УДК 517.925.4

*Ігор І. Король, к.ф.-м.н., доцент

Дослідження розв'язків нетерових крайових задач для імпульсних диференціальних систем з виродженням

У роботі розв'язано питання існування розв'язків задачі Коші для таких систем. Одержано критерій існування розв'язків неоднорідних нетерових крайових задач для вироджених диференціально-алгебраїчних рівнянь з імпульсною дією.

Ключові лова: імпульсні диференціальні системи з виродженням, нетерові крайові задачі.

*Ihor I. Korol, Cand.Sci (Phys.-Math.),

Investigating for the solutions of Noetherian boundary value problems for impulsive differential systems with singularity

In this paper the problem of existence of the solutions of the Caushy problem systems was solved. The criterion for existence of solutions of nonhomogeneous Noetherian boundary value problems for impulsive differential-algebraical systems with impulse action was obtained.

Key words: impulsive differential systems with singularity, Noetherian boundary value problems.

*E-mail: korol_ihor@ukr.net

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н, проф. Перестюк М.О.

У роботі досліджено структуру розв'язків вироджених диференціально-алгебраїчних систем, які підаються імпульсній дії в фіксовані моменти часу, знайдено умови розв'язності та побудовано розв'язки задачі Коші та лінійної крайової задачі.

Постановка задачі.

Розглянемо вироджену диференціально-алгебраїчну систему рівнянь з імпульсною дією:

$$B(t)\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)+f(t), t\neq\tau_i, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i}\equiv x(\tau_i+0)-x(\tau_i)=B_i x(\tau_i)+b_i, \tag{2}$$

де $x,f\in R^n$, $rankB(t)=n-r$ $\forall t\in[a,b]$, $r>0$; вектор-функція $f(t)$ і $(n\times n)$ - вимірні матриці $A(t)$ і $B(t)$ є достатньо гладкими: $f(t),A(t)$, $B(t)\in C^k([a,b],R^n)$, k – деяке натуральне число, $a<\tau_1<\ldots<\tau_p<b$, $p<\infty$.

Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти кусково неперервно диференційовну на $[a,b]\backslash\{\tau_i\}$, $i=\overline{1,p}$ функцію

$$x(t)=\begin{cases} x_0(t), \ t\in[a,\tau_1], \\ x_j(t), \ t\in(\tau_j,\tau_{j+1}], \ j=\overline{1,p-1}, \\ x_p(t), \ t\in(\tau_p,b], \end{cases}$$

з розривами першого роду в точках $t=\tau_i$, яка задовольняє систему (1) та умови (2). Функції $x_i(t)$ визначені і неперервно диференційовні на відповідних відрізках: $x_i(t)\in C^1([\tau_i,\tau_{i+1}],R^n)$, $x_i(\tau_i)=x_i(\tau_i+0)=\lim\limits_{t\to\tau_i+0}x_i(t)$, і розв'язок неперервний зліва: $x(\tau_i)=x(\tau_i-0)=x_{i-1}(\tau_i)=\lim\limits_{t\to\tau_i-0}x_{i-1}(t)$. У просторі неперервно диференційовних n-вимірних вектор-функцій $C^1([a,b],R^n)$ розглянемо оператор L та спряжений до нього оператор L^T: $L(t)=A(t)-B(t)\frac{d}{dt}$, $L^T(t)=A^T(t)x(t)+\frac{d}{dt}B^T(t)$. Має місце наступне твердження.

Теорема 1. Нехай 1) $rankB(t)=n-r=const$ $\forall t\in[a,b]$; 2) матриця $B(t)$ має при всіх $t\in[a,b]$ повний жорданів набір векторів $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$ відносно оператора $L(t)$, який складається з r ланцюжків завдовжки $s_1,\ldots,s_r$; 3) $f(t)\in C^{q-1}([a,b],R^n)$, $A(t),B(t)\in C^{3q-2}([a,b],R^{n\times n})$, де $\max\limits_i s_i=q$. Тоді існують неособливі при всіх $t\in R$ $(n\times n)$ - матриці $P(t),Q(t)\in C^{q-1}([a,b],R^n)$ такі, що множенням на $P(t)$ та заміною

$$x=Q(t)u \tag{3}$$

вироджена диференціально-алгебраїчна система (1) з імпульсною дією (2) зводиться до диференціально-алгебраїчної системи в центральній канонічній формі з імпульсною дією

