

## ВСТУП

Математично описуючи різні явища природи, часто приходять до математичних моделей у вигляді рівнянь, які містять незалежні змінні, невідому функцію та її похідні. Такі рівняння називають диференціальними. Цей термін уперше запропонував Г. В. Лейбніц у 1676 р.

З виникненням і наступним розвитком теорії диференціальних рівнянь з'явився потужний засіб моделювання та дослідження різноманітних найскладніших задач науки й техніки.

Математичний апарат диференціальних рівнянь дає змогу проникнути в мікросвіт детермінованих явищ і процесів, описати механізм їх розвитку й тим самим передбачити їхнє майбутнє.

Диференціальні рівняння, в яких невідома функція залежить від двох і більше незалежних змінних, називають диференціальними рівняннями з частинними похідними (ДРЧП).

Розділ математики, який вивчає ДРЧП, що описують різноманітні фізичні явища, називають математичною фізикою. До фізичних процесів належать явища, які вивчаються в гідродинаміці, теорії пружності, електродинаміці, теорії теплопровідності, квантовій механіці, атомній фізиці тощо.

Назва "математична фізика" пояснюється тим, що метод дослідження, який застосовується в цій галузі науки, є математичним по суті. Однак постановка задач у цій галузі, що тісно пов'язана з вивченням фізичних явищ, має специфічні особливості. Так, початкова й кінцева стадії процесу якісно різняться між собою, що вимагає застосування різних математичних методів.

Інтенсивна розробка методів математичної фізики почалася після опублікування 1687 р. "Математичних начал натуральної філософії" І. Ньютона й була зумовлена дослідженням проблем усесвітнього тяжіння й теорії світла. Найвищі досягнення в розвитку методів класичної математичної фізики пов'язані з іменами Ж. Л. Лагранжа, Л. Ейлера, Ж. Л. Д'Аламбера, П. С. Лапласа, Д. Бернуллі, Ж. Б. Ж. Фур'є, К. Ф. Гаусса, О. Л. Коші, Г. Ф. Б. Рімана, М. В. Остроградського, О. М. Ляпунова, В. А. Стеклова та багатьох інших учених.

Як самостійний науковий напрям математична фізика сформувалася в другій половині ХІХ ст., коли виникла потреба в розробці методів розв'язання лінійних ДРЧП другого порядку стосовно різних фізичних процесів.

*Зазначимо, що математична фізика досліджує не лише конкретні методи інтегрування рівнянь, а й загальні питання — коректності постановки задач, існування та єдиності їх розв'язків тощо (якісна теорія ДРЧП).*

*Постійний розвиток математичної фізики зумовлений її тісним зв'язком з фундаментальними напрямками досліджень у суміжних областях природничих наук.*

*Автори висловлюють подяку кандидату фізико-математичних наук Маринець Катерині Василівні за технічну допомогу при підготовці підручника до друку.*

## ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

У підручнику оперуємо з полем дійсних чисел і з дійсними функціями однієї або кількох дійсних змінних.

$E_n$	— $n$ -вимірний евклідів простір
$E = E_1$	— множина всіх дійсних чисел
$N$	— множина цілих додатних чисел
$M_1 \times M_2$	— декартів добуток множин
$M_1 \cup M_2$	— об'єднання множин
$M_1 \cap M_2$	— переріз (перетин) множин
$M_1/M_2$	— різниця множин
$B$	— область в $E_n$
$\partial B$	— межа області $B$
$\bar{B} = B \cup \partial B$	— замикання області $B$
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$	— точка в $E_n$
$(x, y)$	— точка в $E_2$
$\{x   \dots, \}$	— множина елементів $x$
$[a, b]$	— замкнений проміжок (відрізок)
$\{x \in E   a \leq x \leq b\}$	
$(a, b)$	— відкритий проміжок (інтервал)
$\{x \in E   a < x < b\}$	
$[a, b)$	— напіввідкритий інтервал
$\{x \in E   a \leq x < b\}$	
$A \equiv B$	— конгруентність, тотожність,
логічна рівносильність	
$\Leftrightarrow$	— тоді й лише тоді (знак еквівалентності)
$\Rightarrow$	— впливає (знак імплікації)
$\sum$	— знак суми
$\xrightarrow[m \rightarrow \infty]{E}$	— рівномірна збіжність
$\subset$	— знак включення для множин
$\supset$	— знак умісту для множин
$\in$	— знак належності
$\notin$	— знак неналежності
$\ni$	— знак умісту для елементів
$y^{(s)}(x) \equiv \frac{d^s y(x)}{dx^s}$	— похідна порядку $s$
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$	— мультиіндекс

	$ \alpha  = \sum_{i=1}^n \alpha_i$	— довжина мультиіндексу $\alpha$
$\frac{\partial^{ \alpha } u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv u_{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}} \equiv D^\alpha u(x)$		— частинна похідна порядку $ \alpha $
	$\left. \begin{array}{l} C^{ \alpha }(B) \\ C^\alpha(B) \\ C^\alpha(\bar{B}) \\ C^k(a, b) \end{array} \right\}$	— простори гладких функцій
	$\{u_n(x)\}$	— послідовність функцій
	$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$	— якобіан
	$A^T$	— транспонована матриця
	$A^{-1}$	— обернена матриця
	$ A  \equiv \det A$	— детермінант матриці $A$
$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$		— оператор Лапласа
$\square \equiv \Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$		— оператор Лоренца
	$\text{grad } U(x)$	— градієнт функції $U(x)$
	$S_R(x)$	— сфера радіуса $R$ із центром у точці $x$
	$K_R(x)$	— куля радіуса $R$ із центром у точці $x$
	$K_R(x, y)$	— круг радіуса $R$ із центром у точці $(x, y)$
	$\vec{x}$	— вектор
	const	— стала
	$\text{Re } z$	— дійсна частина комплексного числа $z$
	$[AB]$	— відрізок
	$\int$	— криволінійний інтеграл
	$\iint_{[AB]}$	— подвійний інтеграл
	$\iint_B$	— поверхневий інтеграл
	$\iint_S$	— кватерніонний інтеграл
	$\iint_B \dots \int$	— кратні інтеграли
	$\overline{1, n}$	— відрізок натурального ряду
	$\cup M_1 M_2$	— дуга
	$\forall$	— для кожного, для всіх (квантор загальності)
	$\exists$	— існує (квантор існування)

# КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

## 1.1 Основні поняття й означення теорії ДРЧП

► **Означення 1.1.** *Співвідношення між незалежними змінними  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , невідомою функцією  $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$  та її частинними похідними називають **диференціальним рівнянням із частинними похідними**.*

► **Означення 1.2.** *Диференціальне рівняння називають **рівнянням  $n$ -го порядку**, якщо воно містить хоча б одну частинну похідну  $n$ -го порядку й не містить похідних вищого порядку.*

У загальному випадкові рівняння  $n$ -го порядку має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}, \dots, u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}}\right) = 0, \quad (1.1)$$

де  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = n$  ( $\alpha_i$  — цілі невід'ємні числа);

$$u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}} = \frac{\partial^n u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Введемо позначення:  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  — цілочисловий вектор (мультиіндекс) із невід'ємними координатами  $\alpha_i$ ;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ;  $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$  — довжина мультиіндекса  $\alpha$ ;

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Тоді рівняння (1.1) можна записати в такому вигляді:

$$F(x, u, \dots, D^\alpha u(x)) = 0.$$

► **Означення 1.3.** *ДРЧП називають **лінійним**, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та всіх її частинних похідних.*

Лінійне рівняння другого порядку має вигляд

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x). \quad (1.2)$$

► **Означення 1.4.** Якщо в рівнянні (1.2)  $f(x) = 0$ , то його називають *лінійним однорідним*. Якщо коефіцієнти  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  є сталими, то рівняння (1.2) називають *лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами*

► **Означення 1.5.** ДРЧП називають *квазілінійним*, якщо воно лінійне відносно похідних найвищого порядку.

Згідно з означенням квазілінійне диференціальне рівняння другого порядку записується у вигляді

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}) u_{x_i x_j} = \Phi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}).$$

■ **Приклад 1.1.** З'ясуємо, чи є наведені нижче рівності диференціальними рівняннями з частинними похідними й ідентифікуємо їх

1.  $\cos^2(u_{xx} + u_{yy}) + \sin^2(u_{xx} + u_{yy}) = 1.$

Ця тотожність не є ДРЧП.

2.  $xu_{x^2y}(x, y) + [u_x(x, y)]^{10} = f(x, y).$

Це квазілінійне рівняння третього порядку з двома незалежними змінними.

3.  $yu_{x^2y^2}(x, y) - xu_{x^4}(x, y) = xuy(x, y).$

Це лінійне однорідне рівняння четвертого порядку з двома незалежними змінними.

4.  $[xu_{x^3y^2}(x, y)]^3 - yu_x(x, y) = 0.$

Це нелінійне ДРЧП п'ятого порядку з двома незалежними змінними.

► **Означення 1.6.** Усяку  $n$  разів неперервно диференційовну в області задання рівняння (1.1) функцію  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , підставлення якої в рівняння замість невідомої функції та її частинних похідних перетворює його на тотожність за незалежними змінними, називають *регулярним розв'язком рівняння* (1.1).

Надалі досліджуватимемо лише регулярні розв'язки.

■ **Приклад 1.2.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$\sum_{i=1}^n (u_{x_i}(x_1, \dots, x_n))^2 = 0.$$

Ця рівність виконується, якщо  $u_{x_i} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , тобто  $u = \text{const}$  є розв'язком даного рівняння.

Легко побачити, що сума довільних двічі неперервно диференційовних функцій  $\varphi_1(x + y)$  і  $\varphi_2(x - y)$  є розв'язком диференціального рівняння

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) = 0.$$

Очевидно, рівняння  $\sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2 + 1 = 0$  розв'язку не має.

Як видно з наведених прикладів, диференціальні рівняння з частинними похідними можуть мати нескінчену множину розв'язків. Тому, коли фізична задача зводиться до ДРЧП, для однозначного опису розглядуваного процесу необхідно до рівняння приєднати деякі додаткові умови, які впливають із постановки задачі.

## 1.2 Класифікація ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними

Розглянемо квазілінійне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \quad (1.3)$$

Усі диференціальні рівняння вигляду (1.3) можна поділити на три основні типи: гіперболічні, параболічні та еліптичні. В кожному разі заміною незалежних змінних  $x, y$  рівняння (1.3) зводиться до найпростішого — канонічного — вигляду. Тому, вивчаючи рівняння з двома незалежними змінними вигляду (1.3), надалі обмежимося дослідженням їхніх канонічних форм.

Для зведення рівняння (1.3) до найпростішого вигляду введемо нові незалежні змінні:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (1.4)$$

де  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$  — неперервні функції разом із частинними похідними до другого порядку включно, а

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Очевидно, що підстановкою (1.4) досягається взаємно однозначна відповідність між точками  $(x, y)$  і  $(\xi, \eta)$  відповідних областей, тобто з (1.4)  $x$  та  $y$  визначаються як однозначні функції незалежних змінних  $\xi$  і  $\eta$ :  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ .

Як же вибрати функції  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ , щоб рівняння (1.3) звелось до простішого вигляду? Аби відповісти на це запитання, вводимо в рівняння

(1.3) нові незалежні змінні (1.4). Маємо

$$\begin{aligned}
u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) &= U(\xi, \eta), \\
u_x &= U_x(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = \varphi_x U_\xi + \psi_x U_\eta, \\
u_y &= U_y(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = \varphi_y U_\xi + \psi_y U_\eta, \\
u_{xx} &= \varphi_x^2 U_{\xi\xi} + 2\varphi_x \psi_x U_{\xi\eta} + \psi_x^2 U_{\eta\eta} + \varphi_{xx} U_\xi + \psi_{xx} U_\eta, \\
u_{yy} &= \varphi_y^2 U_{\xi\xi} + 2\varphi_y \psi_y U_{\xi\eta} + \psi_y^2 U_{\eta\eta} + \varphi_{yy} U_\xi + \psi_{yy} U_\eta, \\
u_{xy} &= \varphi_x \varphi_y U_{\xi\xi} + (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) U_{\xi\eta} + \psi_x \psi_y U_{\eta\eta} + \varphi_{xy} U_\xi + \psi_{xy} U_\eta.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Підставивши знайдені похідні (1.5) у рівняння (1.3), дістаємо

$$\alpha_{11} U_{\xi\xi} + 2\alpha_{12} U_{\xi\eta} + \alpha_{22} U_{\eta\eta} = f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta), \tag{1.6}$$

де

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= a_{11} \varphi_x^2 + 2a_{12} \varphi_x \varphi_y + a_{22} \varphi_y^2, \\
\alpha_{12} &= a_{11} \varphi_x \psi_x + a_{12} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + a_{22} \varphi_y \psi_y, \\
\alpha_{22} &= a_{11} \psi_x^2 + 2a_{12} \psi_x \psi_y + a_{22} \psi_y^2.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Зазначимо, що за умови лінійності (1.3) рівняння (1.6) також було б лінійним.

Розглянемо ДРЧП першого порядку

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \tag{1.8}$$

Нехай  $z = \varphi(x, y)$  — деякий частинний розв'язок цього рівняння. Тоді, поклавши  $\xi = \varphi(x, y)$ , із (1.7) матимемо, що  $\alpha_{11} \equiv 0$ . Отже, задача про вибір нових незалежних змінних зводиться до інтегрування рівняння (1.8).

Надалі вважатимемо, що коефіцієнти рівняння (1.3) є неперервними функціями разом із частинними похідними до другого порядку включно в розглядуваній області й не перетворюються одночасно в нуль. Тоді, якщо  $a_{11} \neq 0$ , то рівняння (1.8) можна подати у вигляді

$$\left[ a_{11} z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta}) z_y \right] \left[ a_{11} z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta}) z_y \right] = 0$$

або при  $a_{22} \neq 0$

$$\left[ a_{22} z_y + (a_{12} + \sqrt{\Delta}) z_x \right] \left[ a_{22} z_y + (a_{12} - \sqrt{\Delta}) z_x \right] = 0,$$



де  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ .

Кожне з наведених рівнянь розпадається на два:

$$a_{11}z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_y = 0, \tag{1.9}$$

$$a_{11}z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_y = 0$$

або

$$a_{22}z_y + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_x = 0, \tag{1.10}$$

$$a_{22}z_y + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_x = 0.$$

Отже, розв'язки кожного з рівнянь — (1.9) або (1.10) — будуть розв'язками рівняння (1.8).

Щоб зінтегрувати рівняння (1.9) або (1.10), складаємо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} - \sqrt{\Delta}}$$

або

$$\frac{dy}{a_{22}} = \frac{dx}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dy}{a_{22}} = \frac{dx}{a_{12} - \sqrt{\Delta}},$$

звідки дістаємо

$$a_{11}dy - (a_{12} + \sqrt{\Delta})dx = 0, \quad a_{11}dy - (a_{12} - \sqrt{\Delta})dx = 0 \tag{1.11}$$

або

$$a_{22}dx - (a_{12} + \sqrt{\Delta})dy = 0, \quad a_{22}dx - (a_{12} - \sqrt{\Delta})dy = 0. \tag{1.12}$$

Рівняння (1.11) або (1.12) можна записати у вигляді одного рівняння

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0, \tag{1.13}$$

яке називається *характеристичним* для рівняння (1.3).

Із курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо: якщо  $c = \varphi(x, y)$  є загальним інтегралом одного з диференціальних рівнянь (1.11) або (1.12), тобто деяким загальним інтегралом (1.13), то  $z = \varphi(x, y)$  є розв'язком рівняння (1.9), і навпаки. Через накладені на  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  умови коефіцієнти рівнянь (1.11) або (1.12) мають неперервні похідні до другого порядку включно, а отже, існують загальні інтеграли рівняння (1.13), неперервні разом із похідними до другого порядку включно.

► **Означення 1.7.** *Розв'язки рівняння (1.13) називають **характеристиками**.*

Залежно від знака дискримінанта  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  диференціальні рівняння (1.3) в області  $D$  класифікують наступним чином:

- якщо для  $\forall(x, y) \in D$   $\Delta > 0$ , то рівняння (1.3) називається *рівнянням гіперболічного типу*;
- при  $\Delta = 0$  — *параболічного типу*;
- при  $\Delta < 0$  — *еліптичного типу*.

Із (1.13) випливає, що у випадку рівнянь гіперболічного типу є дві дійсні сім'ї характеристик, параболічного типу — одна дійсна, еліптичного типу — дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик.

Безпосереднім підставленням легко перекопати в справедливості рівності

$$\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) \left[ \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right]^2. \quad (1.14)$$

Якщо  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ , то з (1.14) випливає інваріантність типу рівняння за перетворення незалежних змінних (1.4).

Значимо, що одне й те саме рівняння в різних областях може належати до різних типів.

■ **Приклад 1.3.** Розглянемо рівняння

$$u_{xx} + xu_{yy} - 3yu = 0.$$

При  $x > 0$ ,  $\Delta = -x < 0$  це рівняння належить до еліптичного типу, при  $x = 0$ ,  $\Delta = 0$  — до параболічного, при  $x < 0$ ,  $\Delta > 0$  — до гіперболічного типу.

### 1.3 Зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними

□ **Рівняння гіперболічного типу.** В цьому випадкові  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$  в розглядуваній області й відповідне характеристичне рівняння (1.13) має дві різні дійсні сім'ї характеристик  $C_1 = \varphi(x, y)$ ,  $C_2 = \psi(x, y)$ . Покажемо, що вони є незалежними, тобто  $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \neq 0$ . Справді, загальні інтеграли  $C_1 = \varphi(x, y)$ ,  $C_2 = \psi(x, y)$  є розв'язками рівнянь (1.11) або (1.12), тобто

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

або

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = -\frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{22}}, \quad \frac{\psi_y}{\psi_x} = -\frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{22}}.$$

Згідно з умовою  $\Delta > 0$ , а отже,

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq \frac{\psi_x}{\psi_y}, \quad \text{або} \quad \frac{\varphi_y}{\varphi_x} \neq \frac{\psi_y}{\psi_x}.$$

Із останніх нерівностей маємо

$$\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

що й треба було показати.

Покладемо

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \quad (1.15)$$

Тоді  $\alpha_{11} \equiv 0$  і  $\alpha_{22} \equiv 0$ , а рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$$U_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{2\alpha_{12}}. \quad (1.16)$$

Це *перша канонічна форма рівнянь гіперболічного типу*.

Зауважимо: якщо  $a_{11}(x, y) = a_{22}(x, y) = 0$ , то рівняння (1.3) уже має вигляд (1.16).

Введемо нові незалежні змінні за формулами

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta. \quad (1.17)$$

Дістаємо

$$\begin{vmatrix} \alpha_\xi & \alpha_\eta \\ \beta_\xi & \beta_\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

а отже, після введення нових змінних  $\alpha, \beta$  тип рівняння не зміниться.

Поклавши

$$U\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \nu(\alpha, \beta),$$

дістанемо

$$U_\xi = \nu_\alpha + \nu_\beta, \quad U_\eta = \nu_\alpha - \nu_\beta, \quad U_{\xi\eta} = \nu_{\alpha\alpha} - \nu_{\beta\beta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (1.16), матимемо

$$\nu_{\alpha\alpha} - \nu_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, \nu, \nu_\alpha, \nu_\beta). \quad (1.18)$$

Це *друга канонічна форма рівнянь гіперболічного типу*.

■ **Приклад 1.4.** Визначимо тип і зведемо до канонічного вигляду ДРЧП

$$u_{xx} - yu_{yy} + u(x, y) = 0, \quad y > 0. \quad (1.19)$$

Рівняння (1.19) є лінійним однорідним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними. Для визначення його типу складемо дискримінант

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y > 0.$$

Отже, (1.19) є рівнянням гіперболічного типу. З відповідного характеристичного рівняння

$$(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$$

знаходимо дві різні дійсні сім'ї характеристик (рис. 1.1):

$$C_1 = x - 2\sqrt{y}, \quad C_2 = x + 2\sqrt{y}.$$

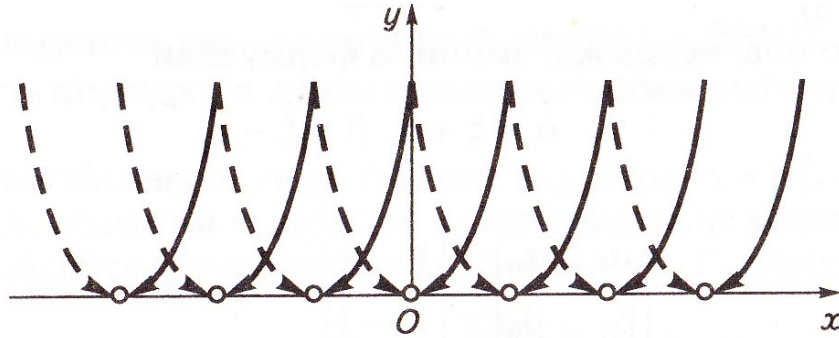


Рис. 1.1:

Характеристиками є праві й ліві вітки сім'ї парабол  $y = \frac{1}{4}(x - C)^2$ .

Вершини парабол, які лежать на осі  $Ox$ , не належать характеристикам ( $y > 0$ ).

Вводимо заміну незалежних змінних:

$$\xi = x - 2\sqrt{y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{y}.$$

Тоді

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \quad u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}(U_\eta - U_\xi),$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = \frac{1}{y}(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}(U_\eta - U_\xi).$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (1.19), дістанемо

$$U_{\xi\eta} = \frac{0,5}{\eta - \xi}(U_\xi - U_\eta) - 0,25U.$$

Зведемо рівняння (1.19) до другої канонічної форми в розглядуваній області. Для цього використаємо підстановку (1.17). Матимемо

$$\nu_{\alpha\alpha} - \nu_{\beta\beta} = -\frac{1}{\beta}\nu_\beta - 0,25\nu.$$

□ **Рівняння параболічного типу.** В цьому випадкові  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$  і відповідне характеристичне рівняння (1.13) має один загальний інтеграл  $C_1 = \varphi(x, y)$ . Покладемо в цьому разі

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

де  $\eta(x, y)$  — довільна двічі неперервно диференційовна функція, незалежна від  $\varphi(x, y)$ .

Оскільки  $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ , то

$$\alpha_{11} = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y)^2 = 0.$$

Але тоді

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= a_{11}\varphi_x\eta_x + a_{12}(\varphi_x\eta_y + \varphi_y\eta_x) + a_{22}\varphi_y\eta_y = \\ &= \underbrace{(\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y)}_{=0} (\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0. \end{aligned}$$

Отже, рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$$U_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{22}}. \quad (1.20)$$

Це канонічна форма рівнянь параболічного типу.

■ **Приклад 1.5.** Визначимо тип і зведемо до канонічного вигляду ДРЧП

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x = 0. \quad (1.21)$$

Маємо  $\Delta = 1 - 1 = 0$ , отже, рівняння (1.21) — параболічного типу. З відповідного характеристичного рівняння знаходимо

$$dx + dy = 0 \Rightarrow C_1 = x + y.$$

Вводимо нові незалежні змінні

$$\xi = x + y, \quad \eta = y. \quad (1.22)$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то функції (1.22) незалежні:

$$u_x = U_\xi, \quad u_y = U_\xi + U_\eta,$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi}, \quad u_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (1.21) і звівши відповідні члени, дістанемо канонічну форму

$$U_{\eta\eta}(\xi, \eta) + 3U_\xi = 0.$$

Зазначимо, що як рівняння (1.21), так і його канонічна форма є лінійним однорідним ДРЧП зі сталими коефіцієнтами. Це справедливо і у загальному випадкові: якщо вихідне рівняння є лінійним зі сталими коефіцієнтами, то і його канонічна форма буде лінійним ДРЧП зі сталими коефіцієнтами.

□ **Рівняння еліптичного типу.** В цьому випадкові  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$  і рівняння (1.9) або (1.10) мають комплексні коефіцієнти. Покажемо, що вони мають розв'язки. Для цього введемо нову функцію

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + i\omega(x, y). \quad (1.23)$$

Дістаємо

$$a_{11}(\zeta_x + i\omega_x) + (a_{12} + \sqrt{-\Delta}i)(\zeta_y + i\omega_y) = 0, \quad (1.24)$$

$$a_{11}(\zeta_x + i\omega_x) + (a_{12} - \sqrt{-\Delta}i)(\zeta_y + i\omega_y) = 0$$

або

$$\begin{cases} a_{11}\zeta_x + a_{12}\zeta_y - \sqrt{-\Delta}\omega_y = 0, \\ a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y + \sqrt{-\Delta}\zeta_y = 0; \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} a_{11}\zeta_x + a_{12}\zeta_y + \sqrt{-\Delta}\omega_y = 0, \\ a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y - \sqrt{-\Delta}\zeta_y = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Системи (1.25), (1.26), є системами лінійних однорідних ДРЧП першого порядку з неперервно диференційовними коефіцієнтами. Такі системи мають розв'язки, причому, якщо розв'язком (1.25) є функції  $\zeta = \zeta(x, y)$ ,  $\omega = \omega(x, y)$ , то розв'язком (1.26) — функції  $\zeta = \zeta(x, y)$ ,  $\omega = -\omega(x, y)$ . Внаслідок (1.23) розв'язками рівнянь (1.31) будуть функції  $z(x, y) = \zeta(x, y) \pm i\omega(x, y)$ , а загальними інтегралами рівнянь (1.11) — вирази  $C_{1,2} = \zeta(x, y) \pm i\omega(x, y)$ .

Аналогічні міркування справедливі й для рівнянь (1.10). Якщо покласти

$$\xi = \zeta(x, y) + i\omega(x, y), \quad \eta = \zeta(x, y) - i\omega(x, y),$$

то

$$\alpha_{11} = 0 = a_{11}(\zeta_x + i\omega_x)^2 + 2a_{12}(\zeta_x + i\omega_x)(\zeta_y + i\omega_y) + a_{22}(\zeta_y + i\omega_y)^2,$$

а отже,

$$(a_{11}\zeta_x^2 + 2a_{12}\zeta_x\zeta_y + a_{22}\zeta_y^2) - (a_{11}\omega_x^2 + 2a_{12}\omega_x\omega_y + a_{22}\omega_y^2) = 0,$$

$$\tilde{\alpha}_{11} = a_{11}\zeta_x\omega_x + 2a_{12}(\zeta_x\omega_y + \omega_x\zeta_y) + a_{22}\zeta_y\omega_y = 0. \quad (1.27)$$

Введемо нові незалежні змінні за формулами

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = \zeta(x, y), \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2i} = \omega(x, y). \quad (1.28)$$

Якобіан функцій (1.28) не дорівнює нулю (функції незалежні), а підставлення їх у рівняння (1.3) внаслідок (1.27) дає  $\tilde{\alpha}_{11} = \tilde{\alpha}_{22}$ ,  $\tilde{\alpha}_{12} = 0$ . Тоді з (1.6) дістаємо канонічну форму рівнянь еліптичного типу

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = \frac{F(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta)}{\alpha_{11}}. \quad (1.29)$$

■ **Приклад 1.6.** Розглянемо рівняння (1.19) в області  $y < 0$ .

У цій півплощині воно належить до еліптичного типу. Характеристичне рівняння  $(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$  дає дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик:  $C_1 = x - 2\sqrt{-y}i$ ,  $C_2 = x + 2\sqrt{-y}i$

Покладемо згідно з (1.28)  $\alpha = x$ ,  $\beta = 2\sqrt{-y}i$ . Тоді

$$u_x = U_\alpha, \quad u_{xx} = U_{\alpha\alpha}, \quad u_y = -(-y)^{-1/2}U_\beta, \\ u_{yy} = (-y)^{-1}U_{\beta\beta} - 1/2(-y)^{-3/2}U_\beta.$$

Підставивши знайдені похідні в (1.19), матимемо

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} - \frac{1}{\beta}U_\beta + U = 0.$$

□ **Канонічні форми лінійних ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними й сталими коефіцієнтами.** Розглянемо лінійне ДРЧП зі сталими коефіцієнтами

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u + b_2u_y + b_3u = f(x, y). \quad (1.30)$$

Згідно з доведеним вище, залежно від типу диференціального рівняння (1.30) воно зводиться до однієї з канонічних форм:

$$\begin{aligned} U_{\xi\eta} + c_1U_\xi + c_2U_\eta + c_3U &= F(\xi, \eta), \\ U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + c_1U_\xi + c_2U_\eta + c_3U &= F(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (1.31)$$

— гіперболічний тип;

$$U_{\eta\eta} + c_1U_\xi + c_2U_\eta + c_3U = F(\xi, \eta) \quad (1.32)$$

— параболічний тип;

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + c_1U_\xi + c_2U_\eta + c_3U = F(\xi, \eta) \quad (1.33)$$

— еліптичний тип.

Тут  $c_i = \text{const}, i = 1, 2, 3$ .

Для подальшого спрощення рівнянь (1.31)–(1.32) замість  $U(\xi, \eta)$  введемо нову функцію  $v(\xi, \eta)$ :

$$U = e^{\lambda\xi + \mu\eta} v(\xi, \eta), \quad (1.34)$$

де  $\lambda$  і  $\mu$  — довільні сталі. Тоді

$$\begin{aligned} U_\xi &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\xi + \lambda v), \\ U_\eta &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\eta + \mu v), \\ U_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v), \\ U_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + \mu v_\eta) + \mu^2 v, \\ U_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta) + \mu v_\xi + \lambda\mu v. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні, наприклад, у рівняння (1.33), дістанемо

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (c_1 + 2\lambda)v_\xi + (c_2 + 2\mu)v_\eta + (\lambda^2 + \mu^2 + c_1\lambda + c_2\mu + c_3)v = e^{\lambda\xi - \mu\eta} F(\xi, \eta).$$

Виберемо довільні сталі  $\lambda$  і  $\mu$  так, щоб в останньому рівнянні коефіцієнти при  $v_\xi$  і  $v_\eta$  дорівнювали нулю. Тоді матимемо

$$c_1 + 2\lambda = 0, c_2 + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{c_1}{2}, \mu = -\frac{c_2}{2},$$

а отже,

$$\lambda^2 + \mu^2 + c_1\lambda + c_2\mu + c_3 = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_2^2}{4} - \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + c_3 = c_3 - \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_2^2}{4}.$$

Таким чином,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \left( c_3 - \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_2^2}{4} \right) v = e^{\frac{c_1}{2}\xi + \frac{c_2}{2}\eta} F(\xi, \eta).$$

Після аналогічних викладок стосовно рівнянь (1.31) та (1.32) дістанемо

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta} + \alpha v &= F_1(\xi, \eta), \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \alpha v &= F_1(\xi, \eta) \end{aligned}$$

— гіперболічний тип;

$$v_{\eta\eta} + c_1 v_\xi = F_1(\xi, \eta)$$

— параболічний тип.



■ **Приклад 1.7.** Зведемо до канонічного вигляду диференціальне рівняння

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_y - u_x = 0. \quad (1.35)$$

Визначимо його тип:

$$\Delta = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0.$$

Отже, задане рівняння — параболічного типу. Маємо

$$dy^2 + 4dxdy + 4dx^2 = 0 \Rightarrow dy + 2dx = 0 \Rightarrow c_1 = y + 2x.$$

Покладемо  $\xi = y + 2x$ ,  $\eta = x$ . Покажемо, що функції  $\xi(x, y)$  і  $\eta(x, y)$  є незалежними:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

$$u_x = 2U_\xi + U_\eta, u_y = U_\xi$$

$$u_{yy} = U_{\xi\xi}, u_{xy} = 2U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}, u_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.$$

Підставляємо знайдені похідні в рівняння (1.35):

$$4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - 4U_{\xi\eta} - 4U_{\xi\xi} + U_\xi - 2U_\xi - U_\eta = 0,$$

$$U_{\eta\eta} - U_\xi - U_\eta = 0.$$

Вводимо нову невідому функцію  $v(\xi, \eta)$  за формулою (1.34). Матимемо

$$\begin{aligned} e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v - v_\xi - \lambda v - v_\eta - \mu v) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{\eta\eta} + (2\mu - 1)v_\eta - v_\xi + (\mu^2 - \lambda - \mu)v &= 0. \end{aligned}$$

Виберемо довільні сталі  $\lambda$  і  $\mu$  так, щоб

$$\begin{cases} 2\mu - 1 = 0, \\ \mu^2 - \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0, 5, \\ \lambda = -0, 25. \end{cases}$$

Тоді останнє рівняння запишеться у вигляді

$$v_{\eta\eta} - v_\xi = 0,$$

де

$$v_{\xi\eta} = e^{0,25\xi - 0,5\eta} U(\xi, \eta).$$

◇ **Зауваження 1.1.** У формулах (1.5) часто заміняють  $U(\xi, \eta)$  на  $u(\xi, \eta)$ . Однак при цьому  $u_\xi$  і  $u_\eta$  у правій частині (1.5) слід розуміти як похідні вздовж ліній  $\eta = \text{const}$  і  $\xi = \text{const}$  відповідно:

$$u_\xi = \frac{d}{d\xi} (u|_{\eta=\text{const}}), u_\eta = \frac{d}{d\eta} (u|_{\xi=\text{const}}),$$

тобто як  $U_\xi$  і  $U_\eta$ , а не як частинні похідні по  $\xi$  або  $\eta$  від функції  $u(x, y)$ , оскільки вирази  $u_\xi$  та  $u_\eta$  не мають змісту, поки не вибрано іншу координату  $\xi$  або  $\eta$ .

## 1.4 Класифікація та зведення до канонічного вигляду квазі-лінійних ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними

Розглянемо квазілінійне ДРЧП другого порядку

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = f(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}), \quad (1.36)$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Вважаємо  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Введемо нові незалежні змінні  $\xi_k$  за формулами

$$\xi_k = \phi_k(x), k = \overline{1, m}.$$

Вважаємо, що функції  $\phi_k(x)$  є двічі неперервно диференційовними й незалежними в розглядуваній області. Маємо

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^m U_{\xi_k} \phi_{k x_i}, u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m U_{\xi_k \xi_l} \phi_{k x_i} \cdot \phi_{l x_j} + \sum_{k=1}^m U_{\xi_k} \phi_{k x_i x_j}$$

Позначимо  $\alpha_{ik} = \phi_{k x_i}$ . Тоді, підставивши знайдені похідні в рівняння (1.36), дістанемо

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \bar{a}_{kl} U_{\xi_k \xi_l} = F(\xi, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_m}), \quad (1.37)$$

де

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}; \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m).$$

Розглянемо квадратичну форму

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{ij}^0 y_i y_j, \quad (1.38)$$

коефіцієнти якої збігаються з коефіцієнтами рівняння (1.36) в деякій точці  $M(x^0)$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ .

Введемо нові змінні  $\eta_1, \dots, \eta_m$  за допомогою неособливого лінійного перетворення

$$y_i = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}^0 \eta_k. \quad (1.39)$$

Тоді для квадратичної форми дістанемо

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l,$$

де

$$\bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^0 \alpha_{ik}^0 \alpha_{jl}^0.$$

Отже, коефіцієнти головної частини рівняння (1.36) змінюються аналогічно коефіцієнтам квадратичної форми за лінійним перетворенням (1.39).

Відповідним вибором коефіцієнтів  $\alpha_{ik}^0$  в (1.39) квадратичну форму (1.38) можна звести до канонічного вигляду

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \eta_k^2,$$

де  $\lambda_k$  дорівнюють  $\pm 1$  або нулю, тобто

$$\bar{a}_{kl}^0 = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \lambda_k, & k = l. \end{cases}$$

Отже, якщо нові незалежні змінні  $\xi_k$  вибрати таким чином, щоб у точці  $M(x^0)$  коефіцієнти  $a_{ik} = a_{ik}^0$  (наприклад,  $\xi_k = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik}^0 x_i$ ), то рівняння (1.36) в точці  $M(x^0)$  зводиться до вигляду

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k U_{\xi_k \xi_k}(\xi) = F(\xi, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_m}). \quad (1.40)$$

Згідно із законом інерції для квадратичних форм число додатних, нульових і від'ємних коефіцієнтів  $\lambda_k$  інваріантне щодо неособливого лінійного перетворення, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду. У зв'язку з цим рівняння (1.36) в точці  $M(x^0)$  називають рівнянням:

- *еліптичного типу*, якщо в (1.40)  $\lambda_k = 1$  для всіх  $k = \overline{1, m}$ ;
- *параболічного типу*, якщо хоча б один із коефіцієнтів  $\lambda_k$  в (1.40) дорівнює нулю;
- *гіперболічного типу*, якщо всі коефіцієнти  $\lambda_k$  ненульові, але серед них є один коефіцієнт із знаком, протилежним знакам інших коефіцієнтів рівняння (1.40);
- *ультрагіперболічного типу*, якщо в (1.40) усі коефіцієнти ненульові, але  $r > 1$  коефіцієнтів є додатними, а  $m - r$  — від'ємними.

Зауважимо, що при  $m \geq 3$  рівняння (1.36) можна звести до канонічного вигляду тільки в заданій точці. Справді, для зведення рівняння (1.36) до канонічного вигляду в деякій області необхідно функції  $\phi_k(x)$  вибрати таким чином, щоб виконувались умови  $\bar{a}_{kl} = 0$  при  $k \neq l$ . Кількість цих умов дорівнює  $m(m-1)/2$ , що більше за число  $m$  функцій  $\phi_k(x)$ , які вибираються. При  $m = 3$  недіагональні елементи ми могли б перетворити в нуль, але тоді діагональні елементи могли б бути різними, а  $\bar{a}_{kk}$  мають дорівнювати  $\lambda_k$ .

◇ **Зауваження 1.2.** Якщо рівняння (1.36) є лінійним зі сталими коефіцієнтами, то воно зводиться до канонічної форми в усій області визначення й має вигляд

$$\sum_{k=1}^m (\lambda_k U_{\xi_k \xi_k} + b_k U_{\xi_k}) + cU = F_1(\xi). \quad (1.41)$$

Нехай усі  $\lambda_k \neq 0$ . Тоді, ввівши нову невідому функцію  $v(\xi)$  за формулою

$$U = v \exp \left( -0,5 \sum_{k=1}^m \lambda_k^{-1} b_k \xi_k \right),$$

рівняння (1.41) зведеться до вигляду

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k v_{\xi_k \xi_k} + c_1 v = F_1(\xi) \exp \left( 0,5 \sum_{k=1}^m \lambda_k^{-1} b_k \xi_k \right).$$

■ **Приклад 1.8.** Визначимо тип і зведемо до канонічного вигляду ДРЧП

$$u_{x_1 x_1}(x_1, x_2, x_3) + 2u_{x_1 x_2} + 2u_{x_2 x_2} - 2u_{x_2 x_3} + 3u_{x_3} = 0. \quad (1.42)$$

Методом Лагранжа знаходимо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

невиродженого перетворення, яке зводить відповідну квадратичну форму

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_2 x_3$$

до канонічного вигляду.

Тоді, поклавши  $\Xi = A^T X$ , де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},$$

дістанемо

$$U_{\xi_1 \xi_1} + U_{\xi_2 \xi_2} - U_{\xi_3 \xi_3} + 3U_{\xi_3} = 0.$$

Підстановка

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp \left( \frac{3}{2} \xi_3 \right)$$

остаточно дає

$$v_{\xi_1 \xi_1} + v_{\xi_2 \xi_2} - v_{\xi_3 \xi_3} + \frac{9}{4} v = 0.$$

Отже, (1.42) є рівнянням гіперболічного типу.

## 1.5 Класифікація ДРЧП вищого порядку

Використовуючи позначення п. 1.1, розглянемо диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m=n} a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(x) D^\alpha u(x) &= \\ &= f(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}, \dots, D^s u(x)), \end{aligned} \quad (1.43)$$

де  $|s| < |\alpha|$ .

За умови неперервності коефіцієнтів  $a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(x)$  у розглядуваній області  $D$  важливу роль у теорії ДРЧП вигляду (1.43) відіграє форма порядку  $n$

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m=n} a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(x) \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_m^{\alpha_m} \quad (1.44)$$

відносно дійсних параметрів  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , яку називають *характеристичною формою*, що відповідає рівнянню (1.43).

За допомогою форми (1.44) вводиться наступна класифікація ДРЧП (1.43).

Рівняння (1.43) у точці  $x^0 \in D$  називається *рівнянням параболічного типу*, якщо неособливим афінним перетворенням параметрів  $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ ,  $i = \overline{1, m}$  характеристична форма (1.44) у точці  $x^0$  зводиться до форми, яка містить тільки  $l$ ,  $0 < l < m$  параметрів  $\mu_i$ . У цьому разі кажуть іще, що рівняння (1.44) у точці  $x^0 \in D$  *параболічно вироджується*.

За відсутності параболічного виродження рівняння (1.43) у точці  $x^0 \in D$  називається *еліптичним*, якщо характеристичне рівняння

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0 \quad (1.45)$$

не має дійсних коренів, крім  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Якщо ж після деякого неособливого афінного перетворення параметрів  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  характеристичної форми (1.44) в точці  $x^0 \in D$  для одного з них за довільних значень усіх інших дістають рівно  $n$  дійсних коренів (не обов'язково простих) перетвореного характеристичного рівняння (1.45), то рівняння (1.43) у точці  $x^0$  називається *гіперболічним*.

Рівняння (1.43) в області  $D$  називається *параболічним*, *еліптичним* або *гіперболічним*, якщо воно належить відповідно до одного й того типу в усіх її точках.

■ **Приклад 1.9.** Розглянемо рівняння малих прогинів поперечно навантаженої пластинки

$$Lu(x, y) \equiv \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1.46)$$

де  $q$  — інтенсивність рівномірно розподіленого по поверхні пластинки навантаження;  $D$  — жорсткість пластинки при згинанні.

Відповідна характеристична форма матиме вигляд

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2,$$

а отже, рівняння (1.46) є еліптичним у розглядуваній області.

У загальному випадкові рівняння

$$\sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_k^2} = f(x, u(x), \dots, D^s u(x_s)), |s| \leq 3$$

має характеристичну форму

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \right)^2$$

і є еліптичним в області його задання.

Прикладом параболічного рівняння може бути рівняння поперечних коливань пластинки

$$Lu(t, x, y) = \frac{2h\rho}{D} \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial t^2}, \quad (1.47)$$

де  $h, \rho$  — сталі. Справді, відповідне характеристичне рівняння запишеться у вигляді  $\phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 = 0$ , і, отже, рівняння (1.47) є параболічним.

Диференціальне рівняння

$$Lu(t, x, y) - 3 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^2 \partial x^2} - 3 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^4} = f(t, x, y)$$

в області його задання є гіперболічним, оскільки його характеристична форма

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &\equiv \lambda_2^4 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2 + \lambda_3^4 - 3\lambda_1^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 2\lambda_1^4 = \\ &= (\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1^2), \end{aligned}$$

очевидно, задовольняє всі відповідні умови.

Зазначимо, однак, що рівняння

$$Lu(t, x, y) - \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^4} = f(t, x, y) \quad (1.48)$$

не належить до жодного з наведених вище типів. Справді, відповідна характеристична форма записується у вигляді

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 - \lambda_1^4$$

й тільки два дійсних корені відносно  $\lambda_1$  за фіксованих  $\lambda_2, \lambda_3$ . В такому разі казатимемо, що ДРЧП належить до проміжного типу.

## Задачі для самостійного розв'язування

1. З'ясувати, чи є наведені рівності ДРЧП та ідентифікувати їх:

а)  $\cos(u_x + u_y) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = 0$ ;

б)  $x^2 u_{xy^2} - (u_x)^5 - 5u = 0$ ;

в)  $\frac{\partial}{\partial x}(x u_{y^2 x} - u_y) + 5u u_{x^2} = 0$ ;

г)  $\log|u_x u_y| - \log|u_x| - \log|u_y| + 5u - 6 = 0$ ;

д)  $\frac{\partial}{\partial x} tgu - u_x \sec^2 u - 3u + 2 = 0$ ;

е)  $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0$ ;

є)  $(u_x)^{-1} u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0$ ;

ж)  $x u_{y^2 x} - 5(u_{x^2})^2 + xyu = \ln|x|$ ;

з)  $yu_y e^{yu} - \frac{\partial}{\partial y} e^{yu} + 3 = 0$ ;

и)  $(shx)u_{xy} - xu_{yy} + u_x + \ln(y^2 + 1) = 0$ .

2. Визначити тип ДРЧП і звести їх до канонічного вигляду:

а)  $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u^2 = 0$ ;

б)  $u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} + (\sin^2 x)u_{yy} - (ctgx)u_x = 0$ ;

в)  $e^y u_{xx} + e^x u_{yy} - 0, 5e^y u_x - 0, 5e^x u_y = 5xy$ ;

г)  $u_{xx} - 2e^{0,5x} u_{xy} - u_y + u_x \cos u = 0$ ;

д)  $u_{xx} + 2(\sin y)u_{xy} + (1 + \sin^2 y)u_{yy} - x \ln|y| = 0$ ;

е)  $y^2 u_{xx} - 4xyu_{xy} + 4x^2 u_{yy} + 3u_x = 0$ ;

є)  $(ctg^2 x)u_{xx} - 2(ctgx)u_x + u_{yy} + (\operatorname{cosec}^2 x)u_y = e^u$ ;

ж)  $u_{xx} - 2(\cos x)u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$ ;

з)  $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ;

и)  $(shx)u_{xy} - xu_{yy} + u_x + \ln(y^2 + 1) = 0$ ;

і)  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$ ;

к)  $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 3u_y = 0$ ;

л)  $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 4u$ ;

м)  $u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_y + u_x - u = 0$ ;

н)  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 5u_y + u_x = 0$ ;

о)  $u_{xy} + u_{yy} + 3u_y - 4u_x = 0$ ;

п)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_x + 5u_y = 0$ ;

р)  $u_{xy} + 2u_{xx} - u_x + u_y + 2u = 0$ ;

с)  $u_{xx} + 2u_{yy} - u_{xz} + u_x - u_z = 0, u = u(x, y, z)$ ;

т)  $u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} + u_y - u_x = 0$ ;

у)  $u_{yy} - 3u_{xy} + u_{yz} - u_z + u_y = 0$ ;

ф)  $u_{xx} + 9u_{yy} - 3u_{yz} = 5u_x$ ;

х)  $2u_{yy} - u_{yz} + u_{xy} - 5u_z = u$ ;

ц)  $2u_{xy} + u_{yz} - 3u_y + u = 0$ ;

ч)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yz} + 5u_x = 0$ .

## РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

До рівнянь гіперболічного типу найчастіше приводять фізичні задачі, пов'язані з процесами коливання, наприклад задача про коливання струни, мембрани, газу, про електромагнітні коливання тощо. Характерною особливістю цих процесів є скінченна швидкість їх поширення.

## Тема 1

ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО  
РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

## 2.1 Коливання струни

► **Означення 2.1.** *Струною називають тверде тіло, довжина якого значно перевищує всі інші його розміри.*

Процес коливання струни можна описати, задавши положення точок струни в різні моменти часу (рис. 2.1).

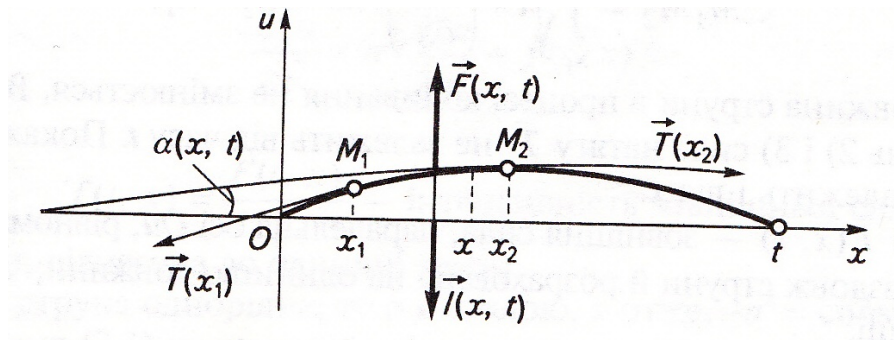


Рис. 2.1:

Для визначення положення струни в момент часу  $t$  достатньо задати компоненти вектора зміщення

$$U(t, x) = \{u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)\}.$$

Розглянемо простішу задачу. Нехай:

1. Коливання відбуваються в одній площині  $xOy$  і вектор зміщення  $U(t, x)$  перпендикулярний до осі  $Ox$  у довільний момент часу  $t$ . Тоді процес коливання можна описати однією функцією  $u(t, x)$ , яка характеризує вертикальне зміщення струни.



2. Струна абсолютно гнучка (сила натягу  $\vec{T}$  значно перевищує силу опору струни  $\vec{R}$ , і тому вважаємо, що  $|\vec{R}| \approx 0$ ) і пружна (підпорядковується закону Гука: сила натягу прямо пропорційна видовженню).
3. Сили опору навколишнього середовища дорівнюють нулю й коливання струни малі, тобто  $\alpha^2(x, t) \approx 0$ , де  $\alpha(x, t)$  — гострий кут між дотичною до профілю струни в точці  $x$  у момент часу  $t$  і віссю  $Ox$ .

Тоді з розкладу

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

випливає, що  $\sin\alpha \approx \alpha$ . Із рівності

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

маємо  $\cos\alpha = 1$ . Беручи до уваги, що  $\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha = (1 - \cos\alpha)\operatorname{tg}\alpha = 0$ , дістаємо

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \operatorname{tg}^2\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Таким чином,

$$\cup M_1 M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx = x_2 - x_1,$$

а отже, довжина струни в процесі коливання не змінюється. Внаслідок припущень 2) і 3) сила натягу  $\vec{T}$  не залежить від часу  $t$ . Покажемо, що вона не залежить і від  $x$ .

Нехай  $\vec{F}(x, t)$  — зовнішня сила, паралельна осі  $Ou$ , рівномірно розподілена вздовж струни й розрахована на одиницю довжини;  $\vec{I}(x, t)$  — сила інерції.

Розглянемо проміжок струни  $(x_1, x_2)$ . На підставі принципу Д'Аламбера сума проєкцій усіх сил, що діють на проміжок струни  $(x_1, x_2)$ , на відповідну вісь координат дорівнює нулю. Маємо

$$\operatorname{Pr}_{Ox}\vec{F} = \operatorname{Pr}_{Ox}\vec{I} = 0,$$

$$\operatorname{Pr}_{Ox}\vec{T}(x_1) = -T(x_1)\cos\alpha(x_1, t) \approx -T(x_1),$$

$$\operatorname{Pr}_{Ox}\vec{T}(x_2) = T(x_2)\cos\alpha(x_2, t) \approx T(x_2).$$

Отже,

$$T(x_2) - T(x_1) = 0 \Rightarrow T(x_2) = T(x_1).$$

Через довільність точок  $x_1$  і  $x_2$  з останньої рівності випливає, що  $T(x) = T = \text{const}$ .

Аби вивести рівняння, яке описує процес коливання струни, знайдемо суму проєкцій усіх сил, що діють на проміжку  $(x_1, x_2)$ , на вісь  $Ou$ .  
Маємо

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dt = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - T \sin \alpha(x_1) + T \sin \alpha(x_2) = 0,$$

де  $\rho(x)$  — лінійна густина струни. Оскільки

$$T[\sin \alpha(x_2) - \sin \alpha(x_1)] = T \left[ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right] = T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

то

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ F(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dx = 0.$$

З огляду на довільність меж інтегрування  $x_1$  і  $x_2$  з останньої рівності дістаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad (2.1)$$

де  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ ;  $f(t, x) = \frac{F(t, x)}{\rho}$  — інтенсивність зовнішньої сили (щільність сили, віднесена до одиниці маси).

Якщо струна однорідна, то  $\rho$  є сталою, а отже,  $a^2 = \text{const}$ .

Рівняння (2.1) називається *рівнянням коливання струни*.

Якщо зовнішньої сили немає ( $\vec{F}(t, x) \equiv 0$ ), то приходимо до рівняння вільних коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (2.2)$$

◇ **Зауваження 2.1.** Якщо проміжок струни  $M_1 M_2$  розташований, як на рис. 2.2, то сума проєкцій  $\vec{T}_1$  і  $\vec{T}_2$  на вісь  $Ou$  дорівнюватиме  $-T(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$ .

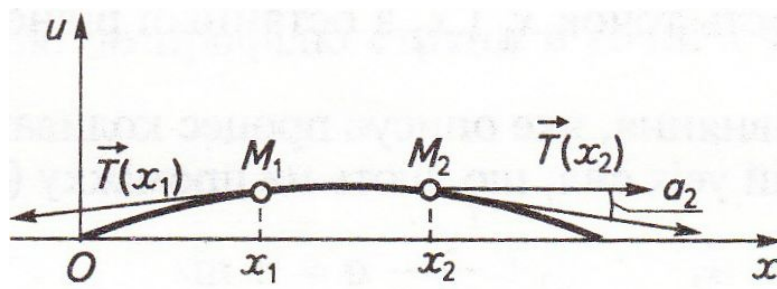


Рис. 2.2:

Але маємо  $-\sin \alpha_2 = \text{tg}(180^\circ - \alpha_2) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2}$ , а отже,

$$-T(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) = T \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right).$$

◇ **Зауваження 2.2.** Якщо струна коливається в середовищі з опором, пропорційним швидкості, то її рівняння запишеться у вигляді

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - hu_t + f(x, t), h = \text{const}.$$

## 2.2 Хвильові процеси в дво- й тривимірному середовищах

□ **Рівняння коливання мембрани.**

► **Означення 2.2.** *Мембраною* називають пружну натягнуту плівку, яка вільно прогинається.

Нехай у стані спокою мембрана займає деяку область  $D$  у площині  $xOy$ , а після виведення якимось чином зі стану спокою починає коливатися так, що всі її точки рухаються перпендикулярно до площини  $xOy$  (поперечні коливання мембрани).

Позначивши через  $u(t, x, y)$  положення точки мембрани  $(x, y)$  у момент часу  $t$ , через  $F(x, y, t)$  — рівномірно розподілену зовнішню силу, розраховану на одиницю площини, й розглядаючи надалі тільки малі коливання мембрани (квадратами  $u, u_x, u_y$  та їх добутками нехтуємо), можна показати, що диференціальне рівняння таких поперечних коливань мембрани набере вигляду

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{F(x, y, t)}{\rho}. \quad (2.3)$$

Якщо мембрана однорідна ( $\rho = \text{const}$ ), то  $a = \text{const}$ .

У випадку вільних коливань ( $F(x, y, t) \equiv 0$ ) рівняння мембрани є однорідним:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}). \quad (2.4)$$

Вираз  $\square u = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2}u_{tt}$  називається *оператором Лоренца*.

Використовуючи його, рівняння (2.4) запишемо у вигляді

$$\square u + \frac{F(x, y, t)}{a^2 \rho} = 0.$$

□ **Рівняння гідродинаміки й поширення звукових хвиль.** У гідродинаміці рідину або газ розглядають як суцільне середовище. Це означає, що довільний малий елемент об'єму рідини або газу вважається настільки великим, що містить дуже багато молекул. Якщо, наприклад, досліджується переміщення деякої частинки рідини, то при цьому йдеться про переміщення не окремої молекули, а цілого елемента об'єму, котрий містить багато молекул, але розглядається в гідродинаміці як точка.

Припустимо, що однорідна маса газу (або рідини) міститься всередині твердої посудини, яка рухається заданим чином у просторі. Нехай у початковий момент часу частинкам рідини надано деякий рух такий, що за подальшого руху рідкої маси проекції  $v_x, v_y, v_z$  швидкості кожної її точки на прямокутні

осі координат  $x, y, z$  є частинними похідними за відповідними координатами деякої функції  $u(t, x, y, z)$ , тобто рідина дістає рух із потенціалом швидкостей  $u(t, x, y, z)$ .

У гідродинаміці виводиться так зване рівняння газу (або рідини), акустики:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad (2.5)$$

де  $a^2$  — деяка стала, що залежить від фізичних властивостей даного газу (рідини).

Зазначимо, що за відомого потенціалу швидкостей процес руху газу (рідини) повністю визначений. Справді, процес руху газу (рідини) вважається визначеним, якщо відомі вектор швидкості  $\vec{v}$  у кожній точці  $(x, y, z)$  у момент часу  $t$ , густина  $\rho(x, y, z, t)$  і тиск  $p(x, y, z, t)$ . Але

$$\vec{v} = -gradu, \quad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{a^2}u_t, \quad p = p_0 + \rho_0 u_t,$$

де  $\rho_0$  і  $p_0$  — початкові густина й тиск відповідно.

□ **Задачі теорії світла, електрики й магнетизму.** Введемо позначення:  $c$  — швидкість світла;  $\varepsilon$  — діелектрична стала;  $\lambda$  — коефіцієнт електропровідності;  $\mu$  — коефіцієнт електричної проникності.

Закон поширення електричних хвиль у заданому середовищі за теорією Герца–Максвелла характеризується вектором  $u(t, x, y, z)$  електричних сил, який має задовольняти наступне ДРЧП:

$$c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = \varepsilon\mu u_{tt} + 4\pi\lambda\mu u_t. \quad (2.6)$$

Поклавши  $\frac{c^2}{\varepsilon\mu} = a^2$ ,  $\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} = -b$ , дістанемо

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + bu_t. \quad (2.7)$$

Якщо середовище, в якому відбувається процес, є вільним ефіром, то  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 0$ , і ми приходимо до рівняння (2.5).

Зазначимо, що величина  $4\pi\lambda\mu u_t$  характеризує втрату електричних сил із плином часу, або так звану абсорбцію.

Рівняння (2.1)–(2.6) називаються *хвильовими*. Застосувавши оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

хвильові рівняння можна записати у вигляді

$$u_{tt}(t, x) = a^2\Delta u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.8)$$

Введемо нові незалежні змінні

$$\tau = at, \quad x_i = x_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Підстановка (2.9) є неособливою, оскільки

$$\begin{vmatrix} a, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Маємо  $u_{tt} = a^2 u_{\tau\tau}$ , тому рівняння (2.8) запишеться у вигляді

$$u_{\tau\tau}(\tau, x) = \Delta u(\tau, x) + \frac{1}{a^2} \tilde{f}(\tau, x),$$

тобто хвильові рівняння належать до гіперболічного типу.

Із наведених прикладів випливає, що рівняння гіперболічного типу описують хвильові процеси, проте не всякі (скажімо, до винятків належить процес поперечних коливань стержня).

Оскільки взагалі ДРЧП мають нескінченну кількість розв'язків, то для однозначної характеристики того чи іншого хвильового процесу потрібно до рівняння приєднати деякі додаткові умови, які накладаються на невідому функцію та її похідні, тобто треба скласти математичну модель, яка однозначно описувала б відповідне явище природи.

## *Тема 2*

### ***ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ***

#### **2.3 Вільні коливання нескінченної струни.**

##### **Метод характеристик (метод поширення хвиль)**

Нехай розміри розглядуваної області значно перевищують масштаби досліджуваного явища. Тоді кажуть, що відповідне явище відбувається в необмеженій області. Приклад такої ситуації — коливання деякого проміжку досить довгої струни, який знаходиться на достатньо великій відстані від її кінців, за невеликий інтервал часу. Очевидно, що в цьому разі умови на кінцях струни не впливають на перебіг хвильового процесу, й він залежить від початкового стану та початкових швидкостей.

Отже, приходимо до математичної задачі: в області

$$B = \{(t, x) | t > 0, x \in E_n\}$$

знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \tag{2.10}$$

який задовольняє умови

$$u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x), x \in E_n, \quad (2.11)$$

де  $f(t, x), \varphi(x), \psi(x)$  — задані функції.

Умови (2.11) називаються *початковими*, а задача (2.10), (2.11) — *задачею Коші*.

Покажемо, що задача Коші (2.10), (2.11) є математичною моделлю хвильового процесу в необмеженій області. Для цього доведемо:

- існування та єдиність розв'язку задачі Коші;
- його неперервну залежність від вихідних даних (початкових умов  $\varphi(x), \psi(x)$  та правої частини  $f(t, x)$  рівняння (2.10)), тобто, якщо  $u_1(t, x), u_2(t, x)$  є розв'язками задач

$$\begin{cases} u_{1tt}(t, x) = a^2 \Delta u_1(t, x) + f_1(t, x), (t, x) \in B, \\ u_1(0, x) = \varphi_1(x), u_{1t}(0, x) = \psi_1(x), x \in E_n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2tt}(t, x) = a^2 \Delta u_2(t, x) + f_2(t, x), (t, x) \in B, \\ u_2(0, x) = \varphi_2(x), u_{2t}(0, x) = \psi_2(x), x \in E_n; \end{cases}$$

відповідно, то  $\forall \varepsilon > 0$  і  $t_1 > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$  і цілочисловий вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , що з умов

$$|D^k[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]| < \delta, |D^k[\psi_1(x) - \psi_2(x)]| < \delta, x \in E_n,$$

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n), k_i = \overline{0, \alpha_i}, i = \overline{1, n};$$

$$|f_1(t, x) - f_2(t, x)| < \delta, (t, x) \in B_1 = \{(t, x) | 0 \leq t \leq t_1, x \in E_n\}$$

впливає справедливість в області  $B_1$  нерівності

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon, (t, x) \in B_1.$$

► **Означення 2.3.** Якщо задача Коші (2.10), (2.11) в області  $B$  має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від вихідних даних, то її називають *коректно поставленою*.

Розглянемо задачу: в області

$$B = \{(t, x) | t \in (0, +\infty), x \in (-\infty, +\infty)\}$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (2.12)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x), x \in (-\infty, +\infty), \quad (2.13)$$

де  $\varphi(x)$  — задана функція класу  $C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ .

Для розв'язання задачі (2.12), (2.13) зведемо рівняння (2.12) до канонічного вигляду. Маємо

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \Leftrightarrow (dx - a dt)(dx + a dt) = 0,$$

тобто

$$dx - a dt = 0, dx + a dt = 0,$$

Інтегруючи останні рівняння, дістаємо

$$C_1 = x - at, C_2 = x + at.$$

Вводимо нові незалежні змінні:

$$\begin{aligned} \xi &= x + at, \eta = x - at, \\ u_x &= U_\xi + U_\eta, u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ u_t &= aU_\xi - aU_\eta, u_{tt} = a^2U_{\xi\xi} - 2a^2U_{\xi\eta} + a^2U_{\eta\eta}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (2.12) і звівши подібні члени, матимемо

$$U_{\xi\eta} = 0. \quad (2.15)$$

Припустивши, що шуканий розв'язок існує, й підставивши його в рівняння (2.12), дістанемо тотожність. Але тоді й канонічна форма (2.15) буде тотожністю. Інтегруючи (2.15) за  $\xi$ , дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta),$$

де  $f(\eta)$  — довільна функція. Інтегруючи останню тотожність за  $\eta$ , матимемо

$$U(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Повертаючися до старих незалежних змінних, згідно з (2.14) дістанемо

$$U(t, x) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \quad (2.16)$$

де  $f_1(\xi)$  і  $f_2(\xi)$  — довільні функції.

Таким чином, якщо розв'язок рівняння (2.12) існує, то він має вигляд (2.16).

З іншого боку, якщо функції  $f_1(x + at)$ ,  $f_2(x - at)$  неперервні разом із похідними до другого порядку включно в розглядуваній області, то вони є

розв'язками рівняння (2.12), а отже, формула (2.16) дає загальний розв'язок цього рівняння.

Загальний розв'язок рівняння вільних коливань струни вперше дістав Ж. Л. Д'Аламбер у 1747 р.

