УДК 517.925.4

Ігор І. Король, к.ф.-м.н., доцент

Дослідження періодичних розв'язків автономних диференціальних систем з імпульсною дією у критичному випадку

Вивчаються питання існування періодичних розв'язків систем автономних диференціальних рівнянь, що піддаються імпульсному впливу. Для критичного випадку запропоновано новий чисельно-аналітичний алгоритм дослідження існування і побудови періодичних розв'язків, період яких співпадає або близький до періоду розв'язків породжуючої лінійної однорідної імпульсної системи.

Ключові слова: імпульсні системи, чисельно-аналітичний метод.

*Ihor I. Korol, Cand.Sci (Phys.-Math.), Associate Professor,

Investigating for periodic solutions of autonomous differential systems with impulse action in a critical case

Problems of existence of periodic solutions of systems of the autonomous differential equations, exposed to impulse influence are studied. In a critical case the new numerical-analytical algorithm for investigating of existence and approximate constructing of periodic solutions which period coincides or is close to the period of solutions of corresponding generating linear homogeneous impulsive system is suggested.

Key words: impulsive systems, numerical-analytic method.

*E-mail: korol_ihor@ukr.net
Статтю представив д.ф.-м.н, проф. Перестюк М.О.

У даній роботі розроблено новий чисельно-аналітичний алгоритм дослідження та наближеної побудови періодичних розв'язків нелінійних автономних систем диференціальних рівнянь, підпорядкованих імпульсному впливу. Встановлено необхідні і достатні умови існування розв'язків, знайдено оцінки похибки послідовних наближень. Аналогічні питання розглядалися в роботах [1,2,5]. Дана публікація є продовженням робіт [3,4].

Розглянемо задачу встановлення умов існування та знаходження - періодичних розв'язків автономної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=Ax+g(x),\ t\neq t_i, \tag{1}$$

з імпульсною дією

$$\Delta x|_{t=t_i}=B_i x(t_i-0)+b_i(x(t_i-0)), \tag{2}$$

де A, B_i – сталі $(n\times n)$ - матриці, $g(x)$, $b_i(x)$ – вектор-функції, причому $det(E_n+B_i)\neq 0$, I_n – одинична матриця порядку n, $B_{i+p}=B_i$, $b_{i+p}(x)=b_i(x)$, $t_{i+p}=t_i+T$, $0<t_1<\ldots<t_p<T$.

При цьому будемо розглядати критичний випадок – коли

А) відповідна породжуюча лінійна однорідна імпульсна система

$$\frac{dx}{dt}=Ax,\ t\neq t_i,\quad \Delta x|_{t=t_i}=B_i x(t_i-0), \tag{3}$$

має k - параметричну сім'ю нетривіальних розв'язків зі спільним періодом T.

Відомо, що якщо виконується умова **А**, то спряжена до (3) лінійна однорідна система

$$\frac{dx}{dt}=-A^T x,\ t\neq t_i,\ \Delta x|_{t=t_i}=-\left(I_n+B_i^T\right)B_i^T x(t_i-0) \tag{4}$$

теж має k лінійно незалежних T - періодичних розв'язків $\psi_i(t),\ldots,\psi_k(t)$. Позначимо через $\Psi(t)$ $(n\times k)$ - вимірну матрицю, стовпцями якої є $\psi_i(t),\ldots,\psi_k(t)$, через $\Theta(t)$ – $(n\times(n-k))$ - вимірну матрицю, стовпцями якої є ті $(n-k)$ лінійно незалежні розв'язки системи (4), які не є T - періодичними. Нехай $Y(t)$ – така фундаментальна матриця системи (4), у якої перші k стовпців утворені матрицею $\Psi(t)$, а інші $(n-k)$ стовпців – матрицею $\Theta(t)$. Фундаментальну матрицю $X(t)$ виберемо так, щоб $Y^T(t)X(t)=I_n$. Матрицант $X(t,0)$ системи (3) можемо записати у вигляді

$$X(t,0)=\left(Y^T(t)\right)^{-1}Y^T(0)=\left(Y^T(t)\right)^{-1}\begin{pmatrix}\Psi(0)\\ \Theta(0)\end{pmatrix}$$

Крім того, введемо наступні позначення

© І.І. Король. 2008

$$R_1(t)=\int_0^t \Psi^T(s)\Psi(s)ds, \quad R_2(t)=\int_0^t \Theta^T(s)\Psi(s)ds,$$

$$R_1=R_1(T), \quad R(t)=\int_0^t Y^T(s)\Psi(s)ds=\begin{pmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \end{pmatrix},$$

$$U_1(t,s)=\Psi^T(s)-R_1(t)R_1^{-1}\Psi^T(s)$$

$$U_2(t,s)=\Theta^T(s)-R_2(t)R_1^{-1}\Psi^T(s)$$

$$U(t,s)=Y^T(s)-R(t)R_1^{-1}\Psi^T(s)=\begin{pmatrix} U_1(t,s) \\ U_2(t,s) \end{pmatrix}$$

$$V(t,s)=R(t)R_1^{-1}\Psi^T(s).$$

Сформулюємо необхідні та достатні умови існування розв'язку імпульсної системи (1), (2).

