УДК 517.9

Балога С.І.[1], к.ф.-м.н., доцент
Король І.І., д.ф.-м.н., доцент

Дослідження асимптотичної еквівалентності одного класу нелінійних систем диференціальних рівнянь

У даній роботі розглядаються диференціальні рівняння, що є розширеннями динамічної системи на торі. Встановлено умови асимптотичної еквівалентності одного класу нелінійних систем диференціальних рівнянь.

Ключові слова: m-вимірний тор, асимптотика розв'язків, асимптотична еквівалентність, нелінійна система.

S. I. Baloga[1], *Ph.D.* (Physics & Mathematics), Associate Professor
I. I. Korol[2], Doctor of Sciences (Physics & Mathematics), Associate Professor

Investigation of asymptotic equivalence of one type of nonlinear systems of differential equations

In this paper the differential equations, which are the extensions of the dynamic system on torus are under the consideration. The conditions of asymptotic equivalence of one type of nonlinear systems of differential equations are established.

Key words: m-dimensional torus, asymptotic behavior of the solutions, asymptotical equivalence, nonlinear system.

E-mails: [1]*Baloga_Switlana@e-mail.ua*, [2]*korol.ihor@gmail.com*

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н. Перестюк М.О.

Вступ

Дана робота тісно пов'язана з теорією багаточастотних коливань. Фундаментальні дослідження цього напрямку проведено в роботах [1] і [2]. Дану статтю присвячено дослідженню якісної поведінки нелінійних розширень динамічної системи на m-вимірному торі. Вивчено асимптотичну поведінку розв'язків одного класу розширень динамічної системи на торі та встановлено достатні умови асимптотичної еквівалентності лінійних та нелінійних систем диференціальних рівнянь, визначених в прямому добутку m-вимірного тору T^m та n-вимірного евклідового простору E^n.

Дослідженню проблеми асимптотичної еквівалентності диференціальних рівнянь присвячено ряд робіт. У [3], [4] встановлено достатні умови асимптотичної еквівалентності систем звичайних диференціальних рівнянь. У роботі [5] висвітлено питання асимптотичної еквівалентності одного класу лінійних розширень динамічної системи на торі та відповідної збуреної системи диференціальних рівнянь.

1. Постановка задачі

Розглянемо два розширення динамічної системи на торі

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \ \dot{x} = A(\varphi)x \tag{1}$$

і

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \ \dot{y} = A(\varphi)y + F(\varphi, y), \tag{2}$$

Тут $\varphi \in T^m$, $x, y \in R^n$, $a(\varphi)$ і $A(\varphi)$ – 2π - періодичні по φ_ν, $\nu = 1,2,\ldots,m$, m-вимірна векторна функція та $(n \times n)$-вимірна матрична функція відповідно, $F(\varphi, y)$ неперервна за сукупністю змінних векторна функція. Крім того, припустимо, що для функції $F(\varphi, y)$ виконується оцінка

$$\|F(\varphi, y)\| \le \lambda(\varphi)\|y\|, \ \ \|y\| < \infty,$$

де $\lambda(\varphi)$ додатня і обмежена при всіх $\varphi \in T^m$ функція.

Означення. Кажуть [3], що системи (1) і (2) асимптотично еквівалентні, якщо кожному розв'язку $y(t, \varphi)$ системи (2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t, \varphi)$ системи (1), такий що

$$\lim_{t\to\infty}(x(t,\varphi)-y(t,\varphi))=0,\ \ \varphi\in\mathrm{T}^m .$$

Припустимо, що в системах (1) і (2) матриця $A(\varphi)$ така, що існує границя

$$\lim_{t\to\infty}A(\varphi_t(\varphi))=A$$

для всіх $\varphi\in\mathrm{T}^m$, де $\varphi_t(\varphi)$ - розв'язок першого з рівнянь системи (1), такий що $\varphi_0(\varphi)=\varphi$.

2. Асимптотична еквівалентність

Сформулюємо теорему, яка є узагальненням теореми Левінсона [3] на нелінійні системи диференціальних рівнянь, визначені в прямому добутку m-вимірного тору T^m та n-вимірного евклідового простору E^n.

Теорема. Нехай розв'язки системи рівнянь

$$\dot{x}=Ax \tag{3}$$

обмежені при $t\geq 0$. Якщо функції $A(\varphi)-A$ і $\lambda(\varphi)$ вздовж кожної з траєкторій системи

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\quad \varphi\in\mathrm{T}^m,$$

задовольняють умови

$$\int_0^\infty\|A(\varphi_t(\varphi))-A\|dt<\infty,\qquad \int_0^\infty\lambda(\varphi_t(\varphi))dt<\infty,$$

то система (2) асимптотично еквівалентна системі (1).