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\frac{du}{dt}=\begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix}u+g(t), \tag{4}$$

$$\Delta u|_{t=\tau_i}=Q^{-1}(\tau_i)B_iQ(\tau_i)u(\tau_i)+Q^{-1}(\tau_i)b_i, \tag{5}$$

де $I=diag\{I_1,\ldots,I_r\}$, I_j – нільпотентні блоки Жордана порядку s_j, $M(t)\in C^{q-1}([a,b],R^n)$, $j=\overline{1,r}$, E_k – одинична матриця порядку k,

$$g(t)=P(t)f(t),\ g(t)=col(\tilde{g}(t),\bar{g}(t)), \tag{6}$$

$\tilde{g}\in R^{n-s}$, $\bar{g}\in R^s$, $s=s_1+\ldots+s_r$.

Доведення полягає в тому, що в [1,2] систему (1) зведено до центральної канонічної форми (4), а (5) одержується з (2) заміною (3) з урахуванням неперервності матриці $Q(t)$ у точках імпульсів.

Нехай $X(t)$ – $((n-s)\times(n-s))$- вимірна фундаментальна матриця системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du_1}{dt}=M(t)u_1,\ u_1\in R^{n-s}, \tag{7}$$

а $X(t,\sigma), X(\sigma,\sigma)=E_{n-s}$ – матрицант системи (7). Позначимо також

$$Q^{-1}(\tau_i)B_iQ(\tau_i)=\begin{bmatrix} B_{i,1} & B_{i,2} \\ B_{i,3} & B_{i,4}\end{bmatrix},$$

де $B_{i1},B_{i2},B_{i3},B_{i4}$ при всіх $i=\overline{1,p}$ є відповідно $((n-s)\times(n-s))$-, $((n-s)\times s)$-, $(s\times(n-s))$- та $(s\times s)$- вимірними блоками.

Структура розв'язків вироджених лінійних однорідних систем з імпульсною дією.

Розглянемо відповідну (1), (2) вироджену однорідну імпульсну систему

$$B(t)\frac{dx}{dt}=A(t)x(t),\ t\neq\tau_i, \tag{8}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i}=B_ix(\tau_i). \tag{9}$$

Її розв'язки будемо шукати у вигляді

$$x(t)=\begin{cases} Q(t)\begin{bmatrix} X(t) \\ 0\end{bmatrix}c_0,\ t\in[a,\tau_1], \\ Q(t)\begin{bmatrix} X(t) \\ 0\end{bmatrix}c_j,\ t\in(\tau_j,\tau_{j+1}],\ j\in\overline{1,p-1}, \\ Q(t)\begin{bmatrix} X(t) \\ 0\end{bmatrix}c_p,\ t\in(\tau_p,b], \end{cases} \tag{10}$$

де $c_0,c_i\in R^{n-s}$, $i=\overline{1,p}$ – довільні сталі вектори. Оскільки $Q(t)$ і $X(t)$ є неперервними на $[a,b]$ то імпульсні умови (9) можемо записати так:

$$Q(\tau_i)\begin{bmatrix} X(\tau_i) \\ 0\end{bmatrix}c_i=(E_{n-s}+B_i)Q(\tau_i)\begin{bmatrix} X(\tau_i) \\ 0\end{bmatrix}c_{i-1}.$$

Множачи зліва на $Q^{-1}(\tau_i)$, одержимо:

$$\begin{bmatrix} X(\tau_i)c_i \\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_{n-s}+B_{i,1} & B_{i,2} \\ B_{i,3} & E_s+B_{i,4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(\tau_i)c_{i-1} \\ 0\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Оскільки $detX(t)\neq 0$, то розглядаючи (11) як лінійну алгебраїчну систему відносно c_i бачимо, що вона сумісна тоді і тільки тоді, коли B_{i3} є нуль-матрицею. Отже, без обмеження загальності можемо прийняти, що матриці B_i задовольняють умову

$$Q^{-1}(\tau_i)B_iQ(\tau_i)=\begin{bmatrix} B_{i,1} & B_{i,2} \\ 0 & B_{i,4}\end{bmatrix}. \tag{12}$$