Лема 1. Нехай виконується умова **А** і імпульсна диференціальна система (1), (2) має періодичний розв'язок $\varphi(t)$ періоду T. Тоді його початкове значення визначається за формулою

$$\varphi(0)=\varphi(0,\xi^*)=F\xi+ +G^+\left[\int_0^T \Theta^T(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^{p}\Theta^T(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0))\right] \tag{5}$$

де $G=\Theta^T(T)-\Theta^T(0)$ – прямокутна $((n-k)\times n)$ - матриця рангу $(n-k)$; G^+ – єдина $(n\times(n-k))$ - матриця, псевдообернена по Пенроузу до матриці G; F – фундаментальна $(n\times k)$ матриця розв'язків однорідної системи $Gx_0=0$; $\xi^*\in R^k$ є розв'язком визначального рівняння

$$\int_0^T \Psi^T(s)g(\varphi(s,\xi))ds+\sum_{i=1}^{p}\Psi^T(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0),\xi)=0. \tag{6}$$

Доведення. Нехай $\varphi(t)$, $\varphi(0)=x_0$ є розв'язком системи (1), (2), тоді при $t\neq t_i$ має місце тотожність

$$\varphi(t)\equiv X(t,0)x_0+\int_0^t X(t,s)g(\varphi(s))ds+ +\sum_{0\le t_i<t} X(t,t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0)),$$

де $X(t,t_i+0)=X(t,t_i-0)(I_n+B_i)^{-1}$. З T - періодичності $\varphi(t)$ одержуємо лінійну алгебраїчну систему

$$(I_n-X(T,0))x_0= X(T)\left\{\int_0^T Y^T(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^{p}Y^T(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0))\right\}.$$

Домножуючи її зліва на невироджену матрицю $X^{-1}(T)$ і, беручи до уваги структуру матриць $X(t)$ і $Y(t)$, одержимо наступну систему для знаходження x_0:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} x_0=\begin{pmatrix} \int_0^T \Psi^T(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^{p}\Psi^T(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0)) \\ \int_0^T \Theta^T(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^{p}\Theta^T(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0)) \end{pmatrix}$$

Зрозуміло, що ця система є сумісною тоді і тільки тоді, коли виконується умова (6) і при цьому x_0 має вигляд (5). Лему доведено.

Розглянемо k - параметричне відображення $L_\xi x: C(R,R^n)\to C(R,R^n)$ і функціонал $\mu(x): C(R)\to R^k$:

$$(L_\xi x)(t)\equiv X(t,0)F\xi+X(t,0)G^+\left(\int_0^T U_2(T,s)g(x(s))ds+\sum_{i=1}^{p}U_2(T,t_i+0)b_i(x(t_i-0))\right)+$$
$$+\int_0^t X(t)U(t,s)g(x(s))ds-\int_t^T X(t)V(t,s)g(x(s))ds+\sum_{0\le t_i<t}X(t)U(t,t_i+0)b_i(x(t_i-0))-\sum_{t\le t_i<T}X(t)V(t,t_i+0)b_i(x(t_i-0)).$$

$$\mu(x)\equiv\int_0^T \Psi^T(s)g(x(s))ds+\sum_{i=1}^{p}\Psi^T(t_i+0)b_i(x(t_i-0)).$$

Зауважимо, що

$$(L_\xi x)(t)=X(t,0)\left\{F\xi+G^+\left(\int_0^T \Theta^T(s)g(x(s))ds+\sum_{i=1}^{p}\Theta^T(t_i+0)b_i(x(t_i-0))\right)\right\}+$$
$$+\int_0^t X(t,s)g(x(s))ds+\sum_{0\le t_i<t}X(t,t_i+0)b_i(x(t_i-0))-X(t)\left(Y^T(0)G^+R_2(T)+R(t)\right)R_1^{-1}\mu(x).$$

Достатні умови існування періодичних розв'язків досліджуваної системи містить наступне твердження.

Лема 2. Нехай виконується умова А. Якщо при цьому параметр $\xi=\xi^*\in R^k$ і функція $\varphi=\varphi(t,\xi^*)$ такі, що виконується система рівнянь

$$\varphi=L_\xi\varphi, \qquad (8)$$

$$\mu(\varphi)=0, \qquad (9)$$

то $\varphi(t)$ є T - періодичним розв'язком імпульсної диференціальної системи (1), (2) і приймає початкове значення (5).