Доведення. Для доведення сформульованого твердження, як і в [5], використаємо ідею Брауера доведення теореми Левінсона [3, с.159].

Без обмеження загальності можна вважати, що $A=diag(A_0,A_-)$, де матриця A_0 має власні числа з нульовою дійсною частиною, а дійсні частини всіх власних чисел матриці A_- – від'ємні.

Позначимо через $X(t)=diag(e^{A_0t},e^{A_-t})$ матрицант системи рівнянь (3) і покладемо $X(t)=X_0(t)+X_-(t)$, де $X_0(t)=diag(e^{A_0t},0)$, $X_-(t)=diag(0,e^{A_-t})$.

Тоді матрицю Коші

$$K(t,\tau)=X(t)X^{-1}(\tau)=X(t-\tau)$$

можна подати у вигляді

$$K(t,\tau)=X_0(t-\tau)+X_-(t-\tau),$$

причому існують такі додатні числа α, K_0 і K_-, що

$$\|X_0(t)\|=\left\|e^{A_0t}\right\|\leq K_0,\ \ t\in R, \tag{4}$$

$$\|X_-(t)\|=\left\|e^{A_-t}\right\|\leq K_-e^{-\alpha t},\ \ t\geq 0. \tag{5}$$

Отже, існує додатна стала K, що для всіх $t\geq 0$ виконується нерівність $\|X(t)\|\leq K$.

Переконаємося тепер, що при виконанні умов теореми системи рівнянь (1) і (2) асимптотично еквівалентні. Для цього при кожному фіксованому $\varphi\in\mathrm{T}^m$ (1) запишемо у вигляді

$$\dot{x}=Ax+P(\varphi_t(\varphi))x, \tag{6}$$

де $P(\varphi)=A(\varphi)-A$, а систему (2) у вигляді

$$\dot{y}=Ay+P(\varphi_t(\varphi))y+F(\varphi_t(\varphi),y). \tag{7}$$

Для кожного розв'язку $x(t,\varphi)$, $x(t_0,\varphi)=x_0$ справедливе інтегральне представлення

$$x(t,\varphi)=X(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t}X_-(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau. \tag{8}$$

В силу абсолютної інтегровності на $[0,\infty)$ матриці $P(\varphi_t(\varphi))$ для кожного $\varphi\in T^m$ робимо висновок, що кожний розв'язок $x(t,\varphi)$ обмеженим при $t\in[0,\infty)$, а, отже, невласний інтеграл

$$\int_{t_0}^{\infty}X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau$$

збігається, що дає можливість інтегральне представлення (8) подати у вигляді

$$x(t,\varphi)=X(t-t_0)[x_0+$$

$$+\int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau]+$$

$$+\int_{t_0}^{t} X_-(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau-$$

$$-\int_{t}^{\infty} X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau. \qquad (9)$$

Запишемо інтегральне представлення розв'язку $y(t,\varphi)$ системи (2) з початковою умовою $y(t_0,\varphi)=y_0$:

$$y(t,\varphi)=X(t-t_0)y_0+\int_{t_0}^{t} X(t-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau,\varphi)+$$

$$+F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))]\,dt. \qquad (10)$$

Покажемо обмеженість $y(t,\varphi)$:

$$\|y(t,\varphi)\|\le K\,y_0+K\int_{t_0}^{t}\|P(\varphi_\tau(\varphi))\|\|y(\tau,\varphi)\|d\tau+$$

$$+K\int_{t_0}^{t}\lambda(\varphi_\tau(\varphi))\,\|y(\tau,\varphi))\|d\tau.$$

Враховуючи неперервність розв'язку $y(t,\varphi)$, оцінки (4), (5), умови теореми і застосовуючи лему Гронуолла-Беллмана пересвідчуємося в існуванні сталої $C(t_0,y_0)\ge 0$ такої, що

$$\|y(t,\varphi)\|\le C(t_0,y_0),\ t\ge t_0.$$

Перепишемо інтегральне рівняння (10) у вигляді

$$y(t,\varphi)=X(t-t_0)[y_0+\int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)\cdot$$

$$\cdot[P(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau,\varphi)+F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))]d\tau]+$$

$$+\int_{t_0}^{t} X_-(t-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau,\varphi)+F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))]d\tau-$$

$$-\int_{t}^{\infty} X_0(t-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau,\varphi)+F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))]d\tau$$

$$(11)$$

З умов теореми та обмеженості розв'язку $y(t,\varphi)$ випливає збіжність всіх невласних інтегралів з останньої рівності.