При цьому якщо $det(E_{n-s}+B_{i,1})\neq 0$, то існує взаємно однозначний зв'язок між c_i та c_{i-1}:

$$c_i=X^{-1}(\tau_i)(E_{n-s}+B_{i,1})X(\tau_i)c_{i-1}. \tag{13}$$

Підставляючи (13) у (10), одержимо значення розв'язку $x(t)$ на кожному з інтервалів $(\tau_i,\tau_{i+1}]$:

$$x(t)=X_{n-s}(t)c_0, \tag{14}$$

де $X_{n-s}(t)=Q(t)\begin{bmatrix} \Omega_x(t) \\ 0\end{bmatrix}$ є $(n\times(n-s))$- вимірною матрицею, стовпцями якої є лінійно незалежні розв'язки системи (8), (9), а

$$\Omega_x(t)=\begin{cases} X(t),t\in[a,\tau_1], \\ X(t,\tau_1)(E_{n-s}+B_{1,1})X(\tau_1),t\in(\tau_1,\tau_2], \\ X(t,\tau_i)\left(\prod_{i=i}^{2}(E_{n-s}+B_{i,1})X(\tau_i,\tau_{i-1})\right)\cdot \\ \cdot(E_{n-s}+B_{1,1})X(\tau_1),t\in(\tau_i,\tau_{i+1}],i\geq 2, \end{cases}$$

є [1] $((n-s)\times(n-s))$- вимірною фундаментальною матрицею невиродженої лінійної однорідної імпульсної системи

$$\frac{du_1}{dt}=M(t)u_1,t\neq\tau_i,\ \Delta u_1|_{t=\tau_i}=B_{i,1}u_1(\tau_i).$$

Для матриціанта $\Omega_x(t,\sigma)=\Omega_x(t)\Omega_x^{-1}(\sigma)$, $\Omega_x(\sigma,\sigma)=E_{n-s}$, $\tau_{j-1}<\sigma\leq\tau_j<\tau_i<t\leq\tau_{i+1}$ маємо:

$$\Omega_x(t,\sigma)=X(t,\tau_i)\left(\prod_{i=i}^{j+1}(E_{n-s}+B_{i,1})X(\tau_i,\tau_{i-1})\right)\cdot(E_{n-s}+B_{j,1})X(\tau_j,\sigma),$$

$$X_{n-s}(t,\sigma)=Q(t)\begin{bmatrix} \Omega_x(t,\sigma) \\ 0\end{bmatrix}$$

Спряжені системи.

Розглянемо вироджену диференціально-алгебраїчну систему з імпульсною дією

$$\frac{d}{dt}(B^{\mathrm{T}}(t)y(t))=-A^{\mathrm{T}}(t)y(t),\ t\neq\tau_i, \tag{14}$$

$$\Delta(B^{\mathrm{T}}y)|_{t=\tau_i}=-(E_n+B_i^{\mathrm{T}})^{-1}B_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(\tau_i)y(\tau_i), \tag{15}$$

яку будемо називати спряженою до системи (8), (9). Відомо [1,2], що розв'язком системи (14) є $y(t)=P^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}Y(t)\\0\end{bmatrix}d_0$, де $d_0\in R^{n-s}$ – довільна стала, $Y(t)$ є $((n-s)\times(n-s))$ - вимірною фундаментальною матрицею спряженої до (7) системи

$$\frac{dv_1}{dt}=-M^{\mathrm{T}}(t)v_1, v_1\in R^{n-s}. \tag{16}$$

Через $Y(t,\sigma)$ позначимо матрицант системи (16).

З урахуванням вищенаведеного, будемо шукати розв'язок імпульсної системи (14), (15) у вигляді

$$y(t)=y_i(t)=P^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}Y(t)\\0\end{bmatrix}d_i,\ t\in(\tau_i,\tau_{i+1}],\ d_i\in R^{n-s}. \tag{17}$$

Оскільки $B(t)=P^{-1}(t)\begin{bmatrix}E_{n-s} & 0\\0 & I\end{bmatrix}Q^{-1}(t)$, то

$$B^{\mathrm{T}}y_i(t)=\left(Q^{\mathrm{T}}(t)\right)^{-1}\begin{bmatrix}Y(t)\\0\end{bmatrix}d_i. \tag{19}$$