Доведення. Нехай кусково-неперервна з розривами першого роду при $t=t_i$ функція $\varphi(t)$ і векторний параметр $\xi\in R^k$ задовольняють рівняння (8) і (9). Тоді з (7) випливає, що $\varphi(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\varphi(t)=X(t,0)\left\{F\xi+G^+\left(\int_0^T\Theta^T(s)g(x(s))ds+\sum_{i=1}^p\Theta^T(t_i+0)b_i(x(t_i-0))\right)\right\}+\int_0^t X(t,s)g(x(s))ds+\sum_{0\le t_i<t}X(t,t_i+0)b_i(x(t_i-0)). \qquad (10)$$

Підставляючи $t=0$, переконуємося, що виконується умова (5), а диференціюючи (10) по t, бачимо, що $\varphi(t)$ є розв'язком імпульсної диференціальної системи (1), (2). Покажемо періодичність функції $\varphi(t)$. Підставляючи $t=T$ в (10) отримуємо

$$\varphi(T)=X(T,0)\left\{F\xi+G^+\left(\int_0^T\Theta^T(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^p\Theta^T(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0))\right)\right\}+\int_0^T X(T,s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^p X(T,t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0)),$$

звідки, враховуючи (5) і властивості псевдооберненої матриці, одержимо, що

$$Y^*(T)(\varphi(0)-\varphi(T))=Y^*(T)(I_n-X(T))\left\{F\xi+G^+\left(\int_0^T\Theta^T(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^p\Theta^T(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0))\right)\right\}-$$

$$-\int_0^T X(T,s)g(\varphi(s))ds-\sum_{i=1}^p X(T,t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0))=$$

$$=Y^*(T)(I_n-X(T))\left\{F\xi+G^+\left(\int_0^T\Theta^T(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^p\Theta^T(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0))\right)\right\}-$$

$$-\begin{pmatrix}\int_0^T\Psi^*(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^p\Psi^*(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0))\\ \int_0^T\Theta^*(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^p\Theta^*(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0))\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\G\end{pmatrix}\left(F\xi+G^+\left(\int_0^T\Theta^T(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^p\Theta^T(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0))\right)\right)-\begin{pmatrix}0\\ \int_0^T\Theta^*(s)g(\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^p\Theta^*(t_i+0)b_i(\varphi(t_i-0))\end{pmatrix}=0.$$

Оскільки $\det Y(t)\neq 0$, то $\varphi(0)=\varphi(T)$.

Лему доведено.

Для знаходження T - періодичного розв'язку системи (1), (2) розглянемо послідовність T - періодичних кусково-неперервних з розривами першого роду при $t=t_i$ вектор-функцій (11):

$$x_{m+1}(t,\xi)=x_0(t,\xi)+X(t,0)G^+\left(\int_0^T U_2(T,s)g(x_m(s,\xi))ds+\sum_{i=1}^{p}U_2(T,t_i+0)b_i(x_m(t_i-0,\xi))\right)+$$
$$+\int_0^t X(t)U(t,s)g(x_m(s,\xi))ds-\int_t^T X(t)V(t,s)g(x_m(s,\xi))ds+\sum_{0\le t_i<t}X(t)U(t,t_i+0)b_i(x_m(t_i-0,\xi))- \tag{11}$$
$$-\sum_{t\le t_i<T}X(t)V(t,t_i+0)b_i(x_m(t_i-0,\xi)),\quad x_0(t,\xi)=X(t,0)F\xi,\quad m=1,2,\ldots$$

Обгрунтування алгоритму відшукання T - періодичних розв'язків імпульсної диференціальної системи (1), (2) і конструктивні достатні умови їх існування містять теореми 2-4 [3].

Зауваження 1. Принцип побудови послідовних наближень (11) грунтується на "збурення" правої частини системи (1) [3]. Нескладно показати, що аналогічний ефект можна одержати шляхом введення в будь-якій точці $\sigma\in[0,T]$ додаткового спеціально підібраного імпульсу

$$\Delta x|_{t=\sigma}=-b_\sigma,$$

$$b_\sigma=\Psi(\sigma)P_\sigma^{-1}\left\{\int_0^T\Psi^T(s)g(x(s))ds+\sum_{i=1}^{p}\Psi^T(t_i+0)b_i(x(t_i-0))\right\}$$

$$P_\sigma=\Psi^T(\sigma)\Psi(\sigma).$$

При цьому послідовні наближення до точного розв'язку будуть мати вигляд

$$x_{m+1}(t,\xi)=x_0(t,\xi)+X(t,0)G^+\left(\int_0^T U_2(T,s)g(x_m(s,\xi))ds+\sum_{i=1}^{p}U_2(T,t_i+0)b_i(x_m(t_i-0,\xi))\right)+\int_0^t X(t,s)g(x_m(s,\xi))ds+$$
$$+\sum_{0\le t_i<t}X(t,t_i+0)b_i(x_m(t_i-0,\xi))-\delta_\sigma X(t,\sigma)\Psi(\sigma)P_\sigma^{-1}\left\{\int_0^T\Psi^T(s)g(x(s))ds+\sum_{i=1}^{p}\Psi^T(t_i+0)b_i(x(t_i-0))\right\},$$
$$x_0(t,\xi)=X(t,0)F\xi,\ \ m=1,2,\ldots,\ \ \delta_\sigma=\begin{cases}1, & t>\sigma,\\ 0, & t\le\sigma.\end{cases}$$

Розглянемо питання існування і наближеної побудови періодичних розв'язків нелінійної імпульсної системи (1), (2), період T_1 яких є близьким до періоду T розв'язків породжуючої лінійної системи (3). Так як період T_1 системи (1), (2) невідомий, то будемо шукати його у вигляді $T_1=(1+\lambda)T$, де λ – невідомий малий параметр, який будемо шукати при побудові розв'язку.