Між множиною розв'язків $x(t,\varphi)$, $x(t_0,\varphi)=x_0$ системи (6) і множиною розв'язків $y(t,\varphi)$, $y(t_0,\varphi)=y_0$ системи (7) встановимо відповідність формулою

$$x_0+\int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))x(\tau,\varphi)d\tau=y_0+$$

$$+\int_{t_0}^{\infty} X_0(t_0-\tau)[P(\varphi_\tau(\varphi))y(\tau,\varphi)+F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))]d\tau.$$

$$(12)$$

Оцінимо різницю розв'язків $x(t,\varphi)$ і $y(t,\varphi)$ з початковими умовами, що задовольняють рівності (12). Скориставшись інтегральними представленнями (9) і (11) з урахуванням (12), маємо

$$y(t,\varphi)-x(t,\varphi)=$$

$$=\int_{t_0}^{t} X_-(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))\cdot[y(\tau,\varphi)-x(\tau,\varphi)]d\tau-$$

$$-\int_{t}^{\infty} X_0(t-\tau)P(\varphi_\tau(\varphi))[y(\tau,\varphi)-x(\tau,\varphi)]d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t} X_-(t-\tau)F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))d\tau-$$

$$-\int_{t}^{\infty} X_0(t-\tau)F(\varphi_\tau(\varphi),y(\tau,\varphi))d\tau \qquad (13)$$

Оскільки кожен з розв'язків $x(t,\varphi)$ і $y(t,\varphi)$ обмежений при $t\in[0,\infty)$, то покладаючи

$$\sup_{t\ge t_0}\|y(t,\varphi)-x(t,\varphi)\|=m,$$

для всіх $\varphi\in \mathrm{T}^m$, з (13) одержимо

$$\|y(t,\varphi)-x(t,\varphi)\|\le\int_{t_0}^{t} K_- e^{-\alpha(t-\tau)}\|P(\varphi_\tau(\varphi))\|m\,d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t} K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \lambda(\varphi_\tau(\varphi)) \|y(\tau,\varphi)\| d\tau +$$

$$+\int_{t}^{\infty} K_0 \|P(\varphi_\tau(\varphi))\| m\, d\tau + \int_{t}^{\infty} K_0\, \lambda(\varphi_\tau(\varphi)) \|y(\tau,\varphi)\| d\tau. \qquad (14)$$

В силу умов теореми та обмеженості розв'язку $y(t,\varphi)$ останні два доданки правої частини цієї нерівності прямують до нуля, коли $t \to \infty$. Переконаємося, що перші два доданки правої частини нерівності (14) мають таку ж властивість. Справді, для $t \geq 2t_0$

$$\int_{t_0}^{t} K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \|P(\varphi_\tau(\varphi))\| m d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t/2} K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \|P(\varphi_\tau(\varphi))\| m d\tau +$$

$$+ \int_{t/2}^{t} K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \|P(\varphi_\tau(\varphi))\| m d\tau \leq$$

$$\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int_{0}^{\infty} K_- \|P(\varphi_\tau(\varphi))\| d\tau\, m +$$

$$+ \int_{t/2}^{t} K_- \|P(\varphi_\tau(\varphi))\| d\tau\, m \to 0,$$

коли $t \to \infty$. Аналогічно

$$\int_{t_0}^{t} K_- e^{-\alpha(t-\tau)} \lambda(\varphi_\tau(\varphi)) \|y(\tau,\varphi)\| d\tau \leq$$

$$\leq K_- C(t_0, y_0) \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} \lambda(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \leq$$

$$\leq K_- C(t_0, y_0) \left(e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int_{0}^{\infty} \lambda(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t/2}^{\infty} \lambda(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \right) \to 0,$$

коли $t \to \infty$.

Отже, з нерівності (14) робимо висновок, що для всіх $\varphi \in T^m$

$$\lim_{t\to\infty} (x(t,\varphi) - y(t,\varphi)) = 0,$$

тобто системи рівнянь (6) і (7), або ж, що те саме, системи (1) і (2) асимптотично еквівалентні.

3. Висновки. В даній роботі виділено клас нелінійних диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m-вимірного тору T^m і n-вимірного евклідового простору E^n та узагальнено результати, викладені в статті [5]. Отримано достатні умови асимптотичної еквівалентності розглядуваного класу нелінійних диференціальних рівнянь відповідному лінійному диференціальному рівнянню.

Список використаних джерел

1. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* – Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – К.: Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1969.
4. *Brauer*. Nonlinear differential equations with forcing terms, Proc. Amer. Math. Soc. – 196 – 15, №5. – P. 758–765.
5. *Балога С.І.* Асимптотична еквівалентність систем диференціальних рівнянь // Вісник Київського ун-ту. Серія: математика та механіка. – 2008. – Вип. 19 – 20. – С. 61–6

Надійшла до редколегії 24.0