Визначимо функції  $f_1(x + at)$  і  $f_2(x - at)$  таким чином, щоб розв'язок (2.16) задовольняв початкові умови (2.13). В силу останніх, маємо

$$\begin{cases} u(0, x) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(0, x) = a[f_1'(x) - f_2'(x)] = \psi(x), \end{cases}$$

або, зінтегрувавши друге рівняння, дістанемо

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C, \end{cases}$$

де  $x_0$  — фіксована точка, тобто

$$f_1(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} C,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - \frac{1}{2} C.$$

Підставивши знайдені функції в (2.16), приходимо до формули Д'Аламбера

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, \quad (2.17)$$

яку в 1748 р. дістав Л. Ейлер.

Покажемо: якщо  $\varphi(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ , то формула Д'Аламбера (2.17) є розв'язком задачі Коші (2.12), (2.13), і цим самим доведемо його існування.

Маємо

$$u_t = \frac{a}{2} [\varphi_\xi(x + at) - \varphi_\eta(x - at)] + \frac{1}{2} [\psi(x + at) + \psi(x - at)],$$

$$u_{tt} = \frac{a^2}{2} [\varphi_{\xi\xi}(x + at) + \varphi_{\eta\eta}(x - at)] + \frac{a}{2} [\psi_\xi(x + at) - \psi_\eta(x - at)],$$

$$u_x = \frac{1}{2} [\varphi_\xi(x + at) + \varphi_\eta(x - at)] + \frac{1}{2a} [\psi(x + at) - \psi(x - at)],$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2} [\varphi_{\xi\xi}(x + at) + \varphi_{\eta\eta}(x - at)] + \frac{1}{2a} [\psi_\xi(x + at) - \psi_\eta(x - at)].$$



Підставивши знайдені похідні в рівняння (2.12), дістанемо

$$u_{tt} \equiv a^2 u_{xx},$$

а підставлення функції (2.17) у початкові умови (2.13) дає

$$u(0, x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(x)] + \frac{1}{2a} \int_x^x \psi(z) dz \equiv \varphi(x),$$

$$u_t(0, x) = \frac{a}{2}[\varphi'(x) - \varphi'(x)] + \frac{1}{2}[\psi(x) - \psi(x)] \equiv \psi(x),$$

тобто (2.17) є розв'язком задачі Коші (2.12), (2.13). Із побудови розв'язку (2.17) випливає, що він єдиний.

**Теорема 2.1.** (про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних).

Нехай  $u_1(t, x)$  і  $u_2(t, x)$  є розв'язками задач Коші:

$$u_{1tt} = a^2 u_{1xx}, u_{2tt} = a^2 u_{2xx}, t > 0, -\infty < x < +\infty,$$

$$u_1(0, x) = \varphi_1(x), u_2(0, x) = \varphi_2(x), -\infty < x < +\infty,$$

$$u_{1t}(0, x) = \psi_1(x), u_{2t}(0, x) = \psi_2(x),$$

а  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0$  і  $t_1 > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon, t_1)$ , що як тільки  $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$ ,  $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$  при  $x \in (-\infty, +\infty)$ , то справедлива нерівність

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon,$$

$$-\infty < x < +\infty, t \leq t_1.$$

**Доведення.** Використовуючи формулу Д'Аламбера (2.17) для розв'язків  $u_1(t, x)$  і  $u_2(t, x)$ , дістаємо

$$\begin{aligned} u_1(t, x) - u_2(t, x) &= \frac{1}{2}[\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)] + \\ &+ \frac{1}{2}[\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} [\psi_1(z) - \psi_2(z)] dz. \end{aligned}$$

Тоді

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \frac{1}{2}|\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)| +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} |\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(z) - \psi_2(z)| dz < \\
& < \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta dz \leq \delta(1+t_1).
\end{aligned}$$

Якщо взяти  $\delta = \varepsilon/(1+t_1)$ , то нерівність

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon$$

виконуватиметься для всіх  $-\infty < x < +\infty, t \leq t_1$ .

Теорему доведено.

На практиці початкові значення дістають із досліду внаслідок вимірювань, і, природно, що вони неточні. Доведена теорема стверджує, що невеликі похибки в початкових умовах задачі Коші зумовлюють незначні зміни в її розв'язку.

Доведена теорема вказує також на один із шляхів побудови розв'язку задачі Коші, коли початкові функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  не задовольняють умови  $\varphi(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ .

Справді, нехай потрібно знайти розв'язок задачі Коші (2.12), (2.13), де функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  ненульові тільки на скінченних відрізках, неперервні при  $x \in (-\infty, +\infty)$ , а функція  $\varphi(x)$  має похідну першого порядку. Ці функції можна рівномірно апроксимувати диференційовними функціями  $\varphi_n(x)$  і  $\psi_n(x)$  так, що

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} \varphi(x), \quad \psi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} \psi(x),$$

причому  $\varphi_n(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\psi_n(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ .

Якщо за початкові умови в задачі Коші взяти функції  $\varphi_n(x)$  і  $\psi_n(x)$ , то вони визначатимуть єдиний розв'язок  $u_n(t, x)$ , який дається формулою Д'Аламбера.

Оцінимо різницю розв'язків  $u_{n+k}(t, x) - u_n(t, x)$ . Унаслідок рівномірної збіжності послідовностей  $\{\varphi_n(x)\}$  і  $\{\psi_n(x)\} \forall \varepsilon > 0$  і  $t_1 > 0 \exists N, \forall n > N$  і додатних  $k$  виконуються нерівності

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n+k}(x)| < \frac{\varepsilon}{1+t_1}, \quad |\psi_n(x) - \psi_{n+k}(x)| < \frac{\varepsilon}{1+t_1}$$

для всіх  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Згідно з доведеною теоремою для всіх  $t \leq t_1$  і  $x \in (-\infty, +\infty)$  також виконуватимуться нерівності

$$|u_{n+k}(t, x) - u_n(t, x)| < \varepsilon$$

для довільних  $n > N$  і цілих додатних  $k$ . Але це означає, що послідовність розв'язків  $\{u_n(t, x)\}$  рівномірно збігається до деякої функції  $u(t, x)$  при  $t \leq t_1$

і  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Ця функція називається *узагальненим розв'язком задачі Коші* (2.12), (2.13). При цьому

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_n(x - at) + \varphi_n(x + at)] + \\ + \frac{1}{2a} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-at}^{x+at} \psi_n(z) dz = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

Очевидно, в цьому випадкові  $u(0, x) = \varphi(x)$ ,  $u_t(0, x) = \psi(x)$ , а отже, й узагальнений розв'язок задачі Коші дається формулою Д'Аламбера.

Зауважимо, що розглянуту задачу можна розв'язати й інакше, скориставшись узагальненими функціями та їх згортками. Але ми на цьому не зупинятимемося. Надалі для нас важливо буде не те, який із розв'язків дається формулою Д'Аламбера, а те, що малі відхилення в початкових умовах спричиняють малі відхилення добутого розв'язку від істинного.

Розглянемо фізичну інтерпретацію розв'язку задачі Коші. Спочатку дамо фізичну інтерпретацію загального розв'язку рівняння вільних коливань струни (рис. 2.3).

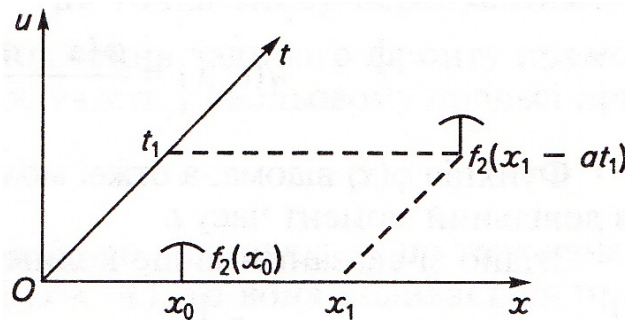


Рис. 2.3:

Для цього розглянемо розв'язок рівняння (2.12) вигляду  $u = f_2(x - at)$ . Нехай  $x_0$  — деяка точка. Припустимо, що з цієї точки в додатному напрямі осі  $Ox$  у момент часу  $t = 0$  починає рухатися спостерігач зі швидкістю  $a$ . В момент часу  $t = t_1$  він перебуватиме в точці  $x_1 = x_0 + at_1$ . Відхилення, яке спостерігач зафіксує в точці  $x_1$  у момент часу  $t = t_1$ , становитиме  $u = f_2(x_1 - at_1) = f_2(x_0)$ .

Таким чином, спостерігач у довільний момент часу бачитиме в точці, де він знаходиться, одне й те саме відхилення, що дорівнює  $f_2(x_0)$ . Отже, початковий профіль  $u(x, 0) = f_2(x)$  рухатиметься зі швидкістю  $a$  в додатному напрямі осі  $Ox$  як жорстка система, не змінюючи форми. Внаслідок цього розв'язок  $u = f_2(x - at)$  називають *прямою біжучою хвилею*.

Аналогічно можна інтерпретувати розв'язок  $u = f_1(x + at)$ . Він називається *зворотною біжучою хвилею*. При цьому профіль струни рухається як жорстка система у від'ємному напрямі осі  $Ox$  зі швидкістю  $a$ .

Таким чином, загальний розв'язок (2.16) рівняння (2.12) представляється у вигляді суперпозиції (накладання) прямої та зворотної біжучих хвиль, а тому метод його відшукування іноді називаються *методом поширення хвиль*.

Виводячи рівняння (2.12), ми поклали  $a = \sqrt{T/\rho}$ . Але  $a$  є швидкістю поширення хвиль по струні. Внаслідок цього можемо зробити висновок: швидкість поширення хвиль по струні обернено пропорційна квадратному кореню від густини й прямо пропорційна квадратному кореню від натягу струни.

Перейдемо до фізичної інтерпретації формули Д'Аламбера (2.17) й окремо розглянемо випадки, коли початкові відхилення дорівнюють нулю ( $\varphi(x) \equiv 0$ ) і коли початкові швидкості дорівнюють нулю ( $\psi(x) \equiv 0$ ). Загальний випадок буде суперпозицією обох випадків.

□ **Поширення хвиль відхилення.** Нехай початкові швидкості дорівнюють нулю. Тоді з (2.17) дістанемо

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}. \quad (2.18)$$

Функція  $\varphi(x)$  відома, а отже, можемо обчислити положення струни в довільний момент часу  $t$ .

Згідно зі сказаним вище, коливання  $u(t, x)$  складаються з прямої  $\frac{1}{2}\varphi(x - at)$  і зворотної  $\frac{1}{2}\varphi(x + at)$  хвиль, які поширюються відповідно вправо й уліво зі швидкістю  $a$ , а в початковий момент часу  $t = 0$  профілі обох хвиль збігаються.

Припустимо, що початкові відхилення точок струни відмінні від нуля тільки на проміжку  $(-l, l)$ , а поза проміжком рівні нулю. Для геометричної ілюстрації наступних наших міркувань вважатимемо, що в початковий момент часу струна мала вигляд

$$u(0, x) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -l, \\ h \left(1 + \frac{x}{l}\right) & \text{при } -l \leq x \leq 0, \\ h \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } 0 < x < l, \\ 0 & \text{при } x \geq l. \end{cases}$$

Зобразимо графічно профілі струни в різні моменти часу (рис.2.4, 2.5).

Бачимо: якщо точка струни  $x$  знаходиться правіше проміжку  $(-l, l)$ , ( $x > l$ ), то при  $t < \frac{x-l}{a}$  вона перебуває в стані спокою ( $u(t, x) = 0$ ), тобто до точки  $x$  хвиля ще не дійшла. З моменту часу  $t_1 = \frac{x-l}{a}$  точка  $x$  струни почне коливатися (момент проходження переднього фронту прямої хвилі). Як тільки хвиля пройде через розглядувану точку, починаючи з моменту  $t_2 = \frac{x+l}{a}$ , ця точка знову перебуватиме в стані спокою ( $t_2$  – момент проходження заднього фронту прямої хвилі). Таким чином, точка  $x$  бере участь у хвильовому процесі при  $\frac{x-l}{a} < t < \frac{x+l}{a} \Rightarrow -l < x - at < l$ . Аналогічні міркування приводять нас до висновку: якщо точка знаходиться лівіше проміжку  $(-l, l)$  ( $x < -l$ ), то вона коливається при  $-l < x + at < l$ .

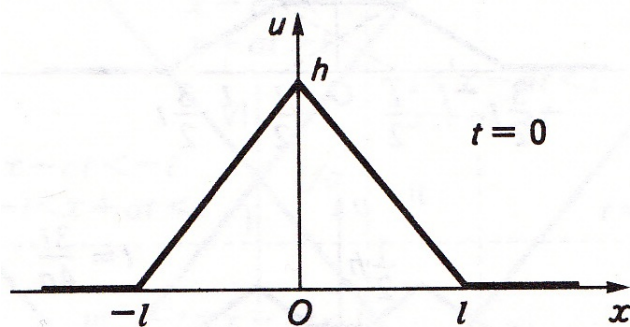


Рис. 2.4:

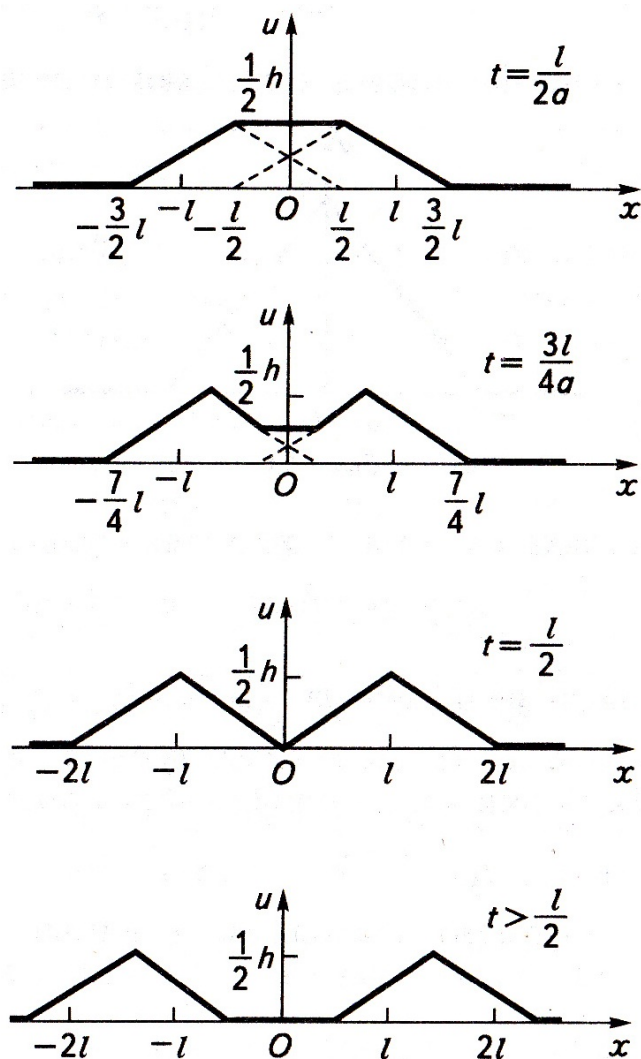


Рис. 2.5:

Нехай  $0 < x < l$ . Тоді через точку проходить як пряма, так і зворотна хвиля. Передній фронт обох хвиль розташований перед точкою. Задній фронт зворотної хвилі пройде через точку в момент  $t_1 = \frac{l-x}{a}$ , а задній фронт прямої хвилі — в момент  $t_2 = \frac{l+x}{a}$ . При  $t > t_2$  точка струни буде знаходитися в

стані спокою, тобто лежатиме на осі  $Ox$ . Аналогічно, якщо  $0 > x > -l$ , то коливання закінчаться при  $t = \frac{l-x}{a}$ , тобто коли через точку пройде задній фронт зворотної хвилі.

Отже, в кожній точці струни після проходження обох хвиль настає спокій.

Наочне зображення описаного процесу можна дістати, ввівши фазову (від грец.  $\varphi\alpha\sigma\iota\zeta$  — поява — величина, що характеризує стан коливального процесу в якийсь момент) площину  $xOt$  (рис.2.6). Кожна точка  $M(x, t)$  фазової площини (при  $t \geq 0$ ) відповідає точці струни з абсцисою  $x$  у момент часу  $t$ . В окремому випадкові точки осі абсцис ( $t = 0$ ) відповідають точкам струни в початковий момент часу. Точкам на прямій  $t = t_0$  відповідає положення точок струни у фіксований момент часу  $t = t_0$ , а точкам на прямій  $x = x_0$  — положення фіксованої точки  $x_0$  у різні моменти часу.

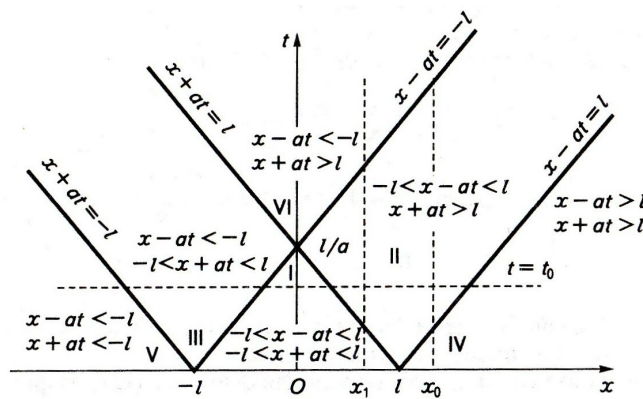


Рис. 2.6:

Побудуємо на фазовій площині характеристики  $x - at = \pm l$ ,  $x + at = \pm l$  при  $t \geq 0$ . При цьому півплощина  $t \geq 0$  розбивається на шість частин. Коливання проходять тільки в тих точках і в ті моменти часу, які відповідають зонам I, II, III. В зоні II діє тільки пряма хвиля, в зоні III — тільки зворотна, а в зоні I — і пряма і зворотна хвилі. В точках, які відповідають зонам IV і V, коливання ще не відбуваються, тому що до них ще не дійшли передні фронти відповідно прямої та зворотної хвиль, а в точках, які відповідають зоні VI, коливання уже немає, бо через них уже пройшли задні фронти прямої та зворотної хвиль.

Зафіксувавши довільну точку  $x_0$  струни і піднімаючись вгору по прямій  $x = x_0$ , легко записати вирази для функції  $u(x_0, t)$  в довільний момент часу  $t$ .

Нехай  $x_0 > l$ . Тоді при  $0 < t < \frac{x_0-l}{a}$  точка фазової площини знаходиться в зоні IV і  $u(x_0, t) = 0$ . Якщо  $\frac{x_0-l}{a} < t < \frac{x_0+l}{a}$ , то точка потрапляє в зону II (зону дії прямої хвилі) й

$$u(x_0, t) = \frac{1}{2}\varphi(x_0 - at).$$

Другий доданок  $\frac{1}{2}\varphi(x_0 + at)$  дорівнює нулю, оскільки аргумент  $x_0 + at > l$ , а  $\varphi(x) = 0$  при  $x > l$ . Нарешті, при  $t > \frac{x_0+l}{a}$  точка належить зоні VI і знову

$$u(x_0, t) = 0.$$

Легко перевірити, що якщо точка  $x_1 \in (0, l)$ , то

$$u(x_1, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x_1-at)+\varphi(x_1+at)}{2} & \text{при } 0 < t < \frac{l-x_1}{a}, \\ \frac{1}{2}\varphi(x_1-at) & \text{при } \frac{l-x_1}{a} \leq t \leq \frac{l+x_1}{a}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{l+x_1}{a} \end{cases}$$

Зрозуміло, що при переході від одного проміжку часу  $t$  до іншого, функція  $u(x, t)$  залишається неперервною.

Аналогічно можна одержати вирази для функції  $u(x, t)$  при фіксованих значеннях  $t$ . При  $t < l/a$  точка фазової площини при русі зліва направо перетинає послідовно зони V, III, I, II і IV, а при  $t > l/a$  замість I-ї зони вона перетне VI-у.

У першому випадкові ( $t_0 < l/a$ ) дістанемо

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -at_0 - l, \\ \frac{1}{2}\varphi(x + at_0) & \text{при } -at_0 - l \leq x < at_0 - l, \\ \frac{1}{2}[\varphi(x + at_0) + \varphi(x - at_0)] & \text{при } at_0 - l \leq x < l - at_0, \\ \frac{1}{2}\varphi(x - at_0) & \text{при } l - at_0 \leq x < l + at_0, \\ 0 & \text{при } x \geq l + at_0. \end{cases}$$

Аналогічно можна записати вираз  $u(x, t_1)$  при  $t_1 > l/a$ .

На підставі наведених вище міркувань, запишемо вирази для відхилення  $u(x, t)$ , коли початкові відхилення  $\varphi(x)$  задані рис.2.4.

У зв'язку з тим, що за переходу аргументів  $x + at$  і  $x - at$  через нуль вирази функцій змінюються, проведемо на фазовій площині додаткові прямі  $x \pm at = 0$ .

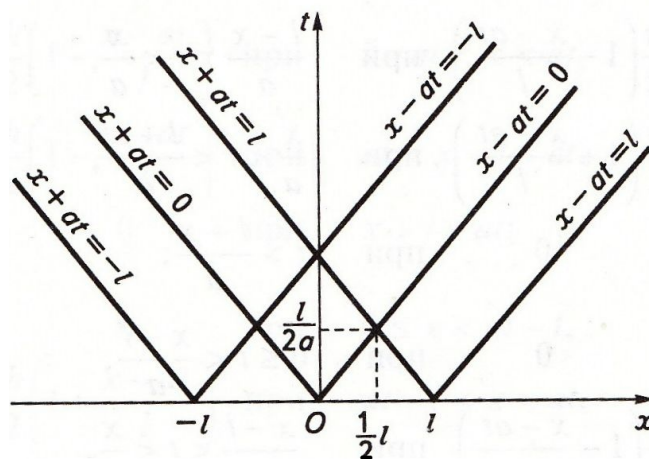


Рис. 2.7:

Із рис.2.7 видно, що точки струни, які лежать у проміжках  $(0, \frac{1}{2}l)$ ,  $(\frac{1}{2}l, l)$ ,  $(l, +\infty)$ , по-різному переходять із зони в зону (функція  $\varphi(x)$  парна, й тому ми розглядаємо тільки додатні значення  $x$ ):

- $x \in (0, \frac{1}{2}l)$

$$u(x, t) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } 0 \leq t < \frac{x}{a}, \\ h \left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{при } \frac{x}{a} < t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{l-x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{при } \frac{l+x}{a} < t < +\infty \end{cases}$$

- $x \in (\frac{1}{2}l, l)$

$$u(x, t) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } 0 \leq t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{l-x}{a} < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{l+x}{a}; \end{cases}$$

- $x > l$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \frac{x-l}{a}, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{x-l}{a} < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{l+x}{a}. \end{cases}$$

Щоб визначити форму хвилі у фіксований момент часу, треба виписати значення функції  $u(t, x)$  для трьох інтервалів часу:  $(0, \frac{l}{2a})$ ,  $(\frac{l}{2a}, \frac{l}{a})$ ,  $(\frac{l}{a}, +\infty)$  ( $x \geq 0$ ).

- $t \in (0, l/2a)$

$$u(t, x) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{при } 0 \leq x < at, \\ h \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } at < x < l - at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } l - at < x < l + at, \\ 0 & \text{при } x > l + at; \end{cases}$$

- $t \in (\frac{1}{2a}, \frac{1}{a})$

$$u(t, x) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{при } 0 \leq x < l - at, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } l - at < x < at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } at < x < l + at, \\ 0 & \text{при } x > l + at; \end{cases}$$

- $t > l/a$

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < at - l, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } at - l < x < at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } at < x < l + at, \\ 0 & \text{при } x > l + at. \end{cases}$$



У всіх випадках функція  $u(t, x)$  неперервна.

Зазначимо, що форми профілю струни, побудовані графічно й у вигляді останніх аналітичних виразів, збігаються.

□ **Поширення хвиль імпульсу.** Нехай початкові зміщення точок струни нульові й струна коливається за рахунок початкової швидкості. В цьому разі кажуть, що по струні поширюються хвилі імпульсу. Поклавши в (2.17)  $\varphi(x) = 0$ , дістанемо

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz = \Phi(x+at) - \Phi(x-at), \quad (2.19)$$

де  $\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz$ .

Як бачимо, й у цьому випадкові розв'язок  $u(t, x)$  складається з прямої  $-\Phi(x-at)$  і зворотної  $\Phi(x+at)$  хвиль. У початковий момент часу маємо

$$u(0, x) = \Phi(x+a \cdot 0) - \Phi(x-a \cdot 0) = 0.$$

Для графічного зображення хвильового процесу покладемо

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -l, \\ v_0 & \text{при } -l < x < l, \\ 0 & \text{при } x > l. \end{cases}$$

Функція  $\Phi(x)$  набуватиме таких значень:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x v_0 dx = \frac{v_0 x}{2a}, \quad -l \leq x \leq l,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^l v_0 dx = \frac{v_0 l}{2a}, \quad x > l,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^{-l} v_0 dx = -\frac{v_0 l}{2a}, \quad x < -l.$$

Введемо позначення  $h = \frac{v_0 l}{a}$  і графічно зобразимо профіль струни в різні моменти часу (рис. 2.8).

Нехай деяка точка  $x$  струни знаходиться правіше проміжку  $(-l, l)$ , тобто  $x > l$ . У початковий момент часу  $t = 0$  проміжок інтегрування  $(x-at, x+at)$  вироджується в точку  $x$ , а з плином часу він розширюється зі швидкістю  $a$ .

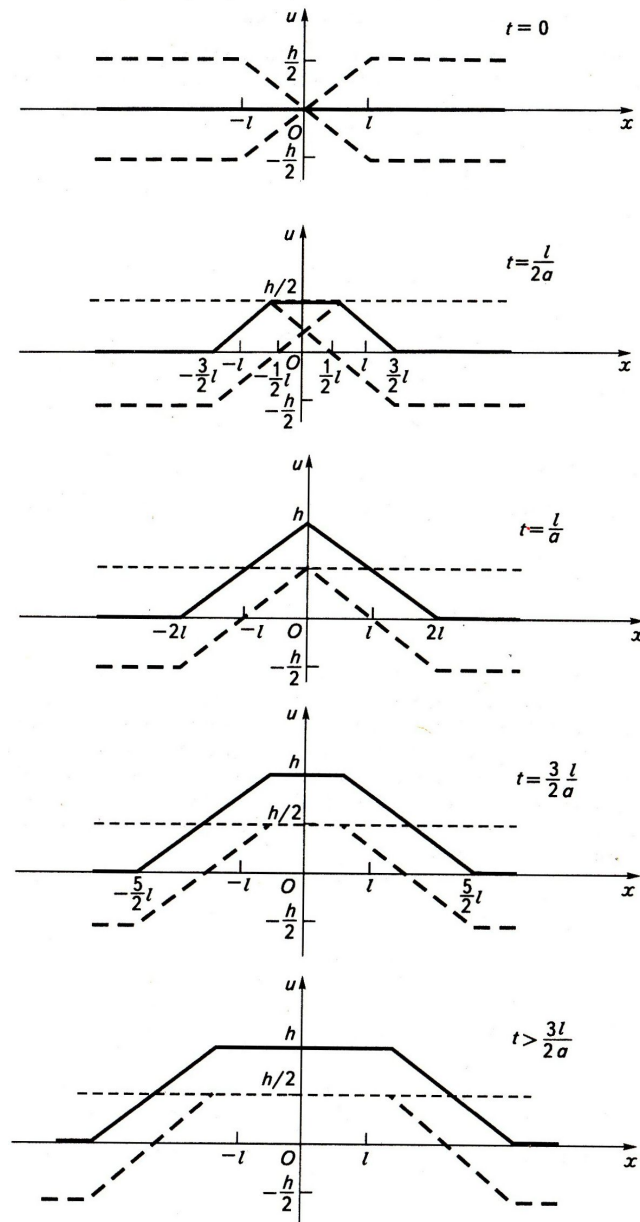


Рис. 2.8:

При  $t < \frac{x-l}{a}$  він не матиме спільних точок з  $(-l, l)$ , функція  $\psi(x)$  у ньому рівна нулю й формула (2.19) дасть  $u(x, t) = 0$ , тобто точка  $x$  знаходиться в стані спокою. Починаючи з моменту часу  $t = \frac{x-l}{a}$ , проміжок  $(x - at, x + at)$  налягатиме на  $(-l, l)$ , в якому  $\psi(x)$  відмінна від нуля ( $\psi = v_0$ ), і точка  $x$  почне коливатись. При  $t > \frac{x+l}{a}$  проміжок  $(x - at, x + at)$  буде повністю покривати інтервал  $(-l, l)$  і інтегрування по  $(x - at, x + at)$  буде зводитись до інтегрування по  $(-l, l)$ , тому що ззовні його  $\psi(x) = 0$ . Тоді при  $t > \frac{x+l}{a}$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{-l}^l \psi(x) dx = \frac{lv_0}{a}.$$

Аналогічні міркування можна навести і для точок, які знаходяться зліва від

проміжку  $(-l, l)$ , коли  $x \in (-l, l)$ .

Отже, з плином часу кожна точка струни під впливом початкових швидкостей, які належать проміжку  $(-l, l)$ , підніметься на максимальну висоту  $h$  (рис. 2.9) і далі буде весь час залишатиметься в цьому новому положенні. Це явище називається *дифузією хвиль*.

Представимо хід коливання внаслідок початкових швидкостей за допомогою фазової площини (див. рис. 2.9).

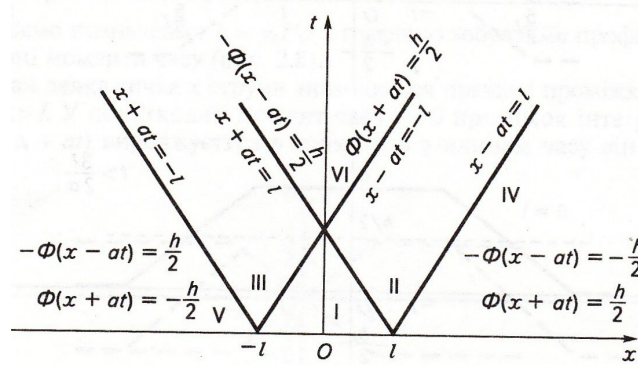


Рис. 2.9:

Користуючись виразами для функції  $\Phi(x)$ , дістаємо, що в зонах II, IV і VI відхилення зворотної хвилі  $\Phi(x+at)$  дорівнює  $h/2$ , а в точках зон III, V, VI відхилення прямої хвилі  $-\Phi(x-at)$  таке саме. Тому зона VI є зоною кінцевого зміщення; в її точках функція  $u(t, x) = \Phi(x+at) - \Phi(x-at) = h$ . У зоні IV відхилення прямої хвилі  $-\frac{h}{2}$ ; таке саме відхилення в зоні V має зворотна хвиля. Тому це зони спокою точок струни. Коли точка фазової площини переходить із зони IV в зону VI, то в міру проходження нею зони II відхилення прямої хвилі змінюється від  $-\frac{h}{2}$  до  $\frac{h}{2}$ . З огляду на ці міркування, можна записати вирази для функції  $u(t, x)$ . Наприклад, для  $u(t, x_0)$ , де  $x_0 > l$ , маємо

$$u(t, x_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{x_0-l}{a}, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x_0-at}{l}\right), & \frac{x_0-l}{a} < t < \frac{x_0+l}{a}, \\ h, & t > \frac{x_0+l}{a}. \end{cases}$$

Із наведених вище міркувань випливає, що задача Коші (2.12), (2.13) є математичною моделлю процесу коливання нескінченної струни за тих обмежень, які ми наклали на цей процес, виводячи рівняння (2.12).

Зауважимо, що розглянутий метод характеристик може успішно використовуватися й для знаходження розв'язку задачі Коші для ДРЧП загальнішого, ніж рівняння коливання струни, вигляду.

■ **Приклад 2.1.** Знайти розв'язок ДРЧП

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0 (xy \neq 0), \quad (2.20)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x, 1) = \varphi(x), \quad u_y(x, 1) = \psi(x). \quad (2.21)$$

1. Знаходимо загальний розв'язок рівняння (2.20). Для цього визначаємо його характеристики і вводимо нові незалежні змінні:

$$\xi = yx^{-1}, \quad \eta = x \sqrt[3]{y}.$$

Тоді рівняння (2.20) зведеться до канонічного вигляду

$$U_{\xi\eta} - \frac{3}{4\eta} U_{\xi} = 0.$$

Маємо

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( U_{\eta} - \frac{3}{4\eta} U \right) = 0, \quad U_{\eta} - \frac{3}{4\eta} U = f(\eta).$$

Добуте рівняння є лінійним 1-го порядку. Інтегруючи його, знаходимо  $U(\xi, \eta) = e^{\int \frac{3}{4\eta} d\eta} \left[ f_1(\xi) + \int e^{-\int \frac{3}{4\eta} d\eta} f(\eta) d\eta \right] = \eta^{3/4} [f_1(\xi) + f_2(\eta)]$ .

Повертаючись до старих незалежних змінних, дістаємо загальний розв'язок рівняння (2.20):

$$u(x, y) = \sqrt[4]{x^3 y} [f_1(yx^{-1}) + f_2(xy^{1/3})]. \quad (2.22)$$

2. Довільні функції  $f_1$  і  $f_2$  вибираємо таким чином, щоб задовольнялися умови (2.21).

Маємо

$$\begin{cases} u(x, 1) = x^{3/4} [f_1(x^{-1}) + f_2(x)] = \varphi(x), \\ u_y(x, 1) = \frac{1}{4} x^{3/4} [f_1(x^{-1}) + f_2(x)] + x^{3/4} \left[ x^{-1} \frac{df_1(x^{-1})}{d(x^{-1})} + \frac{1}{3} x f_2'(x) \right] = \psi(x), \end{cases}$$

звідки знаходимо

$$f_2(\psi) = \frac{3}{4} x^{-3/4} \varphi(x) + \frac{3}{4} \int_{x_0}^x z^{-7/4} \left[ \psi(z) - \frac{1}{4} \varphi(z) \right] dz + C,$$

$$f_1(x^{-1}) = \frac{1}{4} x^{-3/4} \varphi(x) - \frac{3}{4} \int_{x_0}^x z^{-7/4} \left[ \psi(z) - \frac{1}{4} \varphi(z) \right] dz - C.$$

Підставивши знайдені функції у (2.22), матимемо розв'язок задачі Коші (2.20), (2.21):

$$u(x, y) = \frac{3}{4} \varphi(xy^{1/3}) + \frac{1}{4} y \varphi(xy^{-1}) + \frac{3}{16} (x^3 y)^{1/4} \times \\ \times \int_{xy^{1/3}}^{xy^{-1}} z^{-7/4} [\varphi(z) - 4\psi(z)] dz.$$

▲ **Вправа.** В області  $D$  зінтегрувати диференціальне рівняння

$$a_0(x, y) u_{xy} + a_1(x, y) u_x + a_2(x, y) u_y + a_3(x, y) u = f(x, y),$$

$$a_0(x, y) \neq 0,$$

якщо виконуються наступні умови:

1)  $a_0(x, y), a_2(x, y) \in C^{(0,1)}(D), a_1(x, y), a_3(x, y), f(x, y) \in C(D)$  і  $a_{0_y}(x, y) = a_1(x, y), a_{2_y}(x, y) = a_3(x, y)$ ;

2)  $a_0(x, y), a_1(x, y) \in C^{(1,0)}(D), a_2(x, y), a_3(x, y), f(x, y) \in C(D)$  і  $a_{0_x}(x, y) = a_2(x, y), a_{1_x}(x, y) = a_3(x, y)$ ; 3)  $a_0(x, y), a_2(x, y) \in C^{(0,1)}(D), a_1(x, y), a_3(x, y), f(x, y) \in C(D)$  і

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_{0_y} & a_{2_y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix},$$

ввести нову функцію  $v(x, y)$ , поклавши

$$u(x, y) = \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{a_2(\xi, y)}{a_0(\xi, y)} d\xi\right) v(x, y), \quad (x_0, y_0) \in D;$$

4)  $a_0(x, y), a_1(x, y) \in C^{(1,0)}(D), a_2(x, y), a_3(x, y), f(x, y) \in C(D)$ , і

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{0_x} & a_{1_x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$u(x, y) = \exp\left(-\int_{y_0}^y \frac{a_1(x, \eta)}{a_0(x, \eta)} d\eta\right) v(x, y), \quad (x_0, y_0) \in D.$$

## 2.4 Вимушені коливання нескінченної струни

Розглянемо задачу: дослідити процес вимушених коливань однорідної нескінченної струни, на яку діє рівномірно розподілена зовнішня сила інтенсивністю  $f(t, x)$ , якщо початкове відхилення струни становить  $\varphi(x)$ , а її початкова швидкість —  $\psi(x)$ .

Математична модель задачі: в області

$$B = \{(t, x) \mid t > 0, x \in (-\infty; +\infty)\}$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x), \quad (2.23)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad (2.24)$$

Очевидно, що розв'язок задачі Коші (2.23), (2.24) має вигляд

$$u(t, x) = z(t, x) + w(t, x), \quad (2.25)$$

де  $z(t, x)$  — розв'язок однорідного рівняння коливання струни із заданими початковими умовами (2.24), а  $w(t, x)$  — розв'язок рівняння (2.23) з однорідними початковими умовами.

Згідно з доведеним

$$z(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (2.26)$$

Покажемо, що

$$w(t, x) = \int_0^t v(t - \tau, x) d\tau, \quad (2.27)$$

де функція  $v(t - \tau, x)$  є розв'язком задачі Коші:

$$v_{tt}(t - \tau, x) = a^2 v_{xx}(t - \tau, x), \quad t > \tau, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad (2.28)$$

$$v(0, x) = 0, \quad v_t(0, x) = f(\tau, x), \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad (2.29)$$

Справді, здиференціювавши (2.27) і врахувавши умови (2.29), дістанемо

$$w_t(t, x) = v(0, x) + \int_0^t v_t(t - \tau, x) d\tau,$$

$$w_{tt}(t, x) = f(t, x) + \int_0^t v_{tt}(t - \tau, x) d\tau,$$

$$w_{xx}(t, x) = \int_0^t v_{xx}(t - \tau, x) d\tau.$$

Тоді підставивши (2.27) у рівняння (2.23), матимемо

$$f(t, x) + \int_0^t v_{tt}(t - \tau, x) d\tau = a^2 \int_0^t v_{xx}(t - \tau, x) d\tau + f(t, x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t [v_{tt} - a^2 v_{xx}] d\tau \equiv 0,$$

а

$$w(0, x) = 0, \quad w_t(0, x) = 0,$$

тобто функція (2.27) є розв'язком рівняння (2.23) і задовольняє однорідні початкові умови.

Згідно з формулою Д'Аламбера (2.17)

$$v(t - \tau, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) dz. \quad (2.30)$$

Підставивши (2.30) у (2.27), а потім (2.27) і (2.26) у (2.25), дістанемо розв'язок поставленої задачі Коші (2.23), (2.24):

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) dz d\tau. \quad (2.31)$$

Функція (2.31) є розв'язком поставленої задачі Коші, якщо

$$\varphi(x) \in C^2(-\infty; +\infty), \quad \psi(x) \in C^1(-\infty; +\infty),$$

$$f(t, x) \in C^{(0,1)}(t > 0, \quad x \in (-\infty; +\infty)).$$

Принцип побудови розв'язку задачі Коші (2.23), (2.24) називається *принципом Дюгамеля*. Він використовується також для побудови розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь у багатовимірному середовищі.

## 2.5 Задача Коші для хвильового рівняння в просторі. Формула Кірхгофа

Позначимо

$$D_1 = \{t \mid t \in (0, +\infty)\}, \quad E_3 = \{(x, y, z) \mid -\infty < x, y, z < +\infty\}$$

і розглянемо задачу Коші: в класі функцій  $C^2(D)$ ,  $D = D_1 \times E_3$  знайти розв'язок хвильового рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad (2.32)$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3. \quad (2.33)$$

Надалі вважатимемо, що  $\varphi \in C^3(E_3)$ , а  $\psi(x, y, z) \in C^2(E_3)$ .

Для побудови розв'язку задачі Коші (2.32), (2.33) зінтегруємо спочатку таку задачу: в області  $D$  знайти розв'язок рівняння (2.32), який задовольняє умовам

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3. \quad (2.34)$$

Позначимо розв'язок задачі Коші (2.32), (2.33) через  $u_1(t, x, z)$  і покажемо, що він має вигляд

$$u_1(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t, \quad (2.35)$$

де  $S_t(x, y, z)$  — сфера радіусом  $t$  з центром у точці  $M(x, y, z)$ :

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = t^2,$$

$(\alpha, \beta, \gamma)$  — змінна точка на сфері.

Покладемо у формулі (2.35)

$$\alpha = x + \xi t, \quad \beta = y + \eta t, \quad \gamma = z + \zeta t.$$

Очевидно, нові незалежні змінні  $(\xi, \eta, \zeta)$  є напрямними косинусами радіусів сфери  $S_t(x, y, z)$ . Маємо

$$(x + \xi t - x)^2 + (y + \eta t - y)^2 + (z + \zeta t - z)^2 = t^2 \Rightarrow \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

тобто в нових незалежних змінних сфера  $S_t(x, y, z)$  перейде в одиничну сферу з центром у початку координат. Оскільки  $d\sigma_t = t^2 d\sigma_1$ , то (2.35) запишеться у вигляді

$$u_1(t, x, y, z) = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x + \xi t, y + \eta t, z + \zeta t) d\sigma_1. \quad (2.36)$$

Із (2.36) відразу випливає, що  $u_1|_{t=0} = 0$ . Здиференціювавши (2.36) по  $t$ , дістанемо

$$\begin{aligned} u_{1_t} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x + \xi t, y + \eta t, z + \zeta t) d\sigma_1 + \\ &+ \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} (\varphi_\alpha \xi + \varphi_\beta \eta + \varphi_\gamma \zeta) d\sigma_1. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Із (2.37) маємо

$$u_{1_t} \Big|_{t=0} = \frac{\varphi(x, y, z)}{4\pi} \iint_{S_1} d\sigma_1 = \varphi(x, y, z),$$



тобто функція (2.35) задовольняє початкові умови (2.34).

Покажемо, що функція (2.35) задовольняє й рівняння (2.32). Із (2.36) маємо

$$u_{1_{xx}} = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi_{\alpha\alpha} d\sigma_1, \quad u_{1_{yy}} = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi_{\beta\beta} d\sigma_1, \quad u_{1_{zz}} = \iint_{S_1} \varphi_{\gamma\gamma} d\sigma_1,$$

отже,

$$u_{1_{xx}} + u_{1_{yy}} + u_{1_{zz}} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x,y,z)} \frac{1}{t} [\varphi_{\alpha\alpha} + \varphi_{\beta\beta} + \varphi_{\gamma\gamma}] d\sigma_t. \quad (2.38)$$

Обчислимо  $u_{1_{tt}}(t, x, y, z)$ . Для цього в (2.37) перейдемо до сфери  $S_t(x, y, z)$  і застосуємо до другого поверхневого інтеграла відому формулу Гауса–Остроградського

$$\iint_S (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz) dS = \iiint_V (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz,$$

де  $V$  — об'єм, обмежений поверхнею  $S$ .

Маємо

$$\begin{aligned} u_{1_t} &= \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t(x,y,z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t + \\ &+ \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t(x,y,z)} (\varphi_\alpha \xi + \varphi_\beta \eta + \varphi_\gamma \zeta) d\sigma_t = \frac{1}{t} u_1 + \frac{1}{4\pi t} I(t), \end{aligned}$$

де

$$I(t) = \iiint_{V_t(x,y,z)} [\varphi_{\alpha\alpha} + \varphi_{\beta\beta} + \varphi_{\gamma\gamma}] d\alpha d\beta d\gamma,$$

$V_t(x, y, z)$  — куля  $(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 \leq t^2$ .

Здиференціювавши останню рівність за  $t$ , дістанемо

$$\begin{aligned} u_{1_{tt}} &= -\frac{1}{t^2} u_1 + \frac{1}{t} u_{1_t} - \frac{1}{4\pi t^2} I(t) + \frac{1}{4\pi t} I_t(t) = -\frac{1}{t^2} u_1 + \\ &+ \frac{1}{t} \left( \frac{1}{t} u_1 + \frac{1}{4\pi t} I(t) \right) - \frac{1}{4\pi t^2} I(t) + \frac{1}{4\pi t} I_t(t) = \frac{1}{4\pi t} I_t(t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Перейдемо в інтегралі  $I(t)$  до сферичних координат  $(\rho, \theta, \varphi)$  з центром у точці  $M(x, y, z)$  (рис. 2.10):

$$\begin{cases} \alpha - x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ \beta - y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ \gamma - z = \rho \cos \theta, \end{cases}$$

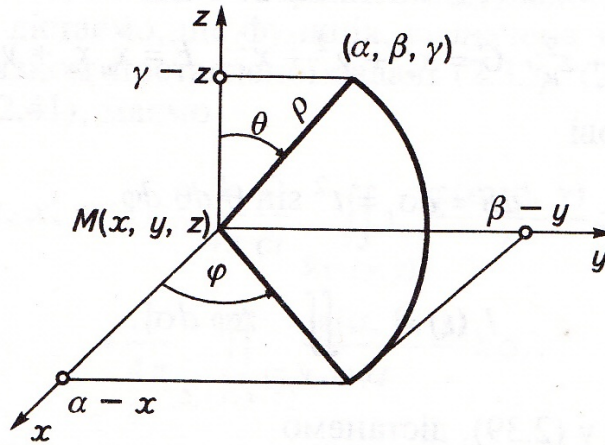


Рис. 2.10:

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq t, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad d\alpha d\beta d\gamma = \frac{D(\alpha, \beta, \gamma)}{D(\rho, \theta, \varphi)} d\rho d\theta d\varphi = \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho.$$

Маємо

$$I(t) = \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta\varphi \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho,$$

а, отже,

$$I_t(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta\varphi t^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Із курсу математичного аналізу відомо: якщо  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  рівняння поверхні  $S$  в криволінійних координатах  $(u, v) \in K$ , то

$$\iint_S f(x, y, z) dz = \iint_K f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

де

$$\begin{aligned} \sqrt{EG - F^2} du dv &= ds; \\ E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2; \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2; \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v. \end{aligned}$$

У нашому випадкові

$$dS = d\sigma_t = t^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Отже,

$$I_t(t) = \iint_{S_t(x, y, z)} \Delta\varphi d\sigma_t.$$

Підставивши  $I_t(t)$  у (2.39), дістанемо

$$u_{1_{tt}} = \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t(x,y,z)} \Delta\varphi d\sigma_t.$$

Порівнявши знайдену похідну з формулою (2.38), бачимо, що функція  $u_1(t, x, y, z)$  є розв'язком рівняння (2.32), а, отже, (2.35) є розв'язком задачі Коші (2.32), (2.33).

Нехай  $u_2(t, x, y, z)$  є розв'язком рівняння (2.32) з початковими умовами

$$u_2 \Big|_{t=0} = 0, \quad u_{2_t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3,$$

тобто

$$u_2(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x,y,z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t. \quad (2.40)$$

Тоді функція

$$u(t, x, y, z) = u_{1_t}(t, x, y, z) + u_2(t, x, y, z) \quad (2.41)$$

є розв'язком поставленої задачі Коші (2.32), (2.33).

Справді,  $u_1(t, x, y, z)$  є розв'язком задачі (2.32), (2.34).

Тоді функція  $u_{1_t}(t, x, y, z)$  є також розв'язком рівняння (2.32) і задовольняє початкові умови

$$u_{1_t} \Big|_{t=0} = \varphi(x, y, z),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{1_t}) \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \equiv \frac{1}{4\pi t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta\varphi t^2 \sin\theta d\theta d\varphi \Big|_{t=0} = 0.$$

Беручи до уваги останнє твердження й урахувавши однорідність рівняння (2.32), дістаємо, що функція, визначена за формулою (2.41), справді є розв'язком поставленої задачі (2.32), (2.33). Підставивши (2.40), (2.35) у (2.41), маємо

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_t(x,y,z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x,y,z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_t. \quad (2.42)$$

Формула (2.42) називається *формулою Кірхгофа*. З неї випливає, що розв'язок задачі Коші (2.32), (2.33) повністю визначається значеннями  $\varphi(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$  ( $\nu$  — зовнішня нормаль до  $S_t(x, y, z)$ ) і  $\psi(x, y, z)$  на сфері  $S_t(x, y, z)$ . Цей факт в теорії звуку називається *принципом Гюйгенса*.

## 2.6 Задача Коші для рівняння вільних коливань мембрани. Формула Пуассона

Розглянемо задачу Коші: знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \quad (2.43)$$

$$t > 0, (x, y) \in E_2 = \{(x, y) \mid -\infty < x, y < +\infty\},$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in E_2. \quad (2.44)$$

Вважатимемо, що  $\varphi(x, y) \in C^3(E_2)$ , а  $\psi(x, y) \in C^2(E_2)$ .

Для побудови розв'язку задачі (2.43), (2.44) застосуємо так званий метод спуску. В п. 2.5 було показано, що формула Кірхгофа дає розв'язок задачі Коші (2.32), (2.33). Але з (2.42) випливає: якщо в початкових умовах (2.33) функції  $\varphi$  і  $\psi$  залежать тільки від  $(x, y)$ , то й  $u = u(t, x, y)$ , тобто формула Кірхгофа в цьому випадку дає розв'язок задачі Коші (2.43), (2.44).

Маємо

$$u(t, x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{t} d\sigma_t + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{\psi(\alpha, \beta)}{t} d\sigma_t. \quad (2.45)$$

В останній рівності перейдемо від поверхневих до подвійних інтегралів. Для цього використаємо відому з математичного аналізу формулу

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy,$$

де  $z = z(x, y)$  — рівняння поверхні  $S$ ;  $D$  — проекція поверхні  $S$  на площину  $xOy$ . Із рівняння сфери  $S_t(x, y, z)$  одержимо

$$\gamma = z \pm \sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2},$$

$$\sqrt{1 + (\gamma_\alpha)^2 + (\gamma_\beta)^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}.$$

Оскільки інтегрування по верхній і нижній півсферах приводить до одного й того ж самого подвійного інтеграла, із (2.45) маємо

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_t(x, y)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{K_t(x,y)} \frac{\psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}, \quad (2.46)$$

де  $K_t(x, y)$  — круг радіусом  $t$  з центром в точці  $(x, y)$ :

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 \leq t^2.$$

Формула (2.46) називається *формулою Пуассона*. Із неї бачимо, що для визначення розв'язку  $u(t, x, y)$  у точці  $(t, x, y)$  не достатньо знати  $\varphi(x, y)$  і  $\psi(x, y)$  на колі  $(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = t^2$ : потрібні ще початкові дані  $\varphi(x, y)$  і  $\psi(x, y)$  у всіх точках круга  $K_t(x, y)$ . Це означає, що у випадку рівняння коливання мембрани принцип Гюйгенса не справджується.

Аналогічно можна дістати й розв'язок задачі Коші для рівняння коливання струни.

◇ **Зауваження 2.3.** Якщо у рівняннях (2.32) і (2.43)  $a^2 \neq 1$ , то формули (2.42) і (2.46) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}(x,y,z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{at} d\sigma_t + \\ &+ \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}(x,y,z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{at} d\sigma_t, \\ u(t, x, y) &= \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_{at}(x,y)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} + \\ &+ \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_{at}(x,y)} \frac{\psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}. \end{aligned}$$

Наведемо фізичну інтерпретацію формули Кірхгофа. Для цього вважаємо, що початкові функції  $\varphi(x, y, z)$  і  $\psi(x, y, z)$  ненульові тільки в деякій скінченій області  $D \in E_3$ . Розглянемо деяку точку  $(x_0, y_0, z_0) \in E_3$ , яка лежить поза областю  $D$ . Стан досліджуваного фізичного процесу в момент часу  $t$  у точці  $(x_0, y_0, z_0)$  (тобто  $u(t, x_0, y_0, z_0)$ ) згідно з формулою (2.42) визначається початковими даними в точках, які належать сфері  $S_{at}(x_0, y_0, z_0)$ . Отже, функція  $u(t, x_0, y_0, z_0)$  ненульова тільки в тому разі, якщо сфера  $S_{at}(x_0, y_0, z_0)$  перетинає область початкових даних  $D$ . Таким чином  $u(0, x_0, y_0, z_0) = 0$ , тобто в початковий момент часу точка  $(x_0, y_0, z_0)$  знаходиться в стані спокою.

Позначимо через  $\delta_1$  і  $\delta_2$  відповідно найменшу та найбільшу віддалі точки  $(x_0, y_0, z_0)$  до межі області  $D$ . Якщо час  $t_1$  досить малий, тобто якщо  $t_1 < \frac{\delta_1}{a}$ , то сфера  $S_{at_1}(x_0, y_0, z_0)$  не перетинається з областю  $D$ . У цьому випадкові на  $S_{at_1}(x_0, y_0, z_0)$  початкові функції дорівнюють нулю, а отже,  $u(t_1, x_0, y_0, z_0) \equiv 0$ , тобто розглядувана точка в момент часу  $t_1 < \frac{\delta_1}{a}$  все ще знаходиться в стані спокою.

Нехай тепер  $\frac{\delta_1}{a} \leq t_2 \leq \frac{\delta_2}{a}$ . У цьому разі сфера  $S_{at_2}(x_0, y_0, z_0)$  перетинає область  $D$ , а отже, поверхневі інтеграли у формулі Кірхгофа, взагалі кажучи, ненульові ( $u(t_2, x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ), тобто точка  $(x_0, y_0, z_0)$  знаходиться у збуреному стані. Отже, момент часу  $t_2 = \frac{\delta_1}{a}$  можна розглядати як момент, коли збурення приходить у точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . При  $t_3 > \frac{\delta_2}{a}$  область  $D$  знаходиться у внутрішній частині сфери  $S_{at_3}(x_0, y_0, z_0)$ , а отже, поверхневі інтеграли у формулі Кірхгофа знову дорівнюють нулю, тобто  $u(t_3, x_0, y_0, z_0) \equiv 0$ : збурення пройшло точку  $(x_0, y_0, z_0)$  і вона повертається в стан спокою.

Тепер розглянемо миттєву просторову картину збурення  $u(t_0, x, y, z)$  у деякий момент часу  $t_0$ . Згідно з попередніми міркуваннями в збуреному стані в момент часу  $t_0$  перебуватимуть ті точки  $(x, y, z)$ , які знаходяться на сферах  $S_{at_0}(M)$ , де  $M$  — довільна точка області  $D$ . Геометричне місце точок  $(x, y, z) \in E_3$ , які перебувають у збуреному стані, позначимо через  $\sigma$ . Обвідні сім'ї сфер  $S_{at_0}(M)$  будуть межами області  $\sigma$ . Зовнішня обвідна називається *переднім фронтом хвилі*, внутрішня — *заднім* (хвилею називають процес поширення збурення). Очевидно, хвилі поширюються із швидкістю  $a$  в напрямі нормалі до межі області  $D$  початкового збурення. Отже, початкове збурення, локалізоване в просторі, спричиняє в кожній точці  $(x_0, y_0, z_0) \in E_3$  дію, локалізовану в часі.

У зв'язку з наведеними вище міркуваннями фізичне явище, яке описується формулою Кірхгофа, називається *процесом поширення хвиль*, а сам розв'язок — *хвилею*.

Аналогічно можна переконатись, що формула Пуассона (2.46) є також хвилею, яка рухається із швидкістю  $a$ , але, на відміну від тривимірного простору, вплив початкових збурень, локалізованих на площині, не локалізований у часі, тобто в цьому разі йдеться про явище післядії.

■ **Приклад 2.2.** Визначимо,  $\frac{d}{dt} u(t, x, y, z) \equiv 0$  при  $t = 1, 2, 3, 4$ , якщо  $\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) \equiv 0$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 1$ .

Із формули (2.42) випливає: якщо сфера  $S_{at}(x, y, z)$  не перетинається з областю  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq 1$ , то  $u(t, x, y, z) \equiv 0$ . Ця умова еквівалентна тому, що  $1 + at < r$  або  $at > 1 + r$  (2.116).

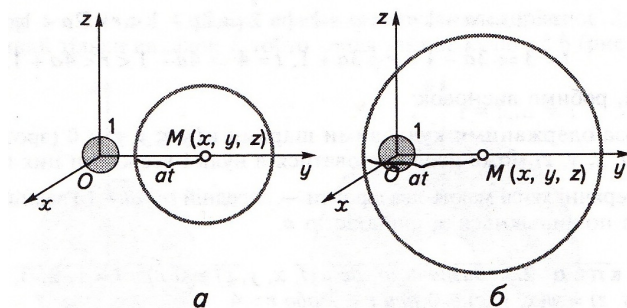


Рис. 2.11:

Отже, маємо

$$\begin{aligned} t = 1 &\Rightarrow r > 1 + a; & t = 2 &\Rightarrow r > 2a + 1; & t = 3 &\Rightarrow r > 3a + 1; \\ t = 4 &\Rightarrow r > 4a + 1; & t = 1 &\Rightarrow r < a - 1, & t = 2 &\Rightarrow r < 2a - 1; \\ & & t = 3 &\Rightarrow r < 3a - 1; & t = 4 &\Rightarrow r < 4a - 1 \quad (a \geq 1). \end{aligned}$$

Із попередніх нерівностей та формули Кірхгофа випливає, що  $u(t, x, y, z)$  має вигляд сферичної хвилі, яка зосереджена в кульовому шарі завтовшки 2 (рис. 2.12, а-г відповідно):

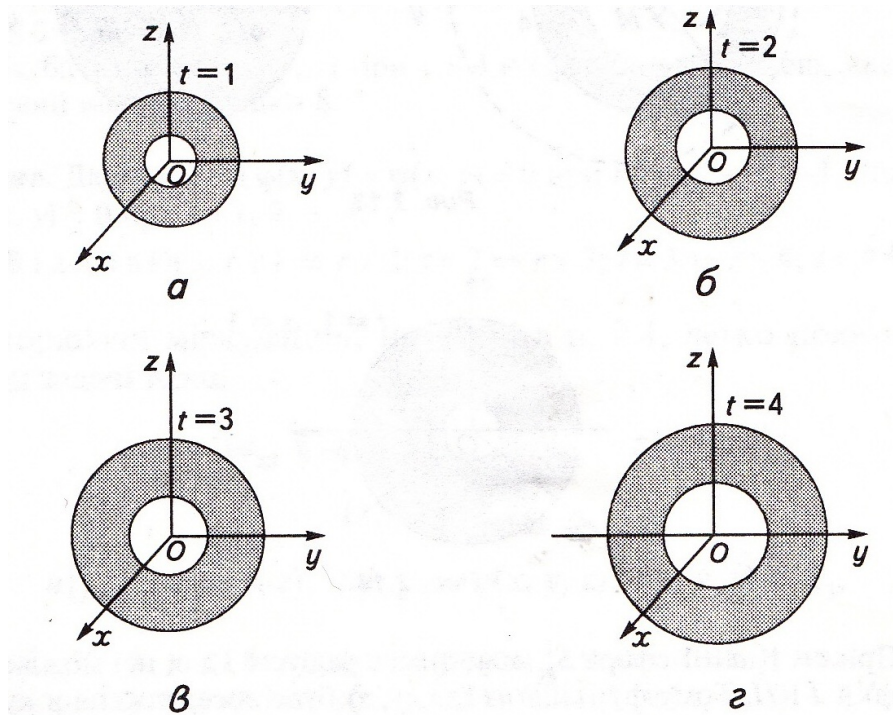


Рис. 2.12:

$$\begin{aligned} t = 1 &\Rightarrow a - 1 < r < a + 1; & t = 2 &\Rightarrow 2a - 1 < r < 2a + 1; \\ t = 3 &\Rightarrow 3a - 1 < r < 3a + 1; & t = 4 &\Rightarrow 4a - 1 < r < 4a + 1. \end{aligned}$$

Отже, робимо висновок:

- зовні отриманих кульових шарів  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  (зрозуміло, що  $u(t, x, y, z)$  може перетворюватися в нуль і всередині цих шарів);
- сферичні хвилі мають два фронти: передній  $r = at + 1$  і задній  $r = at - 1$ , які поширюються з швидкістю  $a$ .

■ **Приклад 2.3.** Визначимо, де  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  при  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ , якщо  $\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) \equiv 0$  при  $r < 2$  або  $r > 4$ .

У даному випадкові  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  за трьох можливих положень (I, II, III) сфери  $S_{at}(x, y, z)$ , а саме, коли  $4 + at < r$ ,  $r + at < 2$ ,  $4 + r < at$  (рис. 2.13).

При  $t = 1$ ,  $a = 1$  сфера  $S_{at}(x, y, z)$  має радіус  $l$  і для неї можливі тільки випадки I і II. Тому функція  $u(l, x, y, z)$  буде зосереджена в кульовому шарі  $1 \leq r \leq 5$  (рис.2.14).

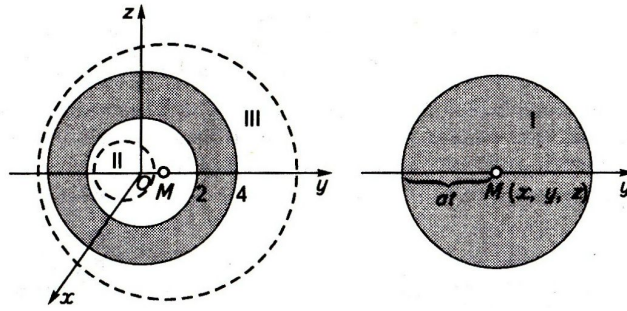


Рис. 2.13:

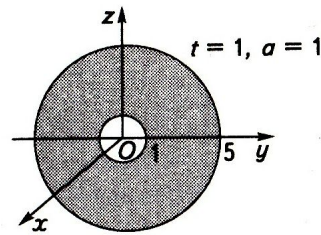


Рис. 2.14:

При  $t = 2$  і  $a = 1$  радіус сфери інтегрування дорівнює 2, а отже, можливий тільки випадок I, тобто хвиля займає кулю  $r \leq 6$  (рис. 2.15,а).

Якщо  $t = 3, 4$  і  $a = 1$ , то можливий також тільки випадок I, тобто хвиля займає кулі відповідно радіусів  $r = 7$  і  $r = 8$  відповідно. При  $t = 5$  і  $a = 1$  можливі випадки I і III. Отже, функція  $u(5, x, y, z)$  зосереджена в шарі  $1 \leq r \leq 9$  (рис. 2.15,б).

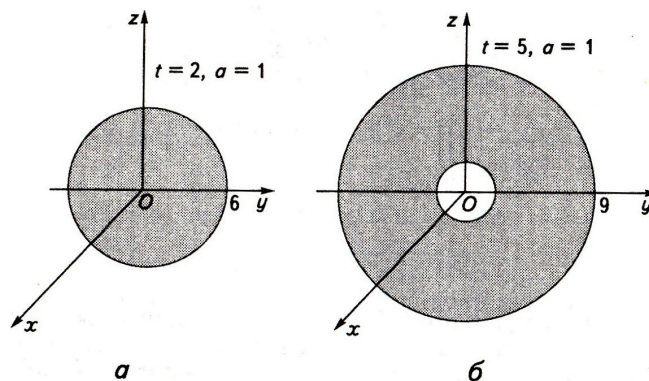


Рис. 2.15:

Як бачимо,  $u(t, x, y, z)$  при  $t > 4$  є сферичною хвилею, яка займає кульовий шар товщиною 8.