За допомогою заміни незалежної змінної $t=(1+\lambda)\tau$ приходимо до задачі знаходження періодичного з відомим фіксованим періодом T розв'язку автономної системи

$$\frac{dx}{d\tau}=Ax+f(x,\lambda),\ \ \tau\ne\tau_i,$$
$$f(x,\lambda)=g(x)+\lambda(Ax+g(x)),\tau=\tau_i(\lambda)=\frac{t_i}{1+\lambda}, \tag{12}$$
$$\Delta x|_{\tau=\tau_i}=B_ix(\tau_i-0)+b_i(x(\tau_i-0)).$$

Особливістю автономних імпульсних систем є те, що, взагалі кажучи, їх розв'язки не є інваріантними щодо зсуву по t, а тому при побудові розв'язків потрібно знаходити як значення параметра $\xi\in R^k$, так і $\lambda\in R$.

Введемо до розгляду $(k+1)$ - параметричне відображення $\tilde L_{\tilde\xi}x:C(R,R^n)\to C(R,R^n)$, $\tilde\xi=(\xi,\lambda)$ і функціонал $\tilde\mu(x):C(R)\to R^k$:

$$\left(\widetilde{L}_{\widetilde{\xi}}x\right)(\tau)\equiv X(\tau,0)F\xi+X(\tau,0)G^{+}\left(\int_0^T U_2(T,s)f\left(x\left(s,\widetilde{\xi}\right),\lambda\right)ds+\sum_{i=1}^{p}U_2(T,\tau_i+0)b_i\left(x\left(\tau_i-0,\widetilde{\xi}\right)\right)\right)+$$

$$+\int_0^{\tau}X(\tau)U(\tau,s)f\left(x\left(s,\widetilde{\xi}\right),\lambda\right)ds-\int_{\tau}^{T}X(\tau)V(\tau,s)f\left(x\left(s,\widetilde{\xi}\right),\lambda\right)ds+ \tag{16}$$

$$+\sum_{0\le\tau_i<\tau}X(\tau)U(\tau,\tau_i+0)b_i\left(x\left(\tau_i-0,\widetilde{\xi}\right)\right)-\sum_{\tau\le\tau_i<T}X(\tau)V(\tau,\tau_i+0)b_i\left(x\left(\tau_i-0,\widetilde{\xi}\right)\right),$$

$$\widetilde{\mu}(x)\equiv\int_0^T\Psi^T(s)f\left(x\left(s,\widetilde{\xi}\right),\lambda\right)ds+\sum_{i=1}^{p}\Psi^T(t_i+0)b_i\left(x\left(t_i-0,\widetilde{\xi}\right)\right)=0.$$

Згідно викладеного вище, мають місце наступні твердження.

Лема 3. Нехай виконується умова **А** і імпульсна диференціальна система (12) має періодичний розв'язок $\varphi(\tau)=\varphi\left(\tau,\widetilde{\xi}^{*}\right)$ періоду T. Тоді його початкове значення визначається за формулою

$$\varphi(0)=\varphi\left(0,\widetilde{\xi}^{*}\right)=F\xi^{*}+G^{+}\left[\int_0^T\Theta^T(s)f\left(\varphi\left(s,\widetilde{\xi}^{*}\right),\lambda^{*}\right)ds+\sum_{i=1}^{p}\Theta^T(\tau_i+0)b_i\left(\varphi\left(\tau_i-0,\widetilde{\xi}^{*}\right)\right)\right], \tag{13}$$

де $\widetilde{\xi}^{*}=\left(\xi^{*},\lambda^{*}\right)\in R^{k+1}$ є розв'язком визначального рівняння

$$\widetilde{\mu}(\varphi)=0\,. \tag{14}$$

Лема 4. Нехай виконується умова **А**. Якщо при цьому параметр $\widetilde{\xi}=\widetilde{\xi}^{*}\in R^{k+1}$ і функція $\varphi(\tau)=\varphi\left(\tau,\widetilde{\xi}^{*}\right)$ такі, що виконується система рівнянь (14), (15):

$$\varphi=\widetilde{L}_{\widetilde{\xi}}\varphi\,, \tag{15}$$

то $\varphi(\tau)$ є T - періодичним розв'язком імпульсної диференціальної системи (12) і приймає початкове значення (13). Відповідно функція $\varphi(t)$ з початковим значенням (13) є $T_1=\left(1+\lambda^{*}\right)T$ - періодичним розв'язком системи (1), (2).