Якщо $det\left(E_{n-s}+B_{i,4}\right)\neq 0$, то враховуючи (12), (19) і неперервність матриці $B(t)$, за аналогією до (11), для імпульсу (15) в точці $t=\tau_i$ одержуємо алгебраїчну систему для знаходження d_i:

$$\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_i=\begin{bmatrix}\left(E_{n-s}+B_{i,1}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}Y(\tau_i)\\-\left(E_{n-s}+B_{i,4}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}B_{i,2}^{\mathrm{T}}\left(E_{n-s}+B_{i,1}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}Y(\tau_i)\end{bmatrix}d_{i-1}.$$

Ця система сумісна тоді і тільки тоді, коли $B_{i,2}$ є нульовою матрицею, і при цьому її розв'язком є

$$d_i=Y^{-1}(\tau_i)\left(E_{n-s}+B_{i,1}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}Y(\tau_i)d_{i-1}.$$

За індукцією одержимо

$$d_i=Y^{-1}(\tau_i)\left(\prod_{l=i}^{1}\left(E_{n-s}+B_{l,1}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}Y(\tau_l,\tau_{l-1})\right)Y(\tau_0)d_0. \tag{20}$$

Підставляючи (20) в (17), отримаємо розв'язок $y(t)=Y_{n-s}(t)d_0$ системи (14), (15), де $Y_{n-s}(t)$ – $(n\times(n-s))$- вимірна матриця, стовпці якої є лінійно незалежними розв'язками спряженої системи (14), (15):

$$Y_{n-s}(t)=P^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\Omega_y(t)\\0\end{bmatrix},$$

де

$$\Omega_y(t)=\begin{cases}Y(t), & t\in[a,\tau_1],\\ Y(t,\tau_1)(E_{n-s}+B_{1,1}^{T})^{-1}Y(\tau_1), & t\in(\tau_1,\tau_2],\\ Y(t,\tau_i)\left(\prod\limits_{l=i}^{2}(E_{n-s}+B_{l,1}^{T})^{-1}Y(\tau_l,\tau_{l-1})\right)\cdot & \\ \cdot(E_{n-s}+B_{1,1}^{T})^{-1}Y(\tau_1), & t\in(\tau_i,\tau_{i+1}],\ i\geq 2,\end{cases}$$

Зауваження 1. З вищенаведених міркувань випливає, що матриці B_i повинні мати наступну структуру:

$$B_i=Q(\tau_i)\begin{bmatrix}B_{i,1} & 0\\0 & B_{i,4}\end{bmatrix}Q^{-1}(\tau_i),$$
$$det(E_{n-s}+B_{i,1})\neq 0, det(E_{n-s}+B_{i,4})\neq 0. \tag{21}$$

Залежність між розв'язками системи (8), (9) та спряженої до неї системи (14), (15) встановлює наступна лема.

Лемма 1. Нехай виконуються умови теореми 1 і матриці B_i мають вигляд (21). Тоді

1) для будь-яких розв'язків $x(t)$ системи (8), (9), (21) і розв'язків $y(t)$ системи (14), (15) виконується рівність $\langle B(t)x(t),y(t)\rangle=const\ \forall t\in R$;

2) фундаментальні матриці $X_{n-s}(t)$ і $Y_{n-s}(t)$ відповідних вироджених систем (8), (9) і (14), (15) задовольняють співвідношення $Y_{n-s}^{\mathrm{T}}(t)B(t)X_{n-s}(t)=C$, де C – невироджена квадратна $(n-s)$- вимірна стала матриця, причому якщо фундаментальні матриці $X(t)$ і $Y(t)$ вибрати так, щоб

$$Y^{\mathrm{T}}(t_0)X(t_0)=E_{n-s}, \tag{22}$$

при деякому $t=t_0\in[a,b]$, тоді

$$Y_{n-s}^{\mathrm{T}}(t)B(t)X_{n-s}(t)=E_{n-s}. \tag{23}$$

Доведення. 1. Оскільки на кожному з інтервалів $t\in(\tau_i,\tau_{i+1})$ виконуються тотожності

$$B(t)\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)\ \text{ і }\ \frac{d}{dt}(B^{\mathrm{T}}(t)y(t))=-A^{\mathrm{T}}(t)y(t),$$