▲ **Вправа.** Дано:  $a = 1$  і  $\varphi(x, y) = \psi(x, y) \equiv 0$  при  $r^2 = x^2 + y^2 > 1$ . Знайти, де  $u(t, x, y) \equiv 0$  при  $t = 1, 2, 3, 4$ ?

(В і д п о в і д ь:  $t = 1 \Rightarrow r > 2$ ;  $t = 2 \Rightarrow r > 3$ ;  $t = 3 \Rightarrow r > 4$ ;

$t = 4 \Rightarrow r > 5$ .)



Повторюючи міркування, наведені в п. 2.4, легко показати, що розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(t, x, y, z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in E_3,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3,$$

де функція  $f(t, x, y, z)$  неперервна разом з частинними похідними до другого порядку включно;  $\varphi(x, y, z) \in C^3(E_3)$ ,  $\psi(x, y, z) \in C^2(E_3)$ , задається формулою

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) = & \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}(x,y,z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{at} d\sigma_t + \\ & + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}(x,y,z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{at} d\sigma_t + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{K_{at}(x,y,z)} \frac{f(t - \rho/a, \alpha, \beta, \gamma)}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma; \end{aligned} \quad (2.47)$$

$K_{at}(x, y, z)$  — куля радіусом  $at$  із центром в точці  $(x, y, z)$ ;

$$\rho = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}.$$

Зазначимо, що при інтегруванні в (2.47) функція  $f$  береться не в розглядуваний момент часу  $t$ , а в момент  $t - \frac{\rho}{a}$ , який передуює моменту  $t$  на такий інтервал часу, який буде потрібний процесу, що поширюється із швидкістю  $a$ , для проходження шляху від точки  $(\alpha, \beta, \gamma)$  до точки  $(x, y, z)$ . Тому вираз

$$\frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{K_{at}(x,y,z)} \frac{f(t - \rho/a, \alpha, \beta, \gamma)}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma$$

називається *загальним потенціалом*.

Аналогічно розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, z), \quad t > 0, \quad (x, y) \in E_2,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in E_2$$

дається формулою

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_{at}(x,y)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_{at}(x,y)} \frac{\psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} + \\
& + \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \iint_{K_{a(t-\tau)}(x,y)} \frac{f(\tau, \alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2 (t - \tau)^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} d\tau,
\end{aligned}$$

де  $\varphi \in C^3(E_2)$ ,  $\psi \in C^2(E_2)$ ,  $f(t, x, y) \in C^2(t > 0, (x, y) \in E_2)$ .

На завершення наведемо один підхід побудови розв'язку задачі Коші для двовимірного, так званого телеграфного рівняння:

$$\begin{aligned}
u_{tt}(t, x, y) &= a^2 \Delta u(t, x, y) + k^2 u(t, x, y) + f(t, x, y), \\
u|_{t=0} &= \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y),
\end{aligned} \tag{2.48}$$

де

$$\varphi(x, y) \in C^3(E_2), \quad \psi(x, y) \in C^2(E_2), \quad f(t, x, y) \in C^2((0, +\infty) \times E_2).$$

Розв'язок задачі Коші (2.48) будемо методом введення додаткової змінної. Легко бачити: якщо  $u(t, x, y)$  є розв'язком задачі (2.48), то функція

$$v(t, x, y, z) = e^{\frac{k}{a}z} u(t, x, y)$$

має бути розв'язком задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$$\begin{aligned}
v_{tt}(t, x, y, z) &= a^2 \Delta v(t, x, y, z) + f(t, x, y) e^{\frac{k}{a}z}, \\
v|_{t=0} &= \varphi(x, y) e^{\frac{k}{a}z}, \quad v_t|_{t=0} = \psi(x, y) e^{\frac{k}{a}z}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

На підставі формули (2.47) маємо:

$$\begin{aligned}
v(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi a} \frac{d}{dt} \iint_{S_{at}(x,y,z)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) e^{\frac{k}{a}j}}{at} d\sigma + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}(x,y,t)} \frac{\psi(\alpha, \beta) e^{\frac{k}{a}\gamma}}{at} d\sigma + \\
& + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{P_{at}(x,y,z)} \frac{f(t - \rho/a, \alpha, \beta)}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma
\end{aligned}$$

Ввівши в попередню рівність нові незалежні змінні

$$\alpha = x + \xi, \quad \beta = y + \eta, \quad \gamma = z + \zeta,$$

та розділивши результат на  $e^{\frac{k}{a}z}$  дістанемо розв'язок задачі Коші (2.48)

$$u(t, x, y) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}(0,0,0)} \frac{\varphi(x + \xi, y + \eta)}{at} e^{\frac{k}{a}\zeta} d\sigma +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}(0,0,0)} \frac{\psi(x + \xi, y + \eta)}{at} e^{\frac{k}{a}\zeta} d\sigma + \\
& + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{K_{at}(0,0,0)} \frac{f(t - r/a, x + \xi, y + \eta)}{r} e^{\frac{k}{a}\zeta} d\xi d\eta d\zeta, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.
\end{aligned}$$

**▲ Вправи.**

1. Побудувати розв'язок задачі Коші для одновимірного телеграфного рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx} + k^2 u(t, x) + f(t, x)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x),$$

де  $\varphi(x) \in C^3(-\infty, +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ .

2. Показати, що функція

$$u(t, x) = \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_t, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

де

$$V_\varphi = \frac{t}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \left\{ \iiint_{S_1(x)} \varphi(\bar{x}) d\tau_4 + \sqrt{\rho} \frac{at}{2} \iiint_{S_1(x)} \sum_{k=1}^4 \varphi_{x_k}(\bar{x}) \times (x_k - \xi_k) d\tau_4 \right\} d\rho,$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4), \quad \bar{x}_k = x_k + (-x_k + \xi_k)at\sqrt{\rho}, \quad (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) -$$

координати точок сфери  $S_1(x) : (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 + (\xi_4 - x_4)^2 = 1$ ,  $d\tau_4$  - елемент площі цієї сфери, є розв'язком задачі Коші

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x),$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad \varphi(x) \in C^4(E_4), \quad \psi(x) \in C^3(E_4).$$

3. Застосовуючи принцип Дюгамеля, побудувати розв'язок задачі Коші

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad \varphi(x) \in C^4(E_4), \quad \psi(x) \in C^3(E_4),$$

$$f(t, x) \in C^3((0, +\infty) \times E_4).$$

**Відповідь.**

$$\begin{aligned}
u(t, x) = & \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(x)} \varphi(\bar{x}) d\tau_4 \right] d\rho + \\
& + \frac{t}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(x)} \psi(\bar{x}) d\tau_4 \right] d\rho + \\
& + \int_0^t \left\{ \frac{\tau}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(x)} f(t - \tau, \bar{x}) d\tau_4 \right] d\rho \right\} d\tau.
\end{aligned}$$

4. Використовуючи метод введення додаткової змінної та результати попередніх вправ знайти формулу, яка дає розв'язок задачі Коші для трьохвимірного телеграфного рівняння

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= a^2 \Delta u(t, x) + k^2 u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \\ u(0, x) &= \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \\ \varphi(x) &\in C^4(E_3), \quad \psi(x) \in C^3(E_3), \quad f(t, x) \in C^3((0, +\infty) \times E_3). \end{aligned}$$

**Відповідь.**

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(\tilde{x})} \varphi(\tilde{x}) e^{k(\xi_4 - x_4)t\sqrt{\rho}} d\tau_4 \right] d\rho + \\ &+ \frac{t}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(\tilde{x})} \psi(\tilde{x}) e^{k(\xi_4 - x_4)t\sqrt{\rho}} d\tau_4 \right] d\rho + \\ &+ \int_0^t \left\{ \frac{\tau}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \iiint_{S_1(\tilde{x})} f(t-\tau, x') e^{k(\xi_4 - x_4)\tau\sqrt{\rho}} d\tau_4 \right] d\rho \right\} d\tau, \\ \tilde{x} &= (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad x'_i = x_i + (-x_i + \xi_i)a\tau\sqrt{\rho}, \quad i = 1, 2, 3, \\ x' &= (x'_1, x'_2, x'_3). \end{aligned}$$

## 2.7 Теорема про єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння

Розглянемо задачу Коші для рівняння вимушених коливань мембрани: в області  $B = \{(t, x, y) \mid t > 0, (x, y) \in E_2\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + f(t, x, y), \quad (2.50)$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in E_2, \quad (2.51)$$

де

$$\varphi \in C^3(E_2); \quad \psi \in C^2(E_2); \quad f(t, x, y) \in C^2(B).$$

**Теорема 2.2.** *Задача Коші (2.50), (2.51) у класі функцій  $C^2(B)$  має єдиний розв'язок.*

**Доведення.** Припустимо, що поставлена задача Коші має два розв'язки:  $u_1(t, x, y)$  і  $u_2(t, x, y)$ . Тоді через лінійність диференціального рівняння (2.50) функція  $u(t, x, y) = u_1(t, x, y) - u_2(t, x, y)$  буде розв'язком задачі Коші:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (t, x, y) \in B, \quad (2.52)$$

$$u(0, x, y) = 0, \quad u_t(0, x, y) = 0, \quad (x, y) \in E_2. \quad (2.53)$$

Покажемо, що  $u(t, x, y) \equiv 0$  для всіх  $(t, x, y) \in B$ .

У системі координат  $xyt$  візьмемо довільну точку  $M(t_0, x_0, y_0)$ , причому  $t_0 > 0$  (рис. 2.16).

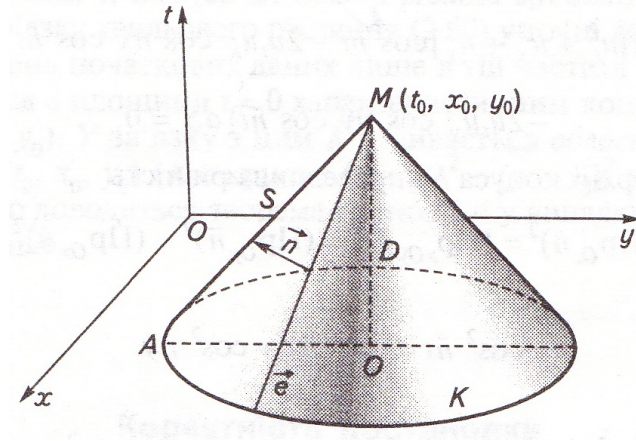


Рис. 2.16:

Із цієї точки, як із вершини, проведемо конус

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (t - t_0)^2$$

до перетину з площиною  $t = 0$ . Цей конус будемо називати *характеристичним*. Позначимо внутрішність конуса через  $D$ , його бічну поверхню — через  $S$ , основу —  $K$ .

Покажемо, що  $u(t_0, x_0, y_0) = 0$ , і з огляду на довільність точки  $M(t_0, x_0, y_0)$  остання рівність означатиме, що  $u(t, x, y) \equiv 0$  для всіх  $(t, x, y) \in B$ .

Внаслідок того, що функція  $u(t, x, y)$  є розв'язком (2.52),  $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$ , а отже,

$$I = \iiint_D u_t(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) dt dx dy = 0.$$

Маємо

$$\begin{aligned} u_t u_{tt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2, & u_t u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) - u_{tx} u_x = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_x)^2, & u_t u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} (u_t u_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_y)^2. \end{aligned}$$

Тоді вираз для  $I$  запишеться у вигляді

$$\iiint_D \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [(u_t)^2 + (u_y)^2 + (u_x)^2] - \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) - \frac{\partial}{\partial y} (u_t u_y) \right\} dt dx dy = 0.$$

Застосовуючи формулу Гауса–Остроградського, дістаємо

$$I = \frac{1}{2} \iint_{S+K} \{ [u_t^2 + u_x^2 + u_y^2] \cos \vec{n}t - 2u_t u_x \cos \vec{n}x - 2u_t u_y \cos \vec{n}y \} dS.$$

Але при  $t = 0$ , тобто при  $(x, y) \in K$ ,  $u_t = u_x = u_y = 0$ , а отже, наш поверхневий інтеграл по поверхні  $K$  рівний нулю. Таким чином, маємо

$$\frac{1}{2} \iint_S \{ [u_t^2 + u_x^2 + u_y^2] \cos \vec{n}t - 2u_t u_x \cos \vec{n}x - 2u_t u_y \cos \vec{n}y \} dS = 0. \quad (2.54)$$

Зазначимо, що  $MO = AO$ , тобто  $\angle OMA = 45^\circ$ . Але тоді  $\cos \vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  на  $S$ . Домножимо (2.54) на  $2 \cos \vec{n}t$ . Дістанемо

$$\begin{aligned} \iint_S \{ [u_t^2 + u_x^2 + u_y^2] \cos^2 \vec{n}t - 2u_t u_x \cos \vec{n}x \cos \vec{n}t - 2u_t u_y \times \\ \times \cos \vec{n}y \cos \vec{n}t \} dS = 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

На бічній поверхні конуса  $S$  справедлива рівність

$$(\text{Пр}_{ot} \vec{n})^2 = (\text{Пр}_{xOy} \vec{n})^2 = (\text{Пр}_{oy} \vec{n})^2 + (\text{Пр}_{ox} \vec{n})^2,$$

тобто на  $S$

$$\cos^2 \vec{n}t = \cos^2 \vec{n}x + \cos^2 \vec{n}y.$$

Маємо

$$(u_t^2 + u_x^2 + u_y^2) \cos^2 \vec{n}t = u_t^2 \cos^2 \vec{n}x + \cos^2 \vec{n}y) + (u_x^2 + u_y^2) \cos^2 \vec{n}t.$$

Тоді рівність (2.55) запишеться у вигляді

$$\iint_S \{ u_t \cos \vec{n}x - u_x \cos \vec{n}t \}^2 + \{ u_t \cos \vec{n}y - u_y \cos \vec{n}t \}^2 \} dS = 0.$$

Остання рівність можлива тоді й лише тоді, коли на поверхні  $S$

$$u_t \cos \vec{n}x - u_x \cos \vec{n}t = 0, \quad u_t \cos \vec{n}y - u_y \cos \vec{n}t = 0,$$

звідки

$$\frac{u_t}{\cos \vec{n}t} = \frac{u_x}{\cos \vec{n}x} = \frac{u_y}{\cos \vec{n}y} := v(t, x, y). \quad (2.56)$$

Позначимо через  $\vec{l}$  напрям якої–небудь твірної характеристичного конуса. Тоді, використавши рівності (2.56), маємо

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = u_x \cos \vec{l}x + u_y \cos \vec{l}y + u_t \cos \vec{l}t = v \left[ \cos \vec{l}x \cos \vec{l}x + \right.$$

$$+ \cos \vec{n}y \cos \vec{l}y + \cos \vec{n}t \cos \vec{l}t ] = v \cos \vec{n}\vec{l} = 0,$$

оскільки твірна конуса перпендикулярна до нормалі його поверхні.

Отже, вздовж твірної  $\vec{l}$   $u(t, x, y) = \text{const}$ . У точці, де твірна перетинає площину  $t = 0$ , значення  $u(0, x, y) = 0$ . Тому  $u(t, x, y) = 0$  вздовж твірної конуса. В окремому випадку ця умова виконується й у вершині конуса  $M(t_0, x_0, y_0)$ , що й потрібно було довести.

Зауважимо, що дане твердження справедливе й у випадку, коли однорідні початкові умови (2.53) виконуються не на всій площині  $xOy$ , а тільки на основі  $K$  конуса  $D$ . Звідси можна зробити висновок, що значення розв'язку хвильового рівняння (2.50) у точці  $M(t_0, x_0, y_0)$  залежить від значень початкових даних лише в тій частині площини  $t = 0$ , яка вирізається із площини  $t = 0$  характеристичним конусом із вершиною  $M(t_0, x_0, y_0)$ . У зв'язку з цим  $K$  називається *областю залежності для точки  $M(t_0, x_0, y_0)$*  ( $K$  є кругом  $(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \leq t_0^2$ ).

Аналогічно доводиться теорема єдиності і у випадку трьох просторових координат.

## 2.8 Коректність постановки задачі Коші

Раніше було показано, що задачу Коші для рівняння коливання струни поставлено коректно. У випадку хвильового рівняння з трьома просторовими координатами задача Коші також поставлена коректно.

Справді, нехай  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$  розв'язки задач Коші:

$$\begin{cases} u_{1_{tt}}(t, x, y, z) = \Delta u_1(t, x, y, z) + f_1(t, x, y, z), \\ \quad (t, x, y, z) \in B = \{(t, x, y, z) \mid t > 0, (x, y, z) \in E_3\}, \\ u_1|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z), \quad u_{1_t}|_{t=0} = \psi_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3, \end{cases} \quad (2.57)$$

$$\begin{cases} u_{2_{tt}}(t, x, y, z) = \Delta u_2(t, x, y, z) + f_2(t, x, y, z), \quad (t, x, y, z) \in B, \\ u_2|_{t=0} = \varphi_2(x, y, z), \quad u_{2_t}|_{t=0} = \psi_2(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3. \end{cases} \quad (2.58)$$

Справделива наступна теорема.

**Теорема 2.3.** *Нехай  $\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z) \in C^3(E_3)$ ;  $\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z) \in C^2(x, y, z)$ ,  $f_1(t, x, y, z), f_2(t, x, y, z) \in C^2(B)$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0$  і  $t_1 > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$ , що як тільки*

$$|\varphi_1(x, y, z) - \varphi_2(x, y, z)| < \delta, |\varphi_{1_x} - \varphi_{2_x}| < \delta,$$

$$|\varphi_{1_y} - \varphi_{2_y}| < \delta, |\varphi_{1_z} - \varphi_{2_z}| < \delta,$$

$$|\psi_1(x, y, z) - \psi_2(x, y, z)| < \delta,$$

$$|f_1(t, x, y, z) - f_2(t, x, y, z)| < \delta$$

при  $(t, x, y, z) \in B_1 = \{(t, x, y, z) \mid t \in [0, t_1], (x, y, z) \in E_3\}$ , то справедлива нерівність

$$|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon$$

для всіх  $(t, x, y, z) \in B_1$ .

**Доведення.** Згідно з формулою (2.47) маємо

$$\begin{aligned} & |u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| \leq \\ & \leq \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \frac{|\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) - \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma)|}{t^2} d\sigma_t + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \left| \frac{(\varphi_{1_\alpha} - \varphi_{2_\alpha})\xi + (\varphi_{1_\beta} - \varphi_{2_\beta})\eta + (\varphi_{1_\gamma} - \varphi_{2_\gamma})\zeta}{t} \right| d\sigma_t + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x, y, z)} \left| \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma) - \psi_2(\alpha, \beta, \gamma)}{t} \right| d\sigma_t + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_{K_t(x, y, z)} \left| \frac{f_1(t - \rho, \alpha, \beta, \gamma) - f_2(t - \rho, \alpha, \beta, \gamma)}{\rho} \right| d\alpha d\beta d\gamma < \\ & < \frac{\delta}{4\pi t^2} \iint_{S_t(x, y, z)} d\sigma_t + \frac{3\delta}{4\pi t} \iint_{S_t(x, y, z)} d\sigma_t + \frac{\delta}{4\pi t} \iint_{S_t(x, y, z)} d\sigma_t + \\ & + \frac{\delta}{4\pi} \iiint_{K_t(x, y, z)} \frac{1}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma \leq \delta + 3\delta t_1 + \delta t_1 + \frac{t_1^2}{2}\delta = \delta \left( 1 + 4t_1 + \frac{t_1^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Якщо вибрати  $\delta = \frac{\varepsilon}{1+4t_1+0,5t_1^2}$ , то дістанемо

$$|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon$$

для всіх  $(t, x, y, z) \in B_1$ , що й потрібно було довести.

Оскільки задача Коші для хвильового рівняння в просторі має єдиний розв'язок, то, виходячи з доведеної теореми, її поставлено коректно.

**▲ Вправа.** Довести неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних у випадку рівняння коливання мембрани.



## 2.9 Загальна постановка задачі Коші

Як показано в п. 2.6, довільне квазілінійне рівняння гіперболічного типу

$$a_{11}(\xi, \eta)U_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2a_{12}(\xi, \eta)U_{\xi\eta}(\xi, \eta) + a_{22}(\xi, \eta)U_{\eta\eta}(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$$

може бути зведене до одного з рівнянь

$$u_{xt}(t, x) = f(x, t, u, u_1, v_x), \quad (2.59)$$

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t, u_x). \quad (2.60)$$

Коефіцієнти  $a_{ij}(\xi, \eta)$  ( $i, j = 1, 2$ ) і права частина  $f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$  вважаються неперервно диференційовними функціями у відповідних областях.

При постановці задачі Коші для рівняння (2.60) ми вважали, що носієм початкових умов є пряма  $t = 0$ . На прикладі рівняння вільних коливань однорідної струни

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (2.61)$$

покажемо, що носієм початкових умов може бути крива  $L$ , яка відрізняється від прямої  $t = 0$ , причому з'ясуємо умови, які має задовольняти крива  $L$ , й вигляд самих початкових умов, аби одержана задача Коші була поставлена коректно.

Для цього позначимо через  $D$  область фазової площини  $xOt$  з кусково-гладкою жордановою межею  $S$ . Нехай  $u(t, x) \in C^2(D)$  — розв'язок рівняння (2.61), який має неперервні частинні похідні першого порядку в області  $\bar{D} = D \cup S$ .

Інтегруючи тотожність (2.61) по області  $D$  і використовуючи формулу Гріна

$$\iint_D (Q_x(x, t) - P_t(x, t)) dx dt = \int_S P dx + Q dt,$$

де криволінійний інтеграл у правій частині береться по контуру в напрямі проти годинникової стрілки, дістаємо

$$\iint_D (u_{xx} - u_{tt}) dx dt = \int_S u_x dt + u_t dx \quad (2.62)$$

Нехай  $L$  — розімкнута крива Жордана з неперервною кривизною, яка задовольняє умови:

- кожна пряма з двох сімей характеристик  $x + t = const$ ,  $x - t = const$  рівняння (2.61) перетинає криву  $L$  не більше, ніж в одній точці;

- напрям дотичної до кривої  $L$  у жодній точці не збігається з напрямом характеристик рівняння (2.61).

Іноді таку криву  $L$  називають "вільною".

Припустимо, що характеристики  $x - x_1 = t - t_1$  і  $x - x_1 = t_1 - t$ , які виходять із точки  $C$ , перетинаються з кривою  $L$  у точках  $A$  і  $B$  (рис. 2.17).

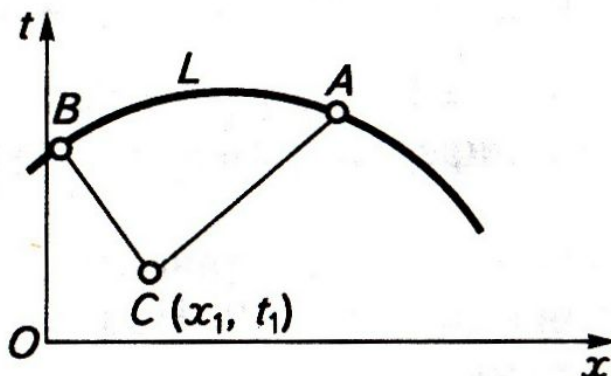


Рис. 2.17:

Застосовуючи формулу (2.62) в області, яка обмежена дугою  $AB$  кривої  $L$  і відрізками характеристик  $[CA]$  і  $[CB]$ , дістаємо

$$\int_{AB+[BC]+[CA]} u_x dt + u_t dx = 0 \quad (2.63)$$

Оскільки вздовж  $[BC]$  і  $[AC]$  маємо  $dx = -dt$ ,  $dx = dt$  відповідно, то (2.63) запишеться у вигляді

$$\int_{AB} u_x dt + u_t dx - 2u(C) + u(A) + u(B) = 0,$$

звідки знаходимо

$$u(C) = \frac{1}{2} [u(A) + u(B)] + \frac{1}{2} \int_{AB} u_x dt + u_t dx. \quad (2.64)$$

Якщо розв'язок рівняння (2.61) задовольняє умови

$$u \Big|_L = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_L = \psi(x), \quad (2.65)$$

де  $\varphi$  і  $\psi$  — задані дійсні відповідно двічі й один раз неперервно диференційовні функції, а  $l$  — заданий на  $L$  достатньо гладкий вектор, що ніде не збігається з дотичною до кривої  $L$ , то, визначивши  $u_x$  і  $u_t$  із рівностей

$$u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad u_x \frac{dx}{dl} + u_t \frac{dt}{dl} = \psi,$$

де  $s$  — довжина дуги  $L$ , і підставляючи відомі значення  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_t$  в праву частину (2.64), дістанемо розв'язок задачі Коші (2.61), (2.65).

З наведених міркувань випливає, що постановка задачі Коші (2.61), (2.65) є коректною, тобто вона має в розглядуваній області тільки єдиний розв'язок, і він є стійким.

Аналогічно ставиться задача Коші й у випадку рівняння (2.60).

Для рівняння (2.59) характеристиками будуть прямі, паралельні осям координат ( $x = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$ ) (рис. 2.18).

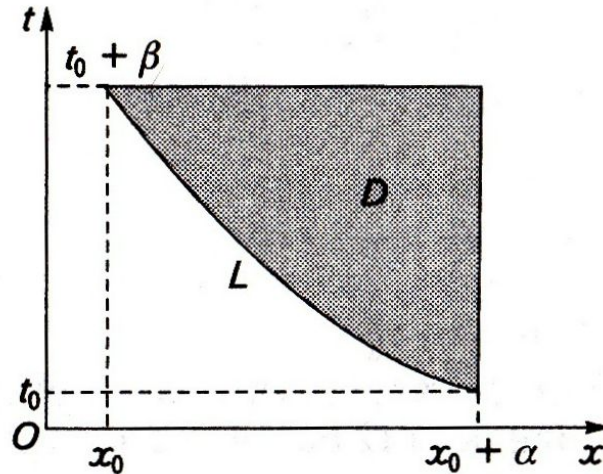


Рис. 2.18:

Отже, в цьому випадку всяка гладка крива  $L$ , яка перетинається не більш, ніж в одній точці з прямими, паралельними осям координат, буде "вільною". Нехай рівняння цієї кривої буде  $t = g(x)$  (або  $x = h(t)$ ). Вважаємо, що існують похідні  $g'(x)$ ,  $h'(t)$ , що не дорівнюють нулю. Тоді задачу Коші можна поставити так: в області

$$D = \{(t, x) \mid x_0 < x < x_0 + \alpha, \quad g(x) < t < t_0 + \beta\}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (2.59), який на кривій  $L$  задовольняє умови

$$u \Big|_{t=g(x)} = \varphi(x), \quad u_t \Big|_{t=g(x)} = \psi(x). \quad (2.66)$$

Дані Коші (2.66) дають змогу на кривій  $t = g(x)$  знайти значення похідної  $u_x$ .

Справді, диференціюючи за  $x$  першу із умов (2.66), дістаємо

$$u_x \Big|_{t=g(x)} + u_t \Big|_{t=g(x)} g'(x) = \varphi'(x),$$

або

$$u_x \Big|_{t=g(x)} = \varphi'(x) - \psi(x)\varphi'(x).$$

У випадку хвильового рівняння в  $n$ -вимірному просторі

$$u_{tt}(t, x) = \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.67)$$

носієм початкових умов є "вільна" поверхня  $S$ , тобто гіперповерхня  $\Psi(x, t) = 0$ , яка задовольняє такі умови:

- у жодній її точці  $(x, t)$  не має місце рівність

$$\sum_{i=1}^n (\Psi_{x_i})^2 - (\Psi_t)^2 = 0,$$

тобто поверхня  $S$  не є характеристичною;

- при  $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^n (\Psi_{x_i})^2 - (\Psi_t)^2 < 0, \quad (2.68)$$

а задача Коші ставиться наступним чином: знайти двічі неперервно диференційовний розв'язок рівняння (2.67), який задовольняє умови

$$u(t, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial l} = \psi(x), \quad (x, t) \in S,$$

де  $l$  — заданий на  $S$  одиничний вектор, котрий у жодній точці не входить у дотичну до  $S$  площину, а  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  — задані на  $S$  досить гладкі функції.

Зазначимо, що умова "вільності" поверхні  $S$  є принциповою для коректної постановки задачі Коші. Справді, розглянемо хвильове рівняння

$$u_{tt}(t, x, y) = u_{xx}(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y). \quad (2.69)$$

Площина  $y = 0$  не є ні "вільною" (не виконується умова (2.68)), ні характеристичною поверхнею. Функція

$$u_m(t, x, y) = \frac{1}{m^2} \operatorname{sh} my \sin \frac{m}{\sqrt{2}}(x + t),$$

де  $m$  — натуральне число, є розв'язком рівняння (2.69), який задовольняє умови

$$u_m(t, x, y)|_{y=0} = 0, \quad u_y(t, x, 0) = \frac{1}{m} \sin \frac{m}{\sqrt{2}}(x + t). \quad (2.70)$$

Але задача Коші (2.69), (2.70) поставлена некоректно, оскільки

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m}{\sqrt{2}}(x + t) = 0,$$

а сам розв'язок  $u_m(t, x, y)$  при  $m \rightarrow \infty$  не є обмеженим.

## 2.10 Постановка задачі Гурса

Зауважимо, що характеристики рівняння гіперболічного типу не можуть бути носіями початкових умов задачі Коші. В цьому легко переконатися на прикладі хвильового рівняння (2.61). Справді, нехай носієм початкових умов є характеристика  $x + t = C$ . Тоді, виходячи із загального розв'язку рівняння (2.61), мають виконуватись умови

$$\begin{cases} f_1(C) + f_2(2x - C) = \varphi(x), \\ [f'_1(C) + f'_2(2x - C)] \cos(lx) + [f'_1(C) - f'_2(2x - C)] \sin(lx) = \psi(x). \end{cases}$$

Очевидно, що в разі довільних, навіть як завгодно гладких функцій  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$ , останні тотожності одночасно виконуватись не можуть.

Однак для хвильових рівнянь коректно поставленою є так звана характеристична задача Коші, або задача Гурса: знайти розв'язок рівняння (2.67) у характеристичному конусі :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i_0})^2 - (t - t_0)^2 < 0, \quad t > t_0,$$

який на його поверхні задовольняє умову

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \varphi, \quad (t, x) \in S, \\ S : \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i_0})^2 - (t - t_0)^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.71)$$

де  $\varphi$  — задана на  $S$  достатньо гладка функція.

У випадку  $n = 1$  конус  $K$  вироджується в область, обмежену характеристиками  $x + t = x_0 + t_0$ ,  $x - t = x_0 - t_0$  і прямою  $t = t_0$ , а умова (2.71) записується у вигляді

$$u(t, x) |_{x=x_0+t_0-t} = \mu_1(t), \quad u(t, x) |_{x=t-t_0+x_0} = \mu_2(t), \quad (2.72)$$

де  $\mu_1(t)$  і  $\mu_2(t)$  — відомі, двічі неперервно диференційовні функції, які задовольняють умову  $\mu_1(t_0) = \mu_2(t_0)$ .

Із загального розв'язку рівняння (2.61) легко дістати єдиний стійкий розв'язок задачі Гурса (2.61), (2.72):

$$u(t, x) = \mu_1 \left( \frac{t - x + t_0 + x_0}{2} \right) + \mu_2 \left( \frac{x + t - x_0 + t_0}{2} \right) - \mu_1(t_0).$$

Зазначимо, що задача Гурса є математичною моделлю низки важливих проблем практики. Як приклад розглянемо задачу про поглинання (сорбцію) газу.

Нехай крізь трубку, яка заповнена поглинаючою речовиною (сорбентом), пропускається газоповітряна суміш. Рівняння балансу речовини за умови, що швидкість газу  $\gamma$  досить велика й процес дифузії не відіграє суттєвої ролі в перенесенні газу, є

$$u_{tx}(t, x) + \frac{\beta}{\gamma} u_t(t, x) + \beta \nu u_x(t, x) = 0, \quad (2.73)$$

де  $1/\nu$  — коефіцієнт Генрі;  $\beta$  — кінетичний коефіцієнт;  $u(t, x)$  — концентрація газу, який знаходиться в порах сорбенту в шарі  $x$ .

Потрібно знайти розв'язок рівняння (2.73), якщо відомі концентрації газу в порах сорбенту в початковий момент часу  $t = 0$

$$u(0, x) = u_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} x} \quad (2.74)$$

і на вході  $u_0$  в довільний момент часу  $t$

$$u(t, 0) = u_0. \quad (2.75)$$

До задач, подібних задачі Гурса (2.73)–(2.75), приводять і проблеми процесу сушки повітряним потоком, прогрівання трубки потоком води тощо.

## 2.11 Метод послідовних наближень для задачі Гурса

Розглянемо задачу Гурса (рис. 2.19): в області

$$B = \{(x, t) \mid x_0 < x < x_0 + \alpha, \quad t_0 < t < t_0 + \beta\}, \quad \alpha, \beta = \text{const}$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{xt}(t, x) = f(t, x, u, u_t, u_x) \equiv f[u(t, x)], \quad (2.76)$$

який на характеристиках  $x = x_0$ ,  $t = t_0$  задовольняє умови

$$u(t_0, x) = \varphi_1(x), \quad u(t, x_0) = \varphi_2(t), \quad \varphi_1(x_0) = \varphi_2(t_0). \quad (2.77)$$

Вважаємо, що задані функції  $\varphi_1(x)$  та  $\varphi_2(t)$  належать класам  $C^1[x_0, x_0 + \alpha]$ ,  $C^1[t_0, t_0 + \beta]$  відповідно, а  $f[u(t, x)] \in C_1(D)$ , де  $D$  — область, проекція якої на площину  $xOt$  дає  $B$ ;  $C_1(D)$  — клас неперервних функцій у  $D$ , які мають у цій області обмежені частинні похідні першого порядку за всіма своїми аргументами, починаючи з третього.

Представимо задачу (2.76), (2.77) в еквівалентній інтегральній формі. Для цього зінтегруємо рівняння (2.76) за  $x$  у межах від  $x_0$  до  $x$ , а за  $t$  — у межах від  $t_0$  до  $t$  і врахуємо умови (2.77). Дістанемо

$$u(t, x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(x_0) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x f[u(\eta, \xi)] d\xi d\eta. \quad (2.78)$$

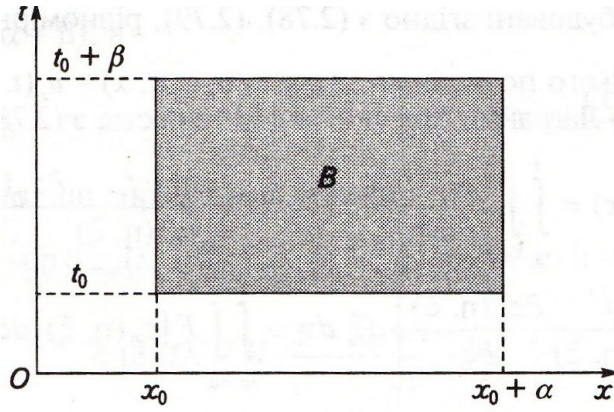


Рис. 2.19:

Розв'язок інтегрального рівняння (2.78) шукатимемо методом Пікара:

$$u_{n+1}(t, x) = \psi(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x f[u_n(\eta, \xi)] d\xi d\eta, \quad (2.79)$$

де  $\psi(t, x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(x_0)$ .

Зазначимо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{n+1}(t, x)}{\partial x} &= \psi_x(t, x) + \int_{t_0}^t f[u_n(\eta, x)] d\eta, \\ \frac{\partial u_{n+1}(t, x)}{\partial t} &= \psi_t(t, x) + \int_{x_0}^x f[u_n(t, \xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Доведемо, що послідовності функцій  $\{u_n(t, x)\}$ ,  $\left\{\frac{\partial u_n(t, x)}{\partial t}\right\}$  і  $\left\{\frac{\partial u_n(t, x)}{\partial x}\right\}$ , побудовані згідно з (2.79), (2.80), рівномірно збігаються в області  $B$ . Для цього позначимо  $z_n(t, x) = u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x)$ , і вважаємо, що  $\forall n \in \mathbb{N} u_n(t, x) \in D$ . Тоді, застосовуючи теорему Лагранжа про скінченні прирости, з (2.79) і (2.80) маємо

$$\begin{aligned} z_{n+1}(t, x) &= \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left\{ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u(\eta, \xi)} z_n(\eta, \xi) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_\eta(\eta, \xi)} \frac{\partial z_n(\eta, \xi)}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_\xi(\eta, \xi)} \frac{\partial z_n(\eta, \xi)}{\partial \xi} \right\} d\xi d\eta \equiv \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x F[z_n(\eta, \xi)] d\xi d\eta, \\ \frac{\partial z_{n+1}(t, x)}{\partial x} &= \int_{t_0}^t F[z_n(\eta, \xi)] d\eta, \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial z_{n+1}(t, x)}{\partial t} = \int_{x_0}^x F[z_n(t, \xi)] d\xi,$$

де  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u(\eta, \xi)}$ ,  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_\eta(\eta, \xi)}$ ,  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_\xi(\eta, \xi)}$  — похідні в точці

$$\left( t, x, u_n + \theta_1 z_n, \frac{\partial u_n}{\partial \eta} + \theta_2 \frac{\partial z_n}{\partial \eta}, \frac{\partial u_n}{\partial \xi} + \theta_3 \frac{\partial z_n}{\partial \xi} \right) \in D,$$

$$0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Унаслідок умов, накладених на функції  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(t)$  і  $f[u(t, x)]$ , існують такі сталі  $M$  і  $H$ , що

$$M = \sup_D \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial u_x} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial u_t} \right| \right\}, \quad H = \sup_{\bar{B}} \{ |\psi(t, x)|, |\psi_x(t, x)|, |\psi_t(t, x)| \}.$$

Покладемо  $z_0(t, x) = \psi(t, x)$ . Тоді з (2.81) дістанемо

$$|z_1(t, x)| \leq 3MH(x - x_0)(t - t_0) < 3MHK(x - x_0 + t - t_0),$$

$$\begin{aligned} |z_{1_x}(t, x)| &\leq 3MH(t - t_0) < 3MHK(x - x_0 + t - t_0), \\ |z_{1_t}(t, x)| &\leq 3MH(x - x_0) < 3MHK(x - x_0 + t - t_0), \end{aligned}$$

де  $K = \sup(1, \alpha + \beta)$ , а

$$\sup_{\bar{B}} \{ |z_2(t, x)|, |z_{2_x}(t, x)|, |z_{2_t}(t, x)| \} < (3MK)^2 H \frac{(x - x_0 + t - t_0)^2}{2!}.$$

Припустимо, що справедливі оцінки

$$\sup_{\bar{B}} \{ |z_n(t, x)|, |z_{n_x}(t, x)|, |z_{n_t}(t, x)| \} < (3MK)^n H \frac{(x - x_0 + t - t_0)^n}{n!}. \quad (2.82)$$

Тоді з (2.81) маємо

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(t, x)| &\leq (3MK)^n H 3M \left[ \frac{(x - x_0 + t - t_0)^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{(x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!} - \right. \\ &\left. - \frac{(t - t_0)^{n+2}}{(n+2)!} \right] < (3MK)^{n+1} H \frac{(x - x_0 + t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{[3MK(\alpha + \beta)]^{n+1}}{(n+1)!} H, \\ \sup_{\bar{B}} \{ |z_{n+1_t}(t, x)|, |z_{n+1_x}(t, x)|, \} &< \frac{[3MK(\alpha + \beta)]^{n+1}}{(n+1)!} H. \end{aligned}$$

Очевидно, що

$$u_n(t, x) = \sum_{i=0}^n z_i(t, x). \quad (2.83)$$



Згідно з ознакою Д'Аламбера ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[3MK(\alpha+\beta)]^{n+1}}{(n+1)!}$  збігається, а отже, на підставі оцінок (2.82) ряди  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n(t, x)$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_{n_t}(t, x)$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_{n_x}(t, x)$  в області  $B$  збігаються абсолютно й рівномірно, тобто внаслідок (2.83) в  $B$  рівномірно збігаються послідовності функцій  $\{u_n(t, x)\}$ ,  $\{u_{n_t}(t, x)\}$ ,  $\{u_{n_x}(t, x)\}$ .

Позначимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x) = u(t, x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_t}(t, x) = v(t, x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_x}(t, x) = \omega(t, x).$$

Переходячи до границі в (2.79), (2.80), дістаємо

$$u(t, x) = \psi(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x f(\eta, \xi, u, v, \omega) d\xi d\eta,$$

$$\omega(t, x) = \psi_x(t, x) + \int_{t_0}^t f(\eta, x, u, v, \omega) d\eta,$$

$$v(t, x) = \psi_t(t, x) + \int_{x_0}^x f(t, \xi, u, v, \omega) d\xi.$$

З останніх рівностей випливає, що  $v(t, x) = u_t(t, x)$ ,  $\omega(t, x) = u_x(t, x)$ , отже,

$$u(t, x) = \psi(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x f(\eta, \xi, u, u_\eta, u_\xi) d\xi d\eta. \quad (2.84)$$

Здиференціювавши (2.84) за  $t$  і  $x$  матимемо

$$u_{ix}(t, x) \equiv f[u(t, x)],$$

тобто гранична функція  $u(t, x)$  є розв'язком поставленої задачі Гурса (2.76), (2.77).

Покажемо, що цей розв'язок єдиний в області  $B$ . Для цього припустимо, що існують два розв'язки задачі (2.76), (2.77):  $u_1(t, x)$  і  $u_2(t, x)$ .

Позначимо

$$w(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x).$$

Тоді одержимо, що функція  $w(t, x)$  є розв'язком інтегрального рівняння

$$w(t, x) = \int_{x_0}^x \int_{t_0}^t F[w(\eta, \xi)] d\eta d\xi.$$

Познавшиши

$$H_1 = \sup_{\bar{B}} \{|w(t, x)|, |w_t(t, x)|, |w_x(t, x)|\}$$

і повторюючи попередні міркування, легко дістати оцінку

$$|w(t, x)| < \frac{[3MK(\alpha + \beta)]^{n+1}}{(n+1)!} H_1$$

для довільного  $n \in \mathbb{N}$ , а отже,  $w(t, x) \equiv 0$ , тобто  $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$  при  $(t, x) \in B$ , і єдиність доведена.

◇ **Зауваження 2.4.** Наведені вище міркування справедливі й у тому випадкові, коли  $f[u(t, x)] \in C(D)$  і функція  $f[u(t, x)]$  по  $u(t, x)$ ,  $u_t(t, x)$ ,  $u_x(t, x)$  задовольняє в області  $D$  умову Літшица.

▲ **Вправа.** За допомогою методу послідовних наближень довести існування та єдиність в області  $D$  розв'язку задачі Коші (2.59), (2.66).

## 2.12 Метод Рімана

Побудуємо розв'язок наступної задачі Коші (рис. 2.20): в області

$$D = \{(t, x) \mid x_0 < x < x_0 + \alpha, g(x) < t < t_0 + \beta\}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$Lu(t, x) \equiv u_{tx} + a(t, x)u_x + b(t, x)u_t + c(t, x)u = f(t, x), \quad (2.85)$$

який на "вільній" кривій  $t = g(x)$  ( $g'(x) > 0$ ) задовольняє умови

$$u(g(x), x) = \varphi(x), \quad u_t(g(x), x) = \psi(x). \quad (2.86)$$

Надалі вважатимемо, що коефіцієнти диференціального рівняння (2.85) і функції  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  є неперервно диференційовні в області  $D$ , а  $f(t, x) \in C(D)$ .

Викладемо метод розв'язування задачі Коші (2.85), (2.86), ідея якого належить видатному німецькому математикові Г.Ф.Б. Ріману. Зазначимо, що саме ним було закладено початок сучасної теорії гіперболічних рівнянь в частинних похідних.

Розглянемо поряд з диференціальним оператором  $Lu(t, x)$  так званий *спряжений оператор*

$$L^*v(t, x) = v_{tx} - (av)_x - (bv)_t + cv.$$

Легко перевірити, що в області  $D$  має місце тотожність

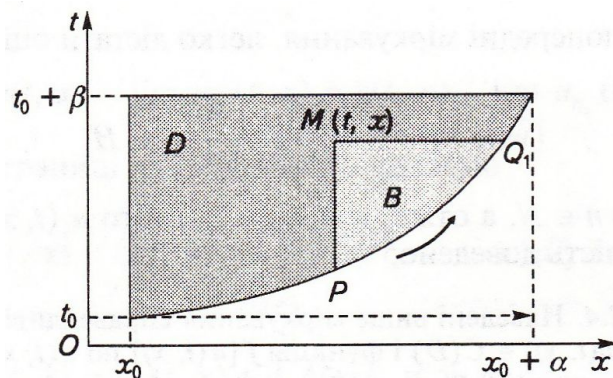


Рис. 2.20:

$$\begin{aligned}
 v(t, x)Lu(t, x) - u(t, x)L^*v(t, x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (vu_t - uv_t + 2auv) + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (vu_x - uv_x + 2buv) \quad (2.87)
 \end{aligned}$$

для довільних функцій  $u(t, x)$  і  $v(t, x)$  із класу  $C^2(D)$ .

Візьмемо в області  $D$  довільну точку  $M(t, x)$  і розглянемо область  $B$ , обмежену дугою лінії  $t = g(x)$  і двома прямими, паралельними осям координат, які виходять з точки  $M(t, x)$ .

Інтегруючи тотожність (2.87) по області  $B$  та застосовуючи формулу Гріна, дістаємо

$$2 \iint_B (vLu - uL^*v) d\xi d\eta = \int_{\cup PQ + [QM] + [MP]} K(\eta, \xi) d\xi + H(\eta, \xi) d\eta, \quad (2.88)$$

де

$$K(t, x) = uv_x - vu_x - 2buv, \quad H(t, x) = vu_t - uv_t + 2auv.$$

Обчислимо криволінійний інтеграл в правій частині (2.88) по відрізках  $[QM]$  і  $[MP]$ . Уздовж  $[QM]$   $\eta$  не змінюється (отже,  $d\eta = 0$ ), і ми маємо

$$\int_{[QM]} K(\eta, \xi) d\xi + H(\eta, \xi) d\eta = \int_{[QM]} K(\eta, \xi) d\xi.$$

Але

$$K(t, x) = uv_x - vu_x - 2buv = -(uv)_x + 2u(v_x - bv),$$

а отже,

$$\int_{[QM]} K(\eta, \xi) d\xi = (uv)_Q - (uv)_M + \int_{[QM]} 2u(v_\xi - bv) d\xi.$$

Аналогічно міркуючи щодо криволінійного інтеграла по відрізку  $[MP]$ , дістаємо

$$\int_{[MP]} Kd\xi + Hd\eta = \int_{[MP]} Hd\eta = (uv)_P - (uv)_M + \int_{[MP]} 2u[av - v_\eta] d\eta$$

Підставивши знайдені криволінійні інтеграли в (2.88), матимемо

$$u(M)v(M) = 0,5 \left[ (uv)_Q + (uv)_P + \int_{\cup PQ} Kd\xi + Hd\eta \right] + \\ + \int_{[QM]} u(v_\xi - bv)d\xi + \int_{[MP]} u[av - v_\eta] d\eta - \iint_B (vLu - uL^*v) d\xi d\eta. \quad (2.89)$$

Припустимо тепер, що функція  $u(t, x)$  є розв'язком задачі Коші (2.85), (2.86), а  $v(t, x, \eta, \xi)$  задовольняє диференціальне рівняння

$$L^*v(t, x, \eta, \xi) = 0 \quad (2.90)$$

і умови

$$\begin{aligned} v_\xi - bv = 0 &= 0 \quad [QM], \\ v_\eta - av = 0 &= 0 \quad [MP], \end{aligned} \quad (2.91)$$

причому  $v(M) = 1$ .

Інтегруючи рівняння (2.91) і враховуючи умову в точці  $M$ , дістаємо

$$\begin{aligned} v(t, x, t, \xi) &= e^{\int_t^\xi b(t, \lambda) d\lambda}, \\ v(t, x, \eta, x) &= e^{\int_t^\eta a(t, \lambda) d\lambda}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Задача (2.90), (2.92) є задачею Гурса і згідно з доведеним у п. 2.11 вона має єдиний розв'язок. Цей розв'язок називається *функцією Рімана*, яка не залежить ні від даних Коші, ні від вигляду кривої  $g(x)$ . Для функції Рімана точка  $(\eta, \xi)$  відіграє роль аргументу, а точка  $(t, x)$  — роль параметра.

Підставивши в (2.89) замість  $v$  функцію Рімана й враховуючи рівняння (2.85), матимемо

$$\begin{aligned} u(t, x) &= 0,5[(uv)_Q + (uv)_P + \\ &+ \int_{\cup PQ} K(\eta, \xi)d\xi + H(\eta, \xi)d\eta] - \iint_B v f(\eta, \xi) d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Формула (2.93) називається *формулою Рімана* й представляє розв'язок диференціального рівняння (2.85) для довільних початкових умов, заданих на довільній "вільній" кривій  $l$ .

Із методу побудови формули Рімана (2.93) випливає, що розв'язок задачі Коші (2.85), (2.86) є єдиним у  $D$  і неперервно залежить від початкових умов.

■ **Приклад 2.4.** За допомогою методу Рімана знайти розв'язок задачі Коші

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad 1 < y < +\infty, \quad (2.94)$$

$$u(x, 1) = \varphi(x), \quad u_y(x, 1) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty \quad (2.95)$$

Рівняння (2.94) в розглядуваній області належить до гіперболічного типу й має дві різні сім'ї характеристик :

$$C_1 = xy, \quad C_2 = x^{-1}y.$$

Ввівши нові незалежні змінні  $\xi = xy$ ,  $\eta = x^{-1}y$ , дістанемо канонічну форму рівняння (2.94):

$$U_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}U_\eta = 0. \quad (2.96)$$

Пряма  $y = 1$  у нових незалежних змінних буде мати вигляд гіперболи:  $\xi\eta = 1$ .  
Зі співвідношень  $x = \xi(\xi\eta)^{-0,5}$ ,  $y = (\xi\eta)^{0,5}$  і початкових умов (2.95) маємо

$$\begin{aligned} U_\xi \Big|_{\xi\eta=1} &= \frac{1}{2} [(\xi\eta)^{-0,5} u_x + \xi^{-1} (\xi\eta)^{0,5} u_y]_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2} [\varphi'(\xi) + \xi^{-1}\psi(\xi)], \\ U_\eta \Big|_{\xi\eta=1} &= \frac{1}{2} [\xi (\xi\eta)^{-0,5} u_y - \xi^2 (\xi\eta)^{-1,5} u_x]_{\xi\eta=1} = \frac{\xi}{2} [\psi(\xi) - \xi\varphi'(\xi)]; \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$U \Big|_{\xi\eta=1} = \varphi(\xi). \quad (2.98)$$

До задачі Коші (2.96)–(2.98) застосуємо формулу Рімана (2.93) (рис. 2.21).

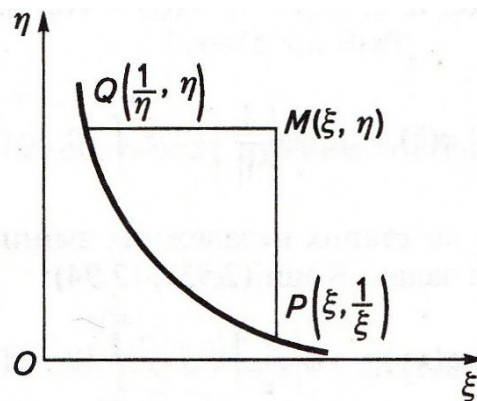


Рис. 2.21:

У нашому випадкові  $a = 0$ ,  $f = 0$ ,  $b = -\frac{1}{2\xi}$ . Отже, згідно з (2.93)

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = 0,5 [ (Uv)_Q + (Uv)_P + \int_{\cup QP} (vU_\lambda - Uv_\lambda - \lambda^{-1}Uv) d\lambda - \\ - (vU_\mu - Uv_\mu) d\mu ]. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Знаходимо функцію Рімана  $v(\xi, \eta, \lambda, \mu)$ . Вона повинна бути розв'язком задачі Гурса (див. (2.90), (2.92))

$$v_{\lambda\mu} + \frac{1}{2\lambda} v_\mu = 0; \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta, \lambda, \eta) &= e^{-\int_\xi^\lambda \frac{1}{2\lambda} d\lambda} = \sqrt{\frac{\xi}{\lambda}} \quad \text{на } MQ, \\ v(\xi, \eta, \xi, \mu) &= 1 \quad \text{на } PM. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Зінтегрувавши (2.100), дістанемо

$$v(\xi, \eta, \lambda, \mu) = \lambda^{-0,5} [f_1(\xi, \eta, \lambda) + f_2(\xi, \eta, \mu)],$$

де  $f_1(\xi, \eta, \lambda)$  і  $f_2(\xi, \eta, \mu)$  — довільні неперервно диференційовні функції. Визначаємо їх таким чином, щоб функція Рімана задовольняла умови (2.101). Маємо

$$f_1(\xi, \eta, \lambda) + f_2(\xi, \eta, \mu) = \sqrt{\xi},$$

отже,  $v(\xi, \eta, \lambda, \mu) = \sqrt{\frac{\xi}{\lambda}}$ .

Беручи до уваги, що

$$U(P) = \varphi(\xi), \quad U(Q) = \varphi\left(\frac{1}{\eta}\right),$$

$$v(P) = v\left(\xi, \eta, \xi, \frac{1}{\xi}\right) = 1, \quad v(Q) = v\left(\xi, \eta, \frac{1}{\eta}, \eta\right) = \sqrt{\xi\eta},$$

з (2.99) матимемо

$$U(\xi, \eta) = 0,5 \left[ \varphi(\xi) + \sqrt{\xi\eta} \varphi\left(\frac{1}{\eta}\right) + \sqrt{\xi} \int_{\xi}^{\frac{1}{\eta}} (0,5\varphi(\lambda) - \psi(\lambda)) \lambda^{-3/2} d\lambda \right].$$

Повертаючись до старих незалежних змінних  $x$  і  $y$ , знаходимо розв'язок поставленої задачі Коші (2.94), (2.95):

$$u(x, y) = 0,5 \left[ \varphi(xy) + y\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \sqrt{xy} \int_{xy}^{x/y} (0,5\varphi(\lambda) - \psi(\lambda)) \lambda^{-3/2} d\lambda \right].$$

■ **Приклад 2.5.** Побудуємо розв'язок задачі Коші (2.85), (2.86) за умови, що при  $(t, x) \in D$  а  $(t, x) = b(t, x) = 0$ ,  $c(t, x) = c - \text{const}$ .

Для розв'язання поставленої проблеми необхідно зінтегрувати задачу Гурса (2.90), (2.92), яка в нашому випадкові запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta}(t, x, \eta, \xi) + cv(t, x, \eta, \xi) &= 0, \\ v(t, x, t, \xi) &= v(t, x, \eta, \xi) = 1. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Шукаємо функцію Рімана  $v(t, x, \eta, \xi)$  у вигляді

$$\begin{aligned} v(t, x, \eta, \xi) &= q(z), \quad \text{де } z = 2\sqrt{c(\xi - x)(t - \eta)} \text{ при } c > 0, \text{ і} \\ z &= 2\sqrt{-c(\xi - x)(t - \eta)} \text{ при } c < 0. \text{ Маємо:} \end{aligned}$$

$$v_{\xi} = q'(z) \sqrt{\pm c(t - \eta)(\xi - x)^{-1}}, \quad v_{\xi\eta} = \mp \frac{c}{z} q'(z) \mp cq''(z)$$

(верхній знак береться при  $c > 0$ , нижній — при  $c < 0$ ). Підставляючи знайдені похідні в задачу (2.102), дістанемо

$$z^2 q''(z) + zq'(z) \mp z^2 q(z) = 0, \quad q(0) = 1 \quad (2.103)$$

Рівняння (2.103) є рівнянням Бесселя. Оскільки в точці  $z = 0$  розв'язок цього рівняння повинен бути обмеженим і дорівнювати одиниці, то, як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, у випадку  $c > 0$ ,  $q(z) = I_0(z)$ , а при  $c < 0$  дістаємо  $q(z) = J_0(z)$ , де

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} (0,5z)^{2k} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ch(z \cos \theta) d\theta$$

– модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку, а

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} (0,5z)^{2k} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \theta) d\theta -$$

– функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Отже,

$$\nu(t, x, \eta, \xi) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[c(\xi-x)(t-\eta)]^k}{(k!)^2} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(z \cos \theta) d\theta, & c > 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[-c(\xi-x)(t-\eta)]^k}{(k!)^2} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \theta) d\theta, & c < 0. \end{cases} \quad (2.104)$$

Звідси маємо:

$$\nu_{\xi\eta} = \begin{cases} -\frac{c}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(z \cos \theta) d\theta, & c > 0, \\ -\frac{c}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \theta) d\theta, & c < 0, \end{cases}$$

а отже, підставляючи (2.104) та знайдені похідні в (2.102) переконуємось, що (2.104) справді є розв'язком задачі Гурса (2.102), причому в класі регулярних розв'язків він єдиний при  $(t, x) \in D$ .

У точках  $P$  і  $Q$  маємо:

$$u(P) = \varphi(x), u(Q) = \varphi(k(t)), \quad (t = g(x) \Rightarrow x = k(t)), \\ \nu|_P = \nu|_Q = 1.$$

На  $\cup PQ$ :  $u = \varphi(\xi)$ ,  $u_{\eta} = \psi(\xi)$ ,  $u_{\xi} = \varphi'(\xi) - g'(\xi)\psi(\xi)$ ,

$$\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(z_1 \cos \theta) d\theta, \quad z_1 = 2\sqrt{a(\xi-x)(t-g(\xi))}, \quad c > 0 \\ \nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z_1 \cos \theta) d\theta, \quad z_1 = 2\sqrt{-a(\xi-x)(t-g(\xi))}, \quad c < 0, \\ \nu_{\xi} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2c \sin^2 \theta (t-g(\xi)) \operatorname{ch}(z_1 \cos \theta) d\theta, & c > 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2c \sin^2 \theta (t-g(\xi)) \cos(z_1 \cos \theta) d\theta, & c < 0, \end{cases} \\ \nu_{\eta} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2c \sin^2 \theta (x-\xi) \operatorname{ch}(z_1 \cos \theta) d\theta, & c > 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2c (x-\xi) \sin^2 \theta \cos(z_1 \cos \theta) d\theta, & c < 0. \end{cases}$$

Підставляючи наведені значення  $u(t, x)$  та  $v(t, x, \eta, \xi)$  у точках  $P$  і  $Q$  та на  $\cup PQ$  у формулу Рімана (2.93), дістанемо шуканий розв'язок поставленої задачі:

$$u(t, x) = \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_x^{k(t)} \{2c(t-g(\xi))\varphi(\xi) \sin^2 \theta + g'(\xi)\psi(\xi)\} \times$$

$$\times \operatorname{ch}(z_1 \cos \theta) d\xi d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_x^{k(t)} \int_{g(\xi)}^t f(\eta, \xi) \operatorname{ch}(z \cos \theta) d\eta d\xi d\theta, \quad c > 0, \quad (2.105)$$

$$u(t, x) = \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_x^{k(t)} \{2c(t - g(\xi))\varphi(\xi) \sin^2 \theta + g'(\xi)\psi(\xi)\} \times \\ \times \cos(z_1 \cos \theta) d\xi d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_x^{k(t)} \int_{g(\xi)}^t f(\eta, \xi) \cos(z \cos \theta) d\eta d\xi d\theta, \quad c < 0.$$

◇ **Зауваження 2.5.** Якщо в рівнянні (2.85)  $a(t, x) \in C^{(0.1)}(D)$ ,  $b(t, x) \in C^{(1.0)}(D)$ ,  $c(x, y)$ ,  $f(x, y) \in C(D)$ , а

$$a_x(t, x) = b_t(t, x), \quad (2.106)$$

то підстановкою

$$u(t, x) = \exp(\nu(t, x))W(t, x),$$

де

$$\nu(t, x) = - \int_{t_0}^t a(\tau, x) d\tau - \int_{x_0}^x b(\tau, t_0) d\tau,$$

рівняння (2.85) зводиться до рівняння вигляду

$$W_{tx} + (c - ab - a_x)W = f(t, x) \exp(-\nu(t, x)).$$

У випадку, коли  $c - ab - a_x = \text{const}$ , за допомогою формул (2.105) можемо побудувати розв'язок задачі (2.85), (2.86), (2.106).

## 2.13 Задачі Дарбу для рівняння коливання струни

Вище було показано, що задача Коші та задача Гурса для рівнянь гіперболічного типу поставлені коректно. Розглянемо ще дві досить поширені на практиці задачі для рівняння коливання струни.

□ **Перша задача Дарбу** (рис. 2.22): в області

$$D = \{(t, x) \mid -x < t < 0, \quad 0 < x < +\infty\}$$

знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad (2.107)$$

який задовольняє умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u(-x, x) = \psi(x), \quad \varphi(0) = \psi(0), \quad x \geq 0, \quad (2.108)$$

де  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  — задані дійсні функції класу  $C^2(0, +\infty)$ .



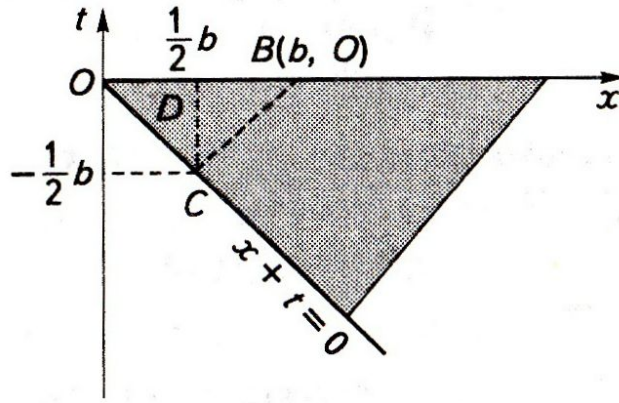


Рис. 2.22:

Для відшукування розв'язку задачі (2.107), (2.108) скористаємося загальним розв'язком рівняння (2.107) [див. формулу (2.16)]:

$$u(t, x) = f_1(x + t) + f_2(x - t). \quad (2.109)$$

Підставивши (2.109) в умови (2.108), дістанемо

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ f_1(0) + f_2(2x) = \psi(x), \end{cases} \quad x \geq 0.$$

З останніх співвідношень маємо

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \psi\left(\frac{x}{2}\right) - f_1(0), \\ f_1(x) &= \varphi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + f_1(0). \end{aligned}$$

Підставивши знайдені функції в (2.109), дістанемо розв'язок поставленої задачі Дарбу

$$u(t, x) = \varphi(x + t) - \psi\left(\frac{x + t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x - t}{2}\right). \quad (2.110)$$

Зазначимо: якщо в першій з умов (2.108) носієм даних є відрізок  $[OB]$  осі  $t = 0$ , то для однозначного визначення розв'язку задачі (2.107), (2.108) у трикутнику  $OBC$  у другій з умов (2.108) носієм даних має бути відрізок  $[OC]$ , де  $C$  — точка з координатами  $(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$ .