У цьому випадку T - періодичний розв'язок системи (12) будемо шукати як границю рекурентної послідовності

$$\widetilde{x}_{m+1}\left(\tau,\widetilde{\xi}\right)=\widetilde{x}_0\left(\tau,\widetilde{\xi}\right)+X(\tau,0)G^{+}\left(\int_0^T U_2(T,s)f\left(\widetilde{x}_m\left(s,\widetilde{\xi}\right),\lambda\right)ds+\sum_{i=1}^{p}U_2(T,\tau_i+0)b_i\left(\widetilde{x}_m\left(\tau_i-0,\widetilde{\xi}\right)\right)\right)+$$

$$+\int_0^{\tau}X(\tau)U(\tau,s)f\left(\widetilde{x}_m\left(s,\widetilde{\xi}\right),\lambda\right)ds-\int_{\tau}^{T}X(\tau)V(\tau,s)f\left(\widetilde{x}_m\left(s,\widetilde{\xi}\right),\lambda\right)ds+\sum_{0\le\tau_i<\tau}X(\tau)U(\tau,\tau_i+0)b_i\left(\widetilde{x}_m\left(\tau_i-0,\widetilde{\xi}\right)\right)- \tag{16}$$

$$-\sum_{\tau\le\tau_i<T}X(\tau)V(\tau,\tau_i+0)b_i\left(\widetilde{x}_m\left(\tau_i-0,\widetilde{\xi}\right)\right),\qquad \widetilde{x}_0\left(\tau,\widetilde{\xi}\right)=X(\tau,0)F\xi,\qquad m=1,2,\ldots$$

Припускаємо, що в області $(\tau,x,\lambda)\in R\times D\times I_{\lambda}$, де $D=\left\{x\in R^n:|x|\le R\right\}$, $I_{\lambda}=[-\lambda,\lambda]$ виконуються наступні умови:

В) вектор-функція $g(x)$ визначена, неперервна і виконуються умови обмеженості і Ліпшиця з невід'ємними сталими векторами $M, M_i\in R^n$ і сталими матрицями K, K_i:

$$|g(x)|\le M,\quad |g(x')-g(x'')|\le K\,|x'-x''|,$$
$$|b_i(x)|\le M_i,\quad |b_i(x')-b_i(x'')|\le K_i\,|x'-x''|,$$

де $i=\overline{1,p}$, $|x|=(|x_1|,\ldots,|x_n|)$ і всі нерівності розуміємо покомпонентно;

С) існує не порожня множина $D_0\times I_{\lambda}\subset R^{k+1}$ точок $\widetilde{\xi}=(\xi,\lambda)$ така, що вектор-функція $x_0(\tau,\xi)$ лежить в області D разом із своїм β - околом, де $\widetilde{M}=M+\lambda_0(M+|A|R)$,

$$\beta = \max_{\tau\in[0,T]}\left\{\left(\int_0^T |X(\tau,0)G^+U_2(T,s)|\,ds\widetilde{M} + \sum_{i=1}^{p}|X(\tau,0)G^+U_2(T,\tau_i+0)|\,M_i\right) + \int_0^\tau |X(\tau)U(\tau,s)|\,ds\widetilde{M} + \right.$$

$$\left. + \int_\tau^T |X(\tau)V(\tau,s)|\,ds\widetilde{M} + \sum_{0\le\tau_i<\tau}|X(\tau)U(\tau,\tau_i+0)|\,M_i + \sum_{\tau\le\tau_i<T}|X(\tau)V(\tau,\tau_i+0)|\,M_i\right\};$$

D) $r(\widetilde{Q})<1$, де $r(\widetilde{Q})$ – спектральний радіус оператора $\widetilde{Q}x$:

$$(\widetilde{Q}x)(\tau) = \int_0^T |X(\tau,0)G^+U_2(T,s)|\,ds\widetilde{K} + \sum_{i=1}^{p}|X(\tau,0)G^+U_2(T,\tau_i+0)|\,K_i + $$

$$+ \int_0^\tau |X(\tau)U(\tau,s)|\,ds\widetilde{K} + \int_\tau^T |X(\tau)V(\tau,s)|\,ds\widetilde{K} +$$

$$+ \sum_{0\le\tau_i<\tau}|X(\tau)U(\tau,\tau_i+0)|\,K_i + \sum_{\tau\le\tau_i<T}|X(\tau)V(\tau,\tau_i+0)|\,K_i, \qquad \widetilde{K} = K + \lambda_0(K+|A|);$$

Зауважимо, що $r(\widetilde{Q})$ рівний найбільшому з додатних власних значень оператора $\widetilde{Q}$ і не перевищує найбільшого власного значення матриці $\widetilde{Q}_0$:

$$\widetilde{Q}_0 = \max_{\tau\in[0,T]}\left\{\int_0^T |X(\tau,0)G^+U_2(T,s)|\,ds\widetilde{K} + \sum_{i=1}^{p}|X(\tau,0)G^+U_2(T,\tau_i+0)|\,K_i + \int_0^\tau |X(\tau)U(\tau,s)|\,ds\widetilde{K} + \right.$$

$$\left. + \int_\tau^T |X(\tau)V(\tau,s)|\,ds\widetilde{K} + \sum_{0\le\tau_i<\tau}|X(\tau)U(\tau,\tau_i+0)|\,K_i + \sum_{\tau\le\tau_i<T}|X(\tau)V(\tau,\tau_i+0)|\,K_i\right\};$$