то

$$\frac{d}{dt}\langle B(t)x(t),y(t)\rangle\equiv\frac{d}{dt}\langle x(t),B^{\mathrm{T}}(t)y(t)\rangle\equiv$$
$$\equiv\langle\frac{dx(t)}{dt},B^{\mathrm{T}}(t)y(t)\rangle+\langle x,\frac{d}{dt}(B^{\mathrm{T}}(t)y(t))\rangle\equiv$$
$$\equiv\langle B(t)\frac{dx(t)}{dt},y(t)\rangle+\langle x,\frac{d}{dt}(B^{\mathrm{T}}(t)y(t))\rangle\equiv$$
$$\equiv\langle A(t)x(t),y(t)\rangle+\langle x,-A^{\mathrm{T}}(t)y(t)\rangle\equiv 0.$$

Отже, $\langle B(t)x(t),y(t)\rangle\equiv m_i=const\ \ \forall t\in(\tau_i,\tau_{i+1})$. Покажемо, що $m_i=m\,\forall i=\overline{1,p}$, тобто що $\Delta\langle B(t)x(t),y(t)\rangle|_{t=\tau_i}=0$. Справді,

$$\Delta\langle B(t)x(t),y(t)\rangle|_{t=\tau_i}=\Delta\langle x(t),B^{\mathrm{T}}(t)y(t)\rangle|_{t=\tau_i}=$$
$$=\langle x(\tau_i+0),B^{\mathrm{T}}(\tau_i)y(\tau_i+0)\rangle-\langle x(\tau_i),B^{\mathrm{T}}(\tau_i)y(\tau_i)\rangle=$$
$$=\langle (E_n+B_i)x(\tau_i),(E_n+B_i^{\mathrm{T}})^{-1}B^{\mathrm{T}}(\tau_i)y(\tau_i)\rangle-$$
$$-\langle x(\tau_i),B^{\mathrm{T}}(\tau_i)y(\tau_i)\rangle=$$
$$=\langle x(\tau_i),B^{\mathrm{T}}(\tau_i)y(\tau_i)\rangle-\langle x(\tau_i),B^{\mathrm{T}}(\tau_i)y(\tau_i)\rangle=0.$$

Отже, $m_{i+1}=m_i=m=const$.

2. Сталість матриці C випливає з попереднього пункту, оскільки стовпцями матриць $X_{n-s}(t)$ і $Y_{n-s}(t)$ є розв'язки відповідних імпульсних систем. Покажемо, що C є неособливою матрицею.

$$Y_{n-s}^{\mathrm{T}}(t)B(t)X_{n-s}(t)=$$
$$=\left(P^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\Omega_y(t)\\0\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}P^{-1}(t)\begin{bmatrix}E_{n-s}&0\\0&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_x(t)\\0\end{bmatrix}=$$
$$=\Omega_y^{\mathrm{T}}(t)\Omega_x(t)=$$
$$=\left(Y(\tau_1)(E_{n-s}+B_{1,1}^T)^{-1}\left(\prod_{i=2}^{i}Y(\tau_i,\tau_{i-1})(E_{n-s}+B_{i,1}^T)^{-1}\right)Y(t,\tau_i)\right)^T\cdot$$
$$\cdot X(t,\tau_i)\left(\prod_{i=i}^{2}(E_{n-s}+B_{i,1})X(\tau_i,\tau_{i-1})\right)(E_{n-s}+B_{1,1})X(\tau_1).$$

Оскільки для матрицантів $X(t,\sigma)$ і $Y(t,\sigma)$ маємо, що $Y^{\mathrm{T}}(t,\sigma)X(t,\sigma)=E_{n-s}$ [4], то

$$Y_{n-s}^{\mathrm{T}}(t)B(t)X_{n-s}(t)=Y^{\mathrm{T}}(\tau_1)X(\tau_1)=C. \qquad (24)$$

Оскільки $detX(\tau_1)\neq 0$, $detY(\tau_1)\neq 0$, то C теж є невиродженою матрицею. Крім того, з (24) очевидно, що з (22) випливає (23). Лема доведена.