□ **Друга задача Дарбу** (рис. 2.23): в області

$$B = \{(t, x) \mid -\gamma(x) < t < 0, \quad 0 < x < +\infty\}$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (2.107), якщо відоме його значення на півосі  $t = 0, x \geq 0$  і кривій  $t = -\gamma(x)$ , тобто

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u(-\gamma(x), x) = \psi(x), \quad (2.111)$$

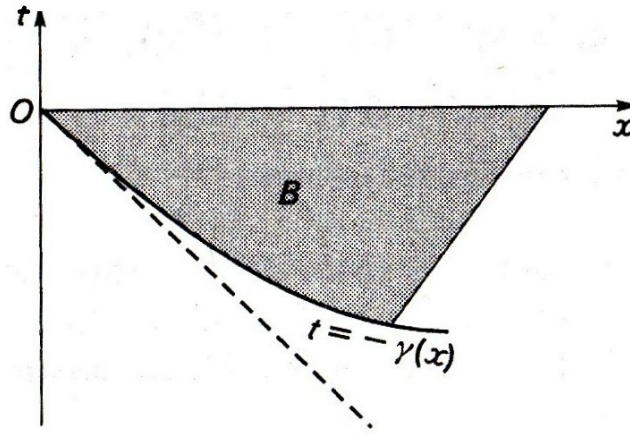


Рис. 2.23:

де крива  $t = -\gamma(x)$  з неперервною кривизною задовольняє умови

$$\gamma(0) = 0, \quad 0 < \gamma'(x) < 1. \quad (2.112)$$

Для побудови розв'язку задачі Дарбу (2.107), (2.111) підставимо (2.109) у (2.111). Маємо

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \varphi(x), \\ f_1(x - \gamma(x)) + f_2(x + \gamma(x)) &= \psi(x), \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Оскільки  $\gamma(0) = 0$ , то за умови (2.112) із рівності  $x + \gamma(x) = \xi$  однозначно можемо визначити  $x$  як функцію від  $\xi$ . Нехай ця функція є  $x = \delta(\xi)$ . Тоді другу умову (2.113) можна записати у вигляді

$$f_1(\delta(\xi) - \gamma(\delta(\xi))) + f_2(\xi) = \psi(\delta(\xi)).$$

Виключаючи з першої з умов (2.113) та добутої рівності  $f_2(\xi)$ , маємо

$$f_1(\xi) - f_1(\delta(\xi) - \gamma(\delta(\xi))) = \varphi(\xi) - \psi(\delta(\xi)). \quad (2.114)$$

Беручи до уваги, що

$$\frac{d}{d\xi} [\delta(\xi) - \gamma(\delta(\xi))] = \frac{1 - \gamma'(x)}{1 + \gamma'(x)},$$

а

$$0 < \frac{1 - \gamma'(x)}{1 + \gamma'(x)} < 1,$$

то для визначення функції  $f_1(\xi)$  із рівняння (2.114) можна використати метод ітерацій. У результаті одержимо

$$f_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(\lambda^k(\xi)) - \psi(\delta(\lambda^k(\xi)))], \quad (2.115)$$

де

$$\lambda^0(\xi) = \xi; \quad \lambda^1(\xi) = \lambda(\xi), \dots; \quad \lambda^k(\xi) = \lambda^{k-1}(\lambda(\xi)); \quad \lambda(\xi) = \delta(\xi) - \gamma(\delta(\xi)).$$

Тоді з першої з рівностей (2.113) маємо

$$f_2(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(\lambda^k(x)) - \psi(\delta(\lambda^k(x)))]. \quad (2.116)$$

Підставивши (2.115) і (2.116) в (2.109), дістанемо розв'язок другої задачі Дарбу

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(\lambda^k(x+t)) - \psi(\delta(\lambda^k(x+t)))] + \varphi(x-t) - \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(\lambda^k(x-t)) - \psi(\delta(\lambda^k(x-t)))] .$$

Із побудови розв'язків першої і другої задач Дарбу випливає їх єдиність. Зазначимо, що розглядаються й інші варіанти постановки задач Гурса та Дарбу.

## 2.14 Задача Коші з даними на гіперплощині. Перетворення Лоренца

Розглянемо один метод побудови розв'язку задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння в тому випадкові, коли початкові умови задані не при  $t = 0$ , а на деякій гіперплощині  $L$ , яка проходить через початок координат  $x = y = z = t = 0$  і нахилена до осі  $t$  під кутом, більшим  $\arctg a$ . Не зменшуючи загальності міркувань можемо вважати, що рівняння гіперплощини  $L$  має вигляд  $t = \frac{v}{a^2}x$ ,  $v$  — довільний параметр,  $v < a$ , оскільки цього завжди можна домогтися ортогональним перетворенням координат, за якого тривимірний оператор Лапласа переходить в тривимірний оператор Лапласа за новими незалежними змінними. Отже, розглянемо задачу Коші:

$$u_{tt}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z),$$

$$u \Big|_{t=\frac{v}{a^2}x} = \varphi(x, y, z), \quad u_t \Big|_{t=\frac{v}{a^2}x} = \psi(x, y, z), \quad (2.117)$$

де  $\varphi(x, y, z) \in C^3(E_3)$ ,  $\psi(x, y, z) \in C^2(E_3)$ .

Розв'язок задачі (2.117) побудуємо введенням нових незалежних змінних.

► **Означення 2.4.** *Будь-яке лінійне однорідне перетворення змінних  $t, x, y, z$  з дійсними коефіцієнтами, за якого квадратична форма  $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  залишається незмінною, називається **перетворенням Лоренца**.*

Можна показати, що всяке перетворення Лоренца є комбінацією ортогонального перетворення змінних  $x, y, z$ , яке залишає  $t$  незмінним, перетворення вигляду

$$x' = \frac{x - \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

де  $t', x', y', z'$  — нові змінні;  $\beta$  — число за модулем менше одиниці, і зміни знаку в деяких змінних (відображення).

Введемо в (2.117) нові незалежні змінні за допомогою перетворення Лоренца

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(x - vt), \quad y = y', \quad z = z', \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(t - \frac{v}{a^2}x), \quad \beta = \frac{v}{a}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Рівняння гіперплощини  $L : t = \frac{v}{a^2}x$  у нових незалежних змінних запишеться у вигляді  $t' = 0$ . Із (2.118) маємо:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(\frac{v}{a^2}x' + t').$$

Позначимо :

$$W(t', x', y', z') = u\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(\frac{v}{a^2}x' + t'), \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(x' + vt'), y', z'\right).$$

Тоді

$$u_x = W_{x'} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{v}{a^2 \sqrt{1 - \beta^2}} W_{t'}, \quad u_t = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} W_{t'} - \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} W_{x'},$$

$$u_{yy} = W_{y'y'}, \quad u_{zz} = W_{z'z'},$$

$$u_{xx} = \frac{1}{1 - \beta^2} W_{x'x'} - 2W_{x't'} \frac{v}{(1 - \beta^2)a^2} + \frac{v^2}{a^4(1 - \beta^2)} W_{t't'},$$

$$u_{tt} = \frac{v^2}{1 - \beta^2} W_{x'x'} - 2W_{x't'} \frac{v}{1 - \beta^2} + \frac{1}{1 - \beta^2} W_{t't'}.$$

Підставивши знайдені похідні в (2.117), дістанемо

$$u_{tt} - a^2 \Delta u(t, x, y, z) = W_{t't'} - a^2 \Delta W(t', x', y', z') = 0,$$

$$W|_{t'=0} = \varphi\left(\frac{x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, y', z'\right), \quad (2.119)$$

$$W_{t'}|_{t'=0} = \sqrt{1 - \beta^2} \psi\left(\frac{x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, y', z'\right) +$$

$$+ \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \varphi_x \left( \frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, y', z' \right).$$

Таким чином, хвильове рівняння є інваріантом відносно перетворення Лоренца. Зауважимо, що всяке неособливе лінійне перетворення незалежних змінних  $t, x, y, z$  із дійсними коефіцієнтами, яке не змінює вигляду хвильового рівняння  $u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x, y, z)$  є комбінацією перетворення Лоренца, перенесення початку координат у просторі  $t, x, y, z$  і перетворення подібності в цьому просторі.

Згідно з формулою Кірхгофа розв'язок задачі Коші (2.119) запишеться у вигляді

$$W(t', x', y', z') = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t'} \iint_{S_{at'}(x', y', z')} \frac{\varphi \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi, \eta, \zeta \right)}{at'} d\sigma_{t'} + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at'}(x', y', z')} \frac{\psi \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi, \eta, \zeta \right) \sqrt{1-\beta^2} + \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \varphi_x \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi, \eta, \zeta \right)}{at'} d\sigma_{t'}.$$

Повертаючись в останній нерівності до старих незалежних змінних згідно з (2.118), дістанемо шуканий розв'язок задачі Коші (2.117).

На завершення даної теми зазначимо також, що розв'язок задачі Коші

$$u_{\tau\tau}(t, x, y, z, \tau) + \frac{2}{\tau} u_{\tau}(t, x, y, z, \tau) = \Delta u(t, x, y, z, \tau), \quad (2.120)$$

$$u|_{\tau=0} = \varphi(t, x, y, z), \quad u_{\tau}|_{\tau=0} = 0, \quad (2.121)$$

де  $t$  — параметр,  $\varphi(t, x, y, z) \in C^2((0, +\infty) \times E_3)$ , дається формулою

$$u(t, x, y, z, \tau) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_{\tau}(x, y, z)} \varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_{\tau}, \quad (2.122)$$

$$S_{\tau}(x, y, z) : (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = \tau^2.$$

Рівняння (2.120) називається *рівнянням Дарбу*, а інтеграл в правій частині рівності (2.122) — *усередненим значенням функції*  $\varphi(t, x, y, z)$ .

Маємо

$$u(t, x, y, z, \tau) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_{\tau}(x, y, z)} \varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_{\tau} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(x, y, z)} \varphi(t, x + (x - \xi)\tau, y + (y - \eta)\tau, z + (z - \zeta)\tau) d\sigma_1, \quad (2.123)$$

де  $(\xi, \eta, \zeta)$  — змінна точка сфери  $S_1(x, y, z) : (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = 1$ .

Із (2.123) випливає, що

$$u(t, x, y, z, 0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(x, y, z)} \varphi(t, x, y, z) d\sigma_1 = \varphi(t, x, y, z),$$

тобто перша з умов (2.123) виконується.

Здиференціювавши (2.123) за  $\tau$ , дістанемо

$$\begin{aligned} u_\tau(t, x, y, z, \tau) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(x, y, z)} [\varphi_\alpha(x - \xi) + \varphi_\beta(y - \eta) + \varphi_\gamma(z - \zeta)] d\sigma_1 = \\ &= \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_\tau(x, y, z)} \left[ \varphi_\alpha \frac{\alpha - x}{\tau} + \varphi_\beta \frac{\beta - y}{\tau} + \varphi_\gamma \frac{\gamma - z}{\tau} \right] d\sigma_\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi\tau^2} \iiint_{K_\tau(x, y, z)} \Delta\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\alpha, d\beta, d\gamma, \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$K_\tau(x, y, z) : (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 \leq \tau^2.$$

На підставі теореми про середнє значення з (2.124) маємо

$$\begin{aligned} u_\tau|_{\tau=0} &= \frac{1}{4\pi\tau^2} \Delta\varphi(t, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) \iiint_{K_\tau(x, y, z)} d\alpha d\beta d\gamma|_{\tau=0} = \\ &= \frac{\tau}{3} \Delta\varphi(t, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})|_{\tau=0} = 0, \end{aligned}$$

$(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$  — деяка точка в  $K_\tau(x, y, z)$ .

Отже, функція (2.122) задовольняє початкові умови (2.121). Диференціюючи (2.124) за  $\tau$ , дістаємо

$$u_{\tau\tau}(t, x, y, z, \tau) = -\frac{2}{\tau} u_\tau + \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_\tau(x, y, z)} \Delta\varphi d\sigma_\tau,$$

або

$$u_{\tau\tau} + \frac{2}{\tau} u_\tau = \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_\tau(x, y, z)} \Delta\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_\tau. \quad (2.125)$$

Оскільки

$$\Delta u(t, x, y, z, \tau) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \iint_{S_\tau(x, y, z)} \Delta\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_\tau,$$

то, зіставивши добуту рівність із (2.125), переконуємося, що (2.122) справді є розв'язком задачі Коші (2.120), (2.121).

Припустимо тепер, що  $\varphi(t, x, y, z)$  є розв'язком задачі Коші

$$\varphi_{tt}(t, x, y, z) = a^2 \Delta \varphi(t, x, y, z), \quad (2.126)$$

$$\varphi|_{t=0} = \Phi(x, y, z), \quad \varphi_t|_{t=0} = \psi(x, y, z). \quad (2.127)$$

Тоді  $\Delta u(t, x, y, z, \tau) = \frac{1}{a^2} u_{tt}$  і на підставі (2.120) усереднене значення розв'язку  $\varphi(t, x, y, z)$  визначене за формулою (2.122), буде розв'язком рівняння

$$u_{\tau\tau} - \frac{1}{a^2} u_{tt} + \frac{2}{\tau} u_\tau = 0.$$

Домноживши останню рівність на  $\tau$ , дістанемо

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(\tau u) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tau u) = 0,$$

а отже,

$$\tau u(t, x, y, z, \tau) = f(at + \tau) + f_1(at - \tau),$$

де  $f(at + \tau)$  і  $f_1(at - \tau)$  — довільні двічі неперервно диференційовні функції своїх аргументів.

Поклавши в останній рівності  $\tau = 0$ , маємо

$$f(at) = -f_1(at),$$

тобто

$$u(t, x, y, z, \tau) = \frac{1}{\tau} [f(at + \tau) - f(at - \tau)]. \quad (2.128)$$

Переходячи в останній рівності до границі, коли  $\tau \rightarrow 0$ , і беручи до уваги першу з початкових умов (2.121), дістанемо

$$u(t, x, y, z) = 2f'(at). \quad (2.129)$$

Отже, для відшукування розв'язку задачі Коші (2.126), (2.127) залишилось визначити таку функцію  $f'(at)$ , щоб  $\varphi(t, x, y, z)$  задовольняла початкові умови (2.127).

Із (2.128) маємо

$$\frac{\partial(\tau u)}{\partial \tau} = f'(at + \tau) + f'(at - \tau),$$

$$\frac{\partial(\tau u)}{\partial t} = a [f'(at + \tau) - f'(at - \tau)],$$

тобто

$$2f'(at + \tau) = \frac{\partial(\tau u)}{\partial \tau} + \frac{1}{a} \frac{\partial(\tau u)}{\partial t}.$$

Поклавши в останній рівності  $t = 0$  та урахувавши (2.123), дістанемо

$$2f'(\tau) = \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{4\pi\tau} \iint_{S_\tau(x,y,z)} \varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_\tau + \frac{1}{a} \frac{1}{4\pi\tau} \iint_{S_\tau(x,y,z)} \varphi_t(t, \alpha, \beta, \gamma) d\sigma_\tau \right]_{t=0}.$$

На підставі початкових умов та (2.127) остаточно маємо

$$\varphi(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}(x,y,z)} \frac{\Phi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_{at} + \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{at}(x,y,z)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma_{at},$$

і ми знову дістали формулу Кірхгофа.

■ **Приклад 2.6.** 1. Зінтегрувати диференціальні рівняння:

1)  $u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + 2u_y = 0;$

2)  $(x^2 + \cos y)u_{xy} - \sin y u_x + 2xu_y = 0;$

3)  $e^y u_{xy} + u_{yy} + e^{2y} u_x + (e^y - 1)u_y = 0;$

4)  $u_{xx} - 2xu_{xy} - (2x + 1)u_{yy} - \frac{1}{x+1}(u_x + u_y) = 0, x \neq -1;$

5)  $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x;$

6)  $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$

7)  $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0;$

8)  $(x - y)u_{xy} - u_x + u_y = 0;$

9)  $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0;$

10)  $\operatorname{ch} x u_{xy} + (\operatorname{sh} x + y \operatorname{ch} x)u_y + \operatorname{ch} x u = 0.$

2. Знайти закон вільних коливань однорідної нескінченної струни (записати формули, які визначають профіль струни при  $t \geq 0$  і закон руху точок струни з різними абсцисами) та графічно побудувати її профіль у різні моменти часу за таких умов:

a) струна збуджена локальним початковим відхиленням у формі параболу

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -c), \\ h(1 - \frac{x^2}{c^2}), & x \in [-c, c], \\ 0, & x \in (c, +\infty); \end{cases}$$



б) початкова швидкість задається рівностями

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geq h, \\ \frac{a}{100} & \text{при } x \in [0, h], \\ -\frac{a}{100} & \text{при } x \in (-h, 0), \end{cases}$$

а початкове відхилення рівне нулю;

в) початкове відхилення не дорівнює нулю тільки на проміжках  $(-2c, -c)$ ,  $(c, 2c)$  і має форму ламаної з вершинами в точках  $-2c, -1, 5c, -c, c, 1, 5c, 2c$ , а початкова швидкість нульова;

г) початкове відхилення точок струни рівне нулю, а

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < c, \\ \frac{h}{2c^2}x(2c - x) & \text{при } x \in [c, 2c], \\ 0 & \text{при } x > 2c; \end{cases}$$

д) початкове відхилення ненульове тільки на проміжку  $(0, \pi)$ , де воно становить  $2 \sin x$ , а початкова швидкість дорівнює нулю;

е) початкове відхилення дорівнює нулю, а початкова швидкість має сталі значення  $\psi_0$  на проміжку струни  $(x_1, x_2)$  і нульова поза цим проміжком;

є) початкове відхилення точок струни задається рівністю

$$u(x, 0) = h^2 \frac{\sin x}{x},$$

а початкова швидкість дорівнює нулю.

3. Дослідити процес вимушених коливань однорідної нескінченної струни, якщо початкове відхилення й швидкість дорівнюють нулю, а  $f(t, x) = 2tx$ .

Показати, що функція

$$u(t, x, y, z) = \varphi(m_1x + m_2y + m_3z + mt)$$

описує процес поширення хвиль, і знайти швидкість хвилі.

4. Показати, що функція

$$u(t, x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + b^2t^2$$

описує процес поширення хвиль, і знайти швидкість хвилі.

5. Дослідити процес вільних коливань однорідної нескінченної мембрани, якщо:

а) початкове відхилення її точок становить  $x^2y^2$ , а швидкість дорівнює нулю;

б) у початковий момент часу швидкість її точок дорівнює  $xy$ , а  $u(0, x, y) = 0$ .

б. Дослідити процес поширення звуку, якщо  $u(0, x, y, z) = 1/x$ , а початкова швидкість дорівнює нулю ( $x \neq 0, x^2 \neq t^2$ );

7. Методом Рімана знайти розв'язок задач Коші:

а)  $u_{tt} = u_{xx} + f(t, x)$ ,  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ ;

б)  $xu_{xx} - u_{yy} + u_x = 0$  ( $x > 0$ ),  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_y(x, 0) = \psi(x)$ .

8. Знайти розв'язок задач Коші:

а)  $y^2 u_{yy} - x^2 u_{xx} = 0$ ,  $u(x, 1) = \sin x$ ,  $u_y(x, 1) = 0$ ;

б)  $yu_{xx} + x(2y - 1)u_{xy} - 2x^2 u_{yy} - \frac{y}{x}u_x = 0$ ,  $u(0, x) = x^2$ ,  $u_y(0, x) = 1$ ,  $x > 0$ ;

в)  $u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0$ ,  $u(x, \sin x) = x + \cos x$ ,  $u_y(x, \sin x) = \sin x$ ;

г)  $2u_{xy} - u_{yy} = 0$ ,  $u(x, -x) = 5x$ ,  $u_y(x, -x) = e^{-x}$ ;

д)  $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0$ ,  $u(0, y) = 0$ ,  $u_x(0, y) = 3y$ ;

е)  $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0$ ,  $u(0, y) = \varphi(y)$ ,  $u_x(0, y) = \psi(y)$ ;

є)  $u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0$ ,  $u(x, \frac{x}{2}) = 2 - x$ ,  $u_y(x, \frac{x}{2}) = 0$ .

### Тема 3

## ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В ОБМЕЖЕНИХ І НАПІВОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

### 2.15 Постановка мішаних задач

Як уже зазначалося, для повної характеристики хвильового процесу недостатньо лише диференціальних рівнянь: до них необхідно приєднати деякі додаткові умови. В розглянутому випадку необмежених областей цими додатковими співвідношеннями були початкові умови (початковий стан досліджуваного процесу).

Якщо ж деяке явище природи досліджується в обмеженій або в напівобмеженій області, то для однозначного його описання, крім задання початкових умов, необхідно також урахувати режим на межі області, в якій відбувається це явище (задати крайові умови). Справді, якщо розглянути вільні коливання скінченної однорідної струни, закріпленої на кінцях, то внаслідок початкового відхилення й початкової швидкості вліво і вправо по струні побіжать хвилі. Досягнувши кінців струни, вони відіб'ються і підуть у зворотному напрямі, істотно впливаючи на хвильовий процес. Отже, якщо не враховувати режиму на кінцях струни, то тим самим не враховуватиметься вплив на процес коливання відбитих хвиль.

У випадку рівняння коливання скінченної струни залежно від режиму на її кінцях ( $x = 0$  і  $x = l$ ) розглядають ТРИ ОСНОВНИХ ТИПИ КРАЙОВИХ УМОВ:

1. кінці струни рухаються за заданими законами  $\mu_1(t)$  і  $\mu_2(t)$  відповідно, тобто

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u(t, l) = \mu_2(t), \quad t \geq 0; \quad (2.130)$$

2. до кінців струни прикладені сили відповідно  $v_1(t)$  і  $v_2(t)$ , які діють в напрямку коливань. Тоді крайові умови запишуться у вигляді

$$u_x(t, 0) = v_1(t), \quad u_x(t, l) = v_2(t), \quad t \geq 0; \quad (2.131)$$

3. до кінців струни прикріплені пружини, які діють уздовж осі  $Ox$ . Тоді сили натягу  $Eu_x$  на кінцях зрівноважуватимуться силами дії пружин, які дорівнюють  $\alpha u$  ( $\alpha$  — коефіцієнт жорсткості). Нехай пружини, своєю чергою, рухаються за законами  $\gamma_1(t)$  і  $\gamma_2(t)$  відповідно. Тоді режим на кінцях струни запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} u_x(t, 0) - h[u(t, 0) - \gamma_1(t)] &= 0, \\ u_x(t, l) + h[u(t, l) - \gamma_2(t)] &= 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.132)$$

де  $h = \alpha/E$ .

Для дво- й тривимірного випадків розглянуті типи крайових умов запишуться у вигляді

$$u|_{M \in S} = \mu(t, M), \quad t \geq 0, \quad (2.133)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{M \in S} = v(t, M), \quad t \geq 0, \quad (2.134)$$

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + hu \right] \Big|_{M \in S} = \gamma(t, M), \quad t \geq 0, \quad (2.135)$$

де  $S$  — поверхня, яка обмежує область  $D_1$  зміни точки  $M$ ;  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$  — похідна по зовнішній нормалі до поверхні  $S$ .

Таким чином, досліджуючи хвильові процеси в обмежених областях, розглядають ТРИ ОСНОВНІ МІШАНІ ЗАДАЧІ:

- *перша задача* — в просторі функцій  $C^2(D)$ ,  $D = D_1 \times (0, T)$ , знайти розв'язок хвильового рівняння

$$u_{tt}(t, M) = a^2 \Delta u(t, M) + f(t, M), \quad (2.136)$$

який задовольняє початкові

$$u(0, M) = \varphi(M), \quad u_t(0, M) = \psi(M), \quad M \in D + S \quad (2.137)$$

і крайові умови (2.133);

- *друга і третя задачі* ставляться аналогічно із заміною крайових умов (2.133) на умови (2.134), (2.135) відповідно.

Зауважимо, що всі розглянуті типи крайових умов (2.133)–(2.135) можна записати одним співвідношенням

$$\left( \beta_1(M) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta_2(M)u \right) \Big|_{M \in S} = \gamma(t, M), \quad t \geq 0.$$

Якщо  $\beta_1(M) \equiv 0$ , то дістаємо крайову умову (2.133), при  $\beta_2(M) \equiv 0$  — умову (2.134), а при  $\beta_1(M) \neq 0$  і  $\beta_2(M) \neq 0$  — умову (2.135).

Крайові й початкові умови мають задовольняти умову узгодженості

$$\left[ \beta_1(M) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} + \beta_2(M)\varphi(M) \right] \Big|_{M \in S} = \gamma(0, M).$$

Зазначимо, що проблеми практики часто приводять до мішаних задач, коли на різних частинах краю  $S$  області  $D$  задаються різні крайові умови. Наприклад, якщо вивчається процес коливання струни завдовжки  $l$ , яка нерухомо закріплена на правому кінці й вільна на лівому, то крайові умови запишуться у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$$

► **Означення 2.5.** Струну називають *напівнескінченною*, якщо один її кінець розміщений у початку координат  $x = 0$ , а інший знаходиться на такій відстані від початку координат, яка значно перевищує величину  $at$  ( $a$  — стала, яка фігурує в рівнянні коливання струни,  $t$  — час).

Математично описуючи процес коливання однорідної напівнескінченної струни (хвильовий процес в напівобмеженій області), ми також приходимо до мішаної задачі: в просторі функцій  $C^2(B = \{(t, x) | t > 0, x \in (0, +\infty)\})$  знайти розв'язок рівняння коливання струни

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x),$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, +\infty)$$

і одну із крайових (2.130)–(2.132) при  $x = 0$  (в залежності від режиму на лівому кінці струни).

Покажемо, що сформульовані мішані задачі однозначно описують відповідні хвильові процеси в обмежених та напівобмежених областях. Для цього наведемо два методи побудови розв'язків мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу.

## 2.16 Метод характеристик

□ **Побудова розв'язку мішаної задачі у випадку напівнескінченної струни.** Спочатку розглянемо таку задачу: дослідити процес вільних коливань однорідної напівнескінченної струни, якщо початкове відхилення точок струни та їхня початкова швидкість становлять  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  відповідно, а лівий кінець нерухомо закріплений.

Відповідна математична модель: в області

$$B = \{(t, x) \mid t \in (0, T], \quad x \in (0, +\infty), \quad T = \text{const}\} \quad (2.138)$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (2.139)$$

який задовольняє початкові

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, +\infty) \quad (2.140)$$

та крайову

$$u(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (2.141)$$

умови.

Для побудови розв'язку мішаної задачі (2.139)–(2.141) застосуємо метод характеристик.

Як було показано в темі 2, загальний розв'язок рівняння (2.139) має вигляд

$$u(t, x) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \quad (2.142)$$

Тут  $f_1(z)$  і  $f_2(z)$ ,  $z = x \pm at$  — довільні функції, визначені при  $z \in (-\infty, +\infty)$ . Оскільки в нашому випадкові функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  визначені тільки при  $x \geq 0$ , то згідно з початковими умовами при  $x - at > 0$  маємо

$$f_1(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 \psi(z) dz - C, \quad (2.143)$$

$$f_2(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(z) dz + C, \quad (2.144)$$

тобто при  $x - at > 0$

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, \quad (2.145)$$

Знайдемо розв'язок мішаної задачі (2.139)–(2.141) при  $x - at < 0$ . Зауважимо, що функція  $f_2(x + at)$  визначена за формулою (2.144) для всіх  $x \geq 0, t > 0$ .

Знайдемо функцію  $f_1(x - at)$  при  $x - at < 0$ . Для цього використаємо крайову умову (2.141). Маємо

$$f_1(-at) + f_2(at) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.146)$$

Покладемо  $-at = z$ . Тоді на підставі (2.146) дістаємо

$$f_1(z) = -f_2(-z), \quad z < 0, \quad (2.147)$$

а отже, внаслідок (2.144) визначаємо  $f_1(x - at)$  при  $x - at < 0$ :

$$f_1(x - at) = -f_2(-x + at) = -\frac{1}{2}\varphi(at - x) - \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(z)dz - C. \quad (2.148)$$

Підставляючи (2.148), (2.144) в (2.142), знаходимо розв'язок задачі (2.139)–(2.141) при  $x - at < 0$ :

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(z)dz. \quad (2.149)$$

Отже, розв'язок мішаної задачі (2.139)–(2.141) дається формулою Д'Аламбера (2.145) при  $x - at > 0$  і формулою (2.149) при  $x - at < 0$ .

□ **Геометрична інтерпретація побудови розв'язку задачі (2.138)–(2.140).** Розв'язок мішаної задачі будується в ДВА ЕТАПИ.

- *Перший етап.* Загальний розв'язок (2.142) ДРЧП (2.139) підставляємо в початкові умови (2.140) і знаходимо функції  $f_1(x - at)$  та  $f_2(x + at)$  в точках осі  $Ox$ .

Тепер функція  $f_1(x - at)$  відома на всіх характеристиках  $x - at = const > 0$ , оскільки  $f_1(x - at)$  — стала вздовж таких характеристик (рис.2.24).

Ці характеристики заповнюють всю область  $x - at > 0$ . З іншого боку, хвиля  $f_2(x + at)$  відома для всіх  $x > 0$  і  $t > 0$ . Справді, вона є сталою на характеристиках  $x + at = const$ , а такі характеристики, випущені з точок осі  $Ox$ , покривають усю область  $x > 0, t > 0$ .

Отже, початкові умови дають можливість визначити розв'язок мішаної задачі (2.139)–(2.141) у тій частині області  $x > 0, t > 0$ , де на рис. 2.24 проходять характеристики  $x - at = const > 0$  і  $x + at = const$  (тобто під головною характеристикою  $x - at = 0$ ).

Із рис. 2.24 бачимо, що над головною характеристикою  $x - at = 0$  хвиля  $f_1(x - at)$  невідома, але відома зворотна хвиля  $f_2(x + at)$ .

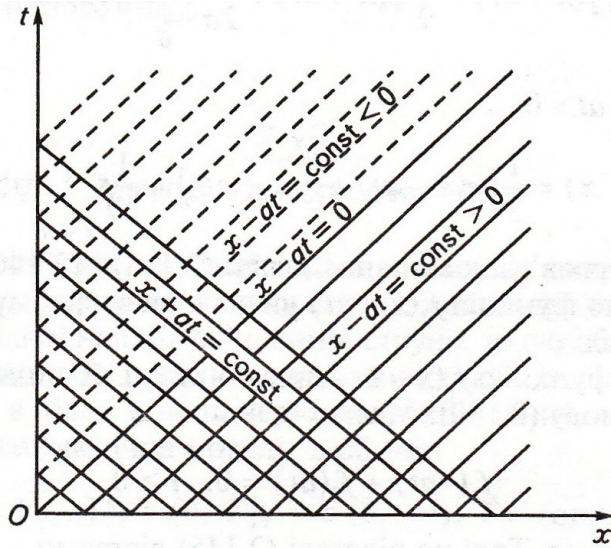


Рис. 2.24:

- Підставляємо загальний розв'язок (2.142) у крайову умову (2.141), яка задана в точках осі  $Ot$ . Хвиля  $f_2(x + at)$  у цих точках визначена з початкових умов. Таким чином, крайова умова (2.141) дає змогу встановити співвідношення між прямою та зворотною хвилями в точках осі  $Ot$ , звідки визначаємо  $f_1(x - at)$  у цих точках. Але тоді  $f_1(x - at)$  визначається й на характеристиках  $x - at = \text{const} < 0$  (штрихові лінії над головною характеристикою), тобто розв'язок мішаної задачі  $u(t, x)$  побудовано у всій області  $x < at$ .

► **Означення 2.6.** В області  $0 < x < at$  функцію  $f_2(x + at)$  називають *хвилею, що падає на лівий кінець струни  $x = 0$* , а  $f_1(x - at)$  — *відображеною від цього кінця хвилею*.

У зв'язку з цим означенням розглянутий метод побудови розв'язку мішаних задач називають також *методом падаючої та відображеної хвилі*.

□ **Умова неперервності розв'язку мішаної задачі (2.139)–(2.141) вздовж головної характеристики.** Із вищевикладеного випливає, що розв'язок мішаної задачі (2.139)–(2.141) дається формулою Д'Аламбера (2.145) при  $x - at > 0$  і формулою (2.149) при  $x - at < 0$ . У зв'язку з цим уздовж головної характеристики цей розв'язок може бути розривним.

Знайдемо умову неперервності розв'язку мішаної задачі (2.139)–(2.141) уздовж лінії  $x - at = 0$ . Зазначимо, що розрив довільного розв'язку рівняння (2.139) уздовж головної характеристики є сталою величиною. Справді, хвиля  $f_2(x + at)$  неперервна при переході через головну характеристику, оскільки її лінії рівня  $x + at = \text{const}$  перетинають пряму  $x = at$ , а хвиля  $f_1(x - at)$  під і над головною характеристикою  $x - at = 0$  має границі, що дорівнюють

$f_1(0+)$  та  $f_1(0-)$  відповідно. Таким чином,

$$u|_{x-at=0+} - u|_{x-at=0-} = f_1(0+) - f_1(0-), \quad (2.150)$$

а отже, умова неперервності розв'язку мішаної задачі (2.139)–(2.141) на головній характеристиці має вигляд

$$f_1(0+) = f_1(0-), \quad (2.151)$$

або, беручи до уваги (2.143), (2.148), дістаємо

$$f_1(0+) = \frac{1}{2}\varphi(0) - C, \quad f_1(0-) = -\frac{1}{2}\varphi(0) - C,$$

тобто

$$\frac{1}{2}\varphi(0) = -\frac{1}{2}\varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(0) = 0. \quad (2.152)$$

Вираз (2.152) є умовою узгодженості початкових і крайової умов (умова неперервності граничних значень розв'язку  $u(t, x)$  в початку координат  $(0, 0)$ ).

Отже, робимо висновок: умова (2.152) узгодженості початкових і крайової умов мішаної задачі (2.139)–(2.141) є необхідною та достатньою умовою неперервності розв'язку на всій головній характеристиці  $x - at = 0$ .

Аналогічно будуються розв'язки мішаних задач для напівнескінченної струни й у випадку інших крайових умов. Наприклад, якщо кінець струни  $x = 0$  вільний, то крайова умова запишеться у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (2.153)$$

Розв'яжемо мішану задачу (2.139), (2.140), (2.153).

Якщо  $x > at$ , то справедлива формула Д'Аламбера (2.149). Визначимо  $f_1(x - at)$  у випадку, коли  $x - at < 0$ . Для цього підставляємо загальний розв'язок (2.143), (2.144) в крайову умову (2.153):

$$f_1'(-at) + f_2'(at) = 0, \quad t > 0, \quad (2.154)$$

звідки, позначаючи  $z = -at$ , дістаємо

$$f_1'(z) + f_2'(-z) = 0, \quad z < 0.$$

Інтегруючи останню рівність за  $z$ , маємо

$$f_1(z) - f_2(-z) = C_1 = \text{const}. \quad (2.155)$$

Взявши до уваги (2.144), із (2.155) дістаємо

$$f_1(x - at) = f_2(at - x) + C_1 = \frac{1}{2}\varphi(at - x) + \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(z) dz + C_1 + C,$$



тобто при  $x - at < 0$

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(at - x) + \varphi(x + at)] + \\ + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{at-x} \psi(z) dz + \int_0^{x+at} \psi(z) dz \right] + C_1 + 2C.$$

З умови неперервності розв'язку мішаної задачі на головній характеристиці  $x - at = 0$  маємо

$$f_1(0-) = \frac{1}{2}\varphi(0) + C_1 + C, \quad f_1(0+) = \frac{1}{2}\varphi(0) - C,$$

$$\frac{1}{2}\varphi(0) + C_1 + C = \frac{1}{2}\varphi(0) - C \Leftrightarrow C_1 + 2C = 0,$$

отже,

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, & x - at > 0, \\ \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(at - x)] + \\ + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{at-x} \psi(z) dz + \int_0^{x+at} \psi(z) dz \right], & x - at < 0. \end{cases}$$

◇ **Зауваження 2.6.** Для розглянутих задач ми будували тільки неперервні розв'язки, оскільки розривні розв'язки для мішаних задач у випадку рівняння коливання струни або стержня не мають фізичного змісту (розрив розв'язку означає розрив струни або стержня). Однак у теорії акустики чи газовій динаміці розривні розв'язки мають фізичний зміст і називаються ударними хвилями.

□ **Геометричне зображення процесу вільних коливань напівнескінченної струни.** Для цього, крім загального методу, викладеного вище, іноді зручно застосувати також методи парного і непарного продовження. Розглянемо їх на прикладах.

**Метод непарного продовження.** Нехай нам потрібно геометрично зобразити розв'язок мішаної задачі (2.139)–(2.141) при  $t = 1, \dots, 5$ , якщо  $a = 1$ ,  $\psi(x) = 0$ ,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 3) \cup [5, +\infty), \\ x - 3, & x \in [3, 4), \\ 5 - x, & x \in [4, 5). \end{cases} \quad (2.156)$$

Розглянемо розв'язок  $z(t, x)$  задачі Коші

$$z_{t^2}(t, x) = z_{x^2}(t, x), \quad t \in (0, +\infty), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$z(0, x) = \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad (2.157)$$

$$z_t(0, x) = 0.$$

Покладемо  $u(t, x) = z(t, x)|_{x \geq 0}$ .

Очевидно, функція  $u(t, x)$  задовольняє рівняння (2.143) і початкові умови (2.156). Надалі покажемо, що через непарність функції  $z(t, x)$  по  $x$  функція  $u(t, x)$  задовольняє також крайову умову.

Зобразимо графічно (рис.2.25) розв'язок задачі Коші (2.157) для  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  (див. тему 2).

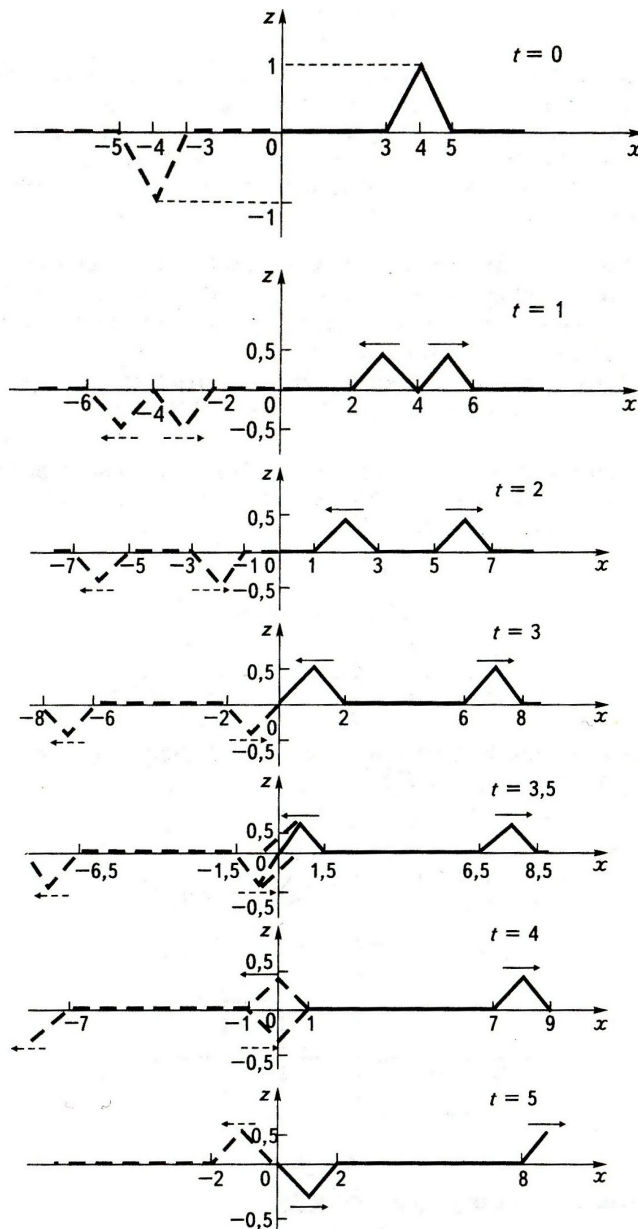


Рис. 2.25:

Як бачимо з рисунка (стрілками показано напрями руху хвиль: прямої — вправо, зворотної — вліво), крайова умова (2.141) виконується для всіх  $t \geq 0$ ,

оскільки функція  $z(t, x)$  непарна по  $x$  (суцільною лінією зображено функцію  $u(t, x)$ ).

Область  $x < 0$  називатимемо *фіктивною*.

Аналогічно можна графічно зобразити процес вільних коливань напівнескінченної струни, які відбуваються лише за рахунок початкової швидкості (тобто в мішаній задачі (2.139)–(2.141)  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $\psi(x) \neq 0$ ).

Як приклад розглянемо коливання напівнескінченної однорідної струни із закріпленим кінцем, які здійснюються внаслідок удару по ній молоточком (коливання струни рояля). За такого процесу відшукують роз’язок мішаної задачі (2.139)–(2.141), де  $\varphi(x) \equiv 0$ , а початкова швидкість має вигляд, як на рис. 2.26.

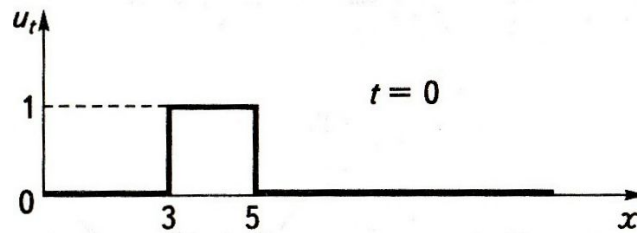


Рис. 2.26:

Зобразимо профіль струни при  $t = 1, \dots, 6$ . Для цього в задачі Коші (2.157) покладемо (рис. 2.27)

$$z(x) \equiv 0,$$

$$z_t(0, x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(x), & x < 0. \end{cases}$$

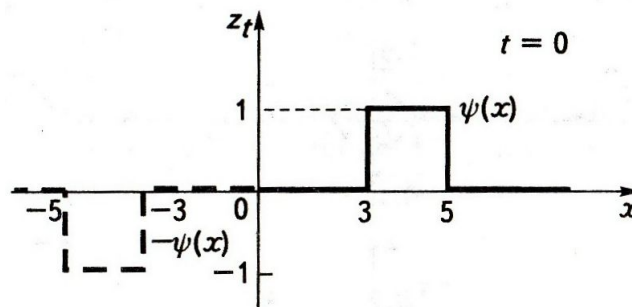


Рис. 2.27:

У нашому випадкові (див. тему 2)

$$z(t, x) = \Phi(x + t) - \Phi(x - t),$$

де  $\Phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x z_t(0, \tau) d\tau$

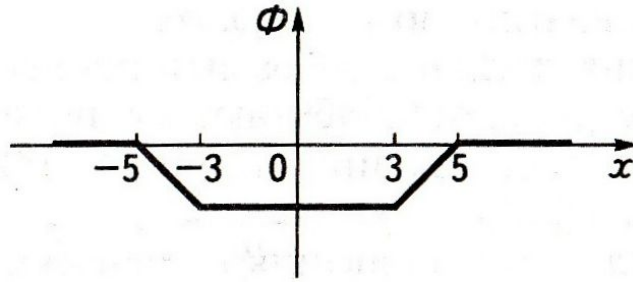


Рис. 2.28:

Маємо (див. рис. 2.28)

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -5), \\ -0,5(x+5), & x \in [-5, -3), \\ -1, & x \in [-3, 3), \\ 0,5(x-5), & x \in [3, 5), \\ 0, & x \in [5, +\infty). \end{cases}$$

Покажемо, що й у цьому випадкові

$$u(t, x) \equiv z(t, x) |_{x \geq 0}.$$

Справді, функція  $u(t, x)$  задовольняє рівняння (2.139) і початкові умови (2.140). Зобразимо профіль струни в різні моменти часу (рис. 2.29) і переконаємося, що крайова умова (2.141) також виконується.

Далі, зі зростанням часу  $t$  в області  $x \geq 0$  трапеція рухатиметься в напрямі осі  $Ox$ , а у фіктивній області — у зворотному напрямку. Крайова умова (2.141), очевидно, виконується для довільного  $t$ .

**Метод парного продовження.** Для ілюстрації методу парного продовження зобразимо графічно розв'язок задачі (2.139), (2.140), (2.153) при  $t = 1; 2; 3,5; 4; 4,5; 5$ , якщо  $a = 1$ ,  $\psi(x) \equiv 0$ , а  $\varphi(x)$  визначається за формулою (2.156).

Розглянемо задачу Коші:

$$z_{tt} = z_{xx}, \quad t \in (0, +\infty), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$z(0, x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad z_t(0, x) = 0. \quad (2.158)$$

Дістаємо рис. 2.30, з якого бачимо, що функція  $u(t, x) \equiv z(t, x) |_{x \geq 0}$  (на графіках — суцільна лінія) є розв'язком поставленої мішаної задачі (2.139), (2.140), (2.153), де  $\psi(x) = 0$ , а  $\varphi(x)$  визначається за формулою (2.156). Стрілками показано напрями руху хвиль.

□ **Випадок скінченної струни.** Процес вільних коливань однорідної струни довжини  $l$  із нерухомо закріпленими кінцями, які відбуваються за рахунок

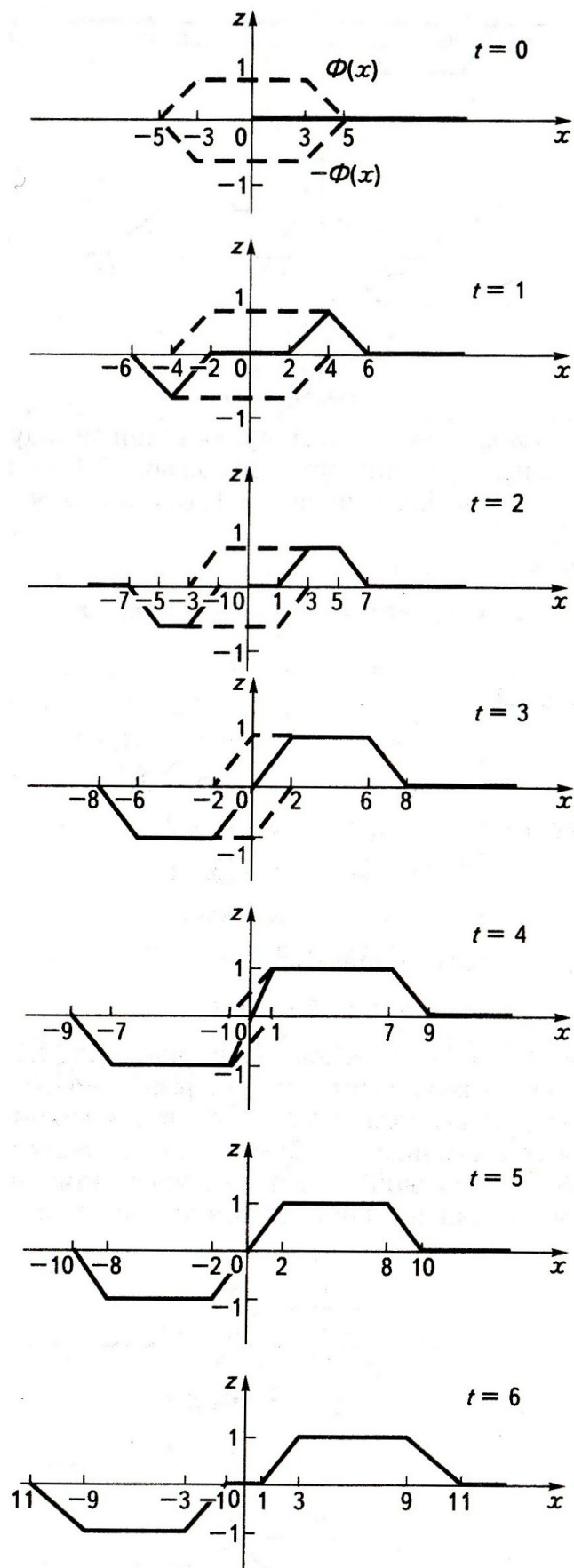


Рис. 2.29:

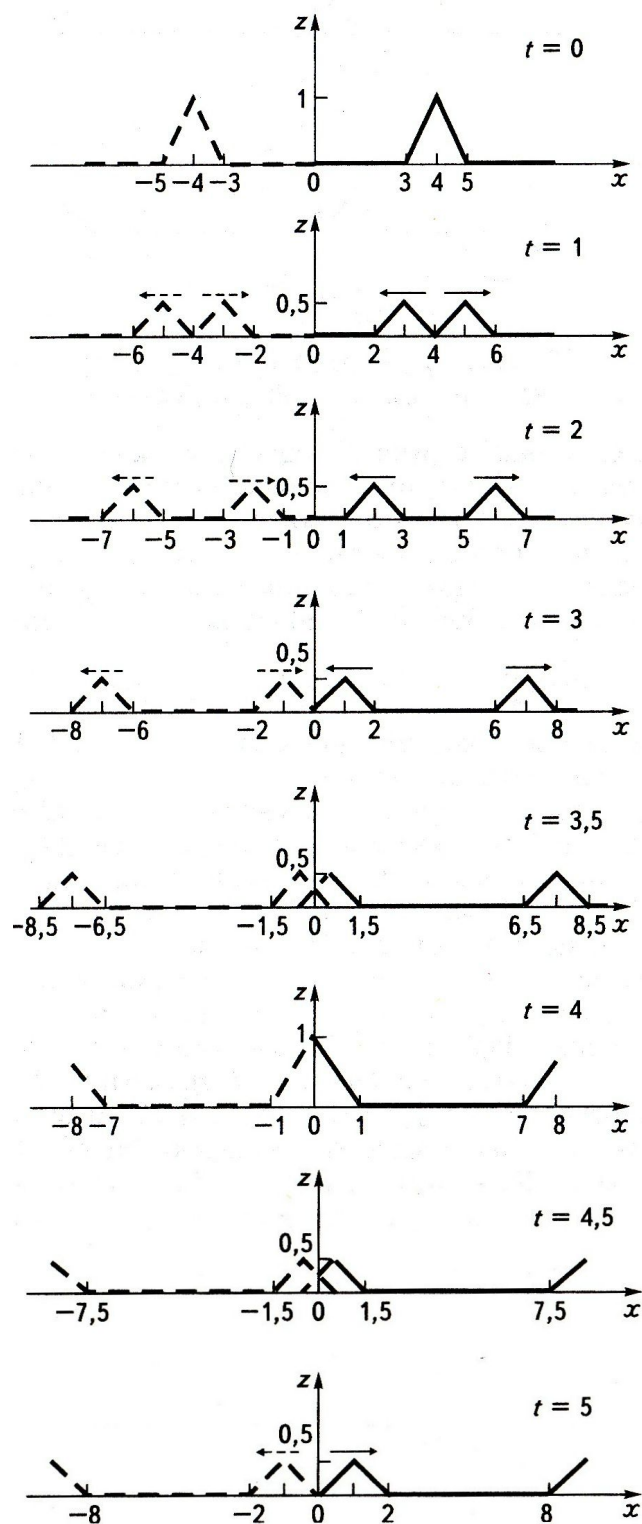


Рис. 2.30:

початкового відхилення  $\varphi(x)$  та початкової швидкості  $\psi(x)$ , зводиться до мішаної задачі: в області  $B = \{(t, x) \mid t \in (0, +\infty), x \in (0, l)\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння (2.139), який задовольняє початкові умови (2.140)

при  $x \in [0, l]$  та крайові умови

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \in [0, +\infty). \quad (2.159)$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (2.139), (2.140), (2.159) застосовуємо метод характеристик.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.143) представляється у вигляді (2.144). Оскільки початкові умови (2.140) у нашому випадкові задані в точках  $t = 0, x \in [0, l]$ , то на підставі (2.140) розв'язок мішаної задачі (2.139), (2.140), (2.159) при  $0 \leq x \pm at \leq l$  дається формулою Д'Аламбера (на рис. 2.31 — область I).

Підставляючи загальний розв'язок (2.144) в крайову умову  $u(t, 0) = 0$ , знаходимо відображену хвилю  $f_1(x - at)$  за відомою падаючою хвилею  $f_2(x + at)$  у точках відрізка  $OC$ . Це дає змогу побудувати розв'язок розглядуваної мішаної задачі в області II (трикутник  $OBC$ ).

Використовуючи другу крайову умову  $u(t, l) = 0$ , знаходимо відображену хвилю  $f_2(x + at)$  за відомою падаючою хвилею  $f_1(x - at)$  у точках відрізка  $AE$ . Це дає змогу знайти шуканий розв'язок в областях III і IV (трикутник  $ACE$ ).

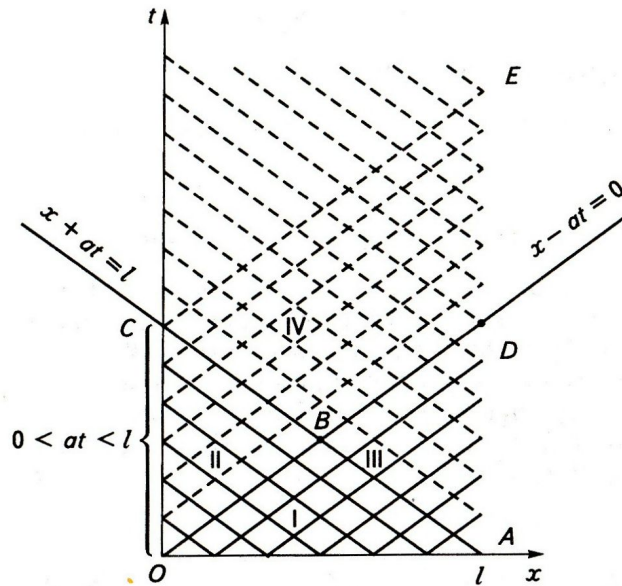


Рис. 2.31:

Повторюючи вищеприведені міркування, можна побудувати розв'язок мішаної задачі (2.139), (2.140), (2.159) у всій області  $B$ .

Так само будуються розв'язки мішаних задач для рівняння вільних коливань струни у випадку складніших, ніж (2.159) крайових умов.

□ Геометричне зображення процесу вільних коливань скінченної струни.

Розглянемо задачу: зобразити графічно профіль однорідної струни завдовжки  $l = 6$  із нерухомо закріпленими кінцями при  $t = \overline{1, 12}$ , якщо коливання струни здійснюються лише за рахунок початкового відхилення

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 3] \cup [5, 6], \\ x - 3, & x \in (3, 4), \\ 5 - x, & x \in (4, 5), \end{cases}$$

а  $a = 1$ . Визначити період  $T$  коливань струни.

Згідно з умовою задачі в області  $B = \{(t, x) \mid t \in (0, +\infty), x \in (0, 6)\}$  потрібно знайти розв'язок рівняння вільних коливань струни

$$u_{tt}(t, x) = u_{xx}(t, x), \quad (2.160)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = 0, \quad x \in [0, 6], \quad (2.161)$$

та крайові

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 6) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.162)$$

умови.

Для зображення розв'язку мішаної задачі (2.160)–(2.162) розглянемо задачу Коші (2.159), де  $\varphi_1(x) = \varphi(x)$  при  $x \in [0, 6]$ , а на проміжках  $(-\infty, 0)$  і  $(6, +\infty)$  будемо її так: продовжуємо функцію  $\varphi(x)$  на відрізок  $[6, 12]$  непарним чином відносно прямої  $x = 6$ , а потім добутий графік на відрізку  $[6, 12]$  непарним чином відносно прямої  $x = 12$  продовжуємо на відрізок  $[12, 18]$  і т. д. Аналогічно будується функція  $\varphi_1(x)$  на проміжку  $(-\infty, 0)$  (рис. 2.32).

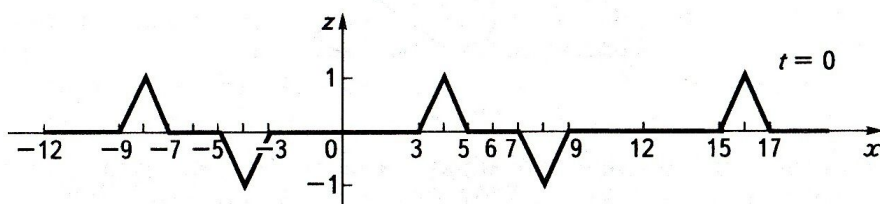


Рис. 2.32:

Покажемо, що функція

$$u(t, x) = z(t, x) \big|_{x \in [0, 6]} \quad (2.163)$$

є розв'язком мішаної задачі (2.160)–(2.162). Справді, функція  $u(t, x)$ , визначена за правилом (2.163), задовольняє рівняння (2.160) і початкові умови (2.161). Профіль струни при  $t = \overline{1, 12}$  графічно зображено на рис. 2.33.



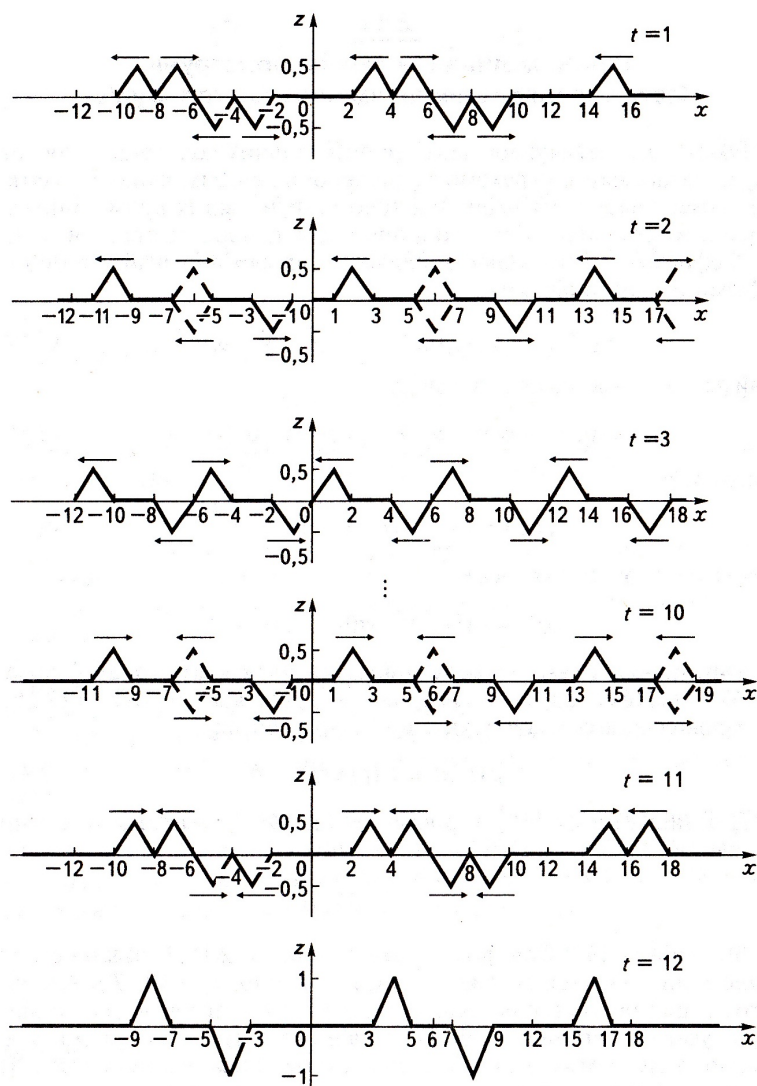


Рис. 2.33:

Таким чином, за час  $t = 12$  цикл замкнувся, отже, період коливання струни  $T = 12 = 21/a$ . Із рис. 2.33 видно, що функція  $u(t, x)$ , визначена за правилом (2.163), задовольняє також крайові умови (2.162), тобто є розв'язком мішаної задачі (2.160)– (2.162).

Розглянутий метод побудови профілю струни називається *методом непарних відображень*. У випадку, коли кінці струни вільні, тобто крайові умови мають вигляд  $u_x(t, 0) = u_x(t, 6) = 0$ , для побудови профілю струни в довільний момент часу застосовують метод парних відображень (продовження графіків здійснюють парним чином).

## 2.17 Вільні коливання скінченої струни. Метод відокремлення змінних (Метод Фур'є)

Розглянемо задачу: дослідити процес вільних коливань однорідної струни завдовжки  $l$ , нерухомо закріпленої на кінцях, якщо в початковий момент часу  $t = 0$  зміщення точок струни від їх прямолінійного положення дорівнює  $\varphi(x)$ , а їхня початкова швидкість становить  $\psi(x)$ .

Зі сформульованої задачі випливає, що необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), t > 0, 0 < x < l, \quad (2.164)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (2.165)$$

та крайові

$$u(t, 0) = 0, u(t, l) = 0, t \geq 0. \quad (2.166)$$

Внаслідок умов узгодженості

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (2.167)$$

□ **Формальна схема методу побудови розв'язку мішаної задачі (2.162)–(2.164).** Шукаємо нетривіальні розв'язки рівняння (2.164), які задовольняють крайові умови (2.166), у вигляді

$$u(t, x) = T(t)X(x) \neq 0 \quad (2.168)$$

Підставивши (2.168) у рівняння (2.164) і розділивши змінні, дістанемо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Функція (2.168) буде розв'язком рівняння (2.164), якщо остання рівність виконується тотожно в області  $D = (0, l) \times (0, T)$ . Але ліва частина цієї рівності є функцією тільки від  $t$ , а права — тільки від  $x$ . Зафіксувавши аргумент  $t$  (або  $x$ ), у лівій (правій) частині рівності одержимо сталу, а отже, для всіх  $x$  (або  $t$ ) права (ліва) частина стала. Таким чином, остання рівність можлива тоді й лише тоді, коли

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

звідки

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \equiv 0, \quad (2.169)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \equiv 0. \quad (2.170)$$

Підставивши (2.168) у крайові умови (2.166), дістанемо

$$T(t)X(0) = 0, T(t)X(l) = 0.$$

Оскільки  $T(t) \neq 0$ , то із останніх рівностей маємо

$$X(0) = 0, X(l) = 0. \quad (2.171)$$

Таким чином, потрібно знайти ненульові розв'язки рівняння (2.169) і крайової задачі (2.170), (2.171). Задача (2.170), (2.171) не для всяких  $\lambda$  має нетривіальні розв'язки.

► **Означення 2.7.** *Ті значення параметра  $\lambda$ , за яких задача (2.170), (2.171) має нетривіальні розв'язки, називають **власними значеннями**, а відповідні ненульові розв'язки цієї задачі — **власними функціями**.*

Задача (2.170), (2.171) відшукування власних значень і власних функцій називається *задачею Штурма–Ліувіля*.

Дослідимо задачу Штурма–Ліувіля (2.170), (2.171). Для цього покажемо спочатку, що вона може мати тільки дійсні власні значення.

Припустимо супротивне: нехай  $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$  є власним значенням. Тоді відповідна власна функція також має бути комплексна.

Нехай  $X(x) = u(x) + iv(x)$ . Але тоді  $\bar{\lambda} = a - ib$  теж буде власним значенням і відповідна власна функція  $\bar{X}(x) = u(x) - iv(x)$ . Справді,

$$u'' + iv'' - (a + ib)(u + iv) \equiv 0 \Rightarrow u'' - au + bv \equiv 0,$$

$$v'' - av - bu \equiv 0.$$

Але тоді

$$u'' - iv'' - (a - ib)(u - iv) = u'' - au + bv - i[v'' - bu - av] \equiv 0.$$

Легко бачити, що

$$\int_0^l (X(x)\bar{X}''(x) - \bar{X}(x)X''(x)) dx = (X\bar{X}' - \bar{X}X') \Big|_0^l = 0.$$

Отже,

$$0 = \int_0^l [X(x)\bar{\lambda}\bar{X}(x) - \bar{X}(x)\lambda X(x)] dx = -2ib \int_0^l (u^2 + v^2) dx,$$

звідки  $b = 0$ , що й треба було довести.