Теорема 1. Нехай автономна система диференціальних рівнянь з імпульсною дією (12) задовольняє умови **A-D**. Тоді:

1) в області $(\tau,\widetilde{\xi})\in R\times D_0\times I_\lambda$ послідовність T - періодичних функцій $\widetilde{x}(\tau,\widetilde{\xi})$ вигляду (16) рівномірно збігається при $m\to\infty$ до деякої T - періодичної функції $\widetilde{x}^*(\tau,\widetilde{\xi})$ і при всіх натуральних m справджуються оцінки збіжності

$$|\widetilde{x}^*(\tau,\widetilde{\xi})-\widetilde{x}_m(\tau,\widetilde{\xi})|\le \widetilde{Q}^m(I_n-\widetilde{Q})^{-1}\beta;$$

2) для того, щоб функція $\widetilde{x}^*(\tau)=\widetilde{x}^*(\tau,\widetilde{\xi}^*)$ була T - періодичним розв'язком системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією (12) необхідно і досить, щоб точка $\widetilde{\xi}=\widetilde{\xi}^*$ була розв'язком визначального рівняння $\Delta(\widetilde{\xi})=0$, де

$$\Delta(\widetilde{\xi})\equiv \int_0^T \Psi^T(s)f(\widetilde{x}^*(s,\widetilde{\xi}),\lambda)ds + $$

$$+\sum_{i=1}^{p}\Psi^*(t_i+0)b_i(\widetilde{x}^*(t_i-0,\widetilde{\xi}))=0.$$

3) при $\tau=0$ T - періодичний розв'язок $\widetilde{x}^*(\tau)$ приймає початкове значення

$$\widetilde{x}^*(0)=\widetilde{x}^*(0,\widetilde{\xi}^*)=F\xi^*+G^+\left[\int_0^T \Theta^T(s)f(\widetilde{x}^*(s,\xi^*),\lambda^*)ds+\sum_{i=1}^{p}\Theta^T(\tau_i+0)b_i(\varphi(\tau_i-0,\widetilde{\xi}^*))\right]$$

Теорема 2. *Нехай для системи (12) справедливі припущення A–D і, крім того:*

1) існує опукла, замкнена область $\widetilde{D}'=D_0'\times I_\lambda'$, $D_0'\subset D_0$, $I_\lambda'\subset I_\lambda$ така, що при деякому фіксованому натуральному m наближене визначальне рівняння $\Delta_m(\widetilde{\xi})=0$ має в області $\widetilde{D}'$ єдиний розв'язок $\xi=\xi_m$ ненульового індексу, а

$$\tilde{\Delta}_m\left(\tilde{\xi}\right) \equiv \int_0^T \Psi^T(s) f\left(\tilde{x}_m\left(s,\tilde{\xi}\right),\lambda\right)ds +$$

$$\sum_{i=1}^{m} \Psi^T(\tau_i+0) b_i\left(\tilde{x}_m\left(\tau_i-0,\tilde{\xi}\right)\right);$$

2) на границі $\partial\tilde{D}'$ області $\tilde{D}'$ виконується нерівність

$$\inf_{\tilde{\xi}\in\partial\tilde{D}'}\left|\tilde{\Delta}_m\left(\tilde{\xi}\right)\right| > \tilde{Q}^{m+1}\left(I_n-\tilde{Q}\right)^{-1} T\tilde{M}.$$

Тоді система (12) має T - періодичний розв'язок $\tilde{x}^*(\tau)=\tilde{x}^*\left(\tau,\tilde{\xi}^*\right)$ з початковим значенням $\tilde{x}^*(0)=\tilde{\xi}^*$, $\xi^* \in D'_0$. Відповідно, задача (1), (2) має розв'язок $x^*(t)$, $x^*(0)=\xi^*$ періоду $T_l=\left(1-\varepsilon^*\right)T$.

Доведення теорем 1 і 2 проводиться аналогічно до доведення теорем 2, 3 [3].

Зауваження 2. Нехай $B_i = B$ і матриці A і B комутують: $AB = BA$. При цьому якщо функція $x(t)$ є T - періодичним розв'язком системи (12), то при довільному ν функція $x(t+\nu)$ теж буде розв'язком цієї системи [2,6]. Константу ν можемо підібрати так, щоб одна з координат $\xi_1,\dots,\xi_k$ була рівна нулю. Без обмеження загальності можемо вважати, що $\xi_k = 0$. У цьому випадку всі вищенаведені твердження будуть справедливими з тим уточненням, що при побудові періодичного розв'язку системи (12) нам потрібно буде знайти не $(k+1)$ - вимірний невідомий параметр $\tilde{\xi}$, а k - вимірний параметр ξ_0: $\xi_0 \in R^k$, $\xi_0 = (\xi_1,\dots,\xi_{k-1},\lambda)$.

