade Approximants. – Antwerpen : Universitaire Instelling, 1988. – 158 p.
3. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та його узагальненнями у випадку функцій багатьох змінних // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 155–164.

4. *Пагіря М. М.* Про побудову двовимірного та трьохвимірного інтерполяційних ланцюгових дробів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1999. – Вип. 4. – С. 85–89.
5. *Пагіря М. М., Свида Т. С.* Задача інтерполяції функції двовимірними ланцюговими дробами // Укр. мат. ж-л. –К.: 2006. –С.842-852.
6. *Pahirya M.* About the Construction of Twodimension and Threedimension Interpolating Continued fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2000. – Vol. VIII, Summer 2000. – P. 205–207.
7. *Pahirya M., Svyda T.* Problem of Interpolation Function of Two-dimensional and Three-dimensional Interpolating Continued Fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2003. – Vol. XI, Summer 2003. – P. 64–80.
8. *Свида Т.С.* Обернені двовимірні інтерполяційні ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Серія мат. і інфор., 2005. –Вип.10-11. –С.121-131.