Знайдемо власні значення та власні функції. Для цього розглянемо окремо випадки, коли  $\lambda$  додатні, нульові й від'ємні.

- Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (2.170) має вигляд

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Підставивши знайдений розв'язок у крайові умови (2.171), дістанемо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

Визначник системи

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l}$$

при  $\lambda > 0$  не дорівнює нулю, тому система має тільки нульовий розв'язок  $C_1 = C_2 = 0$ , тобто  $X(x) \equiv 0$ . Отже,  $\lambda > 0$  не є власним значенням.

- Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (2.170) має вигляд

$$X(x) = C_3 x + C_4.$$

Підставивши його в крайові умови (2.171), матимемо  $C_4 = 0$ ,  $C_3 l + C_4 = 0$ . Отже,

$$C_3 = C_4 = 0 \text{ і } X(x) \equiv 0.$$

- Нехай  $\lambda < 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (2.170) має вигляд

$$X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}x.$$

Згідно з крайовими умовами одержимо

$$C_5 = 0, C_6 \sin \sqrt{-\lambda}l = 0.$$

Задача (2.170), (2.171) матиме нетривіальні розв'язки лише тоді, коли  $C_6 \neq 0$ , а  $\sin \sqrt{-\lambda}l = 0$ , тобто коли

$$\lambda = - \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Знайденим власним значенням відповідають власні функції  $X_n(x) = C_6 \sin \frac{\pi n}{l}x$ , які визначаються з точністю до сталого множника. У зв'язку з цим надалі вважатимемо, що  $n = 1, 2, 3, \dots$

Підставивши власні значення в рівняння (2.169) і зінтегрувавши його, дістанемо

$$T_n(t) = C_7 \cos \frac{\pi n a}{l}t + C_8 \sin \frac{\pi n a}{l}t.$$

Згідно з (2.168) функції

$$u_n(t, x) = \left( a_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + b_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, n = 1, 2, 3,$$

де  $a_n = C_6 C_7$ ,  $b_n = C_6 C_8$ , задовольняють рівняння (2.164) і крайові умови (2.166) за довільних  $a_n$  і  $b_n$ .

Розглянемо ряд

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + b_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.172)$$

Справедлива наступна лема.

**Лема 2.1.** Якщо функції  $u_n(x_1, x_2, \dots, x_r), n = 1, 2, 3, \dots$  є частинними розв'язками лінійного і однорідного диференціального рівняння

$$Lu \equiv \sum_{k_1=0}^{S_1} \sum_{k_2=0}^{S_2} \dots \sum_{k_r=0}^{S_r} a_{k_1 \dots k_r}(x_1, \dots, x_r) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_r} u(x_1, \dots, x_r)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}} = 0, \quad (2.173)$$

то функція

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_r) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x_1, x_2, \dots, x_r), C_n = const \end{aligned} \quad (2.174)$$

також буде розв'язком рівняння (2.173), якщо обчислення похідних від цієї функції, які входять в рівняння (2.173), можна здійснити шляхом почленного диференціювання ряду (2.174).

**Доведення.** Позначимо  $k = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ . Із курсу математичного аналізу відомо, що функціональний ряд (2.174) можна почленно диференціювати, якщо він збігається в розглядуваній області, а ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n D^k u_n(x_1, \dots, x_r)$  збігаються рівномірно в цій області. Внаслідок того, що рівномірно збіжні ряди можна почленно додавати, маємо

$$\begin{aligned} L \left( \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n \right) &= \sum_{k_1=0}^{S_1} \sum_{k_2=0}^{S_2} \dots \sum_{k_r=0}^{S_r} a_k D^k \left( \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n \right) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{S_1} \sum_{k_2=0}^{S_2} \dots \sum_{k_r=0}^{S_r} \sum_{n=1}^{\infty} a_k C_n D^k u_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n L u_n \equiv 0. \end{aligned}$$

Лема доведена.

Припустимо, що ряд (2.172) збігається і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і двічі за  $x$  в області  $D$ . Тоді внаслідок доведеної леми ряд (2.172) також буде розв'язком рівняння (2.164), який, очевидно, задовольняє і крайові умови (2.166).

Для побудови розв'язку мішаної задачі (2.164)–(2.166) залишилося в ряді (2.172) так вибрати коефіцієнти  $a_n$  і  $b_n$ , щоб він задовольняв і початкові умови (2.165). Для цього підставимо ряд (2.172) у початкові умови (2.165):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x). \quad (2.175)$$

Нехай функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  є кусково-диференційовними на проміжку  $[0, l]$ . Тоді їх можна розвинути в ряди Фур'є

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.176)$$

де

$$a'_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi; \quad b'_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Порівнюючи ряди (2.175), (2.176), матимемо

$$a_n = a'_n, \quad b_n = \frac{l}{\pi n a} b'_n.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в (2.172), дістанемо розв'язок задачі (2.164)–(2.166):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.177)$$

Наведену схему побудови розв'язку задачі (2.164)–(2.166) вперше запропонував французький математик Ж. Б. Ж. Фур'є і виклав її в опублікованій 1822 р. монографії "Аналітична теорія тепла". Тому в літературі метод відокремлення змінних часто називають *методом Фур'є*.

□ **Обґрунтування методу Фур'є.** Для цього необхідно показати, що ряд (2.177) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і  $x$ .

**Теорема 2.4.** Якщо  $\varphi(x)$  на відрізку  $[0, l]$ , двічі неперервно диференційовна, має кусково-неперервну третю похідну й задовольняє умови

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \quad (2.178)$$

а  $\psi(x)$  неперервно диференційовна на  $[0, l]$ , має кусково-неперервну другу похідну й задовольняє умови узгодженості (2.167), то функція  $u(t, x)$ , визначена рядом (2.177), має неперервні похідні до другого порядку включно й задовольняє рівняння (2.164) і умови (2.165), (2.166). При цьому ряд (2.177) можна почленно диференціювати два рази за  $t$  і  $x$ , і добуті ряди збігаються абсолютно й рівномірно при  $x \in [0, l]$ ,  $t \geq 0$ .

**Доведення.** Інтегруючи у виразах для  $a_n$  і  $b_n$  частинами й беручи до уваги (2.167), (2.178), маємо

$$a_n = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{b_n^{(3)}}{n^3}, \quad b_n = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{a_n^{(2)}}{n^3},$$

де

$$b_n^{(3)} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'''(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi; \quad a_n^{(2)} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\psi''(\xi)}{a} \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Підставляючи добуті результати в (2.177), дістанемо

$$u(t, x) = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[ b_n^{(3)} \cos \frac{\pi n a}{l} t + a_n^{(2)} \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.179)$$

Ряд (2.179) мажорується збіжним рядом

$$\left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[ \left| b_n^{(3)} \right| + \left| a_n^{(2)} \right| \right],$$

а отже, на підставі ознаки Вейерштрасса ряд (2.179) збігається рівномірно й абсолютно в області  $\bar{D} = [0, l] \times [0, T]$ .

Здиференціюємо почленно ряд (2.179) двічі за  $t$  і  $x$ :

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= \frac{la^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ b_n^{(3)} \cos \frac{\pi n a}{l} t + a_n^{(2)} \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ u_{xx}(t, x) &= \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ b_n^{(3)} \cos \frac{\pi n a}{l} t + a_n^{(2)} \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \quad (2.180)$$

Ряди (2.180) мажоруються числовим рядом

$$\frac{lA}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \left| b_n^{(3)} \right| + \left| a_n^{(2)} \right| \right], \quad A = \sup (1, a^2). \quad (2.181)$$

Згідно з нерівністю Коші–Буняковського,

$$\frac{\left| b_n^{(3)} \right|}{n} \leq \frac{1}{2} \left[ \left| b_n^{(3)} \right|^2 + \frac{1}{n^2} \right], \quad \frac{\left| a_n^{(2)} \right|}{n} \leq \frac{1}{2} \left[ \left| a_n^{(2)} \right|^2 + \frac{1}{n^2} \right]. \quad (2.182)$$

Із теорії рядів Фур'є відомо, що ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| b_n^{(3)} \right|^2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n^{(2)} \right|^2$  збігаються, а тоді на підставі нерівностей (2.182) збігається й ряд (2.181). Збіжність ряду (2.181) забезпечує рівномірну збіжність в області  $D$  рядів (2.180).

Теорему доведено.

□ **Фізична інтерпретація розв'язку (2.177).** Введемо позначення:

$$a_n = A_n \sin \varphi_n, \quad b_n = A_n \cos \varphi_n.$$

Тоді розв'язок (2.177) запишеться у вигляді

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \left( \frac{\pi n a}{l} t + \varphi_n \right). \quad (2.183)$$

Кожен член ряду (2.183) є так званою *стоячою хвилею*

$$u_n(t, x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \left( \frac{\pi n a}{l} t + \varphi_n \right),$$

за якої точки струни здійснюють гармонічні коливальні рухи з одними й тими самими частотою  $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$  і фазою  $\varphi_n$ , а амплітуди коливання  $A_n \sin \frac{\pi n}{l} x$  залежать від абсциси  $x$  точки струни. За такого коливання всі точки струни одночасно досягають свого максимального відхилення в той чи інший бік і одночасно проходять положення рівноваги.

Форма струни в момент часу  $t$  для випадків  $n = 1, 2, 3, 6$  показано на рис. 2.34.

Як бачимо, точки  $x = \frac{ml}{n}$  ( $m = \overline{1, n-1}$ ), в яких  $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$ , протягом всього процесу залишаються нерухомими й називаються *вузлами стоячої хвилі*  $u_n(t, x)$ . Точки  $x = \frac{2m+1}{2n}l$  ( $m = \overline{0, n-1}$ ), в яких  $\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$ , здійснюють коливання з максимальною амплітудою й називаються *пучностями стоячої хвилі*.

У момент часу  $t$ , за якого  $\sin \left( \frac{\pi n a}{l} t + \varphi_n \right) = \pm 1$ , відхилення досягають максимальних значень, а швидкість руху рівна нулю. В момент часу  $t$ , за якого



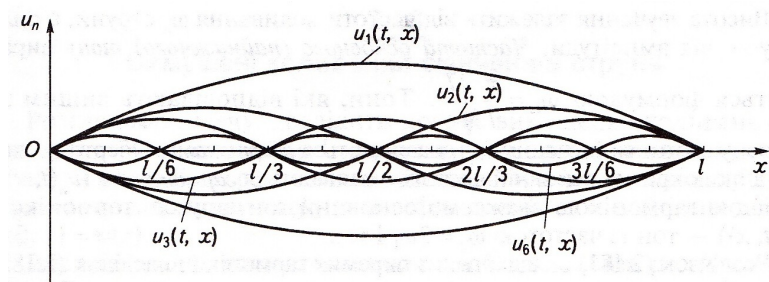


Рис. 2.34:

$\sin\left(\frac{\pi n a}{l}t + \varphi_n\right) = 0$ , відхилення точок струни дорівнює нулю, а швидкість їх руху максимальна.

Розв'язок (2.183) складається з окремих стоячих хвиль  $u_n(t, x)$ , причому, враховуючи, що

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \left(\frac{l}{\pi n}\right)^3 \sqrt{\left(b_n^{(3)}\right)^2 + \left(a_n^{(2)}\right)^2},$$

маємо

$$u_n(t, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(t, x)} 0. \quad (2.184)$$

Звідси випливає, що основну роль у хвильовому процесі відіграють перші члени ряду (2.183).

Коливання струни сприймаються за її звучанням. Звуки можна класифікувати на музичні й немусичні. Перші називаються *нотами*, другі — *шумами*. Ноти розміщуються в певному порядку за їхньою висотою. Ті ноти, які орган слуху неспроможний розрізнити за висотою, називаються *тонами*.

Висота звучання залежить від частоти коливання  $\omega_n$  струни, а сила тону — від амплітуди. Частота основного(найнижчого) тону виражається формулою  $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ . Тони, які відповідають вищим за основну частотам (кратним  $\omega_1$ ) називаються *обертонами*. Обертони, частота яких є кратною основній частоті, називаються *гармоніками* ( $u_n(t, x)$ ). Першою гармонікою вважаємо основний тон, другою гармонікою ( $u_2(t, x)$ ) — тон з частотою  $\omega_2 = 2\omega_1$  і т.д.

Розв'язок (2.183) складається з окремих гармонік і внаслідок (2.184) вплив їх на звучання струни зі зростанням  $n$  швидко спадає. Вся дія вищих гармонік зводиться до створення *тембру звучання*. Тембр звучання різних музичних інструментів різний, що й пояснюється наявністю гармонік.

Розкладання (2.183) звучання струни на прості тони не є чисто математичною операцією. Прості тони можна виділити експериментально за допомогою резонаторів.

Колівальних систем із гармонічними обертонами небагато, але вони є основними для побудови майже всіх музичних інструментів, оскільки звук із гармонічними обертонами здається особливо милозвучним.

Із наведених міркувань випливає, що висота звучання струни буде тим вища, чим більша сила натягу струни й менші її довжина та густина.

Якщо коливну струну притиснути точно посередині, тобто в пучності її основного тону, то перетворяться в нуль амплітуди не лише цього тону, але й усіх інших, які мають пучності в цій точці, тобто непарних гармонік. Навпаки, на парні гармоніки, які мають вузол у цій точці, це не впливатиме. Таким чином, залишаються тільки парні гармоніки найнижчої частоти  $\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , і струна видаватиме не свій основний звук, а його октаву, тобто звук з удвічі більшим числом коливань за секунду.

Якщо притиснути струну в точці на віддалі  $1/3$  її довжини від краю, то висота основного тону підвищується втричі, тому що при цьому зберігаються тільки гармоніки, які мають вузли в точці  $x = l/3$ .

Цей прийом зміни тону застосовується у грі майже на всіх струнних інструментах і має назву *флажолета*.

## 2.18 Вимушені коливання скінченної струни

Розглянемо задачу: дослідити процес вимушених коливань однорідної струни завдовжки  $l$ , нерухомо закріпленої на кінцях, якщо на неї діє рівномірно розподілена зовнішня сила інтенсивністю  $f(t, x)$ , а в початковий момент струна має форму  $u(0, x) = \varphi(x)$  і швидкість  $u_t(0, x) = \psi(x)$ .

Для розв'язання поставленої задачі необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.185)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l] \quad (2.186)$$

і крайові

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.187)$$

Розв'язок мішаної задачі (2.185)–(2.187) шукатимемо у вигляді

$$u(t, x) = z(t, x) + v(t, x), \quad (2.188)$$

де  $z(t, x)$  — розв'язок однорідного рівняння коливання струни, який задовольняє умови (2.187), (2.188);  $v(t, x)$  — розв'язок рівняння (2.185) з однорідними початковими умовами й крайовими умовами (2.187).

Згідно з формулою (2.177)

$$z(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^l \left[ \frac{1}{l} \varphi(\xi) \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{1}{\pi n a} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \times$$

$$\times \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.189)$$

Функцію  $v(t, x)$  шукаємо у вигляді

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (2.190)$$

де  $X_n(x)$  — власні функції відповідної задачі Штурма–Ліувіля. В нашому випадкові  $X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$  (за різних крайових умов дістанемо різні власні функції).

Надалі вважатимемо, що ряд (2.190) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і  $x$ . Зазначимо, що ряд (2.190) задовольняє крайові умови. Залишилось функції  $T_n(t)$  вибрати таким чином, щоб ряд (2.190) задовольняв рівняння (2.185) та однорідні початкові умови.

Нехай функцію  $f(t, x)$  можна розвинути в ряд Фур'є за системою власних функцій  $\sin \frac{\pi n}{l} x$ . Тоді маємо

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x; \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (2.191)$$

Підставивши (2.190) і (2.191) у рівняння (2.185), дістанемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n''(t) + \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 T_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x = 0.$$

Остання рівність можлива тоді й лише тоді, коли

$$T_n''(t) + \left[ \frac{\pi n a}{l} \right]^2 T_n(t) = f_n(t). \quad (2.192)$$

Для того, щоб функція  $v(t, x)$  задовольняла однорідні початкові умови, слід покласти

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0. \quad (2.193)$$

Інтегруючи задачу Коші (2.192), (2.193), дістаємо

$$T_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi n a}{l} (t - \tau) d\tau. \quad (2.194)$$

Підставивши (2.194) в (2.190), а потім добутий результат і (2.189) у (2.188), матимемо розв'язок поставленої мішаної задачі

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^l \left[ \frac{1}{l} \varphi(\xi) \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{1}{\pi n a} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n a} \int_0^t \int_0^l f(\tau, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \times \\ & \times \sin \frac{\pi n a}{t} (t - \tau) d\tau \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}$$

Можна показати, що добутий ряд буде розв'язком поставленої задачі, якщо  $f(t, x)$  неперервна, має неперервні похідні за  $x$  до другого порядку включно й

$$f(t, 0) = f(t, l) = 0 \text{ при } t \geq 0.$$

**▲Вправа.** Показати: якщо  $\Omega(t - \tau, x)$  є розв'язком мішаної задачі:

$$\begin{aligned} \Omega_{tt}(t - \tau, x) &= a^2 \Omega_{xx}(t - \tau, x), \quad t \in (\tau, +\infty), \quad x \in (0, l); \\ \Omega(0, x) &= 0, \quad \Omega_t(0, x) = f(\tau, x), \quad x \in [0, l]; \\ \Omega(t - \tau, 0) &= \Omega(t - \tau, l) = 0, \quad t \in [\tau, +\infty), \end{aligned}$$

то функція  $v(t, x)$ , визначена за формулою

$$v(t, x) = \int_0^t \Omega(t - \tau, x) d\tau,$$

є розв'язком задачі  $v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(t, x)$ ;  $t \in (0, +\infty)$ ,  $x \in (0, l)$ ,

$$v(0, x) = v_t(0, x) = 0, \quad x \in [0, l],$$

$$v(t, 0) = v(t, l) = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

◇ **Зауваження 2.7.** Якщо в мішаній задачі крайові умови (2.187) неоднорідні, то інтегрування такої задачі завжди можна звести до інтегрування мішаної задачі з однорідними крайовими умовами. Справді, нехай нам потрібно знайти розв'язок рівняння (2.185), який задовольняє початкові (2.186) і крайові умови

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u(t, l) = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (2.195)$$

Тоді розв'язок поставленої задачі (2.185), (2.186), (2.195) шукаємо у вигляді

$$u(t, x) = v(t, x) + \omega(t, x), \quad (2.196)$$

де  $\omega(t, x)$  — довільна з класу  $C^2(t \geq 0, 0 \leq x \leq l)$  функція, яка задовольняє крайові умови (2.195). Шукаємо її у вигляді

$$\omega(t, x) = a(t)x + b(t), \quad (2.197)$$

де  $a(t)$  і  $b(t) \in C^2(t \geq 0)$ .

Підставивши (2.197) у (2.195), знаходимо  $b(t) = \mu_1(t)$ ,  $a(t) = (\mu_2(t) - \mu_1(t))/l$ , тобто

$$\omega(t, x) = \mu_1(t) + x(\mu_2(t) - \mu_1(t))/l.$$

Підставивши функції (2.196) в мішану задачу (2.185), (2.186), (2.195), дістанемо

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(t, x) - \omega_{tt}, \quad t > 0, \quad x \in (0, l),$$

$$v(0, x) = \varphi(x) - \omega(0, x), \quad v_t(0, x) = \psi(x) - \omega_t(0, x),$$

$$v(t, 0) = 0, \quad v(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0, l],$$

що й треба було показати.

▲ **Вправа.** Побудувати функцію  $\omega(t, x)$  за таких крайових умов:

- а)  $u_x(t, 0) = \nu_1(t), u_x(t, l) = \nu_2(t), t \geq 0;$
- б)  $u_x(t, 0) - hu(t, 0) = \gamma_1(t), u_x(t, l) + hu(t, l) = \gamma_2(t), t \geq 0;$
- в)  $u(t, 0) = \mu_1(t), u_x(t, l) = \nu_2(t), t \geq 0;$
- г)  $u_x(t, 0) = \nu_1(t), u(t, l) = \mu_2(t), t \geq 0;$
- д)  $u(t, 0) = \mu_1(t), u_x(t, l) + hu(t, l) = \gamma_2(t), t \geq 0.$

## 2.19 Мішані задачі з стаціонарними неоднорідностями

Розглянемо мішану задачу: знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad t > 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.198)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2.199)$$

і крайові

$$u(t, 0) = u_1, \quad u(t, l) = u_2; \quad u_1, u_2 = \text{const}, \quad t \geq 0. \quad (2.200)$$

► **Означення 2.8.** Мішану задачу (2.198)–(2.200) називають **задачею зі стаціонарними неоднорідностями**, якщо права частина рівняння (2.198) і крайові умови (2.200) не залежать від часу.

У цьому випадкові розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(t, x) = z(x) - v(x, t), \quad (2.201)$$

де  $z(x)$  — стаціонарне положення струни (статичний прогин), яке визначається з крайової задачі

$$a^2 z_{xx} + f(x) = 0, \quad x \in (0, l), z(0) = u_1, \quad z(l) = u_2, \quad (2.202)$$

а  $v(x, t)$  — відхилення від стаціонарного положення.

Зінтегрувавши крайову задачу (2.202), дістанемо

$$z(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}x + \frac{1}{a^2} \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (2.203)$$

де

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \xi \left(1 - \frac{x}{l}\right), & \xi \in [0, x), \\ x \left(1 - \frac{\xi}{l}\right), & \xi \in [x, l]. \end{cases}$$

Підставивши (2.201) у (2.198)–(2.200) та врахувавши (2.202), матимемо

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx}, & t > 0, & \quad x \in (0, l), \\ v(0, x) &= \varphi(x) - z(x), & v_t(0, x) &= \psi(x), & \quad x \in [0, l], \\ v(t, 0) &= 0, & v(t, l) &= 0, & \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Згідно з формулою (2.177)

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \left[ (\varphi(\xi) - z(\xi)) \cos \frac{\pi n a}{l} t - \frac{l}{\pi n a} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \quad (2.204)$$

Підставивши (2.203) і (2.204) в (2.201), дістанемо розв'язок поставленої мішаної задачі (2.198)–(2.200).

◇ **Зауваження 2.8.** Якщо на кінці струни діють сталі сили, то замість крайових умов (2.200) матимемо

$$u_x(0, t) = u_1, \quad u_x(l, t) = u_2, \quad t \geq 0,$$

а крайова задача (2.202) запишеться у вигляді

$$a^2 z''(x) + f(x) = 0, \quad z'(0) = u_1, \quad z'(l) = u_2.$$

Остання крайова задача може мати безліч розв'язків, або не мати жодного. В цьому випадку викладену вище схему побудови розв'язку мішаних задач з стаціонарними неоднорідностями застосувати не можна.

## 2.20 Загальна схема методу відокремлення змінних

Метод Фур'є побудови розв'язку мішаної задачі можна застосувати тільки для певного класу лінійних ДРЧП другого порядку. У зв'язку з цим розглянемо диференціальне рівняння

$$a(t)u_{tt} + b(t)u_t + c(x)u_{xx} + d(x)u_x + [e(x) + f(t)] u = 0, \quad (2.205)$$

де коефіцієнти  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(x)$ ,  $d(x)$ ,  $e(x)$ ,  $f(x)$  — досить гладкі функції при  $t \geq 0$ ,  $x \in [0, l]$ ,  $u = u(t, x)$  і

$$a(t) > a_0 > 0, \quad c(x) < c_0 < 0; \quad a_0, \quad c_0 = \text{const.}$$

На підставі останніх умов рівняння (2.205) належить до гіперболічного типу.

Нехай потрібно знайти розв'язок рівняння (2.205) при  $t > 0$ ,  $x \in (0, l)$ , який задовольняв би початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l] \quad (2.206)$$

і крайові

$$\begin{aligned} \alpha u(t, 0) + \beta u_x(t, 0) &= 0, \\ \gamma u(t, l) + \delta u_x(t, l) &= 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.207)$$

де сталі  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  такі, що  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ,  $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ .

□ **Формальна схема методу відокремлення змінних.** Побудову розв'язку мішаної задачі (2.205)–(2.207) розділимо на два етапи.

- *Перший етап.* Шукаємо нетривіальні розв'язки рівняння (2.205), які задовольняли б крайові умови (2.207), у вигляді

$$u(t, x) = T(t)X(x) \neq 0 \quad (2.208)$$

Підставивши (2.208) у рівняння (2.205), крайові умови (2.207) та розділивши змінні, дістанемо

$$a(t) T''(t) + b(t) T'(t) + [f(t) + \lambda] T(t) = 0, \quad (2.209)$$

$$c(x) X''(x) + d(x) X'(x) + [e(x) - \lambda] X(x) = 0, \quad (2.210)$$

$$\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0, \quad \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0, \quad (2.211)$$

де  $\lambda$  — довільна стала.

Таким чином, ми прийшли до задачі Штурма–Ліувіля: визначити ті значення параметра  $\lambda$  (власні значення), при яких задача (2.210), (2.211) має нетривіальні розв'язки (власні функції), і знайти ці розв'язки.

Сукупність всіх власних значень задачі (2.210), (2.211) називається її *спектром*.

Припустимо, що задачу Штурма–Ліувіля (2.210), (2.211) розв'язано і  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) — її власні значення, а  $X_n(x)$  — відповідні власні функції.

Унаслідок однорідності рівняння (2.210) і крайових умов (2.211) власні функції визначаються з точністю до сталого множника. Але всякому власному значенню задачі (2.210), (2.211) відповідає тільки одна лінійно незалежна власна функція. (В цьому випадку кажуть, що власні значення розглядуваної задачі Штурма–Ліувіля є простими). Справді, якщо власному значенню  $\lambda_n$  відповідали б дві лінійно незалежні власні функції  $X_{n,1}(x)$  і  $X_{n,2}(x)$ , то функція

$$X_n(x) = C_1 X_{n,1}(x) + C_2 X_{n,2}(x)$$

була б загальним розв'язком рівняння (2.210) при  $\lambda = \lambda_n$ , який задовольняє крайові умови (2.211). Але це неможливо, бо завжди можна знайти розв'язок

рівняння (2.210) за таких початкових умов  $X(0)$  і  $X'(0)$ , що він не задовольнятиме першу з крайових умов (2.211) (наприклад, поклавши  $X(0) = \alpha$ ,  $X'(0) = \beta$ )

Покажемо, що рівняння (2.210) можна подати у вигляді

$$[p(x)X'(x)]' - g(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \quad (2.212)$$

де  $\rho(x) > 0$  — цілком визначена для заданого рівняння функція. Справді, домноживши (2.210) на  $\rho(x)$ , дістанемо

$$\rho(x)c(x)X''(x) + \rho(x)d(x)X'(x) + \rho(x)[e(x) - \lambda]X(x) = 0. \quad (2.213)$$

Виберемо  $\rho(x)$  таким чином, щоб

$$(\rho(x)c(x))' = \rho(x)d(x). \quad (2.214)$$

Маємо

$$\rho(x) = e^{\int \frac{d(x)-c'(x)}{c(x)} dx} > 0.$$

Введемо позначення:  $-\rho(x)c(x) = p(x)$ ,  $e(x)\rho(x) = g(x)$ . Тоді внаслідок (2.214) рівняння (2.213) запишеться у вигляді (2.212).

Оскільки власні функції визначаються з точністю до сталого множника, то виберемо його таким чином, щоб

$$\int_0^l \rho(x)X_n^2(x) dx = 1. \quad (2.215)$$

Власні функції, які задовольняють умову (2.215), називаються *нормованими*.

Всяка власна функція  $X_n(x)$ , помножена на число  $\left(\int_0^l \rho(x)X_n^2(x) dx\right)^{-\frac{1}{2}}$ ,

стає нормованою. Очевидно, що кожному власному значенню задачі Штурма-Ліувіля (2.210), (2.211) відповідає нормована власна функція, яка визначається з точністю до знака.

**Теорема 2.5.** *Якщо  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  — два різних власних значення задачі Штурма-Ліувіля (2.210), (2.211), то відповідні їм власні функції  $X_1(x)$  і  $X_2(x)$  ортогональні з вагою  $\rho(x)$  на відрізку  $[0, l]$ , тобто*

$$\int_0^l \rho(x)X_1(x)X_2(x)dx = 0.$$



*Доведення.* Згідно з умовою теореми справедливі рівності

$$\left[ \rho(x) X_1'(x) \right]' - g(x) X_1(x) + \lambda_1 \rho(x) X_1(x) = 0,$$

$$\left[ \rho(x) X_2'(x) \right]' - g(x) X_2(x) + \lambda_2 \rho(x) X_2(x) = 0.$$

Помноживши першу рівність на  $X_2(x)$ , а другу — на  $X_1(x)$  і віднявши почленно, дістанемо

$$\begin{aligned} & \left[ \rho(x) X_1'(x) \right]' X_2(x) - \left[ \rho(x) X_2'(x) \right]' X_1(x) + \\ & + (\lambda_1 - \lambda_2) \rho(x) X_1(x) X_2(x) = 0. \end{aligned}$$

Інтегруючи останню тотожність за  $x$  у межах від 0 до  $l$ , маємо

$$\begin{aligned} & (\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = \\ & = p(l) \left[ X_1'(l) X_2(l) - X_2'(l) X_1(l) \right] - \\ & - p(0) \left[ X_1'(0) X_2(0) - X_2'(0) X_1(0) \right]. \end{aligned}$$

Унаслідок умов (2.211) права частина останньої рівності дорівнює нулю.

Оскільки  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то  $\int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0$ .

Теорему доведено.

З умови ортогональності власних функцій випливає дійсність власних значень. Справді, якщо існує комплексне власне значення  $\lambda_n$ , якому відповідає комплексна власна функція  $X_n(x)$ , то на підставі того, що коефіцієнти рівняння (2.210) і крайових умов (2.211) є дійсними, комплексно-спряжене число  $\overline{\lambda_n}$  також буде власним і йому відповідатиме комплексно-спряжена до  $X_n(x)$  власна функція  $\overline{X_n(x)}$ . З умови ортогональності маємо

$$\int_0^l \rho(x) X_n(x) \overline{X_n(x)} dx = \int_0^l \rho(x) |X_n(x)|^2 dx = 0,$$

тобто,  $X_n(x) = 0$ , а це означає, що комплексне число  $\lambda_n$  не є власним значенням.

**Теорема 2.6.** *Якщо існують власні значення задачі Штурма-Ліувіля (2.210), (2.211), де  $\alpha\beta \leq 0$ ,  $\gamma\delta \geq 0$  і  $\rho(x) \geq 0$ , то вони додатні.*

**Доведення.** Нехай  $\lambda_n$  — власне значення, а  $X_n(x)$  — відповідна власна функція. Маємо

$$\left[ p(x) X_n'(x) \right]' - g(x) X_n(x) + \lambda_n \rho(x) X_n(x) = 0.$$

Помножимо останню тотожність на  $X_n(x)$  і зінтегруємо результат за  $x$  у межах від 0 до  $l$ :

$$\lambda_n = \int_0^l \left[ g(x) X_n^2(x) + p(x) X_n'^2(x) \right] dx - \left[ p(x) X_n'(x) \cdot X_n(x) \right] \Big|_0^l.$$

Оскільки  $\alpha\beta \leq 0$ ,  $\gamma\delta \geq 0$ , то  $p(x) X_n'(x) X_n(x) \Big|_0^l \leq 0$ , а тому  $\lambda_n > 0$ .

Зазначимо, що власні функції  $X_n(x)$  задачі (2.210), (2.211) створюють повну систему, тобто не існує ненульової квадратно сумовної функції, яка була б ортогональною до всіх власних функцій.

Переходимо до інтегрування рівняння (2.209). Підставивши в нього власне значення  $\lambda_n$ , знаходимо два його частинних розв'язки  $T_{1,n}(t)$ ,  $T_{2,n}(t)$ , які задовольняли б умови

$$\begin{aligned} T_{1,n}(0) &= 1, T_{1,n}'(0) = 0; \\ T_{2,n}(0) &= 0, T_{2,n}'(0) = 1. \end{aligned} \tag{2.216}$$

Очевидно, розв'язки  $T_{1,n}(t)$  і  $T_{2,n}(t)$  є лінійно незалежними, а отже загальний розв'язок рівняння (2.209) можна записати у вигляді

$$T_n(t) = A_n T_{1,n}(t) + B_n T_{2,n}(t),$$

де  $A_n, B_n$  — довільні сталі.

Згідно з (2.208) маємо

$$u_n(t, x) = (A_n T_{1,n}(t) + B_n T_{2,n}(t)) X_n(x).$$

Функції  $u_n(t, x)$  за будь-яких  $n$  задовольняють рівняння (2.205) і крайові умови (2.207).

- *Другий етап.* За допомогою знайдених нетривіальних розв'язків  $u_n(t, x)$ , будуємо розв'язок поставленої мішаної задачі (2.205)–(2.207).

Розглянемо ряд

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n T_{1,n}(t) + B_n T_{2,n}(t)] X_n(x) \tag{2.217}$$

і припустимо, що при  $t \geq 0$ ,  $x \in [0, l]$  він збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і двічі за  $x$ . Тоді ряд (2.217) буде розв'язком рівняння (2.205) через його лінійність та однорідність і задовольнятиме крайові умови (2.207).

Підставивши (2.217) у початкові умови (2.206) і врахувавши (2.216), дістанемо

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi(x),$$

$$u_t(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x) = \psi(x),$$

Помножимо добуті рівності на  $\rho_m X_m(x)$  і зінтегруємо їх за  $x$  у межах від 0 до  $l$ . Тоді, врахувавши ортонормованість власних функцій, матимемо

$$A_m = \int_0^l \varphi(\xi) \rho_m(\xi) X_m(\xi) d\xi,$$

$$B_m = \int_0^l \psi(\xi) \rho_m(\xi) X_m(\xi) d\xi.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти  $A_m$ ,  $B_m$  у ряд (2.217), дістанемо розв'язок мішаної задачі (2.205)–(2.207):

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_0^l \varphi(\xi) \rho_m(\xi) X_m(\xi) d\xi T_{1,m}(t) + \int_0^l \psi(\xi) \rho_m(\xi) X_m(\xi) d\xi T_{2,m}(t) \right\} X_m(x). \quad (2.218)$$

□ **Обґрунтування методу відокремлення змінних.** Для цього необхідно показати:

- існування розв'язку задачі Штурма–Ліувіля (2.210), (2.211);
- можливість розвинення функцій  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  на відріжку  $[0, l]$  у ряди за системою власних функцій задачі Штурма–Ліувіля (2.210), (2.211);
- рівномірну збіжність ряду (2.218) при  $t \geq 0$ ,  $x \in [0, l]$  і його почленну диференційовність двічі за  $t$  і двічі за  $x$ .

Для доведення існування розв'язку задачі Штурма–Ліувіля (2.210), (2.211) зведемо її до еквівалентного інтегрального рівняння. Для цього розглянемо функцію Гріна задачі (2.210), (2.211).

► **Означення 2.9.** *Функцією Гріна задачі (2.210), (2.211) називається функція  $G(x, s)$ , визначена в квадраті  $x \in [0, l]$ ,  $s \in [0, l]$ , яка задовольняє такі умови:*

1)  $G(x, s)$  як функція  $x$ ,  $s$  неперервна, а при  $x \neq s$  має неперервні похідні за  $x$  до другого порядку включно й задовольняє однорідне рівняння

$$[p(x) G_x(x, s)]_x - g(x) G(x, s) = 0; \quad (2.219)$$

2)  $G(x, s)$  як функція  $x$  задовольняє крайові умови (2.211);

3) похідна першого порядку  $G'_x(x, s)$  при  $x = s$  терпить розрив першого роду й має скачок, що дорівнює  $1/p(s)$ , тобто

$$G_x(s+0, s) - G_x(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}.$$

Для спрощення наступних викладок вважатимемо, що в крайових умовах (2.211)  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $\beta = \delta = 0$ .

Будуємо функцію Гріна у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} E(s) X_1(x), & 0 \leq x \leq s, \\ F(s) X_2(x), & s \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2.220)$$

де  $E(s)$ ,  $F(s)$  — довільні функції, визначені на  $[0, l]$ , а  $X_1(x)$ ,  $X_2(x)$  — два нетривіальних частинних розв'язки рівняння (2.219), які задовольняють умови

$$X_1(0) = 0, \quad X_2(l) = 0. \quad (2.221)$$

Розв'язки  $X_1(x)$ ,  $X_2(x)$  існують і є лінійно незалежними. Справді, якщо б  $X_1(x) \equiv cX_2(x)$ , то згідно з умовами (2.221) ми мали б

$$X_1(0) = X_1(l) = 0, \quad X_2(0) = X_2(l) = 0,$$

тобто  $\lambda = 0$  було б власним значенням задачі Штурма–Ліувіля (2.210), (2.211), а це суперечить доведеній теоремі 2.6 про додатність власних значень.

З умови неперервності функції Гріна в прямокутнику  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq s \leq l$  маємо

$$E(s)X_1(s) = F(s)X_2(s),$$

тобто

$$\frac{E(s)}{X_2(s)} = \frac{F(s)}{X_1(s)} = K(s).$$

Визначивши з цього відношення функції  $E(s)$  і  $F(s)$  та підставивши їх у (2.220), дістанемо функцію

$$G(x, s) = \begin{cases} K(s) X_2(s) X_1(x), & 0 \leq x \leq s, \\ K(s) X_1(s) X_2(x), & s \leq x \leq l, \end{cases}$$

яка задовольняє першу й другу умови означення функції Гріна. Згідно з третьою умовою маємо

$$K(s) [X_1(s) X_2'(s) - X_2(s) X_1'(s)] = [p(s)]^{-1},$$

тобто

$$K(s) = \{p(s) [X_1(s) X_2'(s) - X_2(s) X_1'(s)]\}^{-1}.$$

Вираз в квадратних дужках є детермінант Вронського  $W [X_1(s), X_2(s)]$  лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.219) і згідно з відомою з курсу звичайних диференціальних рівнянь формулою Ліувіля

$$W [X_1(s), X_2(s)] = W_0 e^{-\int \frac{p'(s)}{p(s)} dx} = W_0 [p(s)]^{-1},$$

де  $W_0$  — стала величина.

Таким чином,  $K(s) = W_0^{-1}$  і шукана функція Гріна має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} W_0^{-1} X_2(s) X_1(x), & 0 \leq x \leq s, \\ W_0^{-1} X_1(s) X_2(x), & s \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.222)$$

Із (2.222) випливає симетричність функції Гріна, тобто  $G(x, s) = G(s, x)$ .

**Теорема 2.7.** *Задача Штурма–Ліувіля (2.212), (2.211) та інтегральне рівняння*

$$X(x) + \lambda \int_0^l G(x, s) \rho(s) X(s) ds = 0 \quad (2.223)$$

є еквівалентні.

**Доведення.** Безпосередньою підстановкою легко переконатись, що будь-який розв'язок рівняння (2.223) є також розв'язком задачі (2.212), (2.211).

Покажемо, що справедливе й обернене твердження. Для цього припустимо, що  $X(x)$  є деяким розв'язком задачі (2.212), (2.211). Помноживши рівняння (2.212) на  $G(x, s)$ , а рівняння (2.219) — на  $X(x)$  і віднявши одну рівність від іншої, дістанемо

$$\begin{aligned} [p(x) X'(x)]' G(x, s) - [p(x) G_x(x, s)]_x X(x) + \\ + \lambda G(x, s) \rho(x) X(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.224)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \int_0^s [p(x) X'(x)]' G(x, s) dx &= p(x) X'(s) G(s, s) - \\ - \int_0^s p(x) G_x(x, s) X'(x) dx &= p(s) X'(s) G(s, s) - \end{aligned}$$

$$-p(s) G_x(s-0, s) X(s) + \int_0^s [p(x) G_x(x, s)]_x X(x) dx.$$

Інтегруючи (2.224) за  $x$  у межах від 0 до  $s$  і беручи до уваги попередню рівність, маємо

$$p(s) X'(s) G(s, s) - p(s) G_x(s-0, s) X(s) + \\ + \lambda \int_0^s G(x, s) \rho(x) X(x) dx = 0.$$

Аналогічними міркуваннями на проміжку  $[s, l]$  одержимо

$$-p(s) X'(s) G(s, s) + p(s) G_x(s+0, s) X(s) + \\ + \lambda \int_s^l G(x, s) \rho(x) X(x) dx = 0.$$

Додавши останні дві рівності й урахувавши третю умову означення функції Гріна та її симетричність, матимемо

$$X(x) + \lambda \int_0^l G(x, s) \rho(s) X(s) ds \equiv 0,$$

тобто  $X(x)$  є розв'язком рівняння (2.223).

Теорему доведено.

Введемо позначення:

$$Y(x) = \sqrt{\rho(x)} X(x), \quad K(x, s) = G(x, s) \sqrt{\rho(x)\rho(s)}.$$

Тоді помноживши рівняння (2.223) на  $\sqrt{\rho(x)}$ , дістанемо

$$Y(x) + \lambda \int_0^l K(x, s) Y(s) ds = 0. \quad (2.225)$$

Отже, задача Штурма–Ліувіля (2.212), (2.211) еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду з дійсним симетричним ядром  $K(x, s)$ .

Для інтегрального рівняння (2.225) справедливі наступні теореми.

**Теорема 2.8. (ГІЛЬБЕРТА)** Інтегральне рівняння (2.225) з дійсним симетричним ядром, яке не дорівнює тотожно нулю, має принаймі одне власне значення.

**Теорема 2.9.** Усі власні значення рівняння (2.225) із симетричним ядром є дійсними числами.

**Теорема 2.10.** Усі власні функції інтегрального рівняння з дійсним симетричним ядром є дійсними.

Отже, на еквівалентності інтегрального рівняння (2.225) і задачі Штурма–Ліувіля (2.212), (2.211) можемо стверджувати:

- 1) розв'язок задачі Штурма–Ліувіля (2.212), (2.211) існує;
- 2) власні значення є дійсними числами, а власні функції — дійсними функціями.

Наведемо достатні умови розвинення на проміжку  $[0, l]$  функції  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  у рівномірно збіжні ряди за системою власних функцій задачі Штурма–Ліувіля (2.212), (2.211). Для цього доведемо наступну теорему.

**Теорема 2.11. (Теорема Стеклова.)** Нехай  $\omega(x)$  — довільна з класу  $C^2[0, l]$  функція, яка задовольняє умови

$$\omega(0) = \omega(l) = 0. \quad (2.226)$$

Тоді  $\omega(x)$  на відрізку  $[0, l]$  розвивається в рівномірно й абсолютно збіжний ряд за системою власних функцій  $X_n(x)$  задачі Штурма–Ліувіля (2.212), (2.211).

**Доведення.** Нехай

$$[p(x)\omega'(x)]' - g(x)\omega(x) = f(x), \quad (2.227)$$

де  $f(x)$  — неперервна функція.

Згідно з доведеною теоремою 2.7 про еквівалентність задачі (2.212), (2.211) та інтегральним рівнянням (2.223), із (2.227), (2.226), маємо

$$\omega(x) = \int_0^l G(x, s) f(s) ds. \quad (2.228)$$

Домножимо (2.228) на  $\sqrt{\rho(x)}$  і введемо позначення:

$$\sqrt{\rho(x)}\omega(x) = \Omega(x), \quad \frac{f(s)}{\sqrt{\rho(s)}} = h(s).$$

Тоді (2.228) запишеться у вигляді

$$\Omega(x) = \int_0^l K(x, s) h(s) ds, \quad (2.229)$$

де  $K(x, s)$  — симетричне ядро інтегрального рівняння (2.225).

Із теорії інтегральних рівнянь відома наступна теорема.

**Теорема 2.12. (Теорема Гільберта–Шмідта).** Всяка функція  $\Omega(x)$ , яку можна подати у вигляді (2.229), де  $K(x, s)$  – симетричне ядро рівняння (2.225), а  $h(x)$  – довільна інтегровна з квадратом функція  $\left(\int_0^l h^2(x) dx < \infty\right)$ , розвивається на проміжку  $[0, l]$  в абсолютно й рівномірно збіжний ряд за системою власних функцій  $Y_n(x)$  інтегрального рівняння (2.225), тобто

$$\Omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Y_n(x), \quad (2.230)$$

де

$$c_n = \int_0^l \Omega(x) Y_n(x) dx.$$

Ураховуючи введені позначення та рівномірну збіжність ряду (2.230), дістаємо

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

де

$$c_n = \int_0^l \rho(x) \omega(x) X_n(x) dx.$$

Теорему Стеклова доведено.

На підставі цієї теореми можемо ствержувати: якщо  $\varphi(x), \psi(x) \in C^2[0, l]$  і задовольняють умови узгодженості, то вони розвиваються в рівномірно збіжні ряди за системою власних функцій задачі (2.212), (2.211) на проміжку  $[0, l]$ .

Для завершення обґрунтування методу відокремлення змінних встановимо достатні умови, коли ряд (2.218) збігається рівномірно при  $t \geq 0, x \in [0, l]$  і що його можна почленно диференціювати двічі за  $x$  та  $t$ .

У подальших міркуваннях вважатимемо, що коефіцієнти рівняння (2.205) неперервні разом із похідними до третього порядку включно в розглядуваній області.

Введемо позначення

$$L(\omega(x)) = [p(x) \omega'(x)]' - g(x) \omega(x).$$

**Теорема 2.13.** Якщо функція  $\varphi(x) \in C^3[0, l]$  і задовольняє умови

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad L(\varphi(x)) \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.231)$$

$$x=l$$



*a*

$$\psi(x) \in C^2 [0, l] \text{ i } \psi(0) = \psi(l) = 0, \quad (2.232)$$

то ряд (2.218) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $x$  і двічі за  $t$  при  $t > 0$ ,  $x \in (0, l)$ .

**Доведення.** Для спрощення наступних викладок покладемо

$$a(t) = 1, \quad b(t) = 0, \quad c'(x) = d(x), \quad f(t) = 0, \quad \beta = \delta = 0, \quad \alpha = \gamma = 1.$$

Тоді

$$\rho(x) = 1, \quad p(x) = -c, \quad g(x) = e(x),$$

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{B_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t$$

і ряд (2.218) запишеться у вигляді

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \int_0^l \varphi(\xi) X_m(\xi) d\xi \cos \sqrt{\lambda_m} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \int_0^l \psi(\xi) X_m(\xi) d\xi \sin \sqrt{\lambda_m} t \right] X_m(x). \quad (2.233)$$

Для доведення рівномірної збіжності ряду (2.233) і рядів, які дістають унаслідок почленного його диференціювання двічі за  $x$  і двічі за  $t$  на проміжку  $[0, l]$ , досить довести рівномірну збіжність таких рядів

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ |A_m| \lambda_m + \sqrt{\lambda_m} |B_m| \right] |X_m(x)|, \quad (2.234)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ |A_m| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} |B_m| \right] |X'_m(x)|, \quad (2.235)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ |A_m| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} |B_m| \right] |X''_m(x)|. \quad (2.236)$$

Оскільки внаслідок (2.212)

$$X''_m(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)} X'_m(x) + \frac{g(x) - \lambda_m}{p(x)} X_m(x), \quad (2.237)$$

то з рівномірної збіжності рядів (2.234), (2.235) випливає рівномірна збіжність ряду (2.236).

Введемо позначення:

$$Hf = \int_0^l (p(x) f'^2(x)) dx;$$

$$H(f, v) = \int_0^l [p(x) f'(x) v'(x) + g(x) f(x) v(x)] dx.$$

**Лема 2.2.** Нехай функція  $f(x) \in C[0, l]$  задовольняє умови  $f(0) = f(l) = 0$  і має на проміжку  $[0, l]$  кусково-неперервну похідну, інтегровну з квадратом. Тоді справедлива нерівність

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m c_m^2 \leq Hf, \quad (2.238)$$

де

$$c_m = \int_0^l f(x) X_m(x) dx.$$

**Доведення.** Оскільки  $p(x) > 0$ ,  $g(x) \geq 0$ , то  $Hf \geq 0$ . Інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned} H(f, X_m) &= \int_0^l [p(x) f'(x) X'_m(x) + g(x) f(x) X_m(x)] dx = \\ &= - \int_0^l f(x) \{ [p(x) X'_m(x)]' - g(x) X_m(x) \} dx = \\ &= \lambda_m \int_0^l f(x) X_m(x) dx = \lambda_m c_m, \end{aligned}$$

$$H(X_m, X_m) = HX_m = \lambda_m \int_0^l X_m^2(x) dx = \lambda_m.$$

Використовуючи ці рівності, дістаємо

$$0 \leq H \left( f - \sum_{m=1}^N c_m X_m(x) \right) = \int_0^l \left[ p(x) \left( f'(x) - \sum_{m=1}^N c_m X'_m(x) \right)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +g(x) \left( f(x) - \sum_{m=1}^N c_m X_m(x) \right)^2 \Big] dx = Hf - 2H \left( f, \sum_{m=1}^N c_m X_m(x) \right) + \\
& +H \left( \sum_{m=1}^N c_m X_m(x) \right) = Hf - 2 \sum_{m=1}^N c_m H(f, X_m) + \sum_{m=1}^N c_m^2 HX_m = \\
& = Hf - \sum_{m=1}^N c_m^2 \lambda_m.
\end{aligned}$$

Остання нерівність виконується для довільних  $N$ , а отже, й при  $N = \infty$ . Лему доведено.

Функція  $H(\varphi(x))$  задовольняє умови леми. Отже,

$$HL(\varphi(x)) \geq \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \lambda_m.$$

Оскільки

$$c_m = \int_0^l L(\varphi(x)) X_m(x) dx = -\lambda_m \int_0^l \varphi(x) X_m(x) dx = -A_m \lambda_m,$$

то

$$HL(\varphi(x)) \geq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^3 A_m^2. \quad (2.239)$$

Маємо

$$\begin{aligned}
A_m &= \int_0^l \varphi(\xi) X_m(\xi) d\xi = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^l \varphi(\xi) L(X_m(\xi)) d\xi = \\
&= -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^l \varphi(\xi) [p(\xi) X_m'(\xi)]' d\xi + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^l \varphi(\xi) g(\xi) X_m(\xi) d\xi = \\
&= \frac{1}{\lambda_m} \int_0^l \varphi'(\xi) p(\xi) X_m'(\xi) d\xi + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^l \varphi(\xi) g(\xi) X_m(\xi) d\xi = \\
&= \frac{1}{\lambda_m} \left[ - \int_0^l [p(\xi) \varphi'(\xi)]' X_m(\xi) d\xi + \int_0^l \varphi(\xi) g(\xi) X_m(\xi) d\xi \right] = \\
&= -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^l L(\varphi(\xi)) X_m(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$B_m = \int_0^l \psi(\xi) X_m(\xi) d\xi = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^l L(\psi(\xi)) X_m(\xi) d\xi.$$

Відома нерівність Бесселя: для довільної нескінченної ортонормованої послідовності  $\{X_m(x)\}$  і довільної інтегрованої з квадратом функції  $f(x)$  на  $[0, l]$  виконується нерівність

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_0^l f(x) X_m(x) dx \right\}^2 \leq \int_0^l f^2(x) dx.$$

Беручи до уваги попередні рівності та нерівність Бесселя, дістаємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^l X_m(x) L(\psi(x)) dx \right)^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 B_m^2 \leq \int_0^l [L(\psi(x))]^2 dx. \quad (2.240)$$

Рівність (2.226) еквівалентна рівності

$$X_m(x) + \lambda_m \int_0^l G(x, s) X_m(s) ds = 0,$$

звідки

$$\frac{1}{\lambda_m} X_m(x) = - \int_0^l G(x, s) X_m(s) ds. \quad (2.241)$$

Таким чином,  $\frac{1}{\lambda_m} X_m(x)$  за фіксованого  $x \in [0, l]$  є  $m$ -м коефіцієнтом Фур'є функції  $G(x, s)$ , яка задовольняє як функція  $s \in [0, l]$  умови доведеної леми. Тому

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_m^2(x)}{\lambda_m} \leq HG \leq M_1 \text{ при } x \in [0, l]. \quad (2.242)$$

Диференціюючи (2.241) і застосовуючи нерівність Бесселя, дістаємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_m'^2(x)}{\lambda_m^2} \leq \int_0^l G_x^2(x, s) ds \leq M_2 \text{ при } x \in [0, l] \quad (2.243)$$

Покажемо тепер, що ряд (2.234) рівномірно збіжний на  $[0, l]$ . Справді, застосовувавши нерівність Коші–Буняковського, маємо

$$\sum_{k=m}^{m+n} \left( \lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k| \right) |X_k(x)| = \sum_{k=m}^{m+n} \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \lambda_k^{3/2} |A_k| +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=m}^{m+n} \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \lambda_k |B_k| \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k}} \left( \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^3 |A_k|^2} + \right. \\
& \left. + \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^2 |B_k|^2} \right) \leq M_1^{1/2} \left( \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^3 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^2 B_k^2} \right).
\end{aligned}$$

Унаслідок нерівностей (2.239), (2.240) ряди  $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^3 A_m^2$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 B_m^2$  збіжні, а тоді з останньої нерівності випливає рівномірна збіжність ряду (2.234).

Беручи до уваги (2.243), дістаємо

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=m}^{m+n} \frac{|X'_k(x)|}{\lambda_k} [\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|] \leq \\
& \leq \sqrt{M_2} \left( \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^2 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k B_k^2} \right). \tag{2.244}
\end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^l X_m(x) L(\varphi(x)) dx \right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 A_m^2 \leq \int_0^l [L(\varphi(x))]^2 dx, \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m B_m^2 \leq H\psi,
\end{aligned}$$

і отже, ряди  $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 A_m^2$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m B_m^2$  збіжні. Тоді із (2.244) випливає рівномірна збіжність при  $x \in [0, l]$  ряду (2.235).

Теорему доведено.

Основні результати з обґрунтування методу відокремлення змінних належать видатному російському математику В.А. Стеклову.

◇ **Зауваження 2.9.** Якщо крайові умови (2.207) або рівняння (2.205) неоднорідні, то для побудови розв'язків мішаних задач (2.205)–(2.207) міркуємо аналогічно випадку вимушених коливань струни.

■ **Приклад 2.7.** В області  $B = \{(t, x) \mid t > 0, x \in (0, 2)\}$  знайдемо розв'язок рівняння

$$2(t+1)U_{tt}(t, x) + 3U_t(t, x) - U_{xx}(t, x) - 2U_x(t, x) - U(t, x) + 2x = 0, \tag{2.245}$$

який задовольняє умови:

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0, 2], \tag{2.246}$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, 2) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2.247}$$

Мішана задача (2.245)–(2.247) є задачею зі стаціонарними неоднорідностями. У зв'язку з цим шукаємо її розв'язок у вигляді

$$U(t, x) = w(x) + z(t, x), \quad (2.248)$$

де  $w(x) \in C^2 [0, l]$  і є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} w''(x) + 2w'(x) + w(x) = 2x, \\ w(0) = 0, \quad w(2) = 0, \end{cases} \quad (2.249)$$

а  $z(t, x) \in C^2 (B)$  і є розв'язком мішаної задачі

$$\begin{cases} 2(t+1)z_{tt} + 3z_t - z_{xx} - 2z_x - z = 0, \\ z(0, x) = -w(x), \quad z_t(0, x) = 0, \quad x \in [0, 2], \\ z(t, 0) = 0, \quad z(t, 2) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (2.250)$$

Зінтегрувавши крайову задачу (2.249), дістанемо

$$w(x) = 2(x-2)(1-e^{-x}). \quad (2.251)$$

Розв'язок задачі (2.250) будемо за допомогою методу Фур'є. Маємо

$$Z(t, x) = T(t)X(x) \neq 0; \quad (2.252)$$

$$2(t+1)T''(t) + 3T'(t) + (\lambda-1)T(t) = 0, \quad (2.253)$$

$$X''(x) + 2X'(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.254)$$

$$X(0) = X(2) = 0. \quad (2.255)$$

Як показано вище, задача Штурма–Ліувіля (2.254)–(2.255) має розв'язки й усі власні значення  $\lambda > 0$ . Легко також переконатися, що  $\lambda \in (0, 1]$  не є власними значеннями. Отже, загальний розв'язок рівняння (2.254) має вигляд

$$X(x) = e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{\lambda-1}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda-1}x).$$

На підставі крайових умов (2.255) дістаємо:

$$c_1 = 0, \quad c_2 e^{-2} \sin \sqrt{\lambda-1}2 = 0 \Rightarrow \lambda_k = 1 + \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Таким чином

$$X(x) = c_2 e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2}x. \quad (2.256)$$

Підставивши знайдені власні значення  $\lambda_k$  у рівняння (2.253), маємо

$$2(t+1)T''(t) + 3T'(t) + \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 T(t) = 0. \quad (2.257)$$

Поряд із рівнянням (2.257) розглянемо рівняння

$$2(t+1)\theta''(t) + \theta'(t) + \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 \theta(t) = 0. \quad (2.258)$$

Здиференціюємо (2.258):

$$2(t+1)\theta'''(t) + 3\theta''(t) + \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 \theta'(t) = 0.$$

Поклавши  $\theta'(t) = T(t)$ , дістанемо рівняння (2.257). Інтегруємо рівняння (2.258). Для цього покладемо

$$\tau = \sqrt{2(t+1)}, \theta(t) = \theta\left(\frac{\tau^2}{2} - 1\right) = \Omega(\tau) : \quad \theta'(t) = \Omega'(\tau) [2(t+1)]^{-0,5};$$

$$\theta''(t) = [2(t+1)]^{-1} \Omega''(\tau) - [2(t+1)]^{-3/2} \Omega'(\tau).$$

Підставивши знайдені похідні в (2.258), дістанемо

$$\Omega''(\tau) + \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 \Omega(\tau) = 0,$$

звідки

$$\Omega(\tau) = \bar{c}_3 \cos \frac{k\pi}{2} \tau + c_4 \sin \frac{k\pi}{2} \tau,$$

або

$$\theta(t) = \bar{c}_3 \cos \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} + c_4 \sin \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)},$$

тобто

$$T_k(t) = \frac{k\pi}{2\sqrt{2(t+1)}} \left[ c_3 \sin \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} + c_4 \cos \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} \right],$$

де  $-\bar{c}_3 = c_3$ .

Отже, згідно з (2.252) маємо

$$Z_k(t, x) = \frac{k\pi}{2\sqrt{2(t+1)}} \left[ A_k \sin \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} + B_k \cos \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} \right] e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x.$$

Розглянемо ряд

$$\begin{aligned} Z(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{2\sqrt{2(t+1)}} & \left[ A_k \sin \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} + \right. \\ & \left. + B_k \cos \frac{k\pi}{2} \sqrt{2(t+1)} \right] e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x. \end{aligned} \quad (2.259)$$

і припустимо, що він збігається рівномірно в області  $\bar{B}$  і його можна почленно диференціювати двічі за  $x$  і за  $t$ . Тоді він також буде розв'язком однорідного рівняння в задачі (2.250) і задовольнятиме крайові однорідні умови за довільних  $A_k$  та  $B_k$ .

Унаслідок початкових умов задачі (2.250) дістаємо

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{2\sqrt{2}} \left( A_k \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + B_k \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x = 2(2-x)(1-e^{-x}), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{4\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} - \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) A_k - \left( \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) B_k \right] e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \left( \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} - \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) A_k - \left( \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) B_k = 0, \\ A_k \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + B_k \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{k\pi} \int_0^2 (2-x)(e^x - 1) \sin \frac{k\pi}{2} x dx = -\frac{16(4+(-1)^k(k\pi)^2 e^2)}{k\pi(4+(k\pi)^2)^2}. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему відносно невідомих  $A_k$  та  $B_k$  і підставивши їх у (2.209), дістанемо

$$Z(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{8 [4 + (-1)^k (k\pi e)^2]}{k\pi \sqrt{2(t+1)} [4 + (k\pi)^2]^2} \left[ \left( k\pi \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2(t+1)} + \left( k\pi \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2(t+1)} \right] e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x.$$

На підставі (2.248) остаточно маємо

$$U(t, x) = 2(x-2)(1-e^{-x}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8 [4 + (-1)^k (k\pi e)^2]}{k\pi \sqrt{2(t+1)} [4 + (k\pi)^2]^2} \times \\ \times \left[ \left( k\pi \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2(t+1)} + \left( k\pi \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sin \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \right) \cos \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2(t+1)} \right] e^{-x} \sin \frac{k\pi}{2} x.$$

## 2.21 Вільні коливання прямокутної мембрани. Метод відокремлення змінних

Дослідимо коливання однорідної прямокутної мембрани із сторонами  $b$  і  $c$ , які відбуваються внаслідок початкового відхилення й початкової швидкості, якщо край мембрани нерухомо закріплений.

Як було показано в п. 2.15, для визначення відхилення мембрани від положення рівноваги, тобто функції  $u(t, x, y)$ , необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad t > 0, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c, \quad (2.260)$$

який задовольняє початкові

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c \quad (2.261)$$

і крайові умови

$$u(t, 0, y) = u(t, b, y) = 0, \quad (2.262)$$

$$u(t, x, 0) = u(t, x, c) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.263)$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (2.260)–(2.263) розв'яжемо спочатку допоміжну задачу: знайти нетривіальні розв'язки рівняння (2.260), які б задовольняли крайові умови (2.262), (2.263).

Шукатимемо ці розв'язки у вигляді

$$u(t, x, y) = T(t) V(x, y) \neq 0 \quad (2.264)$$



Підставляючи (2.264) у рівняння (2.260) та крайові умови (2.262), (2.263) і відокремивши змінні, дістанемо

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (2.265)$$

$$\begin{cases} V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \\ V(0, y) = V(b, y) = 0, \\ V(x, 0) = V(x, c) = 0, \quad \lambda = \text{const.} \end{cases} \quad (2.266)$$

Перше з рівнянь системи (2.266) називається *рівнянням Гельмгольца*.

Задачу на власні значення (2.266) для диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку також розв'язуємо методом відокремлення змінних. Візьмемо

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad (2.267)$$

Відокремлюючи змінні в задачі (2.266), дістаємо

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, \\ X(0) = X(b) = 0, \end{cases} \quad (2.268)$$

$$\begin{cases} Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(c) = 0. \end{cases} \quad (2.269)$$

Повторюючи міркування, викладені в дослідженні задачі Штурма–Ліувіля (2.170), (2.171), матимемо

$$\mu = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad X_n(x) = C_1 \sin \frac{\pi n}{b} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda - \mu = \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2, \quad Y_m(y) = C_2 \sin \frac{\pi m}{c} y, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Отже, згідно з (2.267) власним значенням задачі (2.266)

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2$$

відповідатимуть власні функції

$$V_{n,m}(x, y) = A_{n,m} \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{c} y, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $A_{n,m} = C_1 C_2$  — деякий сталий множник. Виберемо його таким чином, щоб норма власної функції  $V_{n,m}(x, y)$  з вагою 1 дорівнювала одиниці, тобто

$$\int_0^b \int_0^c V_{n,m}^2 dy dx = A_{n,m}^2 \int_0^b \int_0^c \sin^2 \frac{\pi n}{b} x \sin^2 \frac{\pi m}{c} y dy dx = 1.$$

З останньої рівності знаходимо  $A_{n,m} = 2(bc)^{-1/2}$ .

Ортогональність функцій  $\{V_{n,m}(x,y)\}$  в розглядуваному прямокутнику очевидна і не вимагає доведення.