Структура загального розв'язку неоднорідних систем

З'ясуємо структуру загального розв'язку неоднорідної системи (1), (2). Попередньо введемо деякі позначення:

$$U(t)=[X_{n-s}(t),\Phi(t)],V(t)=[Y_{n-s}(t),\Psi(t)]^{\mathrm{T}}$$
$$\Phi(t)=[\varphi_1^{(1)}(t),\ldots,\varphi_1^{(s_1)}(t),\ldots,\varphi_r^{(1)}(t),\ldots,\varphi_r^{(s_r)}(t)],$$
$$\Psi(t)=[\psi_1^{(s_1)}(t),\ldots,\psi_1^{(1)}(t),\ldots,\psi_r^{(s_r)}(t),\ldots,\psi_r^{(1)}(t)].$$

Відомо [1], що матрицю $Q(t)$ можна представити у вигляді добутку $Q(t)=Q_1(t)Q_2(t)$, де $Q_1(t)=[q_1(t),\ldots,q_{n-s}(t),\Phi(t)]$ і $q_i(t)\in C^{m+1}([a,b],R^n)$ $i=\overline{1,n-s}$ доповнюють вектори $\varphi_i^{(j)}(t),j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$ до повного базису в $C^k([a,b],R^n)$,

$$Q_2(t)=\begin{bmatrix}Q_{11}(t)&0\\Q_{21}(t)&Q_{22}(t)\end{bmatrix},$$

де $Q_{11}(t),Q_{22}(t)$ – нижньотрикутні матриці відповідно $(n-s)$- та s-го порядків з одиницями на діагоналі. При цьому неважко переконатися, що мають місце матричні рівності

$$Q_2^{-1}(t)=\begin{bmatrix}Q_{11}^{-1}(t)&0\\-Q_{22}^{-1}(t)Q_{21}(t)Q_{11}^{-1}(t)&Q_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix},$$
$$\Phi(t)=Q_1(t)\begin{bmatrix}0\\E_s\end{bmatrix}=Q(t)\begin{bmatrix}0\\Q_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix}.$$

Крім того, з (6) випливає, що

$$X_{n-s}(t)Y_{n-s}^{\mathrm{T}}(\sigma)f(\sigma)=X_{n-s}(t,\sigma)\tilde{g}(\sigma). \qquad (25)$$

Згідно [1,2], розв'язок системи (1) на інтервалі $t\in[a,\tau_1]$ має вигляд

$$x(t)=x_0(t)=X_{n-s}(t)c_0+$$
$$+\int_a^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^{\mathrm{T}}(\sigma)f(\sigma)d\sigma-\Phi(t)r(t), \qquad (26)$$

тобто $x_0(t)=Q(t)\begin{bmatrix}X(t)c_0+\int_a^t X(t,\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma\\-Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1)\end{bmatrix}$,

де $r(t)=\sum_{k=0}^{m-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}\left((\Psi^{\mathrm{T}}(t)L(t)\Phi(t))^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}(t)f(t)\right)$.

Після імпульсного збурення в точці $t=\tau_i$ продовжимо розв'язок $x_0(t)$ вигляду (26) з інтервалу $t\in[a,\tau_i]$ на розв'язок $x_1(t)$ вигляду

$$x_1(t)=Q(t)\begin{bmatrix}X(t)c_1+\int_{\tau_1}^t X(t,\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma\\-Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1)\end{bmatrix}, \qquad (27)$$

який визначений на інтервалі $t\in(\tau_1,\tau_2]$. Перехід від $x_0(t)$ до $x_1(t)$ визначається імпульсом (2) в точці $t=\tau_1$. Для знаходження зв'язку між c_0 і c_1 підставимо (26), (27) в (2) при $i=1$:

$$x_1(\tau_1+0)=(E_n+B_1)x_0(\tau_1)+b_1,$$

$$Q(\tau_1)\begin{bmatrix} X(\tau_1)c_1 \\ -Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix}=$$
$$=(E_n+B_1)Q(\tau_1)\begin{bmatrix} X(\tau_1)c_0+\int_a^{\tau_1} X(\tau_1,\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma \\ -Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix}+b_1.$$

Множачи останню рівність зліва на $Q^{-1}(t)$ і беручи до уваги (21), одержимо:

$$\begin{bmatrix} X(\tau_1)c_1 \\ -Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} E_{n-s}+B_{1,1} & 0 \\ 0 & E_s+B_{1,4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(\tau_1)c_0+\int_a^{\tau_1} X(\tau_1,\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma \\ -Q_{22}{}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix}+$$
$$+Q^{-1}(\tau_1)b_1.$$