2. Квазілінійні автономні системи

Розглянемо квазілінійну автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon g(x,\varepsilon), \quad t \neq t_i, \\ &\Delta x\big|_{t=t_i} = B_i x(t_i-0) + \varepsilon b_i(x(t_i-0),\varepsilon), \end{aligned} \tag{17}$$

де ε – малий додатній параметр, $\varepsilon \in I_\varepsilon = [0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 << 1$, $t \in R$, $x, g \in R^n$; у випадку, коли виконується умова А і функції $g(x,\varepsilon)$, $b_i\left(x\left(t_i-0\right),\varepsilon\right)$ в області $(x,\varepsilon) \in D \times I_\varepsilon$ задовольняють умови обмеженості і Ліпшиця В.

Розглянемо питання існування і наближеної побудови $T_l = T_l(\varepsilon)$ - періодичного розв'язку системи (17). Виконуючи заміну незалежної змінної $t = (1+\varepsilon\alpha(\varepsilon))\tau$, $\alpha(0)=\alpha^0$, $\alpha \in I_\alpha = [-\overline{\alpha},\overline{\alpha}]$ перейдемо до задачі знаходження періодичного з відомим фіксованим періодом T розв'язку автономної системи

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{d\tau} = Ax + \varepsilon h(x,\varepsilon), \quad \tau \neq \tau_i, \quad \tau_i = \tau_i(\varepsilon) = \frac{t_i}{1+\varepsilon\alpha(\varepsilon)}, \\ &\Delta x\big|_{\tau=\tau_i} = B_i x(\tau_i-0) + \varepsilon b_i(x(\tau_i-0),\varepsilon), \\ &h(x,\varepsilon) = \alpha(\varepsilon)Ax + (1+\varepsilon\alpha(\varepsilon))g(x,\varepsilon), \end{aligned} \tag{18}$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один з T - періодичних розв'язків породжуючої для (18) лінійної однорідної системи

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax, \quad \tau \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{\tau=\tau_i} = B_i x(\tau_i - 0).$$

З метою відшукання T - періодичного розв'язку системи (18) побудуємо рекурентну послідовність

$$\begin{aligned} \overline{x}_{m+1}\left(\tau,\overline{\xi}\right) = \overline{x}_0\left(\tau,\overline{\xi}\right) + \varepsilon\Bigg\{ & X(\tau,0)G^+\left(\int_0^T U_2(T,s)h\left(\overline{x}_m\left(s,\overline{\xi}\right),\varepsilon\right)ds + \sum_{i=1}^{p} U_2(T,\tau_i+0)b_i\left(\overline{x}_m\left(\tau_i-0,\overline{\xi}\right),\varepsilon\right)\right) + \\ & + \int_0^\tau X(\tau)U(\tau,s)h\left(\overline{x}_m\left(s,\overline{\xi}\right),\varepsilon\right)ds - \int_\tau^T X(\tau)V(\tau,s)h\left(\overline{x}_m\left(s,\overline{\xi}\right),\varepsilon\right)ds + \\ & + \sum_{0\le\tau_i<\tau} X(\tau)U(\tau,\tau_i+0)b_i\left(\overline{x}_m\left(\tau_i-0,\overline{\xi}\right),\varepsilon\right) - \sum_{\tau\le\tau_i<T} X(\tau)V(\tau,\tau_i+0)b_i\left(\overline{x}_m\left(\tau_i-0,\overline{\xi}\right),\varepsilon\right)\Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\overline{x}_0\left(\tau,\overline{\xi}\right) = X(\tau,0)F\xi, \quad \overline{\xi} = (\xi,\varepsilon) \in R^{n+1}, \quad m = 1,2,\dots$$

Зрозуміло, що в області $(\tau,x,\alpha,\varepsilon) \in R\times D\times I_\alpha\times I_\varepsilon$ при достатньо малому ε_0 виконуються умови

C_1) існує не порожня множина $\overline{D} = D_1 \times I_\alpha \subset R^{k+1}$ точок $\overline{\xi} = (\xi,\alpha)$ така, що вектор-функція $\overline{x}_0(\tau,\xi)$ лежить в області $\overline{D}$ разом із своїм $\overline{\beta}$ - околом, де $\overline{M} = \overline{\alpha}\left|A\right|R + (1+\varepsilon_0\overline{\alpha})M$,

$$\overline{\beta}=\max_{\tau\in[0,T]}\left\{\left(\int_0^T\left|X(\tau,0)G^+U_2(T,s)\right|ds\overline{M}+\sum_{i=1}^{p}\left|X(\tau,0)G^+U_2(T,\tau_i+0)\right|M_i\right)+\int_0^{\tau}\left|X(\tau)U(\tau,s)\right|ds\overline{M}+\right.$$

$$\left.+\int_{\tau}^{T}\left|X(\tau)V(\tau,s)\right|ds\overline{M}+\sum_{0\le\tau_i<\tau}\left|X(\tau)U(\tau,\tau_i+0)\right|M_i+\sum_{\tau\le\tau_i<T}\left|X(\tau)V(\tau,\tau_i+0)\right|M_i\right\};$$