Отже, система функцій

$$V_{n,m}(x,y) = 2(bc)^{-1/2} \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{c} y \quad (2.270)$$

є ортонормованою системою власних функцій прямокутної мембрани.

Зазначимо, що серед знайдених власних значень  $\lambda_{n,m}$  можуть бути й кратні, тобто такі, яким відповідає не одна, а кілька лінійно незалежних власних функцій. Кількість лінійно незалежних власних функцій, які відповідають власному значенню  $\lambda_{n,m}$ , залежить від кількості цілочислових розв'язків  $n$  і  $m$  рівняння

$$\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 = \lambda_{n,m}.$$

Наприклад, якщо  $b = c = 1$ , то власному значенню  $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 5\pi^2$  будуть відповідати дві лінійно незалежні функції

$$V_{1,2}(x,y) = 2 \sin \pi x \sin 2\pi y, \quad V_{2,1}(x,y) = 2 \sin 2\pi x \sin \pi y,$$

тобто  $\lambda_{1,2}$  є двократним власним значенням.

□ **Деякі додаткові поняття й означення.** Нехай  $f(x,y)$  — довільна задана в прямокутнику  $[0, b; 0, c]$  дійсна інтегровна з квадратом функція

$$\left( R(f) = \int_0^b \int_0^c f^2(x,y) dy dx < +\infty \right).$$

Числа  $C_{n,m} = \int_0^b \int_0^c f(x,y) V_{n,m}(x,y) dy dx$ ,  $n, m = 1, 2, 3, \dots$  називаються *коефіцієнтами Фур'є* функції  $f(x,y)$  відносно ортонормованої системи (2.270).

Розглянемо вираз  $\sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l \alpha_{n,m} V_{n,m}(x,y)$ , де  $\alpha_{n,m}$  — деякі сталі.

Число

$$N = \int_0^b \int_0^c \left[ f(x,y) - \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l \alpha_{n,m} V_{n,m}(x,y) \right]^2 dy dx$$

називається *середньою квадратичною похибкою*. Маємо

$$N = R(f) + \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l (\alpha_{n,m} - C_{n,m})^2 - \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l C_{n,m}^2 \geq 0.$$

Таким чином, середня квадратична похибка за фіксованих  $r$  і  $l$  буде мінімальною при  $\alpha_{n,m} = C_{n,m}$ ,  $n = \overline{1, r}$ ,  $m = \overline{1, l}$ .

Якщо маємо вираз  $\sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l C_{n,m} V_{n,m}(x, y)$ , то з нерівності

$$\int_0^b \int_0^c \left[ f(x, y) - \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l C_{n,m} V_{n,m}(x, y) \right]^2 dy dx \geq 0$$

випливає, що  $\sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^l C_{n,m}^2 \leq R(f)$  для довільних  $r$  і  $l$ .

Отже, ряд, складений із квадратів коефіцієнтів Фур'є функції  $f(x, y)$ , збігається:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m}^2 \leq R(f).$$

Добуте співвідношення називається *нерівністю Бесселя*.

► **Означення 2.10.** Ортонормовану систему функцій  $V_{n,m}(x, y)$  у прямокутнику  $[0, b; 0, c]$  називають **повною**, якщо для всякої неперервної і інтегровної з квадратом у цьому прямокутнику функції  $f(x, y)$  має місце рівність Парсеваля–Стеклова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m}^2 = R(f).$$

Легко довести, що система функцій (2.270) є повною.

Виконання умови повноти не означає, що функцію  $f(x, y)$  можна розвинути в рівномірно збіжний у прямокутнику  $[0, b; 0, c]$  ряд Фур'є за системою функцій  $V_{n,m}(x, y)$ .

Якщо  $f(x, y) \in C^2[0, b; 0, c]$ , то таке розвинення завжди можливе.

Покажемо, що система (2.270) містить усі власні функції задачі (2.266). Для цього доведемо таке твердження.

**Твердження 2.1.** Власні функції  $V_k(x, y)$  і  $V_s(x, y)$ , які відповідають різним власним значенням  $\lambda_k$ ,  $\lambda_s$  задачі (2.266), є ортогональними.

**Доведення.** Маємо

$$V_{k_{xx}} + V_{k_{yy}} + \lambda_k V_k = 0,$$

$$V_{s_{xx}} + V_{s_{yy}} + \lambda_s V_s = 0.$$

Помножимо першу з рівностей на  $V_s(x, y)$ , а другу — на  $V_k(x, y)$  і віднімемо їх:

$$(V_{k_{xx}} V_s - V_{s_{xx}} V_k) + (V_{k_{yy}} V_s - V_{s_{yy}} V_k) = (\lambda_s - \lambda_k) V_s V_k.$$

Зінтегруємо останню рівність за  $x$  від 0 до  $b$  і за  $y$  від 0 до  $c$ . Дістанемо

$$\begin{aligned} \int_0^c \int_0^b (V_{k_{xx}} V_s - V_{s_{xx}} V_k) dx dy + \int_0^b \int_0^c (V_{k_{yy}} V_s - V_{s_{yy}} V_k) dy dx = \\ = (\lambda_s - \lambda_k) \int_0^b \int_0^c V_s V_k dy dx. \end{aligned}$$

Взявши у лівій частині інтеграли частинами й урахувавши крайові умови, матимемо

$$(\lambda_s - \lambda_k) \int_0^b \int_0^c V_s V_k dy dx = 0.$$

Оскільки  $\lambda_s \neq \lambda_k$ , то функції  $V_s(x, y)$  та  $V_k(x, y)$  є ортогональними в розглядуваному прямокутнику.

Теорему доведено.

Припустимо тепер, що задача (2.266) має власну функцію  $V_s(x, y)$ , яка не належить системі (2.270). Згідно з доведеним твердженням вона є ортогональною до всіх функцій (2.270). Із теорії кратних рядів Фур'є відомо: якщо функція  $V_s(x, y) \in C^2(0 < x < b, 0 < y < c)$  і задовольняє крайові умови задачі (2.266), то її можна розвинути в абсолютно й рівномірно збіжний ряд за системою власних функцій (2.270). Унаслідок ортогональності  $V_s(x, y)$  і  $V_{n,m}(x, y)$  у розвиненні функції  $V_s(x, y)$  за системою (2.270) залишиться тільки скінченне число членів, які відповідають власному значенню  $\lambda_{n,m} = \lambda_s$ . Тому  $V_s(x, y)$  є лінійною комбінацією лише тих функцій (2.270), які відповідають власному значенню  $\lambda_{n,m} = \lambda_s$ . Таким чином, всі власні функції прямокутної мембрани даються формулою (2.270).

Підставивши знайдені власні значення  $\lambda_{n,m}$  у рівняння (2.265) і зінтегрувавши його, дістанемо

$$T_{n,m}(t) = B_{n,m} \cos a \sqrt{\lambda_{n,m}} t + C_{n,m} \sin a \sqrt{\lambda_{n,m}} t,$$

де  $B_{n,m}, C_{n,m}$  — довільні сталі. Підставляючи (2.270) і  $T_{n,m}(t)$  у рівняння (2.264), маємо

$$\begin{aligned} u_{n,m}(t, x, y) = \\ = \left( B_{n,m} \cos a \sqrt{\lambda_{n,m}} t + C_{n,m} \sin a \sqrt{\lambda_{n,m}} t \right) V_{n,m}(x, y). \end{aligned} \quad (2.271)$$

Ми дістали нескінченну множину частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння (2.260), які задовольняють крайові умови (2.262), (2.263).

Згідно з доведеною в п. 2.17 лемою 2.1 ряд

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(t, x, y) \quad (2.272)$$

також буде розв'язком рівняння (2.260) і задовольнятиме крайові умови (2.262), (2.263), якщо він збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$ ,  $x$ ,  $y$  у розглядуваній області

$$D = \{(t, x, y) \mid t > 0, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c\}.$$

Визначаємо коефіцієнти  $B_{n,m}$  і  $C_{n,m}$  таким чином, щоб ряд (2.272) задовольняв і початкові умови (2.261). Для цього підставляємо (2.272) у (2.261):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} V_{n,m}(x, y), \\ \psi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a \sqrt{\lambda_{n,m}} C_{n,m} V_{n,m}(x, y). \end{aligned} \quad (2.273)$$

Припустимо, що ряди (2.273) збігаються рівномірно в прямокутнику  $0 \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq c$ . Тоді, помноживши їх на функцію  $V_{k,s}(x, y)$  та зінтегрувавши одержаний результат по прямокутнику, матимемо

$$\begin{aligned} B_{n,m} &= \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx, \\ C_{n,m} &= \frac{1}{a \sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_0^b \int_0^c \psi(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені значення  $B_{n,m}$  і  $C_{n,m}$  у ряд (2.272), дістанемо розв'язок мішаної задачі (2.270)–(2.263).

#### □ Обґрунтування методу відокремлення змінних.

**Теорема 2.14.** *Якщо функції  $\varphi(x, y)$  та  $\psi(x, y)$  неперервні разом із похідними до четвертого порядку включно в прямокутнику  $[0, b; 0, c]$ , то ряд (2.272) збігається рівномірно в області  $D$  і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$ ,  $x$  і  $y$ .*

**Доведення.** Унаслідок крайових умов

$$\begin{aligned} \varphi(0, y) &= \varphi(x, 0) = \varphi(b, y) = \varphi(x, c) = 0; \\ \psi(0, y) &= \psi(x, 0) = \psi(b, y) = \psi(x, c) = 0. \end{aligned}$$

Беручи це до уваги та інтегруючи по частинах, дістаємо

$$B_{n,m} = \left( \frac{bc}{nm\pi^2} \right)^2 \int_0^b \int_0^c \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} V_{n,m}(x, y) dx dy = \left( \frac{bc}{nm\pi^2} \right)^2 \alpha_{n,m}; \quad (2.274)$$

$$C_{n,m} = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \left( \frac{bc}{nm\pi^2} \right)^2 \int_0^b \int_0^c \frac{\partial^4 \psi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} V_{n,m}(x,y) dy dx =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \left( \frac{bc}{nm\pi^2} \right)^2 \beta_{n,m}.$$

Очевидно, існує така стала  $K$ , що

$$\sup \left\{ |\alpha_{n,m}|, \frac{|\beta_{n,m}|}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \right\} \leq K.$$

Але тоді ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4K b^{3/2} c^{3/2}}{n^2 m^2 \pi^4}$  є мажорантним для ряду (2.272), а отже, останній збігається абсолютно й рівномірно в області  $\bar{D}$ .

Здиференціюємо почленно ряд (2.272) двічі  $x$ ,  $y$  і  $t$ . Маємо

$$u_{xx}(t, x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y),$$

$$u_{yy}(t, x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\pi m}{c} \right)^2 T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y), \quad (2.275)$$

$$u_{tt}(t, x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a^2 \lambda_{n,m} T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y).$$

Унаслідок (2.274) мажорантними для рядів (2.275) будуть числові ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4K c^{3/2}}{m^2 \pi^2 b^{1/2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4K b^{3/2}}{n^2 \pi^2 c^{1/2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4K a^2}{(bc)^{1/2} \pi^2} \left( \frac{c^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} \right),$$

які є збіжними. Але тоді ряди (2.275) абсолютно й рівномірно збіжні в області  $D$ .

Теорему доведено.

Зазначимо, що твердження теореми є справедливим і тоді, коли

$$\varphi(x, y) \in C^4 [0, b; 0, c], \text{ а } \psi(x, y) \in C^3 [0, b; 0, c].$$

□ **Фізична інтерпретація розв'язку (2.272).** Введемо позначення:

$$B_{n,m} = M_{n,m} \sin \varphi_{n,m}, \quad C_{n,m} = M_{n,m} \cos \varphi_{n,m}.$$

Тоді (2.271) запишеться у вигляді

$$u_{n,m}(t, x, y) = V_{n,m}(x, y) M_{n,m} \sin \left( a\sqrt{\lambda_{n,m}} t + \varphi_{n,m} \right). \quad (2.276)$$

Кожен член ряду (2.272) представляє собою стоячу хвилю для прямокутної мембрани. З (2.276) бачимо, що кожна точка  $(x, y)$  мембрани здійснює прості гармонічні коливання з частотою  $a\sqrt{\lambda_{n,m}}$ , періодом  $2bc(a\sqrt{n^2c^2 + m^2b^2})^{-1}$  і амплітудою

$$2(bc)^{-1/2} M_{n,m} \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{c} y.$$

Усі точки мембрани проходять положення рівноваги в один і той самий момент часу

$$a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + \varphi_{n,m} = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а при  $a\sqrt{\lambda_{n,m}}t + \varphi_{n,m} = \frac{2k+1}{2}\pi$  вони одночасно досягають максимального відхилення в той чи інший бік. Найбільшу амплітуду коливань матимуть точки, для яких  $\sin \frac{\pi n}{b}x = \pm 1$  і  $\sin \frac{\pi m}{c}y = \pm 1$ , тобто з координатами  $(\frac{2k-1}{2n}b, \frac{2s-1}{2m}c)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Ці точки мембрани називаються *пучностями*.

Лінії, точки яких не коливаються, називаються *вузловими лініями*. Очевидно, що крім контура мембрани вузловими лініями будуть прямі

$$x = \frac{kb}{n}, \quad y = \frac{sc}{m}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad s = \overline{1, m-1}.$$

Ці лінії розділять мембрану на  $mn$  прямокутників, причому в двох сусідніх відхилення будуть напрямлені в різні боки. Центр кожного такого прямокутника буде пучністю. Розглянемо стоячі хвилі  $u_{1,1}(t, x, y)$ ,  $u_{1,2}(t, x, y)$ ,  $u_{2,1}(t, x, y)$ ,  $u_{2,2}(t, x, y)$  і зобразимо мембрану в той момент часу, коли всі її точки досягають найбільшого відхилення (рис. 2.35).

Наступні стоячі хвилі мають складніший вигляд.

У випадку кратних власних значень вузлові лінії можуть мати вигляд кривих досить складної форми. Ці криві інколи називають *фігурами Ліссажу*.

Як приклад розглянемо мембрану зі сторонами  $b = c = \pi$ . Тоді при  $n = 1$ ,  $m = 2$  або  $n = 2$ ,  $m = 1$  маємо дві хвилі (обертони):

$$u_{1,2}(t, x, y) = \frac{2}{\pi} M_{1,2} \sin \left( a\sqrt{5}t + \varphi_{1,2} \right) \sin x \sin 2y;$$

$$u_{2,1}(t, x, y) = \frac{2}{\pi} M_{2,1} \sin \left( a\sqrt{5}t + \varphi_{2,1} \right) \sin 2x \sin y$$

з однією і тією ж частотою  $a\sqrt{5}$ . Загальне коливання квадратної мембрани з частотою  $a\sqrt{5}$  представляється сумою стоячих хвиль

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \left[ M_{1,2} \sin \left( a\sqrt{5}t + \varphi_{1,2} \right) \cos y + M_{2,1} \sin \left( a\sqrt{5}t + \varphi_{2,1} \right) \cos x \right] \times \\ & \times \sin x \sin y = \frac{4}{\pi} \left[ (C_{1,2} \cos y + C_{2,1} \cos x) \sin a\sqrt{5}t + \right. \end{aligned}$$

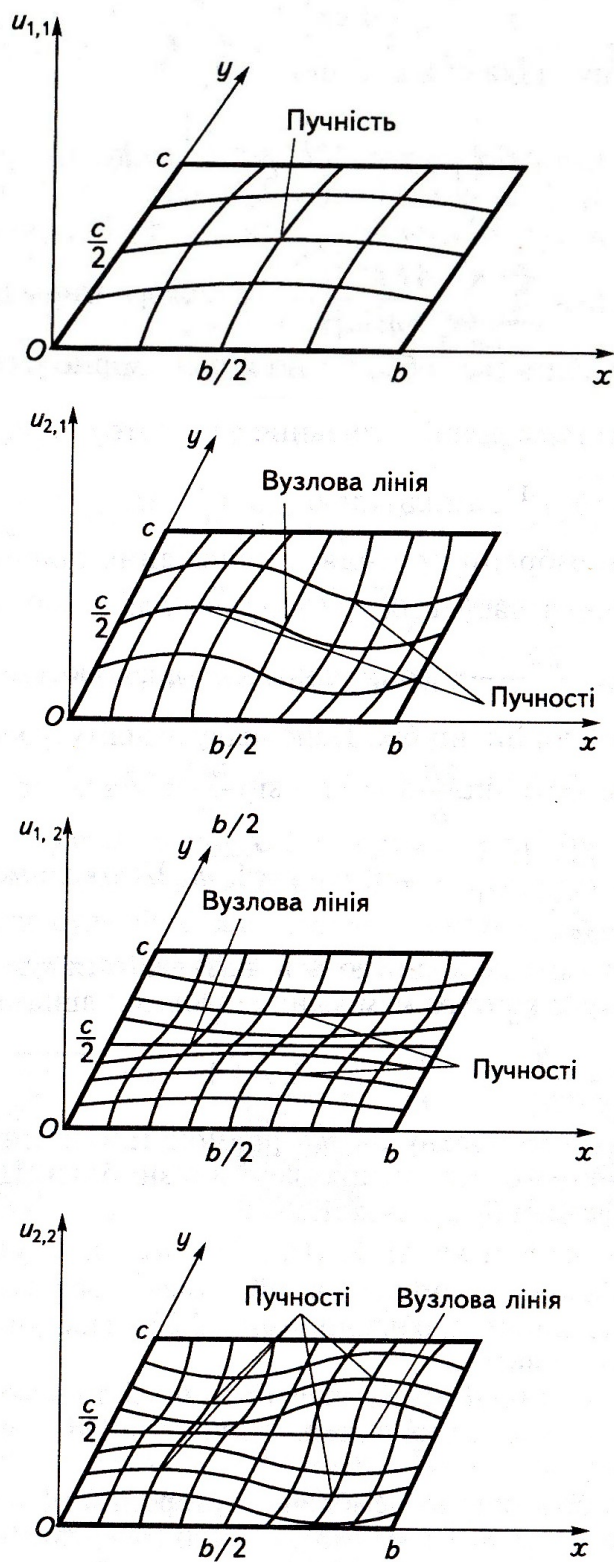


Рис. 2.35:

$$+ (B_{1,2} \cos y + B_{2,1} \cos x) \cos a\sqrt{5}t \Big] \sin x \sin y.$$

Вузлові лінії такого коливання, відмінні від сторін мембрани, наберуть ви-



гляду

$$d_1 \cos y + d_2 \cos x = 0, \quad d_1, d_2 = \text{const.}$$

Якщо  $d_1 = 0$ , то вузловою лінією буде пряма  $x = \pi/2$  (рис. 2.36, а), а при  $d_2 = 0$  — відрізок прямої  $y = \pi/2$  (рис. 2.36, б). Якщо  $d_1 = -d_2$ , то  $y = x$  і вузловою лінією буде діагональ квадрата, а при  $d_1 = d_2$  маємо  $y = \pi - x$ , і дістаємо другу діагональ (рис. 2.36, в).

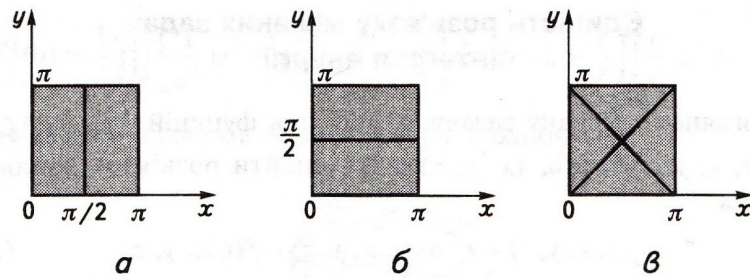


Рис. 2.36:

За довільних  $d_1$  і  $d_2$  вузлова лінія має складну форму, але вона завжди проходить через центр квадрата.

Таким чином, процес коливання мембрани відрізняється від процесу коливання струни, тому що для останньої кожній частоті власних коливань відповідає тільки одна форма струни, а у випадку мембрани одній і тій самій частоті може відповідати кілька форм мембрани з різними положеннями вузлових ліній.

◇ **Зауваження 2.10.** Метод Фур'є може використовуватися й для побудови розв'язку мішаної задачі для рівняння коливання однорідної мембрани, обмеженої довільною кусково-гладкою жордановою кривою, а також у випадку мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу вигляду

$$u_{tt}(t, M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [a_{ij}(M)u_{x_j}(t, M)] - a(M)u(t, M) + b(t)u_t(t, M) \quad n \geq 3,$$

де

$$M = M(x_1, \dots, x_n); \quad a(M) \geq 0; \quad a_{ij} = a_{ji};$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha > 0$$

у розглядуваній області (остання умова вказує на те, що задане диференціальне рівняння належить до гіперболічного типу).

▲ **Вправа.** Дослідити вимушені коливання прямокутної мембрани.

## 2.22 Єдиність розв'язку мішаних задач. Інтеграл енергії

Розглянемо мішану задачу: в просторі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ ,  $D = \{(t, x, y, z) \mid t > 0, (x, y, z) \in D_1\}$ , знайти розв'язок хвильового рівняння

$$u_{tt}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z), \quad (2.277)$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \overline{D_1} = D_1 \cup S, \quad (2.278)$$

де  $S$  — поверхня, яка обмежує область  $D_1$ , та крайові умови

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{(x,y,z) \in S} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.279)$$

$\vec{n}$  — зовнішня нормаль до поверхні  $S$ .

Надалі вважаємо, що  $\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z) \in C(S)$ ,  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$ ,  $S$  — кусково-гладка поверхня, а  $f(t, x, y, z) \in C(\overline{D})$ ,  $\varphi(x, y, z) \in C^1(\overline{D_1})$ ,  $\psi(x, y, z) \in C(\overline{D_1})$ , і виконується умова узгодженості

$$\left( \alpha \varphi(x, y, z) + \beta \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{(x,y,z) \in S} = 0.$$

Для дослідження мішаних задач (2.277)–(2.279) ефективний так званий *метод інтегралів енергії*.

Нехай  $u(t, x, y, z)$  — розв'язок задачі (2.277)–(2.279). Тоді справедливе співвідношення

$$E^2(t) = E^2(0) + \frac{1}{a^2} \int_0^t \iiint_{D_1} f(\tau, x, y, z) \times \\ \times \frac{\partial u(\tau, x, y, z)}{\partial \tau} dx dy dz d\tau, \quad \tau \geq 0 \quad (2.280)$$

де

$$E^2(t) = \frac{1}{2} \iiint_{D_1} \left[ \frac{1}{a^2} u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \right] dx dy dz + \frac{1}{2} \iint_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} u^2 ds, \quad (2.281)$$

$$E^2(0) = \frac{1}{2} \iiint_{D_1} \left[ \frac{1}{a^2} \psi^2 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \right] dx dy dz + \frac{1}{2} \iint_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} \varphi^2 ds,$$

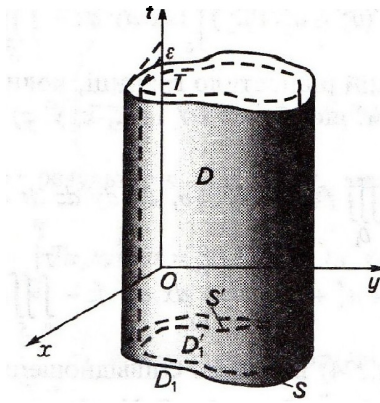


Рис. 2.37:

$S_0$  — та частина поверхні  $S$ , де  $\alpha > 0$  і  $\beta > 0$  одночасно.

Справді, нехай  $\varepsilon > 0$  — довільне число, а  $D'_1 \subset D_1$ , де  $D'_1$  — область, обмежена кусково-гладкою поверхнею  $S'$  (Рис. 2.37).

Помноживши рівняння (2.277) на  $u_t$  і інтегруючи по області  $D' = D'_1 \times (\varepsilon, T)$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \int_{\varepsilon}^T \iiint_{D'_1} f(t, x, y, z) \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz dt &= \int_{\varepsilon}^T \iiint_{D'_1} \frac{\partial u}{\partial t} \left[ \frac{1}{a^2} u_{tt} - \Delta u \right] dx dy dz dt = \\ &= \iiint_{D'_1} \frac{1}{a^2} \int_{\varepsilon}^T u_t u_{tt} dt dx dy dz - \\ &- \int_{\varepsilon}^T \iiint_{D'_1} u_t \Delta u dx dy dz dt = \frac{1}{2} \iiint_{D'_1} \frac{1}{a^2} (u_t)^2 \Big|_{\varepsilon}^T dx dy dz - \\ &- \int_{\varepsilon}^T \iiint_{D'_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u_t u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (u_t u_z) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right\} dx dy dz dt. \end{aligned}$$

Користуючись формулою Гауса–Остроградського, з попередньої рівності маємо

$$\frac{1}{a^2} \int_{\varepsilon}^T \iiint_{D'_1} f(t, x, y, z) u_t dx dy dz dt = \frac{1}{2} \iiint_{D'_1} \left[ \frac{1}{a^2} u_t^2 + \right.$$

$$+ (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)]_\varepsilon^T dx dy dz - \int_\varepsilon^T \iint_{S'} u_t \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds' dt.$$

Переходячи в останній рівності до границі, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ , і  $D'_1 \rightarrow D_1$  та користуючися тим, що  $u \in C'(\overline{D})$  і  $f(t, x, y, z) \in C(\overline{D})$ , дістаємо рівність

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2} \int_\varepsilon^T \iiint_{D_1} f(t, x, y, z) u_t dx dy dz dt = \\ & \frac{1}{2} \iiint_{D_1} \left[ \frac{1}{a^2} u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \right]_0^t dx dy dz - \int_0^T \iint_S u_t \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds dt. \end{aligned} \quad (2.282)$$

Із крайової умови (2.279) випливає співвідношення на поверхні  $S$ :  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{\alpha}{\beta} u$ , якщо  $\beta > 0$ ;  $u = 0$  при  $\beta = 0$ . У зв'язку з цим

$$- \int_0^T \iint_S u_t \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds dt = \int_0^T \iint_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} u_t u ds dt = \frac{1}{2} \iint_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} u^2 \Big|_0^T ds.$$

Підставивши добутий результат в (2.282) та замінивши  $T$  на  $t$ , дістанемо формулу (2.280).

Функція  $E^2(t)$  має простий фізичний зміст. Обмежуючися для спрощення міркувань одновимірним випадком, знайдемо вираз для енергії поперечних коливань струни  $E^2 = K + V$ , де  $K, V$  — відповідно кінетична та потенціальна енергії. Кінетична енергія елемента струни  $dx$ , який рухається із швидкістю  $V = u_t$ , становить  $0,5 m v^2 = 0,5 \rho (u_t)^2 dx$ , тобто кінетична енергія всієї струни

$$K = 0,5 \int_0^l \rho(x) [u_t(x, t)]^2 dx,$$

де  $\rho(x)$  — лінійна густина струни.

Потенціальна енергія поперечних коливань струни, яка в момент часу  $t = t_0$  має форму  $u(x, t) = u_0(x)$ , дорівнює роботі, яку потрібно здійснити, щоб струна перейшла з положення рівноваги в положення  $u_0(x)$ .

Нехай  $u(x, 0) = 0$ . Елемент  $dx$  під дією рівнодійної сили натягу  $T u_x(x + dx, t) - T u_x(x, t) = T u_{xx} dx$  за час  $dt$  проходить шлях  $u_t(x, t) dt$ .

Робота, яка здійснюється всією струною за час  $dt$ ,

$$\left( \int_0^l T u_{xx} u_t dx \right) dt = dt \left( T u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T u_x u_{xt} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} dt \left( -\frac{d}{dt} \int_0^l T (u_x)^2 dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^l \right).$$

Інтегруючи добутий результат за  $t$  від 0 до  $t_0$ , маємо

$$-0,5 \int_0^l T (u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T u_x u_t \Big|_0^l dt = -0,5 \int_0^l T [u_x(x, t_0)]^2 dx + \int_0^{t_0} T u_x u_t \Big|_0^l dt.$$

Інтеграл  $\int_0^{t_0} T u_x u_t \Big|_{x=0} dt$  представляє роботу, яку потрібно витратити на зміщення кінця  $x = 0$ . Аналогічний зміст має доданок  $\int_0^{t_0} T u_x u_t \Big|_{x=l} dt$ . Якщо кінці струни нерухомо закріплені, то робота на кінцях струни дорівнюватиме  $\left( u \Big|_{x=0} = u_t \Big|_{x=0} = 0 \right)$ . Отже, в цьому випадку робота, яка здійснюється струною, дорівнюватиме

$$-0,5 \int_0^l T [u'_0(x)]^2 dx$$

— потенціальної енергії струни в момент  $t = t_0$  з протилежним знаком. Отже, повна енергія струни

$$E^2(t) = 0,5 \int_0^l [T u_x^2 + \rho u_t^2] dx = 0,5T \int_0^l \left[ u_x^2 + \frac{1}{a^2} u_t^2 \right] dx.$$

Таким чином, функція  $E^2(t)$ , визначена формулою (2.281), є повною енергією системи, яка перебуває в процесі коливання.

► **Означення 2.11.** Функцію  $E^2(t)$ , визначену згідно з формулою (2.281), називають **інтегралом енергії**.

Якщо в рівнянні (2.277)  $f(t, x, y, z) = 0$ , то рівність (2.280) набирає вигляду

$$E^2(t) = E^2(0), \quad t \geq 0,$$

тобто повна енергія системи, яка перебуває в коливальному процесі, за відсутності зовнішніх збурень не змінюється з часом (закон збереження енергії).

Використаємо рівність (2.280) для доведення єдиності розв'язку мішаних задач для хвильових рівнянь.

**Теорема 2.15.** Якщо в просторі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$  існує розв'язок мішаної задачі (2.277)–(2.279), то цей розв'язок єдиний.

**Доведення.** Припустимо, що в розглядуваній області  $D$  існують два розв'язки мішаної задачі (2.277)–(2.279):  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$ . Тоді функція

$$u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z) \quad (2.283)$$

буде розв'язком мішаної задачі

$$u_{tt}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z), \quad (t, x, y, z) \in D, \quad (2.284)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \overline{D}, \quad (2.285)$$

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{(x,y,z) \in S} = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.286)$$

Покажемо, що розв'язок задачі (2.284)–(2.286) тотожно дорівнює нулю. Справді, для розв'язків мішаної задачі (2.284)–(2.286) рівність (2.280) запишеться у вигляді

$$E^2(t) = 0. \quad (2.287)$$

Унаслідок невід'ємності підінтегральних виразів у (2.281) із (2.287) випливає

$$u_t = u_x = u_y = u_z = 0 \Rightarrow u(t, x, y, z) = \text{const}$$

для всіх  $(t, x, y, z) \in \overline{D}$ . На підставі (2.285)  $u|_{t=0} = 0$ , отже  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  в області  $\overline{D}$ .

Теорему доведено.

◇ **Зауваження 2.11.** Теорема про єдиність розв'язку мішаних задач для хвильових рівнянь у випадках однієї та двох просторових незалежних змінних доводяться аналогічно, тільки потрібно використати інтеграли енергії для струни та мембрани відповідно.

▲ **Вправа.** Довести теорему про єдиність розв'язку мішаних задач для рівнянь коливання мембрани та струни.

## 2.23 Неперервна залежність розв'язку мішаних задач від вихідних даних

**Теорема 2.16.** Нехай функції  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$ , що належать класу

$$C^2(D) \cap C^1(\overline{D}), \quad \overline{D} = \{ (t, x, y, z) \mid t \in [0, T], (x, y, z) \in \overline{D}_1 \},$$

$T > 0$  — довільне, є розв'язками рівнянь

$$\begin{aligned} u_{1tt}(t, x, y, z) &= a^2 \Delta u_1(t, x, y, z) + f_1(t, x, y, z), & (t, x, y, z) \in D, \\ u_{2tt}(t, x, y, z) &= a^2 \Delta u_2(t, x, y, z) + f_2(t, x, y, z), & (t, x, y, z) \in D, \end{aligned} \quad (2.288)$$

відповідно, які задовольняють одну й ту саму крайову умову

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{(x,y,z) \in S} = X(t, x, y, z), \quad t \geq 0, \quad (2.289)$$

а в початковий момент часу

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2)|_{t=0} &= \varphi(x, y, z), \\ (u_{1t} - u_{2t})|_{t=0} &= \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{D}_1 \end{aligned} \quad (2.290)$$

Тоді для всякого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  існує таке число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , що як тільки

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y, z)| < \delta, \quad |\varphi_x(x, y, z)| < \delta, \quad |\varphi_y(x, y, z)| < \delta, \quad |\varphi_z(x, y, z)| < \delta \\ |\psi(x, y, z)| < \delta, \quad |f_1(t, x, y, z) - f_2(t, x, y, z)| < \delta, \quad (x, y, z) \in \bar{D}_1, \\ (t, x, y, z) \in \bar{D}, \end{aligned} \quad (2.291)$$

то  $|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon$  для всіх  $(t, x, y, z) \in \bar{D}$ .

**Доведення.** Функція  $u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)$  буде розв'язком мішаної задачі

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x, y, z) &= a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z), \\ f(t, x, y, z) &= f_1(t, x, y, z) - f_2(t, x, y, z), \end{aligned} \quad (2.292)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{D}_1, \quad (2.293)$$

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{(x,y,z) \in S} = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.294)$$

Для розв'язку задачі (2.292)–(2.294) справедливе співвідношення (2.280). Здиференціювавши рівність (2.280) за  $t$ , дістанемо

$$2E(t)E'(t) = \frac{1}{a^2} \iiint_{D_1} f(t, x, y, z) u_t dx dy dz, \quad t \geq 0. \quad (2.295)$$

Застосувавши до правої частини (2.295) нерівність Коші–Буняковського, матимемо

$$\begin{aligned} 2E(t)E'(t) &\leq \frac{1}{a^2} \left( \iiint_{D_1} |f(t, x, y, z)|^2 dx dy dz \right)^{1/2} \left( \iiint_{D_1} |u_t|^2 dx dy dz \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{a^2} \|f\| \cdot \|u_t\| \end{aligned} \quad (2.296)$$

Згідно з (2.281)  $\frac{1}{a^2} \|u_t\|^2 \leq 2E^2(t)$ , тобто

$$\frac{1}{a^2} \|u_t\| \leq \sqrt{2}E(t). \quad (2.297)$$

Аналогічно переконаємося в справедливості оцінок

$$\{\|u_x\|, \|u_y\|, \|u_z\|\} \leq \sqrt{2}E(t). \quad (2.298)$$

Підставляючи нерівність (2.297) в (2.296), дістаємо

$$E'(t) \leq \frac{1}{a\sqrt{2}} \|f\|, \quad t \geq 0.$$

Інтегруючи добути нерівність у межах від 0 до  $t$  маємо

$$E(t) \leq E(0) + \frac{1}{\sqrt{2}a} \int_0^t \|f\| d\tau. \quad (2.299)$$

Із нерівностей (2.297), (2.298) та (2.299) дістаємо оцінки

$$\|u_t\| \leq a\sqrt{2}E(0) + \int_0^t \|f\| d\tau, \quad t \geq 0, \quad (2.300)$$

$$\{\|u_x\|, \|u_y\|, \|u_z\|\} \leq \sqrt{2}E(0) + \frac{1}{a} \int_0^t \|f\| d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2.301)$$

Знайдемо оцінку функції  $\|u\| = \left( \iiint_{D_1} u^2 dx dy dz \right)^{1/2}$ . Диференціюючи рівність

$$\|u\|^2 = \iiint_{D_1} u^2(t, x, y, z) dx dy dz$$

за  $t$  і користуючися нерівністю Коші–Буняковського, на підставі оцінки (2.300) дістанемо

$$\begin{aligned} 2 \|u\| \|u\|' &= 2 \iiint_{D_1} u \cdot u_t dx dy dz \leq 2 \|u\| \|u_t\| \leq \\ &\leq 2 \|u\| \left[ \sqrt{2}aE(0) + \int_0^t \|f\| d\tau \right], \end{aligned}$$



звідки після скорочення на  $2 \|u\|$  випливає нерівність

$$\|u\|' \leq \sqrt{2}aE(0) + \int_0^t \|f\| d\tau.$$

Інтегруючи одержану диференціальну нерівність у межах від 0 до  $t$ , маємо

$$\|u\| \leq \|u\|_0 + \sqrt{2}aE(0)t + \int_0^t \int_0^\xi \|f\| d\tau d\xi,$$

де  $\|u\|_0$  — значення функції  $\|u\|$  у точці  $t = 0$ , тобто

$$\|u\|_0^2 = \iiint_{D_1} u^2(x, y, z, 0) dx dy dz = \iiint_{D_1} \varphi^2(x, y, z) dx dy dz = \|\varphi\|^2.$$

Отже,

$$\|u\| \leq \|\varphi\| + \sqrt{2}aE(0)t + \int_0^t (t - \tau) \|f\| d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2.302)$$

Унаслідок нерівностей (2.291) маємо

$$\begin{aligned} 2E^2(0) &\leq \iiint_{D_1} \left[ \frac{1}{a^2} + 3 \right] \delta^2 + \iint_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} \delta^2 ds \leq \\ &\leq \left[ \left( 3 + \frac{1}{a^2} \right) V + \sigma \max_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} \right] \delta^2 = c^2 \delta^2, \end{aligned}$$

де  $\sigma$  — площа поверхні  $S_0$ ;  $V$  — об'єм області  $D_1$ ,  $c^2 = \left( 3 + \frac{1}{a^2} \right) V + \sigma \max_{S_0} \frac{\alpha}{\beta}$ .

Таким чином

$$\sqrt{2}E(0) \leq c\delta.$$

Але тоді з нерівностей (2.302) дістаємо

$$\|u\| < \delta\sqrt{V} + atc\delta + \delta\sqrt{V} \int_0^t (t - \tau) d\tau \leq \left( \sqrt{V} + aTc + \sqrt{V} \frac{T^2}{2} \right) \delta = c_1\delta,$$

де  $c_1 = \left( 1 + 0,5T^2 \right) \sqrt{V} + aTc$ .

Поклавши  $\delta = \frac{\varepsilon}{c_1}$ , маємо  $|u(t, x, y, z)| = |u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon$ .

Теорему доведено.

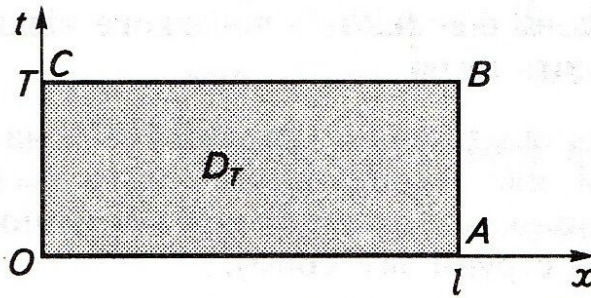


Рис. 2.38:

У випадку мішаної задачі для рівняння коливання струни завдовжки  $l$ , область  $D$  матиме вигляд, як на рис. 2.38.

▲ **Вправа.** Довести неперервну залежність розв'язку мішаних задач від вихідних даних для рівняння коливання струни.

### Задачі для самостійного розв'язування

1. Однорідну струну, кінці якої закріплені в точках  $x = 0$  і  $x = l$ , відтягнуто в початковий момент часу в точці  $x = c$  на величину  $h$  і відпущено без початкової швидкості. Визначити зміщення  $u(t, x)$  довільної точки струни й дати фізичну інтерпретацію добутого результату.
2. Знайти закон коливання однорідної струни, початкову форму зміщення якої зображено на рис 2.39, а початкова швидкість всіх її точок рівна нулю. Дати фізичну інтерпретацію добутого результату.

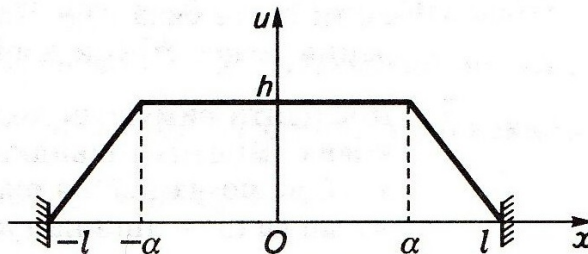


Рис. 2.39:

3. Дослідити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях  $x = 0$  і  $x = l$ , якщо в початковому положенні вона перебуває в спокої і її точкам на проміжку  $(\alpha, \gamma)$  надано сталу початкову швидкість  $V_0$ .
4. Знайти закон коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях  $x = -l$ ,  $x = l$ , якщо в початковий момент часу вона мала форму параболи, симетричної відносно свого центра, причому максимальне початкове зміщення становить  $h$ , а початкова швидкість дорівнює нулю.
5. Дослідити вимушені поперечні коливання однорідної струни, закріпленої на кінці  $x = 0$ , яка зазнає на кінці  $x = l$  дії збурювальної гармонічної сили, що спричиняє зміщення  $A \sin \omega t$ . Початкова швидкість та початкове відхилення точок струни дорівнюють нулю.

6. Дослідити вимушені коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях  $x = 0$ ,  $x = l$ , на яку в момент часу  $t = 0$  починає діяти стала сила  $-pg$ . Початкова швидкість і початкове відхилення точок струни дорівнюють нулю.
7. Дослідити вимушені коливання однорідної струни без початкових зміщень і швидкостей, яка закріплена на кінцях  $x = 0$ ,  $x = l$ , якщо на неї діє рівномірно розподілена сила з густиною  $A\rho\sin\omega t$  ( $\rho$  — лінійна густина струни,  $\omega = \text{const}$ ).
8. Знайти закон вільних коливань однорідної струни завдовжки  $l$ , якщо в початковий момент їй було надано форму кривої  $\varphi(x) = \frac{l}{100}\sin\frac{\pi x}{2l}$ , а потім — відпущено без початкової швидкості. Струну закріплено в лівому кінці  $x = 0$ , а правий  $x = l$  — вільний.
9. Кінці однорідної струни завдовжки  $l$  утримуються за допомогою пружних сил на прямих, паралельних осі  $Ou$ . Дослідити вільні поперечні коливання струни, якщо початкове відхилення її точок становить  $\frac{x^2(x-t)^2}{4}$ , а їхня початкова швидкість дорівнює нулю.
10. Дослідити поздовжні коливання однорідного циліндричного стержня завдовжки  $l$ , один кінець якого нерухомо закріплений, а до другого — прикладена сила  $F = A\sin\omega t$ ,  $\omega = \text{const}$ , напрям якої збігається з віссю стержня.
11. Однорідна квадратна мембрана, яка в початковий момент часу  $t = 0$  має форму  $Axy(b-x)(b-y)$ ,  $A = \text{const}$ , почала коліватися без початкової швидкості. Дослідити вільні коливання мембрани, закріпленої по контуру ( $b$  — сторона мембрани).
12. Визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , закріпленої по контуру, які спричинені початковою швидкістю  $u_t(x, y, 0) = Axy(a-x)(b-y)$ . Опором навколишнього середовища знехтувати.
13. Визначити поперечні коливання прямокутної мембрани  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  із закріпленням краєм, які спричинені неперервно розподіленою по мембрані й перпендикулярною до її поверхні силою з густиною

$$F(x, y, t) = \rho(x, y)\sin\omega t, 0 < t < +\infty, \omega = \text{const}.$$

14. Знайти закон вільних коливань однорідної прямокутної мембрани  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ , якщо краї  $x = 0$  і  $x = a$  нерухомо закріплені, а  $u(x, 0, t) = u(x, b, t) = h\sin\frac{\pi x}{a}$ . У початковий момент часу мембрана мала форму  $u(x, y, 0) = h\sin\frac{\pi x}{a}$ , а швидкість усіх точок була рівна  $V_0\sin\frac{\pi x}{a}$  ( $h, V_0 = \text{const}$ ).
15. Дати фізичну інтерпретацію та знайти розв'язок мішаних задач:

$$\begin{aligned} \text{а) } & u_{tt} = u_{xx} - u + 2tx, t > 0, x \in (0, l), \\ & u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, x \in (0, l), \\ & u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, t \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} - u + \sin x, t > 0, x \in (0, l), \\ & u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, x \in [0, l], \\ & u_x(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, t \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } & u_{tt} = a^2u_{xx}, t > 0, x \in [0, 4], \\ & u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x, x \in [0, 4], \\ & u(0, t) = 0, u_x(4, t) - hu(4, t) = 0, t \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma) \quad & u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, x \in (0, l), \\ & u(x, 0) = Q/E, u_t(x, 0) = 0, x \in [0, l], \\ & u_x(0, t) = 0, u(l, t) = \frac{Q}{E}, t \geq 0, (Q, E = \text{const}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta) \quad & u_{tt} = u_{xx} - \frac{\pi}{3} u_t, x \in (0, 3), t > 0, \\ & u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 2, x \in [0, 3], u_x(0, t) = 0, u(3, t) = 2t, t \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & u_{tt} = u_{xx} - \frac{4x+1}{(x+1)^2} u_t, t > 0, x \in (0, 2), \\ & u(x, 0) = x(x-2), u_t(x, 0) = 0, x \in [0, 2], \\ & u(0, t) = 0, u(2, t) = 0, t \geq 0 \\ & (\text{ввести заміну: } u(x, t) = \frac{1}{(x+1)^2} z(x, t)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & u_{tt} = u_{xx} + \pi n \left( th \frac{\pi n}{2} x \right) u_x + \left( ch \frac{\pi n}{2} x \right)^{-1}, t > 0, x \in (0, 2), \\ & u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, x \in [0, 2], \\ & u_x(0, t) = 0, u(2, t) = 0 \\ & (\text{ввести заміну: } u(x, t) = \left( ch \frac{\pi n}{2} x \right)^{-1} z(x, t)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ж)} \quad & u_{tt} = \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{yy}), t > 0, x \in (0, 1), y \in (0, 2), \\ & u(x, y, 0) = 0, u_t(x, y, 0) = x(2-y), x \in [0, 1], y \in [0, 2], \\ & u(0, y, t) = 0, u_x(1, y, t) = 0, y \in [0, 2], t \geq 0, \\ & u_y(x, 0, t) = 0, u(x, 2, t) = 0, x \in [0, 1], t \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{з)} \quad & u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 2tx, t > 0, x \in [0, 1], y \in [0, 1], \\ & u_x(0, y, t) = u_x(1, y, t) = 0, y \in [0, 1], t \geq 0, \\ & u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, x \in [0, 1], t \geq 0. \end{aligned}$$

## РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Нехай  $u = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Згідно з означенням канонічна форма лінійного рівняння параболічного типу має вигляд

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + c_0 u_t + \sum_{i=1}^n c_i u_{x_i} + \alpha u = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

де коефіцієнти  $c_0, c_i, \alpha, i = \overline{1, n}$  — функції незалежних змінних  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Покажемо, що рівняння вигляду (3.1) описують процеси теплопровідності та дифузії.

## Тема 1

ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО  
РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

У тривимірному просторі розглянемо тверде ізотропне тіло  $G$ , температура якого в точці  $(x, y, z)$  у момент часу  $t$  визначається функцією  $u(t, x, y, z)$ . Якщо температура тіла не постійна, то в ньому виникають теплові потоки від більш нагрітих частин до менш нагрітих.

Дослідимо задачу розподілу тепла в тілі  $G$ . Виділимо в ньому довільний об'єм  $V$ , обмежений гладкою поверхнею  $S$ , і розглянемо зміну кількості теплоти в цьому об'ємі за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ .

Згідно з законом Фур'є кількість теплоти  $q_1$ , яка пройде через поверхню  $S$  у напрямі зовнішньої до неї нормалі  $\vec{n}$  інтервал часу  $(t_1, t_2)$ , становить

$$q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint_S K(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \right] dt, \quad (3.2)$$

де  $K(x, y, z) > 0$  — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності тіла в точці  $(x, y, z)$ , і внаслідок ізотропності тіла він не залежить від напрямку нормалі  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  в розглядуваній точці  $(x, y, z)$ .

Позначимо через  $F(t, x, y, z)$  інтенсивність внутрішніх джерел теплоти, тобто кількість теплоти, яка виділяється або поглинається одиницею об'єму тіла за одиницю часу внаслідок дії теплових джерел. Тоді кількість теплоти  $q_2$ , яка виділяється або поглинається в об'ємі  $V$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ , становитиме

$$q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V F(t, x, y, z) dx dy dz \right] dt. \quad (3.3)$$

Отже, загальна кількість теплоти  $q_3$ , яку дістане об'єм  $V$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ , визначається рівністю

$$q_3 = q_2 - q_1. \quad (3.4)$$

(1.3) Цю саму кількість теплоти можна визначити через зміну температури в об'ємі  $V$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ :

$$q_3 = \iiint_V (x, y, z) \rho(x, y, z) \times \\ \times [u(t_2, x, y, z) - u(t_1, x, y, z)] dx dy dz, \quad (3.5)$$

де  $\rho(x, y, z)$  — густина;  $C(x, y, z)$  — теплоємність тіла в точці  $(x, y, z)$ .

Підставляючи (3.2), (3.3), (3.4) у рівняння теплового балансу (3.4), дістаємо

$$\iiint_V C \rho [u(t_2, x, y, z) - u(t_1, x, y, z)] dx dy dz = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V F(t, x, y, z) dx dy dz + \iint_S K(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \right] dt.$$

Надалі вважатимемо, що  $u \in C^{(1,2,2,2)}((0, +\infty) \times G)$ ,  $F \in C((0, +\infty) \times G)$ ,  $K \in C^{(1,1,1)}(G)$ ,  $C, \rho \in C(G)$ . Тоді останню рівність можна подати у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V \left( C \rho \frac{\partial u}{\partial t} - F(t, x, y, z) \right) dx dy dz \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint_S K \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \right] dt.$$

Застосувавши до поверхневого інтеграла в правій частині формулу Гауса–Остроградського, маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V \left\{ C \rho \frac{\partial u}{\partial t} - F(t, x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz \right] dt = 0.$$

Унаслідок довільності інтервалу часу  $(t_1, t_2)$  і об'єму  $V$  остання рівність можлива тільки тоді, коли підінтегральний вираз дорівнює нулю, тобто

$$C \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(t, x, y, z). \quad (3.6)$$

Рівняння (3.6) називається *рівнянням теплопровідності неоднорідного ізотропного тіла*.

Якщо тіло однорідне, то  $C$ ,  $\rho$  і  $K$  є сталими й рівняння (3.6) запишеться у вигляді

$$u_t(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z), \quad (3.7)$$

де  $a^2 = \frac{K}{C\rho}$ ;  $f = \frac{F}{\rho}$ ;  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Якщо досліджується процес розподілу температури в дуже тонкій однорідній пластинці з теплоізолюваною поверхнею, то  $u = u(t, x, y)$ , і рівняння (3.7) матиме вигляд

$$u_t(t, x, y) = a^2 \Delta u(t, x, y) + f(t, x, y). \quad (3.8)$$

У випадку поширення теплоти в тілі лінійного розміру, наприклад, в однорідному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею,  $u = u(t, x)$ , і рівняння (3.7) набере вигляду

$$u_t(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x). \quad (3.9)$$

Якщо через бічну поверхню стержня відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого дорівнює  $u_0(t, x)$ , то згідно із законом Ньютона кількість теплоти, яка пройде крізь бічну поверхню стержня, пропорційна різниці температур, а отже, в цьому випадку рівняння теплопровідності матиме вигляд

$$u_t(t, x) = a^2 \Delta u_{xx}(t, x) - bu(t, x) + f_1(t, x). \quad (3.10)$$

де

$$b = \frac{K_1 \sigma}{C \rho \bar{\omega}}; f_1(t, x) = f(t, x) + bu_0(t, x);$$

$K_1$  — коефіцієнт зовнішньої теплопровідності;  $\sigma$ ,  $\bar{\omega}$  — відповідно периметр і площа поперечного перерізу стержня.

### 3.1 Рівняння дифузії

Припустимо, що деякий просторовий об'єм  $G$  нерівномірно заповнений газом або концентрація розчиненої речовини в  $G$  не стала. В цьому разі буде відбуватися дифузія частинок газу або рідини з місць більшої концентрації в місця меншої, причому під концентрацією в момент часу  $t$  розуміємо функцію

$$u(t, x, y, z) = \frac{dQ}{d\tau},$$

де  $dQ$  — кількість речовини або газу в елементі об'єму  $d\tau$ , який заповнений розчином або газом.

Нехай

$$u(t, x, y, z) \in C^{(1,2,2,2)}((0, +\infty) \times G);$$

$d(x, y, z) > 0$  — коефіцієнт дифузії,  $d \in C^{(1,1,1)}(G)$ ;  $c(x, y, z) > 0$  — коефіцієнт пористості середовища, який дорівнює відношенню об'єму пор до повного об'єму розглядуваної області,

$$c(x, y, z) \in C(G), G_1 = (0, +\infty) \times G;$$

$F(t, x, y, z)$  — інтенсивність джерел речовини або газу,  $F \in C(G_1)$ .

Щоб вивести рівняння дифузії, виділимо в  $G$  довільний об'єм  $V$  із досить гладкою поверхнею  $S$  і обчислимо баланс речовини або газу в цьому об'ємі за довільний інтервал часу  $(t_1, t_2)$ .

Згідно з експериментальним законом Вальтера Нернста кількість речовини або газу, яка дифундує в  $V$  крізь елемент поверхні  $ds$  у напрямі нормалі  $\vec{n}$  за одиницю часу становить

$$dq_1 = -d(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds,$$

де  $d(x, y, z)$  — коефіцієнт дифузії.

Таким чином, кількість речовини або газу, що надходить в об'єм  $V$  крізь поверхню  $S$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ ,

$$q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint S d \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( d \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( d \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( d \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz \right] dt.$$

Від джерел (наприклад, якщо відбувається хімічна реакція з виділенням речовини) в об'єм  $V$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$  надійде кількість речовини або газу

$$q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V F(t, x, y, z) dx dy dz \right] dt.$$

Унаслідок приросту, який дістає функція  $u(t, x, y, z)$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ ,

$$u(t_2, x, y, z) - u(t_1, x, y, z) \approx u_t(t, x, y, z)(t_2 - t_1),$$

загальна кількість речовини або газу, яка йде на зміну концентрації в об'ємі  $V$  за інтервал часу  $(t_1, t_2)$ , становитиме

$$q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V u_t(t, x, y, z) dx dy dz \right] dt.$$



Отже,

$$q_1 + q_2 - q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ \iiint_V \frac{\partial}{\partial x} \left( d \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( d \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + F(t, x, y, z) - c \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dy dz \right\} dt = 0.$$

Унаслідок довільності об'єму  $V$  та інтервалу часу  $(t_1, t_2)$  з останньої рівності маємо

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( d \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( d \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} + F(t, x, y, z). \quad (3.11)$$

Рівняння (3.11) є *рівнянням дифузії в неоднорідному середовищі*. Якщо середовище однорідне, то  $d$  і  $c$  сталі, й рівняння (3.11) запишеться у вигляді

$$u_t(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z), \quad (3.12)$$

де  $a^2 = d/c$ ;  $f = F/c$ .

У процесі дифузії деяких газів (наприклад, еманції радію — виділення в навколишнє середовище радіоактивного газу радону) відбувається реакція розпаду молекул цих газів. Швидкість реакції розпаду зазвичай вважається пропорційною концентрації газу, й тому рівняння дифузії (3.12) у цьому разі матиме вигляд

$$u_t = a^2 \Delta u - \frac{\beta}{c} u + f(t, x, y, z), \quad (3.13)$$

де  $\beta > 0$  — коефіцієнт пропорційності.

Якщо вивчається процес дифузії, який супроводжується "ланцюговими" реакціями (частинки рідини або газу, що дифундує, вступають у реакцію з навколишнім середовищем і розмножуються), то в дифузійному наближенні (швидкість реакції пропорційна концентрації) цей процес описується також рівнянням (3.13), але  $\beta < 0$ .

Зазначимо, що рівняння (3.13) заміною

$$v(t, x, y, z) = u(t, x, y, z) e^{\frac{\beta}{c} t}$$

зводиться до (3.12).

Очевидно, що й рівняння теплопровідності, й рівняння дифузії належать до параболічного типу.

◇ **Зауваження 3.1.** Математично описуючи процес поперечних коливань стержня, на який діють рівномірно розподілене вздовж нього зовнішнє навантаження  $f(t, x)$  і повздовжня (напрявлена по осі) стискальна або розтягальна сила інтенсивністю  $P(t, x)$ , приходять до рівняння вигляду

$$\mu(x) u_{tt}(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E J u_{xx}(t, x)) - \frac{\partial}{\partial x} (P(t, x) u_x(t, x)) = f(t, x), \quad (3.14)$$

де  $u(t, x)$  — відхилення точок стержня  $x$  від їхнього прямолінійного положення в момент часу  $t$ ;  $\mu(x)$  — маса одиниці довжини стержня ( $\text{кг} \cdot \text{см}^2$ );  $EJ$  — жорсткість на прогин ( $E$  — модуль пружності, Па,  $J$  — момент інерції площі поперечного перерізу стержня відносно нейтральної осі перерізу, перпендикулярної до площини коливань,  $\text{см}^2$ ).

Рівняння (3.14) виведено за таких УМОВ.

- Пружна вісь (геометричне місце точок, прикладання зовнішніх сил до яких спричиняє прогин стержня без кручення) стержня прямолінійна й збігається з лінією центрів ваги поперечних перетинів стержня. Ця прямолінійна вісь береться за координатну вісь  $Ox$ , і від неї відлічуються відхилення елементів стержня за поперечних коливань, причому зміщення окремих точок осі стержня відбуваються перпендикулярно до прямолінійного недеформованого її напрямку (зміщеннями цих точок, паралельними осі, нехтують).
- Зміщення точок осі стержня за поперечних коливань відбуваються в одній площині й є малими відхиленнями.
- Довжина стержня значно перевищує решту його розмірів.

Якщо стержень однорідний зі сталою жорсткістю  $EJ$  і масою  $\mu$ , а  $P(t, x) = \text{const}$ , то рівняння (3.14) запишеться у вигляді

$$u_{tt}(t, x) + c^2 u_{xxxx}(t, x) - p u_{xx}(t, x) = F(t, x), \quad (3.15)$$

де  $c^2 = EJ/\mu$ ;  $p = P/\mu$ ;  $F(t, x) = f(t, x)/\mu$ .

Рівняння (3.15) є рівнянням четвертого порядку параболічного типу.

### 3.2 Принцип максимуму для розв'язків однорідного рівняння теплопровідності

У площині  $t = 0$  розглянемо скінченну область  $D$ , обмежену кривою  $L$  (рис. 3.1).

Побудуємо циліндричну поверхню з напрямною  $L$  і твірною, паралельною осі  $Ot$ . Частину циліндричної поверхні між площинами  $t = 0$  і  $t = T$  ( $T$  — додатна стала) позначимо через  $B_T$ , а проекцію області  $D$  на площину  $t = T$  — через  $D_T$ . Область з межею  $S = D \cup B_T \cup D_T$  позначимо через  $V_T$ , а  $\bar{V}_T = V_T \cup S$ .

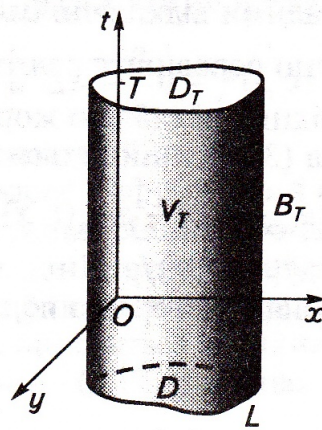


Рис. 3.1:

**Теорема 3.1.** Нехай функція  $u(t, x, y)$  належить перерізу

$$C(\bar{V}_T) \cap C^{(1,2,2)}V_T \cup D_T$$

і задовольняє в  $V_T$  однорідне рівняння теплопровідності

$$u_t(t, x, y) = a^2(u_{xx}(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y)). \quad (3.16)$$

Тоді функція  $u(t, x, y)$  своє найбільше та найменше значення в області  $\bar{V}_T$  набуває на  $D \cup B_T$ .

**Доведення.** Зауважимо, що функція  $u(t, x, y) \equiv \text{const}$  задовольняє всі умови теореми, а її значення всюди в області  $\bar{V}_T$  є однаковим. Але це не суперечить твердженню теореми, оскільки найбільше та найменше значення функції  $u(t, x, y) \equiv \text{const}$  в області  $V_T \cup D_T$  не більше й не менше за значення цієї функції на  $D \cup B_T$  (вони збігаються).

Теорему достатньо достатньо для випадку найбільшого значення. Справді, якщо функція  $u(t, x, y)$  в деякій точці розглядуваної області досягає найбільшого значення, то в цій точці функція  $-u(t, x, y)$  досягає найменшого значення, а остання задовольняє всі умови сформульованої теореми.

Доведення теореми від супротивного.

Нехай

$$M = \max_{(t,x,y) \in \bar{V}_T} u(t, x, y), \quad m = \max_{(t,x,y) \in D \cup B_T} u(t, x, y).$$

Очевидно, що  $m \leq M$ . Згідно з твердженням теореми  $m = M$ . Припустимо, що  $m < M$ . Тоді неперервна в  $\bar{V}_T$  функція  $u(t, x, y)$  досягає свого найбільшого значення в деякій точці  $(t_0, x_0, y_0) \in V_T \cup D_T$ :

$$u(t_0, x_0, y_0) = M.$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$v(t, x, y) = u(t, x, y) + \frac{M - m}{2T}(t_0 - t). \quad (3.17)$$

Якщо точка  $(t, x, y) \in D \cup B_T$ , то  $t_0 - t \leq t_0 \leq T$ , а отже,

$$v(t, x, y) \Big|_{(t,x,y) \in D \cup B_T} \leq m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M.$$

З іншого боку,  $v(t_0, x_0, y_0) = u(t_0, x_0, y_0) = M$ . Тому, в  $V_T \cup D_T$  існує точка, де  $v = M$ , а на  $D \cup B_T$   $v < M$ . Звідси випливає, що свого найбільшого значення функція  $v(t, x, y)$  досягає або в  $V_T$ , або на  $D_T$ .

Позначимо через  $(t_1, x_1, y_1)$  точку, в якій функція  $v(t, x, y)$  набуває свого найбільшого значення, й припустимо спочатку, що  $(t_1, x_1, y_1) \in V_T$ . Тоді в цій точці мають виконуватися необхідні умови максимуму

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0.$$

Отже,

$$[v_t - a^2(v_{xx} + v_{yy})] \Big|_{(t_1, x_1, y_1)} \geq 0.$$

З іншого боку, для всяких  $(t, x, y) \in V_T$

$$v_t - a^2(v_{xx} + v_{yy}) = \underbrace{u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy})}_{\equiv 0} - \frac{M - m}{2T} < 0,$$

і ми прийшли до суперечності.

Нехай тепер точка  $(t_1, x_1, y_1) \in D_T$ . Це означає, що  $t_1 = T$ , а  $(x_1, y_1) \in D$ , тобто  $t_1$  є граничною точкою проміжку  $(0, T)$ , а  $(x_1, y_1)$  — внутрішньою точкою області  $D$ . У цьому випадкові умови, за яких функція  $v(t, x, y)$  досягне найбільшого значення в точці  $(t_1, x_1, y_1)$ , матимуть вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0.$$

Отже,

$$[v_t - a^2(v_{xx} + v_{yy})] \Big|_{(t_1, x_1, y_1)} \geq 0,$$

а вираз у квадратних дужках менший за нуль для всіх  $(t, x, y) \in D_T$ , і ми знову прийшли до суперечності. Таким чином, найбільше значення функція набуває тільки в точках області  $D \cup B_T$ .