Зрозуміло, що останнє рівняння має розв'язки тоді і тільки тоді, коли вектор b_1 має вигляд

$$b_1=Q(\tau_1)\begin{bmatrix} a_1 \\ B_{1,4}Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix},$$

де $a_1\in R^{n-s}$ – довільний сталий вектор. При цьому одержимо таке значення c_1:

$$c_1=X^{-1}(\tau_i)(E_{n-s}+B_{1,1})X(\tau_i)\Big\{c_0+$$
$$+\int_a^{\tau_1} X^{-1}(\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma+X^{-1}(\tau_1)a_1\Big\}.$$

Підставляючи його в (27) одержимо:

$$x_1(t)=X_{n-s}(t,0)c_0+\int_a^t X_{n-s}(t,\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma+$$
$$+X_{n-s}(t,\tau_1+0)g_1-\Phi(t)r(t).$$

Міркуючи аналогічно, можемо переконатися, що справедливим є наступне твердження.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1, матриці B_i і вектори b_i мають вигляд відповідно (21) і (28).

$$b_i=Q(\tau_i)\begin{bmatrix} a_i \\ B_{i,4}Q_{22}^{-1}(\tau_i)r(\tau_i) \end{bmatrix}, \tag{28}$$

де $a_i\in R^{n-s}$. Тоді розв'язок $x(t)=x_i(t)$ визначається за формулою

$$x(t)=X_{n-s}(t,a)c_0+\int_a^t X_{n-s}(t,\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma+$$
$$+\sum_{a<\tau_i<t} X_{n-s}(t,\tau_i+0)a_i-\Phi(t)r(t). \tag{29}$$

Щодо розв'язності початкової задачі для системи (8), (9) справедливою є наступна теорема.

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 1, матриці B_i і вектори b_i мають вигляд відповідно (21) і (28). Тоді для того, щоб задача Коші (8), (9), (30)

$$x(t_0)=x_0,\ t_0\in[a,b], \tag{30}$$

мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб при всіх $j=\overline{1,r}$, $k=\overline{1,s_j}$ вектор x_0 задовольняв умову

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{d^i}{dt^i}\langle A(t_0^{'})x_0+f(t_0),\psi_j^{k-i}(t_0)\rangle=0.$$

При цьому розв'язок задача Коші (8), (9), (30) єдиний і має наступний вигляд

$$x(t)=X_{n-s}(t,t_0)[E_{n-s},0]Q^{-1}(t_0)x_0+$$
$$+\int_{t_0}^t X_{n-s}(t,\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma+ \tag{31}$$
$$+\sum_{t_0<\tau_i<t} X_{n-s}(t,\tau_i+0)a_i-\Phi(t)r(t).$$

Доведення. Відомо [1], що (31) є необхідною і достатньою умовою того, щоб x_0 було допустимим початковим значенням розв'язку $x(t)=x_0(t)$. У разі виконання умов (21) і (28) розв'язок $x(t)$ єдиним чином переходить через кожну з точок імпульсів $t_0\le\tau_j<\ldots<\tau_p<b$ на наступний проміжок, тобто існує єдиний розв'язок $x(t), t\in[t_0,b]$ з початковим значенням $x(t_0)=x_0$. Згідно (29), розв'язок $x(t)$ у початковій точці $t=t_0$ приймає наступне значення:

$$x(t_0)=x_0=X_{n-s}(t_0,t_0)c_0-\Phi(t_0)r(t_0)=U(t_0)\begin{bmatrix} c_0 \\ -r(t_0) \end{bmatrix}.$$

Беручи до уваги, що $\Omega_x(t_0,t_0)=E_{n-s}$, одержимо:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ -r(t_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & Q_{22}(t_0) \end{bmatrix}Q^{-1}(t_0)x_0.$$

Отже, зв'язок між x_0 і сталою c_0 має вигляд $c_0=[E_{n-s},0]Q^{-1}(t_0)x_0$, з чого одержуємо (31).