D$_1$) $r(\overline{Q})<1$, де $r(\overline{Q})$ – спектральний радіус оператора $\overline{Q}x$, $\overline{K}=\overline{\alpha}|A|+(1+\varepsilon_0\overline{\alpha})K$:

$$(\overline{Q}x)(\tau)=\int_0^T|X(\tau,0)G^+U_2(T,s)|\,ds\overline{K}+\sum_{i=1}^{p}|X(\tau,0)G^+U_2(T,\tau_i+0)|\,K_i+\int_0^{\tau}|X(\tau)U(\tau,s)|\,ds\overline{K}+$$

$$+\int_{\tau}^{T}|X(\tau)V(\tau,s)|\,ds\overline{K}+\sum_{0\le\tau_i<\tau}|X(\tau)U(\tau,\tau_i+0)|\,K_i+\sum_{\tau\le\tau_i<T}|X(\tau)V(\tau,\tau_i+0)|\,K_i,$$

а тому твердження, аналогічні теоремам 1 і 2 справедливі також для системи (18), а відповідні оцінки при цьому мають наступний вигляд:

$$\left|\overline{x}^*(\tau,\xi_\alpha,\varepsilon)-\overline{x}_m(\tau,\xi_\alpha,\varepsilon)\right|\le\varepsilon_0\left(\varepsilon_0\overline{Q}\right)^m\left(I-\varepsilon_0\overline{Q}\right)^{-1}\overline{M}r_1(\tau),$$

$$\inf_{\xi\in\partial\overline{D}'}\left|\overline{\Delta}_m(\overline{\xi})\right|>\left(\varepsilon_0\overline{Q}\right)^{m+1}\left(I_n-\varepsilon_0\overline{Q}\right)^{-1}T\overline{M},$$

де $\overline{x}^*(\tau,\overline{\xi},\varepsilon)=\lim\limits_{m\to\infty}\overline{x}_m(\tau,\overline{\xi},\varepsilon)$,

$$\overline{\Delta}(\overline{\xi})\equiv\int_0^T\Psi^T(s)h\left(\overline{x}^*(s,\overline{\xi}),\varepsilon\right)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\Psi^T(\tau_i+0)b_i\left(\overline{x}^*(\tau_i-0,\overline{\xi}),\varepsilon\right),$$

$$\overline{\Delta}_m(\overline{\xi})\equiv\int_0^T\Psi^T(s)h\left(\overline{x}_m(s,\overline{\xi}),\varepsilon\right)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\Psi^T(\tau_i+0)b_i\left(\overline{x}_m(\tau_i-0,\overline{\xi}),\varepsilon\right),\quad m=0,1,2,\ldots$$

Наступне твердження дозволяє робити висновки про існування періодичного розв'язку з аналізу наближеного визначального рівняння вже при $m=0$.

Теорема 3. *Нехай система (18) задовольняє умову А і відображення*

$$\overline{\Delta}_0(\overline{\xi})\equiv\int_0^T\Psi^T(s)h\left(\overline{x}_0(s,\overline{\xi}),\varepsilon\right)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\Psi^T(\tau_i+0)b_i\left(\overline{x}_0(\tau_i-0,\overline{\xi}),\varepsilon\right)$$

має в області $\overline{D}'\subset\overline{D}$, $\overline{D}'=D_1'\times I_\alpha'$, $D_1'\subset D_1$, $I_\alpha'\subset I_\alpha$ ізольовану особливу точку $\overline{\xi}=\overline{\xi}_0$ ненульового індексу.

Тоді існує ε_1 таке, що при всіх $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ система (17) має $T_1(\varepsilon)=(1+\varepsilon\alpha^*)T$ - періодичний розв'язок, який при $\varepsilon=0$ перетворюється на один з T - періодичних розв'язків породжуючої лінійної однорідної системи (3).

Доведення аналогічне доведенню теореми 3 [4].

Одержані в даній роботі результати можуть бути використані при дослідженні існування і наближеній побудові періодичних розв’язків автономних систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у критичному випадку.

Список використаних джерел

1. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Чуйко С.М. Периодические решения нелинейных автономных систем в критических случаях// Укр. мат. журн. – 2005. – 52, № 9. – С. 1180–1186.
2. Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М. Периодические решения автономных систем с импульсным воздействием в критических случаях// Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 11. – С. 1478-1484.
3. Король І.І. Чисельно-аналітичний метод дослідження періодичних розв'язків диференціальних систем з імпульсною дією// Вісник КНУ, сер: Матем., механ.- 2004. Вип.13-14, с. 9-18.
4. Король І.І., Перестюк М.О. Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А.М.Самойленка// Укр. мат. журн. – 2006. – 58, №4. – С. 472–489.
5. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inver Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Чуйко С.М. Периодические решения нелинейных автономных систем в критических случаях// Укр. мат. журн. – 2005. – 52, № 9. – С. 1180–1186. Operators and Fredholm Boundary Value Problems. VSP Utrecht Boston, 2004. – 318 p.
6. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. – Singapore, 1995. – 455 p.

Надійшла до редколегії 11.03.2008.