Із доведення принципу максимуму для рівняння теплопровідності випливає справедливості наступної теореми.

**Теорема 3.2.** Нехай функція  $u(t, x, y)$  належить перерізу

$$C(\bar{V}_T) \cap C^{(1,2,2)}(V_T \cup D_T).$$

Якщо  $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) \leq 0$  всюди в  $V_T$ , то функція  $u(t, x, y)$  досягає свого найбільшого значення на  $D \cup B_T$ . Якщо ж  $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) \geq 0$  всюди в  $V_T$ , то на  $D \cup B_T$  функція  $u(t, x, y)$  досягає найменшого значення.

► **Наслідок.** Якщо два розв'язки однорідного рівняння теплопровідності  $u_1(t, x, y)$ ,  $u_2(t, x, y)$  задовольняють умову

$$v(t, x, y) \equiv u_1(t, x, y) - u_2(t, x, y) \leq 0 \quad \text{при } (t, x, y) \in D \cup B_T$$

і належать класу  $C(\bar{V}_T) \cap C^{(1,2,2)}(V_T \cup D_T)$ , то  $v(t, x, y) \leq 0$  для всіх  $(t, x, y) \in \bar{V}_T$ .

Зауважимо, що аналогічно доводиться справедливність принципу максимуму й у випадку багатовимірного простору.

Фізичний зміст теореми про найбільше значення розв'язку однорідного рівняння теплопровідності очевидний: якщо температура на межі тіла й у початковий момент часу  $t = 0$  не перевищує деякого значення  $m$ , то за відсутності внутрішніх джерел теплоти температура всередині тіла не може бути більшою за  $m$ .

Саме рівняння (3.7) не описує однозначно процесів поширення теплоти або дифузії. Тому для однозначного математичного описання того чи іншого фізичного процесу потрібно до рівняння (3.7) потрібно приєднати деякі додаткові умови. Як і в разі рівнянь гіперболічного типу, розглянемо два основних випадки, а саме: випадок обмежених і необмежених областей.

## Тема 2

### ПРОЦЕСИ ДИФУЗІЇ ТА ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОТИ В ОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

#### 3.3 Постановка мішаних задач

У тривимірному просторі  $(x, y, z)$  розглянемо однорідне тіло  $V$  з початковою температурою  $\varphi(x, y, z)$ , в якому є внутрішні джерела тепла інтенсивністю  $F(t, x, y, z)$ .

Нехай потрібно визначити температуру  $u(t, x, y, z)$  тіла  $V$  у довільний момент часу  $t > 0$ , якщо на його досить гладкій поверхні  $S$ :

- 1) задана температура  $\psi(t, x, y, z)$ ;
- 2) заданий тепловий потік  $\omega(t, x, y, z)$ ;

3) проходить теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого  $\mu(t, x, y, z)$ .

Для розв'язання поставленої фізичної задачі складемо відповідну математичну модель.

Як було показано в п. 3.1 (див. рівняння (3.7)), шукана температура  $u(t, x, y, z)$  при  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in V$  має бути розв'язком диференціального рівняння

$$u_t(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z). \quad (3.18)$$

Згідно з умовою задачі в початковий момент часу

$$u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V \cup S = \bar{V}. \quad (3.19)$$

З умов на поверхні  $S$  тіла  $V$  маємо:

1.

$$u \Big|_{(x,y,z) \in S} = \psi(t, x, y, z), \quad t \geq 0, (x, y, z) \in S; \quad (3.20)$$

2. на підставі закону Фур'є

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{(x,y,z) \in S} = -K^{-1} \omega(t, x, y, z), \quad t \geq 0, (x, y, z) \in S, \quad (3.21)$$

де  $K$  — коефіцієнт теплопровідності ;  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до  $S$ ;

3. за законом Ньютона

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{(x,y,z) \in S} = -\lambda [u(t, x, y, z) - \mu(t, x, y, z)] \Big|_{(x,y,z) \in S}, \quad (3.22)$$

де  $\lambda$  — коефіцієнт теплообміну.

Таким чином, залежно від теплового режиму на поверхні тіла  $V$  приходимо до однієї із задач:

1. В класі функцій

$$C([0, +\infty) \times \bar{V} \equiv \bar{\Omega}) \cap C^{(1,2,2,2)}((0, +\infty) \times V \equiv \Omega)$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (3.18), який задовольняє початкову (3.19) і крайову (3.20) умови.

2. У класі функцій

$$C^{(0,1,1,1)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(1,2,2,2)}(\Omega)$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (3.18), який задовольняє початкову (3.19) і крайову (3.21) умови.

3. У класі функцій

$$C^{(0,1,1,1)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(1,2,2,2)}(\Omega)$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (3.18), який задовольняє початкову (3.19) і крайову (3.22) умови.

Задачі 1)–3) називаються відповідно *першою, другою і третьою основними мішаними задачами для рівнянь параболічного типу*. Зазначимо: ставлячи всі мішані задач, вважають, що початкова й крайові умови не суперечливі, тобто вони задовольняють умову узгодженості. У випадку першої мішаної задачі умова узгодженості має вигляд

$$\varphi(x, y, z) \Big|_{(x,y,z) \in S} = \psi(0, x, y, z). \quad (3.23)$$

До сформульованих задач приходять, досліджуючи також процеси дифузії в об'ємі  $V$ , тільки в цьому разі функція  $u(t, x, y, z)$  є концентрацією розчину або газу в точці  $(x, y, z) \in V$  в момент часу  $t$ .

Аналогічно ставляться мішані задачі й у випадках дво- і одновимірних середовищ.

Зауважимо, що на практиці коло мішаних задач значно ширше.

Наприклад, нехай  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , і потрібно знайти розв'язок рівняння (3.18), який задовольняє початкову умову (3.19), а на поверхні  $S$

$$\begin{aligned} u \Big|_{(x,y,z) \in S_1} &= \psi(t, x, y, z), & \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{(x,y,z) \in S_2} &= \omega(t, x, y, z), \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{(x,y,z) \in S_3} &= -\lambda [u(t, x, y, z) - \mu(t, x, y, z)] \Big|_{(x,y,z) \in S_3}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Можливі й складніші, ніж розглянуті вище, крайові умови на поверхні  $S$ . Але надалі розглядатимемо тільки першу, другу й третю мішані задачі.

### 3.4 Єдиність розв'язку мішаних задач і його неперервна залежність від початкової та крайових умов

**Теорема 3.3.** У класі функцій  $C(\bar{\Omega}) \cap C^{(1,2,2,2)}(\Omega)$  розв'язок першої мішаної задачі (3.18)–(3.20) єдиний і неперервно залежить від початкової та крайових умов.

**Доведення.** Доведемо спочатку єдиність розв'язку першої мішаної задачі. Для цього припустимо, що існують два розв'язки:  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$ .

Тоді функція  $u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)$  буде розв'язком однорідного рівняння теплопровідності з однорідними початковою та крайовими умовами.

Оскільки  $u(0, x, y, z) = u \Big|_{(x,y,z) \in S} = 0$ , то внаслідок принципу максимуму  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  в області  $\Omega$ , і єдиність доведено.

Для доведення неперервної залежності розв'язку від початкової та крайових умов припустимо, що  $u_1(t, x, y, z) \mu u_2(t, x, y, z)$  задовольняють одне й те саме рівняння (3.18), а

$$|u_1(0, x, y, z) - u_2(0, x, y, z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad (x, y, z) \in \bar{V},$$

$$|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq 0, (x, y, z) \in S.$$

Функції  $u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)$  і  $v(t, x, y, z) = \pm\varepsilon \in$  розв'язками однорідного рівняння теплопровідності, а  $-\varepsilon < u(0, x, y, z) < \varepsilon$  і  $-\varepsilon < u(t, x, y, z) < \varepsilon$  при  $t \geq 0, (x, y, z) \in S$ .

Тоді на підставі наслідку принципу максимуму дістаємо, що

$$|u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)| < \varepsilon \forall (t, x, y, z) \in \Omega.$$

Теорему доведено.

**Теорема 3.4.** У класі функцій  $C^{(0,1,1,1)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(1,2,2,2)}(\Omega)$  розв'язки другої та третьої основних мішаних задач єдині.

**Доведення.** Нехай мішані задачі (3.18), (3.19), (3.21) і (3.18), (3.19), (3.22) мають два розв'язки. Позначимо через  $u(t, x, y, z)$  їх різницю. Тоді, очевидно, функція  $u(t, x, y, z)$  буде розв'язком однорідного рівняння теплопровідності й задовольнятиме однорідні початкову та крайові умови

$$u(0, x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \bar{V}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{(x,y,z) \in S} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \lambda u \right] \Big|_{(x,y,z) \in S} = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.26)$$

Розглянемо інтеграл

$$I = 0,5 \iiint_V u^2(t, x, y, z) dx dy dz \geq 0. \quad (3.27)$$

Маємо

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \iiint_V u \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz = a^2 \iiint_V u \Delta u dx dy dz.$$

Згідно з формулою Гауса–Остроградського

$$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_V u \Delta u dx dy dz + \iiint_V [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz.$$

Тоді

$$\frac{\partial I}{\partial t} = a^2 \iint_S u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS - a^2 \iiint_V [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz.$$



Унаслідок умов (3.26) перший інтеграл дорівнює нулю у випадку другої мішаної задачі й недодатний у випадку третьої мішаної задачі.

Таким чином,  $\frac{\partial I}{\partial t} \leq 0$ . Але з початкової умови (3.25) маємо  $I|_{t=0} = 0$ . Отже,  $I$  як функція часу  $t$  є невід'ємною, в розглядуваній області не зростає ( $\frac{\partial I}{\partial t} \leq 0$ ) і дорівнює нулю при  $t = 0$ . Але тоді  $I \equiv 0$  і із (3.27) дістаємо, що  $u(t, x, y, z) \equiv 0$  в області  $\Omega$ .

Теорему доведено.

◇ **Вправа.** За аналогією довести теорему єдиності розв'язку мішаних задач для рівнянь параболічного типу у випадку двовимірного простору.

### 3.5 Інтегрування першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності у випадку одновимірного простору. Метод Фурьє

Розв'яжемо таку фізичну задачу: дослідити процес розподілу теплоти в однорідному стержні завдовжки  $l$  із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура рівна  $\varphi(x)$ , а на кінцях підтримується нульова температура.

Згідно з міркуваннями, наведеними в п. 3.4, потрібно в області  $\Omega = (0, +\infty) \times (0, l)$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (3.28)$$

який задовольняє початкову умову

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, l] \quad (3.29)$$

і крайові

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.30)$$

Вважаємо, що функція  $\varphi(x)$  задовольняє умови узгодженості

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0. \quad (3.31)$$

Як було показано в п. 3.5, мішана задача (3.28) – (3.30) в просторі функцій  $C(\overline{\Omega}) \cap C^{(1,2)}(\Omega)$  може мати лише єдиний розв'язок, і шукатимемо його у вигляді

$$u(t, x) = T(t)X(x) \neq 0. \quad (3.32)$$

Підставивши (3.32) у рівняння (3.28) і крайові умови (3.30) та відокремивши змінні, дістанемо

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (3.33)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.34)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (3.35)$$

де  $\lambda$  — довільна стала.

Задачау Штурма–Ліувіля (3.34), (3.35) досліджено в гл. 2 (див. задачу (2.170), (2.171)) і, як показано, власними значеннями є  $\lambda_n = (\pi n/l)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а відповідні власні функції мають вигляд

$$X_n(x) = c_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad c_n = \text{const}. \quad (3.36)$$

Підставивши власні значення в рівняння (3.33) та зінтегрувавши його, дістанемо

$$T_n(t) = b_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \quad b_n = \text{const}. \quad (3.37)$$

Підставляючи (3.36) і (3.37) у (3.32), знаходимо

$$u_n(t, x) = a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $a_n$  — довільні сталі.

Отже, дістали нескінченну систему частинних розв'язків рівняння (3.28), які задовольняють крайові умови (3.30).

Згідно з доведеною в розд. 2 лемою 2.1 ряд

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (3.38)$$

також буде розв'язком рівняння (3.28), якщо він збігається і його можна по-членно диференціювати один раз за  $t$  і двічі за  $x$ , причому цей ряд задовольняє і крайові умови (3.30).

Припустимо, що умови (3.30) виконуються. Тоді для відшукування єдиного розв'язку мішаної задачі (3.28)–(3.30) залишилося вибрати коефіцієнти  $a_n$  таким чином, щоб ряд (3.38) задовольняв і початкову умову, тобто щоб

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x). \quad (3.39)$$

Нехай функція  $\varphi(x) \in C_1([0, l])$ , де  $C_1([0, l])$  — клас неперервних функцій, які мають кусково-неперервну похідну при  $x \in [0, l]$  і задовольняють умови узгодженості (3.31). Тоді на відріжку  $[0, l]$  функція  $\varphi(x)$  розкладається в ряд Фур'є за системою власних функцій  $\sin \frac{\pi n}{l} x$ , і з рівності (3.39) маємо

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (3.40)$$

Підставивши знайдені коефіцієнти (3.40) в ряд (3.38), дістанемо формальний розв'язок мішаної задачі (3.28)–(3.30).

Для обґрунтування добутого результату доведемо таке твердження.

**Твердження 3.1.** *Якщо функція  $\varphi(x) \in C_1([0, l])$ , то ряд (3.38), де коефіцієнти  $a_n$  визначаються за формулою (3.40), в області  $\Omega$  можна почленно диференціювати довільну кількість разів як за  $x$ , так і за  $t$ , причому він визначає неперервну функцію в  $\bar{\Omega}$ .*

**Доведення.** За умовою твердження при  $t > 0$  маємо

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{k+s} u_n(t, x)}{\partial t^k \partial x^s} \right| = \\ & = \left| \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi (-1)^k \left( \frac{\pi}{l} \right)^{2k+s} \sin \left( \frac{\pi n}{l} x + \frac{s\pi}{2} \right) \right| a^{2k} n^{2k+s} \times \\ & \times \exp \left[ - \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \leq 2M \left( \frac{\pi n}{l} \right)^{2k+s} a^{2k} \exp \left[ - \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \equiv A_n, \end{aligned} \quad (3.41)$$

де  $M \geq |\varphi(x)|$  при  $x \in [0, l]$ .

Оскільки

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^{2k+s} \exp \left[ - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 (n^2 + 2n + 1)t \right]}{n^{2k+s} \exp \left[ - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 n^2 t \right]} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{2k+s} \exp \left[ - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 (2n + 1)t \right] = 0, \end{aligned}$$

то згідно з ознакою Д'Аламбера ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  збігається, а отже, на підставі (3.41) ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{k+s} u_n(t, x)}{\partial t^k \partial x^s}, \quad k, s = 0, 1, 2, \dots$$

збігаються рівномірно при  $t > 0$ .

При  $t = 0$  справедлива оцінка

$$|u_n(t, x)| \leq |a_n|, \quad (t, x) \in \bar{\Omega}.$$

Але, якщо  $\varphi(x) \in C_1([0, l])$ , то із теорії рядів Фур'є відомо, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  збігається, а отже, ряд (3.38) в області  $\bar{\Omega}$  збігається рівномірно, й твердження доведено.

Підставивши (3.40) у (3.38), дістанемо

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left\{ \frac{2}{l} \exp \left[ - \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Оскільки ряд

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \exp \left[ - \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \quad (3.42)$$

при  $t > 0$  збігається рівномірно, то порядок підсумовування й інтегрування в попередній рівності можна змінювати, а отже,

$$u(t, x) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi.$$

Функція (3.42) називається *функцією Гріна першої мішаної задачі* для рівняння теплопровідності (3.28).

◇ **Зауваження 3.2.** Якщо на кінцях стержня задано інші теплові режими, але крайові умови є однорідними, то для побудови розв'язку мішаних задач потрібно повторити вищеприведені міркування й у кожному конкретному випадкові дослідити відповідну задачу Штурма–Ліувіля.

Що ж до загальної мішаної задачі для рівняння теплопровідності й задачі зі стаціонарними неоднорідностями, а також мішаних задач у двовимірному просторі, то підхід до їх інтегрування залишається той самий, що і у випадку відповідних мішаних задач для хвильового рівняння.

Отже, ми показали, що розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності існує, він єдиний і неперервно залежить від початкової та крайових умов в області  $\bar{\Omega}$ , тобто мішану задачу в  $\bar{\Omega}$  поставлено коректно.

▼ **Вправа 1.** Показати, що мішану задачу (3.28)–(3.30) в області  $\Omega^* = (-\infty, 0] \times [0, l]$  поставлено некоректно.

### Тема 3

## ПРОЦЕСИ ДИФУЗІЇ ТА ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОТИ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

### 3.6 Постановка задачі Коші та єдиність її розв'язку

Нехай в тривимірному просторі  $E_3$  задано тіло  $G$  досить великих розмірів із поверхнею  $S$ . У центральній його частині розглянемо об'єм  $V$ , який знаходиться на значній відстані від поверхні  $S$ . Тоді очевидно, що протягом певного інтервалу часу процес розподілу теплоти в об'ємі  $V$  не залежатиме від температурного режиму на поверхні  $S$  і враховувати розміри тіла  $G$  немає потреби.

В задачах такого типу зазвичай вважають, що тіло  $G$  необмежене, а отже, на процес розподілу теплоти впливатиме тільки його початкова температура. Таким чином, поставлена фізична проблема приводить до інтегрування задачі Коші: у фазовому просторі  $\Omega = (0, +\infty) \times E_3$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_t(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z), \quad (3.43)$$

який задовольняє початкову умову

$$u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in E_3, \quad (3.44)$$

де  $\varphi(x, y, z)$  — відома неперервна й обмежена функція в просторі  $E_3$ .

Зазначимо, що заміною змінної  $\tau = a^2 t$  рівняння (3.43) зведеться до вигляду

$$u_\tau(\tau, x, y, z) = \Delta u(\tau, x, y, z) + f_1(\tau, x, y, z).$$

Тому надалі вважатимемо, що в (3.43)  $a^2 = 1$ .

**Теорема 3.5.** *Якщо в класі обмежених у всьому фазовому просторі функцій існує розв'язок задачі Коші (3.43), (3.44), то він єдиний.*

**Доведення.** Припустимо супротивне: нехай  $u_1(t, x, y, z)$  і  $u_2(t, x, y, z)$  є розв'язками задачі Коші (3.43), (3.44). Тоді функція

$$u(t, x, y, z) = u_1(t, x, y, z) - u_2(t, x, y, z)$$

буде розв'язком однорідного рівняння теплопровідності й задовольнятиме однорідну початкову умову.

Згідно з умовою теореми існує така стала  $M$ , що для всіх  $(t, x, y, z) \in \Omega$   $|u_i(t, x, y, z)| \leq M$ ,  $i = 1, 2$ , а тому  $|u(t, x, y, z)| \leq 2M$ .

Розглянемо функцію

$$v(t, x, y, z) = 4Ml^{-2} (0, 5r^2 + 3t),$$

де  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $l = \text{const}$ . Очевидно, функція  $v(t, x, y, z)$  також буде розв'язком однорідного рівняння теплопровідності, а при  $t = 0$  і  $r = l$  маємо

$$v(0, x, y, z) = 2Mr^2l^{-2} \geq 0 = u(0, x, y, z),$$

$$v(t, x, y, z) \Big|_{r=l} = 2M + 12Mtl^{-2} \geq 2M \geq |u(t, x, y, z)|.$$

На підставі принципу максимуму останні нерівності справедливі всюди в області

$$\bar{\Omega}^* = \{(t, x, y, z) \mid t \geq 0, \quad r^2 \leq l^2\},$$

тобто

$$-4Ml^{-2} (0, 5r^2 + 3t) \leq u(t, x, y, z) \leq 4Ml^{-2} (0, 5r^2 + 3t), \quad (3.45)$$

$$(t, x, y, z) \in \bar{\Omega}^*.$$

Зафіксувавши в  $\Omega^*$  довільну точку  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  і перейшовши в (3.45) до границі, коли  $l \rightarrow \infty$ , дістанемо

$$u(t_0, x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Унаслідок довільності точки  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  остання рівність виконується тотожно в просторі  $\Omega$ , і теорему доведено.

### 3.7 Існування розв'язку задачі Коші

Розглянемо спочатку задачу Коші на нескінченній прямій: у фазовій площині

$$\Omega = \{(t, x) \mid 0 < t < +\infty, \quad -\infty < x < +\infty\}$$

знайти обмежений розв'язок рівняння теплопровідності

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (3.46)$$

який задовольняє початкову умову

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.47)$$

де  $\varphi(x)$  – відома, неперервна й обмежена на всій осі функція. Вважаємо, що  $u(t, x)$  при  $t = 0$  неперервна, тобто

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(t, x) = \varphi(x_0).$$

Шукатимемо нетривіальні обмежені розв'язки рівняння (3.46) у вигляді

$$u(t, x) = T(t)X(x) \neq 0. \quad (3.48)$$

Підставляючи (3.48) у рівняння (3.46) та відокремлюючи змінні, дістанемо

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (3.49)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.50)$$

де  $\lambda$  — довільна стала. Рівняння (3.49), (3.50) мають обмежені розв'язки тільки тоді, коли  $\lambda \geq 0$ ; отже,

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

$$T(t) = C_3 e^{-\lambda a^2 t}.$$

Покладемо  $\lambda = k^2$ ,  $-\infty < k < +\infty$ . Тоді, згідно з (3.48) маємо

$$u_k(t, x) = e^{-k^2 a^2 t} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx), \quad (3.51)$$

де  $A(k) = C_1 C_3$ ,  $B(k) = C_2 C_3$  — довільні сталі, які залежать від довільного параметра  $k$ .

Функція  $u_k(t, x)$ , визначена за формулою (3.51), є розв'язком рівняння (3.46) за довільних  $A(k)$  і  $B(k)$ . Тому функція

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk \quad (3.52)$$

також буде розв'язком рівняння (3.46), якщо інтеграл в правій частині (3.52) рівномірно збігається і його можна диференціювати під знаком інтеграла один раз за  $t$  і двічі за  $x$ . Нехай ці умови виконуються.

Згідно з початковою умовою (3.47) маємо

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk. \quad (3.53)$$

Представимо функцію  $\varphi(x)$  формулою Фур'є:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos k(\xi - x) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \cos kx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos k\xi d\xi + \sin kx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi \right] dk. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Порівнюючи (3.53) і (3.54), дістаємо

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos k\xi d\xi, \quad B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в (3.52), матимемо

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-a^2 k^2 t} \cos k(\xi - x) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-a^2 k^2 t} \cos k(\xi - x) d\xi. \end{aligned}$$

В останній рівності використано парність підінтегральної функції як функції від  $k$ . Змінюючи в цій рівності порядок інтегрування і користуючись формулою

$$\int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} \cos \beta k dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}, \quad c \neq 0,$$

(виведення див. нижче), дістаємо

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t} \frac{1}{\pi} \cos k(\xi - x) dk = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Формула (3.55) називається *формулою Пуассона*.

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що функція

$$G(t, x, \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \tag{3.56}$$

як функція  $(t, x) \in \Omega$  є також розв'язком рівняння (3.46), і її називають *фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності*.

Покажемо, що для довільної неперервної і обмеженої функції  $\varphi(x)$  формула Пуассона є розв'язком рівняння теплопровідності (3.46). Для цього потрібно довести, що інтеграл (3.55) і інтеграл, які одержуються з (3.55) диференціюванням під знаком інтеграла один раз за  $t$  і двічі за  $x$ , збігаються рівномірно при  $t > 0$ .



Здиференціюємо (3.55) один раз за  $t$  і двічі за  $x$ . Маємо

$$u_t(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t^2} - \frac{1}{2t} \right] \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

$$u_x(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi - x)}{2a^2 t} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

$$u_{xx}(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(\xi - x)^2}{4a^4 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right] \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Як бачимо, вирази для похідних складаються із суми інтегралів вигляду

$$I = \frac{1}{t^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) (\xi - x)^m e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad (3.57)$$

де  $k$  і  $m$  — деякі невід'ємні сталі.

В (3.57) покладемо

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}, \quad t > 0. \quad (3.58)$$

Тоді (3.57) запишеться у вигляді

$$I = (2a)^{m+1} t^{\frac{m+1}{2}} k \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) \alpha^m e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Функція  $\varphi(x)$  обмежена, отже, існує така скінчена стала  $M$ , що для всіх  $x \in (-\infty, +\infty)$   $|\varphi(x)| \leq M$ . Тоді при  $t > 0$  підінтегральний вираз мажоруюється функцією  $M |a|^m e^{-\alpha^2}$ , яка є інтегрованою в проміжку  $(-\infty, +\infty)$ . Отже, інтеграл (3.57) збігається рівномірно за довільних невід'ємних сталих  $k$  і  $m$ , а тому в (3.55) можна диференціювати під знаком інтеграла за  $t$  і двічі за  $x$ . Легко бачити, що в (3.55) можна диференціювати під знаком інтеграла за  $t$  і за  $x$  довільну кількість разів при  $t > 0$ .

Покажемо тепер, що функція (3.55) задовольняє й початкову умову (3.47), тобто

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \varphi(x), \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Для цього у формулі Пуассона замість  $\xi$  введемо нову змінну інтегрування  $\alpha$  за (3.58). Тоді дістанемо

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2\alpha\sqrt{t}) e^{-\alpha^2} d\alpha. \quad (3.59)$$

У теорії невластних інтегралів відома рівність

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1. \quad (3.60)$$

Домножимо (3.60) на  $\varphi(x)$  і віднімемо з (3.59). Дістанемо

$$u(t, x) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x + 2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)] e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

а отже,

$$|u(t, x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x + 2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha. \quad (3.61)$$

Унаслідок обмеженості функції  $\varphi(x)$  для довільних  $x, t$  і  $\alpha$  маємо

$$|\varphi(x + 2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq 2M.$$

Ураховуючи останню нерівність, із (3.61) дістаємо

$$\begin{aligned} |u(t, x) - \varphi(x)| &\leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\alpha^2} d\alpha + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N |\varphi(x + 2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha, \end{aligned} \quad (3.62)$$

де  $N$  — довільна стала. Через збіжність інтеграла (3.60) для всякого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  можна вибрати настільки велике число  $N$ , що

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оскільки функція  $\varphi(x)$  неперервна, то для всіх  $t$ , досить близьких до нуля, й при  $|\alpha| \leq N$  маємо

$$\left| \varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

а отже, з (3.62) дістаємо для  $t$ , досить близьких до нуля,

$$|u(t, x) - \varphi(x)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3} \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \right) = \varepsilon.$$

З останньої нерівності внаслідок довільності  $\varepsilon$  випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, y) = \varphi(x),$$

тобто формула Пуассона задовольняє також початкову умову (3.47).

Ми довели наступну теорему.

**Теорема 3.6.** *Якщо функція  $\varphi(x)$  неперервна й обмежена на проміжку  $(-\infty, +\infty)$ , то єдиний у класі неперервних і обмежених у  $\Omega$  функцій розв'язок задачі Коші (3.46), (3.47) дається формулою Пуассона.*

Зазначимо: якщо початкова функція  $\varphi(x)$  має скінчену кількість точок розриву першого роду, то інтеграл (3.55) є також єдиним у класі обмежених функцій розв'язком рівняння (3.46), який неперервний всюди, за винятком точок розриву функції  $\varphi(x)$ .

У випадку  $n$ -вимірного середовища фундаментальним розв'язком однорідного рівняння теплопровідності буде функція

$$G(t, P, Q) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{r^2}{4t}}, \quad a^2 = 1,$$

$$P = P(x_1, \dots, x_n), \quad Q = Q(\xi_1, \dots, \xi_n),$$

де  $r^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2$ , а розв'язок відповідної задачі Коші в класі обмежених функцій дається формулою Пуассона

$$u(t, P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Q) G(t, P, Q) dQ, \quad dQ = d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \quad (3.63)$$

Розв'язок задачі Коші

$$u_t(t, P) = \Delta u(t, P) + f(t, P), \quad (t, P) \in \Omega = (0, +\infty) \times E_n, \quad (3.64)$$

$$u(0, P) = \varphi(p), \quad P \in E_n,$$

де функції  $f(t, P)$  та  $\varphi(P)$  неперервні й обмежені, набирає вигляду

$$u(t, P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Q) G(t, P, Q) dQ +$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, Q) G(t - \tau, P, Q) dQ d\tau, \quad (3.65)$$

причому в класі обмежених функцій цей розв'язок єдиний.

▼ **Вправа 2.** Показати, що розв'язок задачі Коші (3.64) дається формулою (3.65) (застосувати принцип Дюгамеля).

Доведемо справедливість рівності

$$\int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} \cos \beta k dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}, \quad c \neq 0.$$

Для цього позначимо  $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} \cos \beta k dk$ . Диференціюючи останню рівність за параметром  $\beta$ , дістаємо

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = - \int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} k \sin \beta k dk = \frac{1}{2c^2} \int_0^{+\infty} \sin \beta k d(e^{-c^2 k^2}) =$$

$$= \frac{1}{2c^2} \sin \beta k e^{-c^2 k^2} \Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta}{2c^2} \int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} \cos \beta k dk = -\frac{\beta}{2c^2} I(\beta).$$

Із диференціального рівняння

$$I'(\beta) + \frac{\beta}{2c^2} I(\beta) = 0$$

знаходимо

$$I(\beta) = C_1 e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}.$$

Оскільки

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-c^2 k^2} dk = \frac{1}{2c} \sqrt{\pi},$$

то  $C_1 = \frac{1}{2c} \sqrt{\pi}$ , а отже,

$$I(\beta) = \frac{1}{2c} \sqrt{\pi} e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}.$$

### 3.8 Фізична інтерпретація фундаментального розв'язку (3.56) однорідного рівняння теплопровідності та формули Пуассона (3.55)

Розглянемо достатньо малий елемент стержня  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  навколо точки  $x_0$  і вважатимемо, що в початковий момент часу температура стержня поза цим елементом нульова, а при  $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  вона є постійною й дорівнює  $u_0$ .

Такий початковий розподіл температури називають *фізичним тепловим імпульсом*.

Фізичний тепловий імпульс виникає, якщо в стержень, температура якого в кожній точці спочатку нульова, в момент  $t = 0$  на відрізку  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  раптово введено кількість теплоти  $q = 2\varepsilon c\rho u_0$ , яка спричинила підвищення температури цього проміжку стержня на  $u_0$ .

У наступні моменти часу розподіл температури в стержні визначається за формулою Пуассона (3.55)

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Застосовуючи теорему про середнє, дістаємо

$$u(t, x) = \frac{2u_0\varepsilon}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi_0-x)^2}{4a^2t}},$$

де  $\xi_0$  — деяка точка, яка лежить у проміжку інтегрування  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . Оскільки  $u_0 = q(2\varepsilon c\rho)^{-1}$ , то

$$u(t, x) = \frac{q}{c\rho 2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi_0-x)^2}{4a^2t}}. \quad (3.66)$$

Ми дістали розв'язок у випадку фізичного теплового імпульсу. Тепер дослідимо точковий тепловий імпульс. Для цього в (3.66) перейдемо до границі, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Очевидно, що тоді  $\xi_0 \rightarrow x_0$  і з (3.66) маємо

$$u(t, x) = q \left( c\rho 2a\sqrt{\pi t} \right)^{-1} e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}. \quad (3.67)$$

Таким чином, фундаментальний розв'язок (3.56) дає розподіл температури, який спричиняється миттєвим точковим джерелом теплоти інтенсивністю  $q = c\rho$ , розміщеним в початковий момент  $t = 0$  в точці стержня  $x = \xi$ .

Розглянемо тепер, як поширюється теплота в стержні після точкового імпульсу. Для цього побудуємо графіки фундаментального розв'язку (3.56)

за фіксованим  $\xi$  для різних моментів часу  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  (рис. 3.2). Криві, зображені на рисунку, називаються *кривими Гауса*.

Як бачимо, для всіх  $t_i, i = 1, 2, 3, \dots$ , графіки фундаментального розв'язку симетричні відносно прямої  $x = \xi$ . Максимум досягається при  $x = \xi$ , і він дорівнює  $(2a\sqrt{\pi t_i})^{-1}$  (максимальна температура — в точці прикладання імпульсу). Оскільки  $a^2 = K(c\rho)^{-1}$ , то в кожний фіксований момент часу максимальна температура обернено пропорційна коефіцієнту теплопровідності  $K$ .

Обчислимо інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1.$$

Це означає, що площа під кожною кривою дорівнює 1, тобто кількість теплоти  $q = c\rho$  у стержні залишається незмінною з плином часу.

З рис. 3.2 бачимо, що вся площа обмежена кривою (3.56) і віссю абсцис, знаходиться над проміжком  $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ , де  $\varepsilon$  — як завгодно мале число, якщо тільки  $t > 0$  — досить мале. За модулем ця площа, помножена на  $-\rho$ , дорівнює кількості теплоти, яку було підведено в початковий момент часу  $t = 0$ . Таким чином, для малих значень  $t > 0$  майже вся теплота зосереджена в малому околі точки  $\xi$ . Із цих міркувань випливає, що в момент часу  $t = 0$  вся кількість теплоти зосереджена в точці  $x = \xi$ , тобто ми маємо миттєве точкове джерело теплоти.

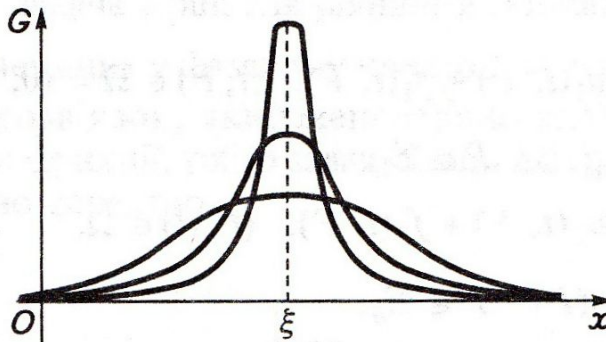


Рис. 3.2:

Формула (3.67) показує, що у всякій точці стержня  $x$  температура, яка створюється миттєвим початковим джерелом теплоти, котра діє при  $t = 0$ , не дорівнює нулю для як завгодно малих  $t > 0$ .

Отже, хоча би яке мале було  $t$  і хоч би як далеко знаходилася точка  $x$  від  $x_0$ , теплота від точки  $x_0$  за інтервал часу  $t$  встигає дійти до точки  $x$ . Це означає, що теплота поширюється в стержні з нескінченною швидкістю. Однак це суперечить молекулярно-кінетичним уявленням про природу теплоти. Ця суперечність зумовлена тим, що під час виведення рівняння теплопровідності

не враховувалась інерційність процесу руху молекул. Однак добутий фізично суперечливий висновок на практиці ускладнень не спричиняє. Якщо  $|x - x_0|$  велике, а  $t$  мале, то у формулі (3.67) від'ємний показник великий за модулем і температура  $u(t, x)$  є настільки малою, що нею можна нехтувати. Отже, практично з точністю до величини, якими можна нехтувати, швидкість поширення теплоти є скінченною.

Тепер на підставі вищенаведених міркувань легко дати фізичну інтерпретацію формули Пуассона. Розв'язок (3.55) можна розглядати як результат суперпозиції (накладання) температур, що виникають у точці  $x$  у момент часу  $t$  унаслідок неперервно розподілених у стержні теплових імпульсів інтенсивністю  $\varphi(\xi)$  в точці  $\xi$ , прикладених у початковий момент часу  $t = 0$ .

### 3.9 Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкової температури та інтенсивності внутрішніх джерел тепла

Нехай функції  $u_1(t, P)$  і  $u_2(t, P)$ ,  $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  є розв'язками задач Коші:

$$u_{1t}(t, P) = \Delta u_1(t, P) + f_1(t, P), \quad (t, P) \in \Omega = (0; +\infty) \times E_n, \quad (3.68)$$

$$u_1(0, P) = \varphi_1(P), \quad P \in E_n,$$

$$u_{2t}(t, P) = \Delta u_2(t, P) + f_2(t, P), \quad (t, P) \in \Omega, \quad (3.69)$$

$$u_2(0, P) = \varphi_2(P), \quad P \in E_n,$$

де  $f_i(t, P)$ ,  $\varphi_i(P)$ ,  $i = 1, 2$  — неперервні й обмежені функції в  $\Omega$  і  $E_n$  відповідно.

**Теорема 3.7.** *В класі обмежених функцій розв'язок задачі Коші неперервно залежить від початкової температури та інтенсивності внутрішніх джерел тепла, тобто  $\forall \varepsilon > 0$  і  $t_1 > 0$   $\exists \delta > 0$ , що як тільки*

$$|f_1(t, P) - f_2(t, P)| < \delta, \quad (t, P) \in \Omega_1 = (0, t_1) \times E_n, \quad (3.70)$$

$$|\varphi_1(P) - \varphi_2(P)| < \delta, \quad P \in E_n,$$

то  $|u_1(t, P) - u_2(t, P)| < \varepsilon$ .

**Доведення.** Функції  $u_1(t, P)$  і  $u_2(t, P)$  є розв'язками задачі Коші (3.68), (3.69). Отже, беручи до уваги, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, P, Q) dQ = 1,$$

внаслідок (3.65) та нерівностей (3.70) маємо

$$|u_1(t, P) - u_2(t, P)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, P, Q) |\varphi_1(Q) - \varphi_2(Q)| dQ + \\ + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau, P, Q) |f_1(\tau, Q) - f_2(\tau, Q)| dQ d\tau < \delta(1 + t_1).$$

Якщо  $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_1}$ , то  $|u_1(t, P) - u_2(t, P)| < \varepsilon \forall (t, P) \in \Omega_1$ .

Теорему доведено.

Таким чином, задача Коші для рівняння теплопровідності в класі неперервних і обмежених у фазовому просторі  $\Omega = (0, +\infty) \times E_n$  функцій має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від функції  $f(t, P)$  і початкової функції, тобто задачу Коші для рівняння теплопровідності поставлено коректно.

### 3.10 Поширення тепла у напівнескінченному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею

Розглянемо один граничний випадок основних мішаних задач для рівняння теплопровідності.

Нехай дано досить довгий стержень з теплоізолюваною бічною поверхнею. Потрібно визначити розподіл температури в малій частині стержня, яка знаходиться біля одного з його кінців і значно віддалена від іншого. В цьому випадкові процес розподілу теплоти в розглядуваній частині залежатиме від початкової температури стержня та теплового режиму ближнього кінця. В задачах подібного типу вважають, що стержень напівнескінченний, і координата, яка відлічується від досліджуваного кінця, змінюється в межах  $0 \leq x < +\infty$ . Таким чином, приходимо до однієї із задач: в області  $\Omega = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x) \quad (3.71)$$

(стержень однорідний), який задовольняє початкову умову

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, +\infty) \quad (3.72)$$

та одну з крайових умов:

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad t \geq 0 \quad (3.73)$$



(задано температуру);

$$u_x(t, 0) = \mu_2(t), \quad t \geq 0 \quad (3.74)$$

(задано тепловий потік);

$$u_x(t, 0) = h [u(t, 0) - \theta(t)], \quad t \geq 0 \quad (3.75)$$

(задано теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого дорівнює  $\theta(t)$ ).

Надалі детально зупинимося на дослідженні задачі: в області  $\Omega$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (3.76)$$

який задовольняє початкову (3.72) і крайову (3.73) умови.

Для того щоб умови (3.72) і (3.73) однозначно визначали розв'язок поставленої задачі в просторі обмежених функцій, надалі вимагатимемо, щоб  $\varphi(x)$  була неперервна й обмежена при  $x \in [0, +\infty)$ , а  $\mu_1(t)$  — неперервно диференційовною при  $t \geq 0$ , причому

$$\varphi(0) = \mu_1(0) = 0.$$

Шукатимемо розв'язок задачі (3.76), (3.72), (3.73) у вигляді

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x), \quad (3.77)$$

де  $u_1(t, x)$  і  $u_2(t, x)$  є розв'язком рівняння (3.76), а

$$u_1(0, x) = \varphi(x), \quad u_1(t, 0) = 0, \quad (3.78)$$

$$u_2(0, x) = 0, \quad u_2(t, 0) = \mu_1(t). \quad (3.79)$$

Очевидно, що сума (3.77) буде розв'язком поставленої задачі (3.76), (3.72), (3.73).

Знайдемо розв'язок задачі (3.76), (3.78). Для цього розглянемо функцію

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Функція  $\Psi(x)$  є обмеженою при  $x \in (-\infty, +\infty)$  і непарною. Покажемо, що функція

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad (3.80)$$

при  $x \geq 0$  є розв'язком задачі (3.76), (3.78). Справді,

$$u_1(t, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} d\xi = 0,$$

оскільки підінтегральна функція обмежена й непарна.

У п. 3.8 було показано, що з (3.80)  $\lim_{t \rightarrow 0} u_1(t, x) = \psi(x)$ , тобто при  $x > 0$   $\lim_{t \rightarrow 0} u_1(t, x) = \varphi(x)$ , а отже, (3.80) є розв'язком задачі (3.76), (3.78).

Перетворимо (3.80). Використовуючи непарність функції  $\varphi(x)$ , дістаємо

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 \psi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi + \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \right\} = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \varphi(-\xi') \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi')^2}{4a^2 t}} d\xi' + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \end{aligned}$$

У першому інтегралі покладемо  $\xi = -\xi'$ . Тоді

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Покажемо, що розв'язок задачі (3.76), (3.79) представляється у вигляді

$$u_2(t, x) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_1(\tau) d\tau. \quad (3.82)$$

Введемо нову змінну інтегрування

$$z = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}, \quad dz = \frac{xd\tau}{4a(t-\tau)^{3/2}}, \quad \tau = t - \frac{x^2}{(2az)^2}.$$

Тоді з (3.82)

$$u_2(t, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} e^{-z^2} \mu_1 \left( t - \frac{x^2}{4a^2 z^2} \right) dz. \quad (3.83)$$

Із (3.82) маємо  $u_2(0, x) = 0$ , а з (3.83) дістаємо

$$u_2(t, 0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} \mu_1(t) dz = \mu_1(t),$$

тобто умови (3.79) виконуються.

Беручи до уваги, що  $u_2(0, 0) = \mu_1(0)$ , з (3.83), диференціюючи один раз за  $t$  і двічі за  $x$ , матимемо

$$u_{2_t}(t, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \mu_1' \left( t - \frac{x^2}{4a^2z^2} \right) e^{-z^2} dz.$$

$$u_{2_x}(t, x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \mu_1' \left( t - \frac{x^2}{4a^2z^2} \right) \frac{x}{2a^2z^2} e^{-z^2} dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \mu_1' \left( t - \frac{x^2}{4a^2z^2} \right) \frac{1-2z^2}{x} e^{-z^2} dz,$$

$$u_{2_{xx}}(t, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}a^2} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \mu_1' \left( t - \frac{x^2}{4a^2z^2} \right) e^{-z^2} dz -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \frac{\mu_1 \left( t - \frac{x^2}{4a^2z^2} \right)}{2a^2z^2} e^{-z^2} dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \mu_1 \left( t - \frac{x^2}{4a^2z^2} \right) \times$$

$$\times \frac{1-2z^2}{x^2} e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}a^2} \int_{x[2a\sqrt{t}]^{-1}}^{+\infty} \mu_1' \left( t - \frac{x^2}{4a^2z^2} \right) e^{-z^2} dz.$$

Отже, функція (3.82) задовольняє й рівняння (3.76).

Підставивши (3.81) і (3.82) в (3.77), дістанемо розв'язок поставленої задачі

(3.76), (3.72), (3.73):

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x\mu_1(\tau)}{a(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Якщо кінець  $x = 0$  є теплоізолюваним, тобто

$$u_x(t, 0) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.84)$$

то розв'язок задачі (3.76), (3.72), (3.84) дається формулою

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi. \quad (3.85)$$

Для побудови розв'язку (3.85) функцію  $\varphi(x)$  продовжуємо на проміжок  $(-\infty, 0)$  таким чином, щоб вона була парною.

Зауважимо, що в теорії диференціальних рівнянь досліджуються й задачі без початкових умов. Такі задачі трапляються в дослідженні процесів теплопровідності в момент, достатньо віддалений від початкового, а отже, початкова умова практично не впливає на розподіл теплоти в момент спостереження.

### Задачі для самостійного розв'язування

**1.** Однорідне ізотропне тіло  $G$  в початковий момент має температуру  $f(x, y, z)$ . Між цим тілом і навколишнім середовищем, температура якого у всіх точках дорівнює  $\psi(t)$ , проходить теплообмін. Теплообмін у тілі вільний. Визначити рівняння й початкові та крайові умови, які задовольняє температура  $u(t, x, y, z)$  точок цього тіла.

**2.** В однорідному ізотропному тілі  $G$  відбувається вільний теплообмін. Тіло теплоізолюване від навколишнього середовища. Визначити крайові умови, які має задовольняти температура  $u(t, x, y, z)$  точок цього тіла.

**3.** Не користуючись рівнянням теплопровідності для тривимірного тіла, вивести рівняння розподілу теплоти в тонкому однорідному ізотропному стержні постійного перерізу, якщо бічна поверхня цього стержня теплоізолювана. Теплообмін в стержні вільний.

**4.** Поставити мішану задачу про визначення температури однорідного ізотропного стержня завдовжки  $l$  із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура є довільною функцією  $x$ , за таких умов:

- а) лівий кінець стержня теплоізований, а на правому — задано температуру  $\nu(t)$ ;
- б) через правий кінець стержня відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого дорівнює  $\theta(t)$ , а лівий кінець підтримується за нульової температури;
- в) на кінцях стержня задано теплові потоки  $\mu_1(t)$  і  $\mu_2(t)$  відповідно.

5. Скласти математичну модель процесу розподілу температури в однорідному ізотропному стержні завдовжки  $l$ , початкова температура якого становить  $\varphi(x)$ , якщо через його бічну поверхню відбувається теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури, інтенсивність внутрішніх джерел теплоти стержня дорівнює  $f(t, x)$ , а його кінці теплоізовані.

6. Вивести рівняння дифузії в середовищі, яке рухається зі сталою швидкістю в напрямі осі  $Ox$ , якщо поверхнями рівної концентрації в кожен момент часу  $t$  є площини, перпендикулярні до осі  $Ox$ .

**Вказівка.** Для описання процесу дифузії потрібно виділити елемент з постійною площею перерізу (рис. 3.3), паралельною осі  $Ox$ , і розглянути кількість речовини, яка проходить через перерізи  $x$  і  $x + \Delta x$  за рахунок дифузії і перенесення рухомим середовищем. Для визначення концентрації  $u(t, x)$  речовини, що дифундує, дістанемо рівняння

$$u_t(t, x) = du_{xx}(t, x) - \sigma u_x(t, x),$$

де  $d$  — коефіцієнт дифузії;  $\sigma$  — швидкість руху середовища.

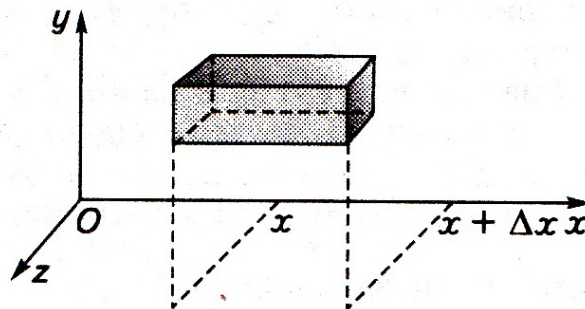


Рис. 3.3:

7. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні завдовжки  $l$  з постійною початковою температурою  $u_0$ , якщо в лівому кінці стержня температура змінюється за законом  $u_0 \cos \omega t$  ( $\omega = \text{const}$ ), а в правому — підтримується температура  $u_0$ . В середині стержня є джерела й поглиначі теплоти; їхня інтенсивність (у розрахунку на одиницю маси стержня) дорівнює  $-u_0 \omega \frac{l-x}{l} \sin \omega t$ . Бічна поверхня стержня теплоізована.

8. Дано тонкий однорідний ізотропний стержень завдовжки  $l$ , початкова температура якого дорівнює нулю. На кінці  $x = l$  підтримується нульова температура, а на кінці  $x = 0$  вона зростає пропорційно часу, що минає:  $u(t, 0) = At$ ,  $A = \text{const}$ . Бічна поверхня стержня теплоізована. Знайти закон зміни температури всередині стержня.

9. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні завдовжки  $l$  за вільного теплообміну, якщо його початкова температура задана рівністю  $u(0, x) = u_0 \left(\frac{x}{l}\right)$ ,

$u_0 = \text{const}$ . Бічна поверхня та лівий кінець стержня теплоізолювані, а в правому кінці підтримується постійна температура  $u_0$ .

**10.** У скінченному стержні завдовжки  $l$  обидва кінці теплоізолювані, а його початкова температура постійна й дорівнює  $u_0$ . Визначити температуру стержня  $u(t, x)$  у будь-який момент часу, якщо стержень однорідний ізотропний і його бічна поверхня теплоізолювана.

**11.** Дано тонкий однорідний стержень завдовжки  $l$ , початкова температура якого дорівнює  $u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0)$ ,  $u_0, u_1 = \text{const}$ . Кінці стержня  $x = 0$  і  $x = l$  мають постійні температури  $u_0$  і  $u_1$  відповідно. Через бічну поверхню стержня відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю. Визначити температуру стержня в довільний момент часу  $t$ .

**12.** Дано тонкий однорідний стержень завдовжки  $l$ , початкова температура якого дорівнює  $u_0 = \text{const}$ . На кінці  $x = l$  підтримується постійна температура  $u_0$ , а на кінці  $x = 0$  і через бічну поверхню стержня відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю. Визначити температуру стержня в довільний момент часу  $t$ .

**13.** Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні завдовжки  $l$  за вільного теплообміну, якщо початкова температура цього стержня дорівнює нулю, на лівому кінці вона змінюється за законом  $A(1 - e^{-\alpha t})$ ,  $A, \alpha = \text{const}$ , а через правий — відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого нульова. Бічна поверхня стержня теплоізолювана.

**14.** Дано тонкий однорідний ізотропний стержень завдовжки  $l$ , бічна поверхня якого теплоізолювана. Початкова температура стержня

$$u(0, x) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5l, \\ l - x, & \text{при } 0,5l \leq x \leq l. \end{cases}$$

На обох кінцях стержня відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого нульова. Визначити температуру стержня в момент часу  $t > 0$ .

**15.** Проінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а)  $u_t = u_{xx} - \alpha^2 u$ ,  $0 < t \leq T$ ,  $x \in (0, l)$ ,  
 $u(0, x) = x(x - l)$ ,  $x \in [0, l]$ ,  
 $u_x(t, 0) = 0$ ,  $u_x(l, t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$ ;

б)  $u_t = a^2 u_{xx} + x \sin t$ ,  $t \in (0, T]$ ,  $x \in (0, l)$ ,  
 $u(x, 0) = 0$ ,  $x \in [0, l]$ ,  
 $u_x(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$ ;

в)  $u_t = u_{xx} - u + 4x$ ,  $t \in (0, T]$ ,  $x \in (0, l)$ ,  
 $u(x, 0) = 0$ ,  $x \in [0, l]$ ,  
 $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$ ;

$$\begin{aligned} \text{г) } u_t &= a^2 u_{xx}, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, 2), \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, 2], \\ u(0, t) &= \sin \omega t, \quad u(2, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad \omega = \text{const}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } u_t &= 0, 25u_{xx}, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, 1), \\ u(x, 0) &= 2x, \quad x \in [0, l], \\ u(0, t) &= 0, \quad [u_x - hu]_{x=1} = 0, \quad t \in [0, T], \quad h = \text{const}. \end{aligned}$$

**16.** Розчинена речовина з початковою концентрацією  $c_0 = \text{const}$  дифундує з розчину, який замкнений між площинами  $x = 0$ ,  $x = h$ , в розчинник, обмежений площинами  $x = h$  і  $x = l$ . Визначити процес вирівнювання концентрації, вважаючи, що краї  $x = 0$ ,  $x = l$  непроникні для речовини.

**Вказівка.** Задача зводиться до інтегрування рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, l)$$

за умов

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} c_0, & \text{при } x \in [0, h), \\ 0, & \text{при } x \in [h, l]. \end{cases}$$

**17.** Дано однорідну ізотропну кулю радіусом  $R$  із центром у початку координат. Відомо, що початкова температура довільної точки кулі залежить тільки від відстані  $\rho$  цієї точки від центра кулі. Зовнішня поверхня кулі має нульову температуру. Визначити температуру довільної точки кулі в момент часу  $t > 0$ .

**Вказівка.** Якщо в початковий момент часу температура в кожній точці залежить тільки від її відстані  $\rho$  від центра кулі, то й для довільного  $t > 0$  температура  $u$  залежатиме тільки від  $\rho$  і часу  $t$ . Унаслідок радіальної симетрії рівняння теплопровідності у сферичних координатах запишеться у вигляді

$$u_t = a^2 \left( u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} u_{\rho} \right).$$

Переходячи до нової невідомої функції  $v = \rho u(\rho, t)$ , дістаємо мішану задачу

$$v_t = a^2 v_{\rho\rho}, \quad \rho \in (0, R), \quad t \in (0, T],$$

$$v(\rho, 0) = \rho\varphi(\rho), \quad \rho \in [0, R],$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(R, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Перша крайова умова є наслідком обмеженості температури в центрі кулі

$$v(0^+, t) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho u(\rho, t) = 0.$$

**18.** Визначити розподіл температури в однорідній ізотропній кулі радіусом  $R$ . У кулі, починаючи з моменту часу  $t = 0$ , діють джерела тепла зі сталою густиною  $Q$ , а поверхня кулі має нульову температуру. Початкова температура кулі також нульова.

**19.** Початкова температура однорідної ізотропної кулі  $0 \leq \rho \leq R$  становить  $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ , а на поверхні кулі задано сталий тепловий потік густиною  $q$ . Знайти температуру кулі при  $t > 0$ .

**20.** Визначить розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіусом  $R$  за умови, що його початкова температура

$$u|_{t=0} = u_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right), \quad u_0 = \text{const},$$

а на бічній поверхні підтримується нульова температура.

**21.** Дослідити радіальний розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіусом  $R$ , бічна поверхня якого має постійну температуру  $u_0$ . Початкова температура в циліндрі дорівнює нулю.

**22.** Знайти закон розподілу температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіусом  $R$  із початковою температурою  $\psi(\rho, \varphi)$ , якщо на його бічній поверхні підтримується нульова температура.

**23.** Знайти температуру необмеженого однорідного ізотропного кругового циліндра радіусом  $R$ , якщо його початкова температура

$$u|_{t=0} = f(\rho, \varphi), \quad \rho \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

а на поверхні відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю.

**24.** Знайти розв'язок рівняння

$$u_{xx} = \frac{3}{2}(1 - x^2)u_t, \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, 1),$$

який задовольняє умови

$$u(x, 0) = 1, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

**25.** Знайти розв'язок рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx} - uu_x, \quad t > 0, \quad x \in (0, l),$$

який задовольняє умови

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l],$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$



**Вказівка.** Нехай  $\theta(x, t)$  — розв'язок рівняння  $\theta_t = a^2\theta_{xx}$ . Тоді  $u(x, t) = -2a^2\frac{\theta_x}{\theta}$  є розв'язком рівняння  $u_t + uu_x = a^2u_{xx}$ . Але

$$\theta(x, t) = c(t)e^{-\frac{1}{2a^2}\int_0^x u(\xi, t)d\xi},$$

отже,

$$\theta(x, 0) = c_0e^{-\frac{1}{2a^2}\int_0^x u(\xi, 0)d\xi} = \theta_0(x).$$

Унаслідок крайових умов маємо

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

**26.** Знайти розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному стержні, якщо в початковий момент часу температура була розподілена так:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| > h, \\ -T, & \text{при } -h < x < 0, \\ T, & \text{при } 0 < x < h. \end{cases}$$

Теплообмін вільний.

**27.** Початковий розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному стержні задається формулою  $u(x, 0) = u_0e^{-\frac{x^2}{l^2}}$ , де  $u_0$  і  $l$  — задані сталі величини. Теплообмін вільний. Знайти закон розподілу температури в стержні при  $t > 0$ .

**28.** Визначити розподіл температури в напівнескінченному однорідному ізотропному стержні, який розміщений на проміжку прямої  $0 \leq x < +\infty$ , якщо лівий кінець має нульову температуру, а початковий розподіл температури в стержні задається рівністю  $u(x, 0) = f(x)$ , де  $f(x)$  — функція, абсолютно інтегрована на проміжку  $(0, +\infty)$ . Теплообмін вільний. Розглянути випадок, коли  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$ .

**29.** Дано напівнескінченний однорідний ізотропний стержень із теплоізованими бічною поверхнею та лівим кінцем, початкова температура якого дорівнює  $\varphi(x)$ . Теплообмін вільний. Знайти розподіл температури в стержні при  $t > 0$ .

**30.** Знайти розподіл температури в напівнескінченному однорідному ізотропному стержні з теплоізованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює  $\varphi(x)$ . На кінці стержня проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури. Теплообмін вільний.

## РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

На підставі введеної в розд. 1 класифікації ДРЧП квазілінійне рівняння

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) U_{\xi_i \xi_j}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \\ = F(\xi_1, \dots, \xi_n, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_n}) \end{aligned}$$

у  $D$  називається *рівнянням еліптичного типу*, якщо в кожній точці області  $D$  за допомогою не виродженого перетворення незалежних змінних  $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $i = \overline{1, n}$  його можна звести до вигляду

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}).$$

Покажемо, що до рівнянь еліптичного типу приводять дослідження стаціонарних процесів різної фізичної природи.

**Тема 1****ФІЗИЧНІ ПРОЦЕСИ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ****4.1 Рівняння для потенціалу тяжіння**

Нехай в точці  $(x, y, z)$  розташоване тіло з одиничною масою, а в точці  $(x_0, y_0, z_0)$  — тіло масою  $M$ . Згідно з установленим Ньютоном законом всесвітнього тяжіння, між двома довільними тілами діє сила притягання  $F(x, y, z)$ , яка прямо пропорційна їхнім масам і обернено пропорційна квадрату відстані між ними.

Замість сили  $F(x, y, z)$  розглянемо її потенціал

$$u(x, y, z) = \gamma \frac{M}{r}, \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

де  $\gamma$  — деяка стала. Щоб обчислити компоненти  $F_x, F_y, F_z$  сили  $F(x, y, z)$ , потрібно покласти

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Поле потенціалу  $u(x, y, z)$  повністю визначає векторне поле  $\{F_x, F_y, F_z\}$ .

У випадку, коли в точках  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , розташовані тіла, що притягуються, з масами  $M_i$  відповідно, силу можна обчислити за тими самими формулами, якщо за потенціал взяти функцію

$$u(x, y, z) = \gamma \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_i}, \quad r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2. \quad (4.1)$$

Вивчаючи тяжіння, П. С. Лаплас запропонував користуватися не потенціалом  $u(x, y, z)$ , а диференціальним рівнянням, яке задовольняє потенціал. Це рівняння можна дістати так.

Розглянемо спочатку в (4.1) тільки один доданок

$$u_i(x, y, z) = \frac{M_i}{r_i}$$

і обчислимо частинні похідні першого та другого порядків. Маємо

$$u_{i_x} = -\gamma M_i \frac{x - x_i}{r_i^3}, \quad u_{i_y} = -\gamma M_i \frac{y - y_i}{r_i^3}, \quad u_{i_z} = -\gamma M_i \frac{z - z_i}{r_i^3},$$

$$u_{i_{xx}} = \gamma M_i \left[ -r_i^3 + 3 \frac{(x - x_i)^2}{r_i^5} \right],$$

$$u_{i_{yy}} = \gamma M_i \left[ -r_i^3 + 3 \frac{(y - y_i)^2}{r_i^5} \right],$$

$$u_{i_{zz}} = \gamma M_i \left[ -r_i^3 + 3 \frac{(z - z_i)^2}{r_i^5} \right].$$

Додамо останні рівності:

$$\Delta u_i \equiv u_{i_{xx}} + u_{i_{yy}} + u_{i_{zz}} = 0.$$

Оскільки  $u = \sum_{i=1}^n u_i$ , то справедлива рівність

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \quad (4.2)$$

яка називається *рівнянням Лапласа в тривимірному просторі*.

Таким чином, П. С. Лаплас запропонував відмовитися від явної формули для сил далекодії і замінити її диференціальним рівнянням для поля потенціалу  $u(x, y, z)$ . Можна вважати, що диференціальне рівняння описує взаємодію сусідніх елементів поля  $u(x, y, z)$ . Отже, Лапласу належить ідея введення рівнянь для описання цього поля  $u(x, y, z)$  рівнянь, які справедливі всюди поза точками, в яких зосереджені самі маси, що притягуються (в точках  $x = x_i$ ,  $y = y_i$ ,  $z = z_i$  не можна обчислити похідні за наведеними вище формулами).

Якщо поле тяжіння спричинене рівномірно розподіленою в деякому об'ємі масою, то потенціал  $u(x, y, z)$  задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta u(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z),$$

де  $\rho(x, y, z)$  — густина розподілу мас, і вона є неперервно диференційовною функцією.

## 4.2 Потенціальний потік нестисливої рідини

В просторі  $x, y, z$  розглянемо довільний об'єм  $G$ , обмежений поверхнею  $S$ . Нехай у розглядуваному просторі рідина рухається зі швидкістю  $\vec{v}(t, x, y, z)$ . Зазначимо, що  $\vec{v}(t, x, y, z)$  — швидкість рідини в кожній даній точці  $(x, y, z)$  простору в момент часу  $t$ , тобто стосується певних точок простору, а не частинок рідини. Позначимо через  $\rho(t, x, y, z)$  густину рідини, а через  $f(t, x, y, z)$  — інтенсивність джерел, тобто кількість рідини, яка виділяється одиницею об'єму за одиницю часу.

Загальна кількість рідини, яка поступає в  $G$  за одиницю часу,

$$\begin{aligned} q &= - \iint_S \rho v_{\vec{n}} ds + \iiint_G f(t, x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_G [-\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + f] dx dy dz, \end{aligned}$$

де  $v_{\vec{n}}$  — проекція вектора  $\vec{v}(t, x, y, z)$  на зовнішню нормаль до поверхні  $S$ .

На підвищення густини рідини в елементі об'єму  $dx dy dz$  на величину  $d\rho$  за одиницю часу піде кількість рідини  $\frac{\partial\rho}{\partial t} dx dy dz$ , а отже, загальна кількість рідини, яка йде на підвищення густини в об'ємі  $G$  за одиницю часу, буде становитиме

$$\iiint_G \frac{\partial\rho}{\partial t} dx dy dz.$$

Прирівнюючи цю кількість рідини до величини  $q$  і беручи до уваги, що  $G$  — довільний об'єм, одержуємо так зване *рівняння нерозривності*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = f(t, x, y, z). \quad (4.3)$$

Розглянемо тепер усталений (стаціонарний) потік нестисливої рідини, тобто рідини з постійною густиною. Нехай рух рідини потенціальний, інакше кажучи, швидкість  $\vec{v}(t, x, y, z)$  є потенціальним вектором

$$\vec{v}(x, y, z) = -\operatorname{grad} u(x, y, z), \quad (4.4)$$

де  $u(x, y, z)$  — потенціальна функція потоку. Тоді, підставивши (4.4) в рівняння нерозривності (4.3), дістанемо

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \equiv \Delta u(x, y, z) = -\frac{f(x, y, z)}{\rho},$$

тобто знову прийшли до рівняння Пуассона.