Нетерові крайові задачі для вироджених диференціальних систем з імпульсною дією

Розглянемо питання існування розв'язку вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь (1) з імпульсною дією (2), які задовольняють крайові умови

$$lx(\cdot)=\alpha, \quad \alpha\in R^m, \tag{32}$$

де l – лінійний m - вимірний вектор-функціонал над простором неперервних на $[a,b]$ вектор-функцій: $\ell:C([a,b],R^n)\to R^m$, $\alpha\in R^m$ – сталий вектор. Припускаємо, що система (1), (2) задовольняє умови теореми 1, а матриці B_i і вектори b_i мають вигляд відповідно (21) і (28).

За допомогою $(m\times n)$ - вимірної матрично-значної функції $C(t)$ обмеженої варіації можемо записати крайові умови (32) у вигляді

$$\int_a^b [dC(t)]x(t)=\alpha. \tag{33}$$

Підставимо в (33) загальний розв'язок (29) виродженої імпульсної системи (1), (2). Змінюючи порядок інтегрування одержимо:

$$Gc_0=\alpha-\int_a^b Z_{n-s}(\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma-\sum_{i=1}^{p} Z_{n-s}(\tau_i+0)a_i+z_\Phi, \tag{34}$$

де

$$Z_{n-s}(s)=\int_s^b [dC(t)]X_{n-s}(t,s),\ z_\Phi=\int_s^b [dC(t)]\Phi(t),$$

$$G=\ell X_{n-s}(\cdot,a)=\int_a^b [dC(t)]X_{n-s}(t,a),$$

є $(m\times(n-s))$ - вимірними матрицями, а r_1 – m - вимірний сталий вектор:

$$r_1=\int_a^b [dC(t)]\Phi(t)r(t).$$

Отже, крайова задача (1), (2), (32) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли сумісною є лінійна відносно c_0 алгебраїчна система (34), тобто тоді і тільки тоді, коли

$$P_{G^{\mathrm{T}}_{k^*}}\left(\alpha-\int_a^b Z_{n-s}(\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma-\sum_{i=1}^{p} Z_{n-s}(\tau_i+0)a_i+z_\Phi\right)=0, \tag{35}$$

де $P_{G^{\mathrm{T}}_{k^*}}$ – $(k^*\times m)$ - вимірна матриця, рядки якої є лінійно незалежними рядками ортопроектора $P_{G^{\mathrm{T}}}$, $k^*=m-rankG$, і при цьому розв'язок системи (34) має вигляд

$$c_0=P_{G_k}\xi+G^+\left(\alpha-\int_a^b Z_{n-s}(\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma-\sum_{i=1}^{p} Z_{n-s}(\tau_i+0)a_i+z_\Phi\right),$$

де $k=n-s-rankG$, $\xi\in R^k$ – вектор довільних сталих, G^+ – єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до G матриця. При цьому розв'язком крайової задачі (1), (2), (32) є

$$\begin{aligned} x(t,\xi)&=X_{n-s}(t,a)P_{G_k}\xi+ \\ &+X_{n-s}(t,a)G^+\left(\alpha-\int_a^b Z_{n-s}(\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma-\right. \\ &\left.-\sum_{i=1}^{p} Z_{n-s}(\tau_i+0)a_i+z_\Phi\right)+\int_a^t X_{n-s}(t,\sigma)\tilde{g}(\sigma)d\sigma+ \\ &+\sum_{a<\tau_i<t} X_{n-s}(t,\tau_i+0)a_i-\Phi(t)r(t). \end{aligned} \tag{36}$$

Отже ми довели наступне твердження.

Теорема 4. Нехай виконуються умови теореми 1, матриці B_i і вектори b_i мають вигляд відповідно (21) і (28). Тоді крайова задача (1), (2), (32) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова (35). При цьому розв'язки утворюють k -параметричну сім'ю вигляду (36).

Одержані в даній роботі результати можуть бути використані при дослідженні існування і побудови розв'язків вироджених диференціальних систем з імпульсним впливом.

Список використаних джерел

1. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа., 2000. – 294 с.
2. *Самойленко А.М., Яковец В.П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Доп. НАН України. – 1993. – №4. – С. 10 – 15.
3. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. VSP Utrecht Boston, 2004. – 318 p.
4. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive differential equations. – Singapore, 1995. – 455 p.
5. *Бойчук А.А., Шегда Л.М.* Вироджені крайові задачі //Нелінійні коливання. – 2007. – 10, №3. – С. 303 – 312.

Надійшла до редколегії 29.09.2009.