### 4.3 Стаціонарне теплове поле.

#### Постановка крайових задач для рівнянь еліптичного типу

Вивчаючи рівняння параболічного типу, ми показали, що процес розподілу температури в однорідному тілі описується диференціальним рівнянням

$$u_t = a^2 \Delta u(t, x, y, z) + f(t, x, y, z).$$

Якщо ж розглянути стаціонарний процес розподілу температури, то  $u = u(x, y, z)$ , і інтенсивність внутрішніх джерел теплоти також не залежатиме від часу, тобто дістанемо

$$\Delta u(x, y, z) = -\frac{1}{a^2} f(x, y, z). \quad (4.5)$$

Отже, всі розглянуті стаціонарні процеси описуються рівнянням еліптичного типу.

Найпростішим і найпоширенішим рівнянням еліптичного типу є  $n$ -вимірне рівняння Лапласа

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0. \quad (4.6)$$

Позначимо через  $D$  область, обмежену кусково-гладкою замкненою поверхнею  $S$ , а через  $D^*$  — частину простору, що лежить поза  $D$ .

► **Означення 4.1.** Функцію  $u(x_1, \dots, x_n)$  називають **гармонічною в обмеженій області  $D$**  (рис. 4.1), якщо  $u \in C^2(D)$  і є розв'язком рівняння Лапласа (4.6).

Функцію  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називають **гармонічною в необмеженій області  $D^*$** , якщо в кожній точці цієї області, яка знаходиться на скінченній відстані від початку координат, функція два рази неперервно диференційовна, задовольняє рівняння Лапласа й для досить великих  $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  справедлива нерівність

$$|u(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \frac{C}{r^{n-2}}, \quad (4.7)$$

де  $C$  — деяка стала.

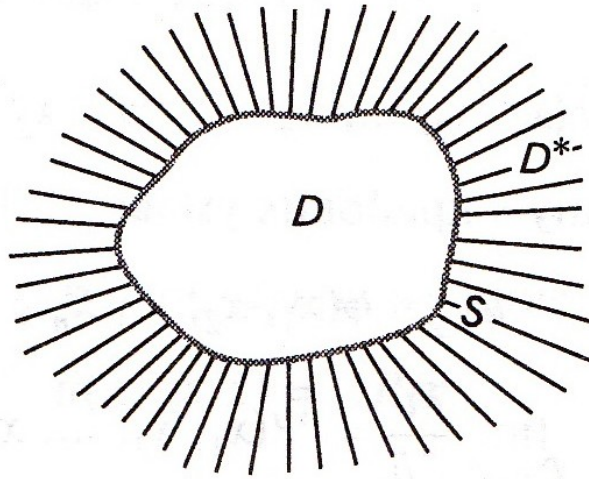


Рис. 4.1:

Зауважимо: у випадку двовимірного простору умова (4.7) означає, що гармонічна функція в необмеженій області  $D^*$  має бути обмеженою.

Умову (4.7) інколи ще називають *умовою регулярності на нескінченності*.

Очевидно, що для однозначного описання досліджуваного стаціонарного фізичного процесу потрібно враховувати й режим на краю розглядуваної області, тобто до рівняння еліптичного типу необхідно приєднати відповідні крайові умови.

Як приклад розглянемо стаціонарний процес розподілу температури в однорідному середовищі  $D$ , що обмежене кусково-гладкою поверхнею  $S$ , якщо інтенсивність внутрішніх джерел тепла дорівнює  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а на поверхні  $S$  задано:

- а) або температуру  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
- б) або тепловий потік  $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
- в) або теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого  $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Щоб визначити температуру  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у довільній точці області  $D$ , потрібно в класі функцій  $C^2(D) \cap C(D)$  знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.8)$$

який задовольняє одну з крайових умов:

$$u|_S = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.9)$$

$$\lim_{P \rightarrow P'} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (4.10)$$

$$\lim_{P \rightarrow P'} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + K_1 [u - \omega(x_1, \dots, x_n)] = 0 \quad (4.11)$$

на поверхні  $S$ , де точка  $P \in D$ , а  $P' \in S$ ;  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\omega(x_1, \dots, x_n)$  — відомі на  $S$  функції;  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до  $S$ ;  $K_1$  — коефіцієнт зовнішньої теплопровідності.

Задача (4.8), (4.9) називається *першою внутрішньою крайовою задачею Діріхле*, задача (4.8), (4.10) — *другою внутрішньою крайовою задачею Неймана*, а задача (4.8), (4.11) — *третьою внутрішньою крайовою задачею* для рівнянь еліптичного типу.

Аналогічно ставляться крайові задачі для рівнянь еліптичного типу й у випадку необмеженої області  $D^*$  (зовнішньої щодо поверхні  $S$ ), тільки додатково вимагається виконання умови регулярності на нескінченності (4.7). У цьому разі відповідна перша, друга й третя крайові задачі називають зовнішніми.

Зауважимо: якщо розв'язок рівняння (4.8) шукається у класі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ , то крайові умови (4.10), (4.11) матимуть вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_S = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + K_1(u - \omega(x_1, \dots, x_n)) \right] \Big|_S = 0.$$

Щодо умови (4.7), то її виконання вимагається для однозначності розв'язку відповідної зовнішньої крайової задачі для рівняння Лапласа.

Наприклад, якщо

$$D^* = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > R^2, \quad R = \text{const}\},$$

то розв'язок зовнішньої задачі Діріхле

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in D^*,$$

$$u \Big|_S = A = \text{const}, \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

(4.12)

у разі виконання умови регулярності на нескінченності буде

$$u(x, y, z) = \frac{AR}{r}.$$

Якщо ж виконання умови (4.7) не вимагається, то задача (4.12) матиме й розв'язок  $u(x, y, z) = A$ .

Сформульовані вище три крайові задачі є основними в теорії рівнянь еліптичного типу. Разом із цим зазначимо, що на практиці коло задач для рівнянь еліптичного типу є значно ширше.

Як узагальнення основних крайових задач можна розглянути задачу відшукування в  $D$  розв'язку рівняння (4.8), коли на одній частині поверхні  $S$  задано умову (4.9), на другій — умову (4.10), а на третій — умову (4.11).

#### 4.4 Оператор Лапласа у сферичних і циліндричних координатах

Розглянемо допоміжне питання про представлення рівняння Лапласа в різних системах координат. Ці представлення використаємо в подальших міркуваннях.

Сферичні координати  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  пов'язані з декартовими співвідношеннями (рис. 4.2)

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (4.13)$$

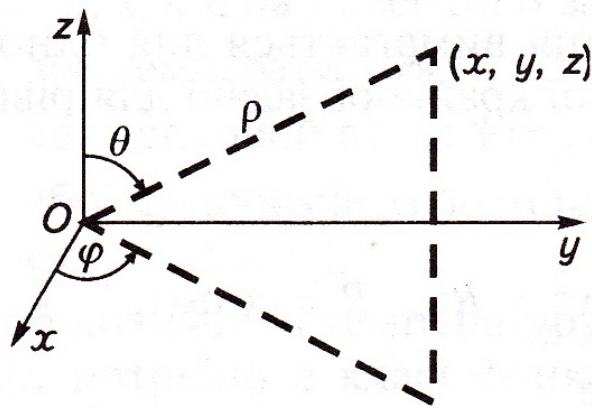


Рис. 4.2:

Очевидно, що перетворення незалежних змінних (4.13) є невинудженим. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\rho}, & \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\rho}, & \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \frac{z}{\rho}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\rho}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\rho}, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sin \theta}{\rho}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sin \varphi}{\rho \sin \theta}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \theta}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \\ \Delta \rho &= \frac{2}{\rho}, & \Delta \theta &= \frac{\cos \theta}{\rho^2 \sin \theta}, & \Delta \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні у вираз для оператора Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y, z) &= l(\rho, \rho)u_{\rho\rho} + l(\theta, \theta)u_{\theta\theta} + l(\varphi, \varphi)u_{\varphi\varphi} + 2l(\rho, \theta)u_{\rho\theta} + \\ &+ 2l(\theta, \varphi)u_{\theta\varphi} + 2l(\rho, \varphi)u_{\rho\varphi} + \Delta \rho u_{\rho} + \Delta \theta u_{\theta} + \Delta \varphi u_{\varphi}, \end{aligned}$$



де  $l(v, \omega) = v_x \omega_x + v_y \omega_y + v_z \omega_z$ , дістанемо

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.14)$$

У випадку циліндричних координат  $\rho$ ,  $\varphi$  і  $z$  (рис. 4.3) маємо:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ . Повторюючи попередні міркування, дістаємо вираз для рівняння Лапласа в циліндричних координатах

$$\Delta u \equiv u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0.$$

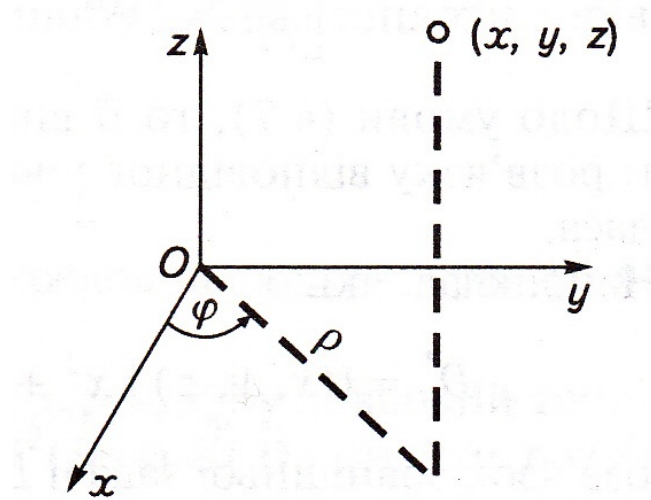


Рис. 4.3:

Якщо задано рівняння Лапласа в двовимірному просторі, тобто  $u = u(x, y)$ , то з останнього рівняння одержуємо його вираз у полярній системі координат

$$\Delta u \equiv u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

## Тема 2

### ВЛАСТИВОСТІ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

#### 4.5 Принцип максимуму та його наслідки

На проміжку  $(a, b)$  розглянемо рівняння Лапласа в одновимірному просторі  $u''(x) = 0$ . Зінтегрувавши його, дістанемо сім'ю прямих  $u(x) = C_1 x + C_2$ .

Очевидно, свого найбільшого та найменшого значень вони досягають на кінцях відрізка  $[a, b]$ . Виявляється, цю властивість мають гармонічні функції і в багатовимірному просторі.

Надалі для простоти викладок розглядатимемо в основному три- та двовимірний простори.

**Теорема 4.1.** *Гармонічна в обмеженій області  $D$  і неперервна в  $\bar{D} = D \cup S$  функція  $u(x, y, z)$  набуває свого найбільшого та найменшого значень на краю області  $S$ .*

**Доведення.** Позначимо через  $m$  найбільше значення гармонічної функції на краю  $S$  і припустимо, що в деякій точці  $(x_0, y_0, z_0) \in D$

$$u(x_0, y_0, z_0) = M > m.$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$v(x, y, z) = u(x, y, z) + \frac{M - m}{2d^2} r_0^2,$$

де  $d$  — діаметр області  $D$ ;  $r_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ .

Із нерівності  $r_0^2 \leq d^2$  випливає, що на поверхні  $S$

$$v(x, y, z) \leq m + \frac{M - m}{2d^2} d^2 = \frac{M + m}{2} < M,$$

а  $v(x_0, y_0, z_0) = M$ . Звідси дістаємо, що функція  $v(x, y, z)$  свого найбільшого значення досягає також в деякій внутрішній точці області  $D$ . Нехай ця точка буде  $(x_1, y_1, z_1)$ . Тоді в ній функція  $v(x_1, y_1, z_1)$  досягає максимуму, а отже, в точці  $(x_1, y_1, z_1)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leq 0,$$

тобто  $\Delta v(x_1, y_1, z_1) \leq 0$ .

З іншого боку,

$$\Delta v(x, y, z) = \Delta u(x, y, z) + \frac{M - m}{2d^2} \Delta r_0^2 = 3 \frac{M - m}{d^2} > 0$$

для всіх  $(x, y, z) \in D$ , в тому числі й для  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Ця суперечність показує, що для всіх точок  $(x, y, z) \in D$

$$u(x, y, z) \leq \sup_S u(x, y, z).$$

Для доведення нерівності

$$u(x, y, z) \geq \inf_S u(x, y, z)$$

достатньо застосувати добутий результат до гармонічної функції  $-u(x, y, z)$ , і теорему доведено.

Із доведення теореми випливає, що гармонічна функція в області  $D$  не має екстремумів.

**Наслідок 1.** Нехай функції  $u(x, y, z)$  і  $v(x, y, z)$  гармонічні в  $D$  і неперервні в  $\bar{D}$ . Якщо  $u(x, y, z) \leq v(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in S$ , то ця нерівність справедлива для всіх  $(x, y, z) \in D$ .

**Доведення.** Функція  $\omega(x, y, z) = u(x, y, z) - v(x, y, z)$  гармонічна в  $D$  і неперервна в  $\bar{D}$ . Згідно з умовою наслідку  $\omega(x, y, z) \leq 0$  при  $(x, y, z) \in S$ . На підставі принципу максимуму  $\omega(x, y, z) \leq \sup_S \omega(x, y, z) \leq 0$  для всіх  $(x, y, z) \in D$ , і наслідок доведено.

**Наслідок 2.** Нехай функції  $u(x, y, z)$  і  $v(x, y, z)$  гармонічні в  $D$  і неперервні в  $\bar{D}$ . Якщо  $|u(x, y, z)| \leq v(x, y, z)$  на краю  $S$ , то ця нерівність виконується для всіх  $(x, y, z) \in D$ .

**Доведення.** На краю  $S$  області  $D$  маємо

$$-v(x, y, z) \leq u(x, y, z) \leq v(x, y, z).$$

Застосувавши двічі наслідок 1, дістанемо, що дана нерівність виконується всюди в  $D$ .

**Теорема 4.2.** Якщо послідовність  $\{u_i(x, y, z)\}$  гармонічних в  $D$  і неперервних в  $\bar{D}$  функцій збігається рівномірно на краю  $S$ , то вона збігається рівномірно й усюди в області  $D$ .

**Доведення.** Унаслідок рівномірної збіжності послідовності  $\{u_i(x, y, z)\}$  на краю  $S$  маємо, що для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке число  $N$ , що як тільки  $i_1, i_2 > N$ , то  $|u_{i_1}(x, y, z) - u_{i_2}(x, y, z)| < \varepsilon$  для всіх  $(x, y, z) \in S$ . Оскільки  $\varepsilon$  є гармонічною функцією, то згідно з наслідком 2 із принципу максимуму випливає, що остання нерівність справедлива всюди в області  $D$ , якщо вона справджується на краю  $S$ . Але тоді на підставі критерію Коші можемо стверджувати, що послідовність функцій  $\{u_i(x, y, z)\}$  рівномірно збігається в області  $D$ .

**Теорема 4.3.** Якщо внутрішня або зовнішня задачі Діріхле має розв'язок, то цей розв'язок єдиний.

**Доведення.** Розглянемо внутрішню задачу Діріхле. Припустимо, що в області  $D$  існують два розв'язки  $u_1(x, y, z)$  і  $u_2(x, y, z)$  однієї і тієї самої задачі Діріхле

$$\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z), \quad (4.15)$$

$$u|_S = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S. \quad (4.16)$$

Тоді функція  $v(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$  буде гармонічною в  $D$ , а на краю  $S$   $v(x, y, z) \equiv 0$ . Звідси на підставі принципу максимуму  $v(x, y, z) \equiv 0$

всюди в  $D$ , оскільки в протилежному разі гармонічна функція  $v(x, y, z)$  досягла б найбільшого або найменшого значення в деякій внутрішній точці області  $D$ , що неможливо.

Розглянемо тепер задачу Діріхле (4.15), (4.16) в області  $D^*$  і також припустимо, що вона має два розв'язки:  $u_1(x, y, z)$  і  $u_2(x, y, z)$ . Тоді гармонічна в  $D^*$  функція  $v(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$  на  $S$  тотожно дорівнює нулю, і згідно з умовою регулярності на нескінченності вона прямує до нуля, коли точка  $M(x, y, z) \rightarrow \infty$ , тобто для всякого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $R$ , що як тільки відстань точки  $M$  від початку координат  $r \geq R$ , то  $|v(M)| < \varepsilon$ .

Нехай  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  — довільна точка області  $D^*$ . Проведемо сферу  $S_r$  із центром у початку координат і радіусом  $r \geq R$  настільки великим, щоб точка  $P_0$  і поверхня  $S$  знаходились усередині сфери. На  $S_r$  буде  $|v(M)| < \varepsilon$ , а на поверхні  $S - v(x, y, z) \equiv 0$ . Тоді, застосувавши наслідок 2 до області, обмеженої поверхнями  $S$  і  $S_r$ , дістанемо, що  $|v(P_0)| < \varepsilon$ . Унаслідок довільності  $\varepsilon > 0$  і точки  $P_0$  звідси випливає, що  $v(x, y, z) \equiv 0$  для всіх  $(x, y, z) \in D^*$ .

Зауважимо, що останні міркування справедливі тільки у випадку, коли вимірність розглядуваного простору  $n \geq 3$ .

Для доведення єдиності розв'язку зовнішньої задачі Діріхле у випадку площини здійснимо перетворення незалежних змінних за формулами

$$\xi = \frac{x}{r^2}, \quad \eta = \frac{y}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (4.17)$$

Перетворення (4.17) називається *інверсією*. Внаслідок інверсії область  $D^*$  з краєм  $S$  переходить в обмежену область  $D'$  з краєм  $S'$ , а нескінченно віддалена точка відобразиться в точку  $(0, 0)$ . Не зменшуючи загальності міркувань, будемо вважати, що точка  $(0, 0) \in D'$ .

Розглянемо функцію  $\omega(\xi, \eta) = v(\xi/r_1^2, \eta/r_1^2)$ ,  $r_1^2 = \xi^2 + \eta^2$ . Якщо функція  $v(x, y)$  гармонічна в області  $D^*$ , то  $\omega(\xi, \eta)$  гармонічна в  $D'$ . Дійсно, беручи до уваги, що  $x = \xi/r_1^2$ ,  $y = \eta/r_1^2$ , маємо

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \frac{\eta^2 - \xi^2}{r_1^4} v_x - \frac{2\xi\eta}{r_1^4} v_y, & \omega_\eta &= -\frac{2\xi\eta}{r_1^4} v_x + \frac{\xi^2 - \eta^2}{r_1^4} v_y, \\ \omega_{\xi\xi} &= \left( \frac{\eta^2 - \xi^2}{r_1^4} \right)^2 v_{xx} - 4 \frac{\xi\eta(\eta^2 - \xi^2)}{r_1^8} v_{xy} + 4 \frac{\xi^2\eta^2}{r_1^8} v_{yy} + \\ &\quad + 2 \frac{\xi^3 - 3\xi\eta^2}{r_1^6} v_x - 2 \frac{\eta^3 - 3\xi^2\eta}{r_1^6} v_y, \\ \omega_{\eta\eta} &= 4 \frac{\xi^2\eta^2}{r_1^8} v_{xx} - 4 \frac{\xi\eta(\xi^2 - \eta^2)}{r_1^8} v_{xy} + \frac{(\xi^2 - \eta^2)^2}{r_1^8} v_{yy} - \\ &\quad - 2 \frac{\xi^3 - 3\xi\eta^2}{r_1^6} v_x + 2 \frac{\eta^3 - 3\xi^2\eta}{r_1^6} v_y. \end{aligned}$$

Отже,

$$\Delta\omega(\xi, \eta) = r^4\Delta v(x, y) \equiv 0, \quad (\xi, \eta) \in D'. \quad (4.18)$$

Оскільки

$$\omega(\xi, \eta)|_{S'} = v|_S = 0, \quad (4.19)$$

то згідно з доведеним вище задача Діріхле (4.18), (4.19) у  $D'$  має тільки нульовий розв'язок, а отже, і  $v(x, y) = \omega(x/r^2, y/r^2) \equiv 0$  при  $(x, y) \in D^*$ .

**Теорема 4.4. (про неперервну залежність розв'язку задачі Діріхле від крайової умови).** Нехай  $u(x, y, z)$  — розв'язок задачі Діріхле (4.15), (4.16), а  $v(x, y, z)$  — розв'язок рівняння (4.15), який задовольняє крайову умову  $v|_S = \varphi_1(x, y, z)$ . Тоді, якщо  $|\varphi(x, y, z) - \varphi_1(x, y, z)| < \varepsilon$ , то  $|u(x, y, z) - v(x, y, z)| < \varepsilon$  всюди в області  $D$ .

**Доведення.** Функція  $\omega(x, y, z) \equiv u(x, y, z) - v(x, y, z)$  є гармонічною в області  $D$ , а на поверхні  $S$   $|\omega(x, y, z)| < \varepsilon$ . Тоді згідно з наслідком 2  $|\omega(x, y, z)| < \varepsilon$  для всіх  $(x, y, z) \in \bar{D}$ , і теорему доведено.

□ **Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа.** В  $n$ -вимірному просторі розглянемо функцію

$$\Omega(P, M) = \begin{cases} \frac{r_{PM}^{2-n}}{n-2}, & n > 2, \\ -1nr_{PM}, & n = 2, \end{cases} \quad (4.20)$$

де  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  і  $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  — довільні точки розглядуваного простору, а  $r_{PM} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}$  — відстань між ними. Покажемо, що функція

$\Omega(P, M)$  є розв'язком рівняння Лапласа при  $P \neq M$  як за  $P$ , так і за  $M$ . Справді, при  $P \neq M$  із (4.20) дістанемо

$$\frac{\partial^2 \Omega(P, M)}{\partial x_i^2} = nr_{PM}^{-n-2}(x_i - \xi_i)^2 - r_{PM}^{-n}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння Лапласа, матимемо

$$\Delta\Omega(P, M) = \sum_{i=1}^n [nr_{PM}^{-n-2}(x_i - \xi_i)^2 - r_{PM}^{-n}] = nr_{PM}^{-n} - nr_{PM}^{-n} = 0,$$

тобто,  $\Omega(P, M)$  як функція точки  $P$  при  $P \neq M$  і  $n > 2$  є розв'язком рівняння Лапласа. Оскільки  $\Omega(P, M)$  є симетрична відносно точок  $P$  і  $M$ , то можемо стверджувати, що ця функція задовольняє рівняння Лапласа й за  $M$ , коли  $M \neq P$ .

Аналогічно можна показати, що при  $n = 2$  і  $P \neq M$  функція (4.20) також задовольняє рівняння Лапласа.

Визначена за формулою (4.20) функція  $\Omega(P, M)$  називається *елементарним або фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа*.

◇ **Зауваження 4.1.** На практиці часто трапляється задача Діріхле з розривними крайовими умовами. В цьому разі неперервна функція в замкнутій області не може бути розв'язком цієї задачі. В зв'язку з цим необхідно уточнити постановку першої крайової задачі у розглядуваному випадкові.

Нехай на поверхні  $S$ , яка обмежує область  $D$ , задано кусково-неперервна функцію  $\varphi(P')$ .

**Постановка задачі Діріхле:** в класі функцій  $C^2(D)$  знайти розв'язок рівняння Пуассона, який неперервно примикає до заданої на краю  $S$  функції  $\varphi(P')$  у точках її неперервності і є обмеженим в замкненій області  $\bar{D} = D \cup S$ .

Зазначимо, що додаткова вимога обмеженості розв'язку  $u(P)$  в  $\bar{D}$  фактично стосується околів точок розриву функції  $\varphi(P')$ .

**Теорема 4.5.** Розв'язок задачі Діріхле з кусково-неперервними крайовими умовами єдиний.

**Доведення.** Нехай  $u_1(P)$  і  $u_2(P)$  — два розв'язки поставленої задачі. Тоді різниця  $u(P) = u_1(P) - u_2(P)$  буде гармонічною функцією в області  $D$  (рис. 4.4),

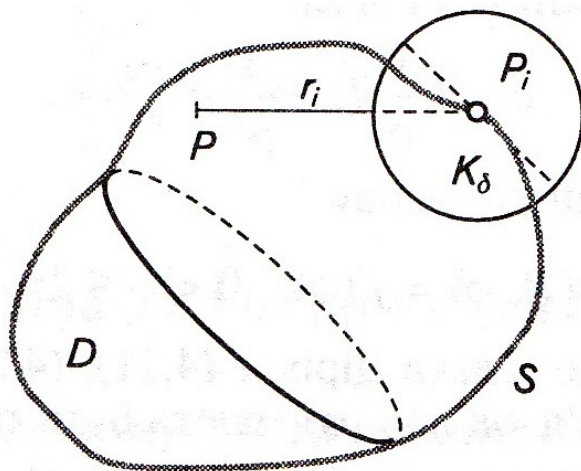


Рис. 4.4:

яка неперервно примикає до нульових крайових значень на  $S$ , за винятком точок розриву функції  $\varphi(P')$ , в яких вона може мати розрив, і є обмеженою в  $\bar{D}$ , тобто існує така стала  $A$ , що для всіх  $P \in \bar{D}$   $|u(P)| < A$ . Побудуємо гармонічну функцію

$$v(P) = \varepsilon \sum_{i=1}^m \frac{dr_i^{2-n}}{n-1} \quad \left( \nu(P) = \varepsilon \sum_{i=1}^m \ln \frac{d}{r_i}, \quad n = 2 \right),$$

де  $\varepsilon$  — довільне додатне число;  $d$  — діаметр області  $D$ ;  $r_i$  — відстань розглядуваної точки  $P$  до  $i$ -ї точки розриву  $P_i$ . Вважатимемо, що  $n = 3$ . Функція  $v(P)$  додатна, тому що всі доданки більші за нуль.

Побудуємо в кожній точці розриву  $P_i$  кулю  $K_\delta(P_i)$  такого радіуса  $\delta < 1$ , щоб кожен доданок  $\varepsilon dr_i^{-1}$  на відповідній сфері  $S_\delta(P_i)$  був більший за  $A$ , тобто щоб  $\varepsilon d\delta^{-1} \geq A$ . Функція  $u(P)$  неперервна в замкнутій області  $\bar{D} \setminus \sum_{i=1}^m K_\delta(P_i) = \bar{D}_1$  і  $|u(P)| \leq v(P)$  на краю цієї області. Внаслідок принципу максимуму остання нерівність справедлива всюди в області  $\bar{D}_1$ .

Зафіксувавши довільну точку  $P \in D$  і спрямувавши  $\varepsilon \rightarrow 0$ , дістанемо  $\lim v(P) = 0$ . Оскільки  $u(P)$  не залежить від  $\varepsilon$ , то із нерівності  $|u(P)| \leq v(P)$  і добутої границі випливає справедливність твердження теореми, тобто  $u(P) = u_1(P) - u_2(P) = 0$ , коли  $P \in D$ .

#### 4.6 Існування розв'язку задачі Діріхле для круга. Метод Фур'є

Метод відокремлення змінних Фур'є, який було розглянуто в розд. 2 і 3, застосовується й до інтегрування задачі Діріхле у випадку таких простих областей, як круг, кільце, прямокутник і т.д. Тут методом Фур'є розв'яжемо задачу Діріхле для круга.

**Постановка задачі:** в крузі радіусом  $R$  із центром в початку координат знайти гармонічну функцію  $u(\rho, \varphi)$ , яка на краю круга  $\rho = R$  рівна  $f(\varphi)$ , тобто в області  $K_R = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \rho < R, 0 < \varphi \leq 2\pi\}$  знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (4.21)$$

який задовольняє крайову умову

$$u(R, \varphi) = f(\varphi), \quad 0 < \varphi \leq 2\pi. \quad (4.22)$$

У зв'язку з тим, що задача Діріхле (4.21), (4.22) може мати єдиний розв'язок,  $f(\varphi)$  і розв'язок  $u(\rho, \varphi)$  мають бути періодичними з періодом  $2\pi$  функціями за  $\varphi$ .

Нетривіальні розв'язки рівняння (4.21) шукаємо у вигляді

$$u(\rho, \varphi) = X(\rho)Y(\varphi) \neq 0. \quad (4.23)$$

Підставивши (4.23) у рівнянні Лапласа (4.21) та відокремивши змінні, дістанемо

$$Y''(\varphi) + \lambda Y(\varphi) = 0; \quad (4.24)$$

$$\rho^2 X(\rho) + \rho X'(\rho) - \lambda X(\rho) = 0, \quad (4.25)$$

де  $\lambda$  — довільна стала. Очевидно,  $Y(\varphi) = Y(\varphi + 2\pi)$ .

Отже, потрібно знайти ті значення параметра  $\lambda$ , за яких рівняння (4.24) має ненульові періодичні з періодом  $2\pi$  розв'язки (власні значення) й побудувати ці розв'язки (власні функції). Легко бачити, що розв'язки рівняння

(4.24), які відповідають двом різним власним значенням, ортогональні на відрізку  $[0, 2\pi]$ . Покажемо, що всі власні значення  $\lambda$  дійсні. Для цього припустимо супротивне: нехай  $\lambda = \alpha + i\beta$  є власним значенням, а відповідна йому власна функція буде  $Y(\varphi) = u(\varphi) + iv(\varphi)$ . Тоді виконується тотожність

$$u''(\varphi) + iv''(\varphi) + (\alpha + i\beta)(u(\varphi) + iv(\varphi)) \equiv 0,$$

а отже,

$$u''(\varphi) + \alpha u(\varphi) - \beta v(\varphi) \equiv 0,$$

$$i[v''(\varphi) + \alpha v(\varphi) + \beta u(\varphi)] \equiv 0.$$

Віднімаючи почленно ці тотожності, дістаємо

$$u''(\varphi) - iv''(\varphi) + (\alpha - i\beta)(u(\varphi) - iv(\varphi)) \equiv 0,$$

тобто  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  є власним значенням, а відповідна йому власна функція буде  $\bar{Y}(\varphi) = u(\varphi) - iv(\varphi)$ . Унаслідок ортогональності власних функцій має бути

$$\int_0^{2\pi} Y(\varphi)\bar{Y}(\varphi)d\varphi = 0.$$

Але

$$\int_0^{2\pi} Y(\varphi)\bar{Y}(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} [u^2(\varphi) + v^2(\varphi)] d\varphi \neq 0,$$

отже, власні значення не можуть бути комплексними.

Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді з (4.24) маємо  $Y(\varphi) = C_1\varphi + C_2$ . Для виконання умови періодичності потрібно покласти  $C_1 = 0$ , і ми дістанемо

$$Y(\varphi) = C_2. \tag{4.26}$$

При  $\lambda > 0$  ненульових періодичних розв'язків рівняння (4.24) не має.

Нехай  $\lambda < 0$ . Тоді, зінтегрувавши (4.24), дістанемо загальний розв'язок  $Y(\varphi) = C_3 \cos \sqrt{\lambda}\varphi + C_4 \sin \sqrt{\lambda}\varphi$ , який буде періодичним із періодом  $2\pi$ , якщо  $\sqrt{\lambda} = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Отже, ненульовими періодичними з періодом  $2\pi$  розв'язками рівняння (4.24) будуть функції

$$Y_n(\varphi) = C_3 \cos n\varphi + C_4 \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{4.27}$$

Підставивши добуті значення  $\lambda$  у рівняння (4.25), матимемо

$$\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) - n^2 X(\rho) = 0. \tag{4.28}$$



Рівняння (4.28) — це рівняння Ейлера, й підстановкою  $\rho = e^t$  воно зводиться до вигляду

$$X''(t) - n^2 X(t) = 0,$$

звідки

$$X_n(t) = \begin{cases} C_5 e^{-nt} + C_6 e^{nt}, & n > 0, \\ C_7 t + C_8, & n = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

або

$$X_n(\rho) = \begin{cases} C_5 \rho^{-n} + C_6 \rho^n, & n > 0, \\ C_7 \ln \rho + C_8, & n = 0. \end{cases}$$

Для того щоб функція (4.29) у крузі  $0 \leq \rho < R$  була неперервною, треба покласти  $C_5 = C_7 = 0$ . Таким чином,

$$X_n(\rho) = C_6 \rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

Підставляючи (4.27) і (4.30) у (4.23), дістаємо

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $a_n = C_3 C_6$ ;  $b_n = C_4 C_6$ .

Унаслідок лінійності та однорідності рівняння Лапласа сума частинних розв'язків

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (4.31)$$

також буде розв'язком рівняння Лапласа, якщо ряд (4.31) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі за  $\rho$  і  $\varphi$  в області  $K_R$ . Припустимо, що ці умови виконуються. Тоді для визначення розв'язку задачі Діріхле (4.21), (4.22) залишилось так вибрати коефіцієнти  $a_n$  і  $b_n$ , щоб ряд (4.31) задовольняв і крайову умову (4.22), на підставі якої

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Ми дістали представлення функції  $f(\varphi)$  на відрізку  $[0, 2\pi]$  рядом Фур'є. З математичного аналізу відомо: якщо функція  $f(\varphi)$  періодична, неперервна й кусково-диференційовна на відрізку  $[0, 2\pi]$ , то її ряд Фур'є в кожній точці  $\varphi \in [0, 2\pi]$  збігається й має суму, що дорівнює  $f(\varphi)$ , а коефіцієнти ряду

визначаються за формулами

$$\alpha_n = \alpha_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.32)$$

$$\beta_n = b_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (4.31), дістанемо формальний розв'язок поставленої задачі Діріхле

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \quad (4.33)$$

Для обґрунтування добутого розв'язку доведемо наступну теорему.

**Теорема 4.6.** Якщо функція  $f(\varphi)$  періодична з періодом  $2\pi$  і неперервна на відрізку  $[0, 2\pi]$ , то функція  $u(\rho, \varphi)$ , визначена рядом (4.33), є гармонічною в крузі  $K_R$  і неперервною в  $\bar{K}_R$ .

**Доведення.** Спочатку припустимо, що  $f(\varphi)$  є й кусково-диференційовною на відрізку  $[0, 2\pi]$ . Тоді, як відомо з теорії рядів Фур'є, ряд

$$\frac{|\alpha_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) \quad (4.34)$$

збігається. Оскільки

$$\left| \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \alpha_n \cos n\varphi \right| \leq |\alpha_n|, \quad \left| \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \beta_n \sin n\varphi \right| \leq |\beta_n|,$$

то зі збіжності ряду (4.34) випливає рівномірна збіжність ряду (4.33) всюди в  $\bar{K}_R$ , а отже,  $u(\rho, \varphi)$  є неперервною в  $\bar{K}_R$ .

Покажемо, що ряд (4.33) можна почленно диференціювати довільну кількість разів і за  $\rho$ , і за  $\varphi$  при  $\rho < R$ .

Здиференціюємо почленно (4.33)  $k$  разів по  $\varphi$ . Маємо

$$\frac{\partial^k u(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n n^k \left[ \alpha_n \cos \left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) + \beta_n \sin \left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (4.35)$$

Позначимо

$$M = \sup \{|\alpha_n|, |\beta_n|\}, \quad t = \frac{\rho}{R}$$

і розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k. \quad (4.36)$$

Для довільного  $\rho_0 < R$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_0^{n+1} (n+1)^k}{t_0^n n^k} = t_0 = \frac{\rho_0}{R} < 1,$$

а, отже, на підставі ознаки Д'Аламбера ряд (4.36) збігається при  $\rho < R$  (унаслідок довільності  $\rho_0$ ). Зі збіжності ряду (4.36) випливає рівномірна збіжність ряду (4.35), тобто ряд (4.33) можна почленно диференціювати довільну кількість разів за  $\varphi$  в крузі  $K_R$ . Аналогічно доводиться можливість почленного диференціювання ряду (4.33) за  $\rho$  в крузі  $K_R$ .

Таким чином, якщо функція  $f(\varphi)$  періодична з періодом  $2\pi$ , неперервна й кусково-диференційовна, то ряд (4.33) є розв'язком задачі Діріхле (4.21), (4.22).

Доведемо тепер, що розв'язок задачі Діріхле (4.21), (4.22) представляється у вигляді ряду (4.33) й у випадку довільної неперервної функції  $f(\varphi)$ . Для цього побудуємо послідовність неперервних і кусково-диференційовних функцій  $\{f_m(\varphi)\}$ , яка рівномірно збігається при  $\rho = R$  до функції  $f(\varphi)$ , і розглянемо задачу Діріхле

$$\Delta u_m(\rho, \varphi) = 0, \quad (\rho, \varphi) \in K_R, \quad (4.37)$$

$$u_m(R, \varphi) = f_m(\varphi), \quad 0 < \varphi \leq 2\pi.$$

Згідно з доведеним вище розв'язок задачі (4.37) набирає вигляду

$$u_m(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\alpha_n^{(m)} \cos n\varphi + \beta_n^{(m)} \sin n\varphi). \quad (4.38)$$

Оскільки послідовність функцій  $\{u_m(\rho, \varphi)\}$  рівномірно збігається при  $\rho = R$ , то вона рівномірно збігається всюди в  $K_R$  до неперервної функції  $u(\rho, \varphi)$ , причому  $u(R, \varphi) = f(\varphi)$ . Покажемо, що функція  $u(\rho, \varphi)$  представляється рядом (4.33), який, згідно з доведеним, є гармонічною функцією при  $\rho < R$ .

Нехай  $\alpha_n$  і  $\beta_n$  — коефіцієнти ряду Фур'є функції  $f(\varphi)$ . Тоді внаслідок рівномірної збіжності послідовності функцій  $\{f_m(\varphi)\}$  для всякого  $\varepsilon > 0$  і досить великого  $m$  буде  $|f(\varphi) - f_m(\varphi)| < \varepsilon/2$ , тобто для всіх  $n$

$$\left| \alpha_n - \alpha_n^{(m)} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi) - f_m(\varphi)| |\cos n\varphi| d\varphi < \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2} d\varphi = \varepsilon,$$

$$\left| \beta_n - \beta_n^{(m)} \right| < \varepsilon.$$

Беручи до уваги останні нерівності й (4.38), дістаємо

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) - u_m(\rho, \varphi) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} |\alpha_0 - \alpha_0^{(m)}| + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n (|\alpha_n - \alpha_n^{(m)}| + |\beta_n - \beta_n^{(m)}|) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \leq 2\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n = 2\varepsilon \left( 1 - \frac{\rho}{R} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

а отже, гранична функція  $u(\rho, \varphi)$  при  $\rho < R$  набирає вигляду ряду (4.33).

Теорему доведено.

◇ **Зауваження 4.2.** Якщо б ми шукали розв'язок зовнішньої задачі Діріхле, то для виконання умови регулярності на нескінченності в (4.29) потрібно було б покласти  $C_6 = C_7 = 0$ , і тоді ми дістали б розв'язок у вигляді

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{\rho} \right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (4.39)$$

де  $\alpha_n$  і  $\beta_n$  визначаються за (4.32).

Метод відокремлення змінних аналогічно використовується й при побудові розв'язку крайових задач для рівняння Лапласа у випадку областей вигляду кільця, кругового сектора, прямокутника тощо.

## 4.7 Інтеграл Пуассона

Зведемо розв'язок (4.33) до простішого вигляду. Для цього підставимо коефіцієнти Фур'є (4.32) у ряд (4.33) і змінимо порядок сумування та інтегрування. Дістанемо

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left\{ 0,5 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n (\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin \varphi) \right\} d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^m \cos [m(\psi - \varphi)] \right\} d\psi. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Позначимо  $\psi - \varphi = \omega$ . Беручи до уваги, що в крузі  $K_R t = \rho/R < 1$ , а  $\cos n\omega = Re e^{in\omega}$ , маємо

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\omega &= -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} t^n Re e^{in\omega} = -1 + 2Re \sum_{n=0}^{\infty} (te^{i\omega})^n = \\ &= -1 + 2Re \frac{1}{1 - te^{i\omega}} = -1 + 2Re \frac{1 - t \cos \omega + it \sin \omega}{(1 - t \cos \omega)^2 + t^2 \sin^2 \omega} = \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2 - 2t \cos \omega} = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\psi - \varphi)}. \end{aligned}$$

Підставляючи добутий результат у рівність (4.40), дістанемо

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\psi - \varphi)} d\psi. \quad (4.41)$$

Формула (4.41) називається *інтегралом Пуассона*, а підінтегральний вираз

$$K(\rho, \varphi, R, \psi) = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\psi - \varphi)}$$

— *ядром Пуассона*. Оскільки  $R > \rho$  і  $R^2 + \rho^2 > 2R\rho$ , то  $K(\rho, \varphi, R, \psi) > 0$ .

Інтеграл Пуассона (4.41) добуто з розв'язку (4.33) за умови, що  $\rho < R$ . Якщо  $R = \rho$ , то представлення (4.41) втрачає сенс. Однак покажемо, що інтеграл Пуассона задовольняє умову

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow R \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = f(\varphi_0). \quad (4.42)$$

Для цього спочатку доведемо справедливість рівності

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\rho, \varphi, R, \psi) d\psi = 1. \quad (4.43)$$

Вище було доведено, що при  $\rho < R$  виконується рівність

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\omega = \frac{1 - t^2}{1 + t^2 - 2t \cos \omega}.$$

Якщо  $t < 1$ , то ряд в лівій частині рівності збігається рівномірно й тому його можна почленно інтегрувати. Отже,

$$\int_0^{2\pi} d\omega + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \int_0^{2\pi} \cos n\omega d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{1 - t^2}{1 + t^2 - 2t \cos \omega} d\omega,$$

або

$$2\pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{\sin n\omega}{n} \Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{1-t^2}{1+t^2-2t\cos\omega} d\omega,$$

звідси випливає справедливість рівності (4.43).

На підставі (4.43) й інтеграла Пуассона (4.41) можемо стверджувати: якщо  $f(\varphi) = 1$ , то розв'язок задачі Діріхле (4.21), (4.22)  $u(\rho, \varphi) \equiv 1$ . (Цей результат випливає з теореми єдиності 4.5.)

Зауважимо: якщо функція  $F(x)$  неперервна й періодична з періодом  $2\pi$ , то для довільних  $\alpha$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(x) dx = \int_0^{2\pi} F(x) dx. \quad (4.44)$$

Справді,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(x) dx = \int_{\alpha}^0 F(x) dx + \int_0^{2\pi} F(x) dx + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(x) dx.$$

В останньому інтегралі введемо заміну  $x = t + 2\pi$ . Тоді

$$\int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(x) dx = \int_0^{\alpha} F(2\pi + t) dt = \int_0^{\alpha} F(t) dt = \int_0^{\alpha} F(x) dx,$$

а отже, з попередньої рівності дістаємо (4.44).

Покладемо в інтегралі Пуассона (4.41)  $\psi - \varphi = \omega$ ,  $d\psi = d\omega$ . Тоді, врахувавши періодичність функцій  $f(\psi)$  і  $\cos(\psi - \varphi)$ , на підставі (4.44), поклавши  $\alpha = -\pi$ , формулу (4.41) та рівність (4.43) запишемо у вигляді

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega + \varphi) K(\rho, \varphi, R, \psi) d\omega, \quad (4.45)$$

$$1 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} K(\rho, \varphi, R, \omega) d\omega. \quad (4.46)$$

Помножимо рівність (4.46) на  $f(\varphi_0)$  і віднімемо добутий результат від (4.45). Матимемо

$$u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\omega + \varphi) - f(\varphi_0)] K(\rho, \varphi, R, \psi) d\omega. \quad (4.47)$$

Унаслідок неперервності функції  $f(\varphi)$  для всякого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ , що як тільки  $|\omega| < \delta$  і  $|\varphi - \varphi_0| < \delta_1$ ,  $\delta_2 = \delta_1 + \delta$ , то  $|f(\omega + \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon/3$ .

У правій частині рівності (4.47) проміжок інтегрування  $(-\pi, \pi)$  розіб'ємо на три частини:  $(-\pi, -\delta)$ ,  $(-\delta, \delta)$ ,  $(\delta, \pi)$ , а інтеграли по цих проміжках позначимо через  $I_1, I_2, I_3$  відповідно.

Якщо  $|\varphi - \varphi_0| < \delta_1$ , то, враховуючи викладене вище,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(\omega + \varphi) - f(\varphi_0)| K(\rho, \varphi, R, \psi) d\omega \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\rho, \varphi, R, \psi) d\omega = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

На проміжку  $(-\pi, -\delta)$  буде  $\cos \omega \leq \cos \delta$ , а тому

$$\begin{aligned} R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \omega &\geq R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \delta = (R - \rho)^2 + \\ &+ 2\rho R(1 - \cos \delta) \geq 4\rho R \sin^2 \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Унаслідок неперервності  $f(\varphi)$  маємо  $|f(\omega + \varphi) - f(\varphi_0)| \leq M$ . Отже,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(\omega + \varphi) - f(\varphi_0)| K(\rho, \varphi, R, \psi) d\omega \leq \\ &\leq \frac{M(R^2 - \rho^2)}{8\pi R \rho \sin^2(\delta/2)} (\pi - \delta). \end{aligned}$$

Для інтеграла  $I_3$  оцінка аналогічна, тому при  $\rho \rightarrow R$   $|I_1| \rightarrow 0$  і  $|I_3| \rightarrow 0$ , тобто  $|I_1| < \varepsilon/3$ ,  $|I_3| < \varepsilon/3$  при  $\rho$  досить близьких до  $R$ .

Урахувавши добуті оцінки для інтегралів  $I_1, I_2$  та  $I_3$ , з (4.47) при  $\rho$  і  $\varphi$ , досить близьких до  $R$  і  $\varphi_0$  відповідно, маємо

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| = |I_1 + I_2 + I_3| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| < \varepsilon,$$

і виконання умови (4.42) доведено.

Отже, інтеграл Пуассона є розв'язком задачі Діріхле (4.21), (4.22). Повторюючи вищенаведені міркування, можна показати, що розв'язок зовнішньої задачі Діріхле для круга (4.39) зводиться до вигляду

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

Таким чином, всяку гармонічну в крузі  $K_R$  і неперервну в  $\bar{K}_R$  функцію  $u(x, y)$  можна представити у вигляді інтеграла Пуассона.

#### 4.8 Формула Гріна

У тривимірному просторі розглянемо область  $D$ , обмежену кусково-гладкою орієнтовною поверхнею  $S$ . Нехай функції  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  належать класу  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ . Інтегруючи наступні тотожності по області  $D$

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uv_y) + \frac{\partial}{\partial z}(uv_z) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z + u \Delta v,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv_x - vu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uv_y - vu_y) + \frac{\partial}{\partial z}(uv_z - vu_z) = u \Delta v - v \Delta u,$$

та застосовуючи до лівих частин добутих рівностей формулу Гауса–Остроградського, матимемо

$$\iint_S u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds = \iiint_D (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z + u \Delta v) dx dy dz, \quad (4.48)$$

$$\iint_S \left( u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) ds = \iiint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy dz, \quad (4.49)$$

де  $\vec{n}$  — зовнішня до  $S$  нормаль.

Формули (4.48), (4.49) називаються відповідно *першою* та *другою формулами Гріна*. Зауважимо, що область  $D$  може бути обмежена кількома замкнутими поверхнями  $S_i$ . Тоді у формулах Гріна  $S = \bigcup_i S_i$ .

Для функцій на площині справедливі аналогічні формули Гріна. Наприклад, друга формула Гріна (4.49) для плоскої області  $D$  з краєм  $\lambda$  має вигляд

$$\iint_D (u \Delta v(x, y) - v \Delta u(x, y)) dx dy = \oint_{\lambda} \left( u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dl.$$

За допомогою формул Гріна доводиться низка теорем теорії гармонічних функцій.

**Теорема 4.7.** Якщо гармонічна в обмеженій області  $D$  функція  $v(x, y, z) \in C^1(\bar{D})$ , то  $\iint_S \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds = 0$ .



Для доведення теореми достатньо в першій формулі Гріна (4.48) покласти  $u(x, y, z) = 1$  і врахувати, що  $\Delta v \equiv 0$ .

Із теореми випливає, що у випадку задачі Неймана для рівняння Лапласа функція  $\psi(x, y, z)$ , яка входить у крайову умову (4.45), має задовольняти умову  $\iint_S \psi(x, y, z) ds = 0$ . Якщо розглядати стаціонарний процес розподілу

температури в тілі  $D$ , то з фізичної погляду умова Пуассона  $\iint_S \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds = 0$

означає, що загальна кількість теплоти, яка проходить через замкнуту поверхню  $S$  тіла  $D$ , дорівнює нулю. Тому цю умову називають *умовою стаціонарності теплового поля*.

Розглянемо внутрішню задачу Неймана: в класі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z), \quad (4.50)$$

який на поверхні  $S$  задовольняє умову

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right|_S = \psi(x, y, z). \quad (4.51)$$

**Теорема 4.8.** *Розв'язок внутрішньої задачі Неймана (4.50), (4.51) визначається з точністю до довільної сталої.*

**Доведення.** Нехай  $u_1(x, y, z)$ ,  $u_2(x, y, z)$  - два розв'язки задачі Неймана (4.50), (4.51). Тоді функція

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$$

буде гармонічною в  $D$ , неперервно диференційовною в  $\bar{D}$  і  $\left. \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right|_S$ . Поклавши у формулі Гріна (4.48)  $v = u$  і врахувавши останні зауваження, дістанемо

$$\iiint_D (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz = 0$$

тобто  $u_x = u_y = u_z = 0$ , звідки  $u(x, y, z) = const$ .

Теорему доведено.

## 4.9 Основна формула теорії гармонічних функцій

Доведемо спочатку таку теорему.

**Теорема 4.9.** Якщо функція  $u(x, y, z)$  належить класу  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ , то має місце формула

$$\begin{aligned} Bu(M_0) = & \iint_S \left[ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] ds - \\ & - \iiint_D \frac{\Delta u(P)}{r_{PM_0}} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (4.52)$$

де  $M_0 = M_0(x, y, z)$ ;  $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ , а

$$B = \begin{cases} 0, & \text{якщо } M_0 \in E_3 \setminus \bar{D}, \quad E_3 - \text{весь простір,} \\ 4\pi, & \text{якщо } M_0 \in D, \\ 2\pi, & \text{якщо } M_0 \in S, \end{cases}$$

**Доведення.** 1. Нехай  $M_0 \in E_3 \setminus \bar{D}$ . Тоді функція  $1/r_{PM_0}$  є гармонічною в  $D$  і неперервною разом із частинними похідними 1-го порядку в  $\bar{D}$ . Поклавши в другій формулі Гріна  $v = 1/r_{PM_0}$ , дістанемо

$$\iiint_D \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \iint_S \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) ds,$$

тобто  $B = 0$ , якщо  $M_0 \in E_3 \setminus \bar{D}$ .

2. Нехай  $M_0 \in D$  (рис. 4.5).

Оскільки в нашому випадку функція  $v = (r_{PM_0})^{-1}$  перетворюється в нескінченність при  $P = M_0$ , то безпосередньо застосувати другу формулу Гріна до функцій  $u(x, y, z)$  і  $v = (r_{PM_0})^{-1}$  в області  $D$  не можна. Виріжемо із області  $D$  кулю малого радіуса  $\varepsilon$  з центром в точці  $M_0$  і позначимо її через  $D_\varepsilon(M_0)$ , а відповідну сферу — через  $S_\varepsilon(M_0)$ . Вважаємо, що  $D_\varepsilon(M_0) \cap S_\varepsilon(M_0) = \bar{D}_\varepsilon(M) \subset D$ .

Застосовуючи формулу Гріна (4.49) до функцій  $u$  і  $v = (r_{PM_0})^{-1}$  в області

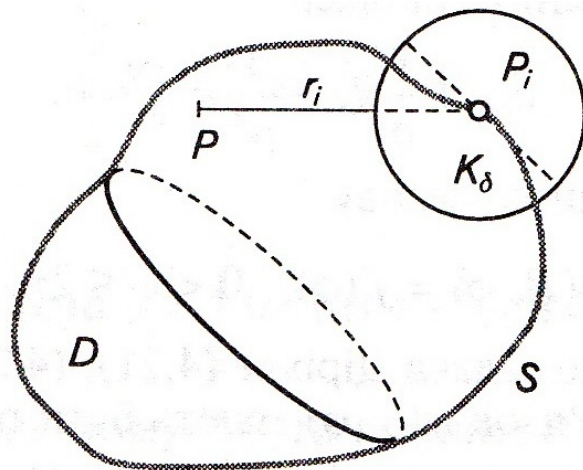


Рис. 4.5:

$D \setminus D_\varepsilon(M_0)$ , дістаємо

$$\begin{aligned} \iiint_{D \setminus D_\varepsilon(M_0)} \Delta uv \, d\xi \, d\eta \, d\zeta &= \iint_S \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) ds + \\ &+ \iint_{S_\varepsilon(M_0)} \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds - \iint_{S_\varepsilon(M)} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) ds. \end{aligned} \quad (4.53)$$

У правій частині рівності (4.53) тільки два останні інтеграли залежать від  $\varepsilon$ . Якщо точка  $P \in S_\varepsilon(M_0)$ , то  $r_{PM_0} = \varepsilon$ . На поверхні  $S_\varepsilon(M_0)$  нормаль  $\vec{n}$  і радіус кулі мають протилежні напрями, отже,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right|_{S_\varepsilon(M_0)} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Таким чином, застосовуючи теорему про середнє значення, матимемо

$$\begin{aligned} \iint_{S_\varepsilon(M_0)} \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds &= \frac{1}{\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon(M_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = 4\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)_{сер}, \\ \iint_{S_\varepsilon(M_0)} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \frac{1}{r_{PM_0}} ds &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon(M_0)} u ds = 4\pi u_{сер}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

де  $u_{сер}$  і  $\left( \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)_{сер}$  — середні значення функції  $u(P)$  і  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$  відповідно на поверхні  $S_\varepsilon(M_0)$ .

Зауважимо, що внаслідок умови теореми функції  $u(P)$  та її нормальна похідна на  $S_\varepsilon(M_0)$  обмежені. Оскільки

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{D \setminus D_\varepsilon(M_0)} \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u d\xi d\eta d\zeta = \iiint_D \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u d\xi d\eta d\zeta$$

за означенням невластного інтеграла, а  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{сеп} = u(M_0)$  то підставивши (4.54) у (4.53) і перейшовши до границі, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ , дістанемо

$$4\pi u(M_0) = \iint_S \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) ds - \iiint_D \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u d\xi d\eta d\zeta,$$

тобто  $B = 4\pi$ , коли  $M_0 \in D$ .

3. Припустимо, що точка  $M_0$  належить поверхні  $S$  і в цій точці поверхня  $S$  має дотичну площину з неперервними кутовими коефіцієнтами (рис. 4.6).

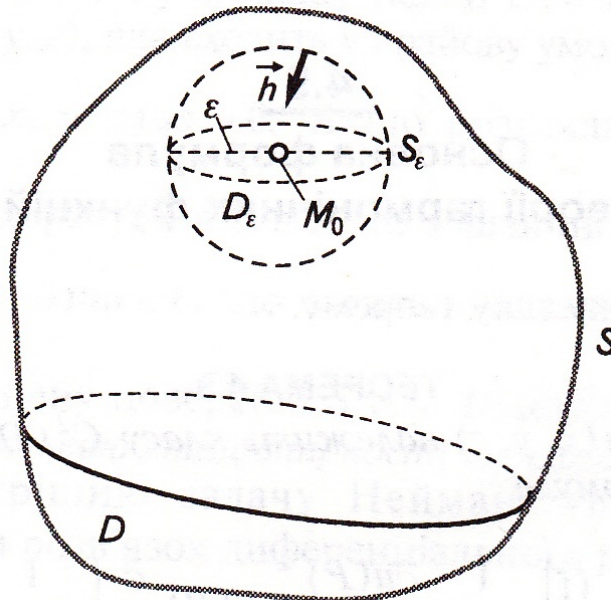


Рис. 4.6:

Проведемо сферу досить малого радіуса  $\varepsilon$  з центром в точці  $M_0$ . Частина поверхні  $S$ , яка лежить у кулі  $D_\varepsilon(M_0)$ , позначимо через  $S'$ ,  $D'_\varepsilon = D \cap D_\varepsilon(M_0)$ , а через  $S'_\varepsilon$  — частину поверхні сфери  $S_\varepsilon(M_0)$ , яка лежить в області  $D$ .

Згідно з другою формулою Гріна маємо

$$\begin{aligned} \iiint_{D \setminus D'_\varepsilon} \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u d\xi d\eta d\zeta &= \iint_{S \setminus S'} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) ds + \\ &+ \iint_{S'_\varepsilon} \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds - \iint_{S'_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) ds. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Повторюючи міркування, наведені в п.2, і беручи до уваги, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S'_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) ds = 2\pi u(M_0),$$

із (4.55) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  дістаємо

$$2\pi u(M_0) = \iint_S \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) ds - \iiint_D \frac{1}{r_{PM_0}} \Delta u d\xi d\eta d\zeta,$$

а отже, справедлива рівність (4.52).

Припустимо тепер, що функція  $u(x, y, z)$  гармонічна в  $D$  і належить класу  $C^1(\bar{D})$ . Тоді з (4.52) матимемо

$$2\pi u(M_0) = \iint_S \left[ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] ds. \quad (4.56)$$

Співвідношення (4.56) називається *основною формулою теорії гармонічних функцій*.

Формула (4.56) має місце й у випадку необмеженої області  $D^*$ .

**Наслідок.** *Всяка гармонічна функція в області гармонічності диференційовна необмежену кількість разів.*

Справедливість наслідку випливає з (4.56). Справді, точка  $P \in S$ , а  $M_0(x, y, z) \in D$ . Отже, функція  $(r_{PM_0})^{-1}$  є неперервною на  $S$  і має неперервні похідні довільного порядку за  $x, y, z$ , а функції  $u(P)$  і  $\frac{du(P)}{d\vec{n}}$  від точки  $M_0$  на  $S$  не залежать. Отже, інтеграл (4.56) можна диференціювати за  $x, y, z$ , як за параметрами, необмежену кількість разів.

Зауважимо: якщо функція  $u(x, y, z)$  гармонічна в  $D$ , але  $u \notin C^1(\bar{D})$ , то наслідок все одно залишається справедливим. Для цього за поверхню  $S$  у (4.56) достатньо взяти поверхню, яка обмежує область  $D_1 \ni M_0$  і повністю міститься в  $D$ .

Із наслідку випливає справедливість такого твердження: якщо функція  $u(x, y, z)$  гармонічна в області  $D$ , то будь-яка її похідна вигляду  $\frac{\partial^{n_1+n_2+n_3} u(x, y, z)}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3}}$  також буде гармонічною в цій області.

**Теорема 4.10. (про середнє значення).** *Якщо функція  $u(x, y, z)$  гармонічна в  $D$ , а  $M_0$  — деяка внутрішня точка області  $D$ , то значення гармонічної функції в точці  $M_0$  рівне середньому значенню цієї функції на довільній сфері  $S_a(M_0)$  радіуса  $a$  із центром у  $M_0$ , якщо сфера  $S_a(M_0)$  не виходить за межі  $D$ , тобто*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_a(M_0)} u(P) ds. \quad (4.57)$$

**Доведення.** Застосовуємо формулу (4.56) до сфери  $S_a(M_0)$ . Маємо

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a(M_0)} \left[ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] ds. \quad (4.58)$$

Беручи до уваги, що на сфері  $S_a(M_0)$

$$(r_{PM_0})^{-1} = a^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \Big|_{S_a(M_0)} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a^2},$$

$$\iint_{S_a(M_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = 0,$$

з (4.58) одразу дістаємо формулу (4.57).

Теорему доведено.

◇ **Зауваження 4.3.** У випадку двовимірного простору формула (4.52) має вигляд

$$Bu(M_0) = \int_C \left[ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] dl - \\ - \iint_S \Delta u(P) \ln \frac{1}{r_{PM_0}} dx dy,$$

де  $C$  — крива, що обмежує область  $S$ , а

$$B = \begin{cases} 2\pi, & \text{якщо } M_0 \text{ є внутрішньою точкою } S, \\ \pi, & \text{якщо } M_0 \in C, \\ 0, & \text{якщо } M_0 \in E_2 \setminus \bar{S}, \end{cases}$$

Основна формула теорії гармонічних функцій (4.56) запишеться у вигляді

$$Bu(M_0) = \int_C \left[ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] dl,$$

звідки випливає справедливість теореми 4.10 про середнє значення

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{C_a} u ds,$$

де  $C_a$  — коло радіуса  $a$  з центром в точці  $M_0$ .

## 4.10 Теорема Гарнака про послідовності гармонічних функцій та теорема Ліувіля

Розглядатимемо двовимірний простір.

**Теорема 4.11. (перша теорема Гарнака).** Якщо послідовність функцій  $\{u_m(x, y)\}$ , гармонічних в обмеженій області  $D$  і неперервних у  $\bar{D} = D \cup S$ , збігається рівномірно на краю  $S$ , то вона рівномірно збігається всюди в  $D$  і в цій області гранична функція буде гармонічною.

**Доведення.** Рівномірну збіжність послідовності гармонічних функцій  $\{u_m(x, y)\}$  в області  $D$  доведено в п. 4.5.

Покажемо, що гранична функція буде гармонічною в  $D$ . Для цього в області  $D$  розглянемо довільну точку  $Q$  і побудуємо круг  $K_R(Q)$  із центром в точці  $Q$  такого радіуса  $R$ , щоб  $K_R(Q)$  цілком належав  $D$ .

У цьому крузі кожен з гармонічних функцій  $u_m(M)$  ( $M$  — змінна точка) представимо у вигляді інтеграла Пуассона

$$u_m(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_m(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\psi - \varphi)} d\varphi, \quad (4.59)$$

де  $f_m(\psi)$  — значення гармонічної функції  $u_m(M)$  на краю круга  $K_R(Q)$ .

Унаслідок рівномірної збіжності послідовностей  $\{u_m(M)\}$  і  $\{f_m(\psi)\}$  в області  $D$ , в рівності (4.59) можна перейти до границі в обох частинах. Позначаючи граничні функції через  $u(M)$  і  $f(\psi)$  відповідно, дістаємо

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

Права частина останньої рівності є гармонічною функцією, отже, і  $u(M)$  є гармонічною в  $K_R(Q)$ . Унаслідок довільності точки  $Q$  функція  $u(M)$  є гармонічною всюди в області  $D$ .

Теорему доведено.

**Теорема 4.12. (друга теорема Гарнака).** Якщо послідовність гармонічних в області  $D$  функцій  $\{u_m(M)\}$  збігається в деякій внутрішній точці  $A$  цієї області й для довільних  $m$  та точки  $M \in D$

$$u_{m+1}(M) \geq u_m(M),$$

то послідовність  $\{u_m(M)\}$  всюди в області  $D$  збігається до деякої гармонічної функції  $u(M)$ , причому в усякій замкнутій області  $\bar{D}_1 \subset D$  ця збіжність буде рівномірною.

**Доведення.** Спочатку покажемо, що наша послідовність збігається рівномірно в усякому крузі  $K_1$  радіуса  $R$  із центром у точці  $A$ , якщо він разом із краєм належить  $D$ .

Згідно з умовою теореми для довільного цілого  $p > 0$

$$v_{m,p}(M) = u_{m+p}(M) - u_m(M) \geq 0.$$

Розглянемо круг  $K_1^*$  із центром у точці  $A$  і радіусом  $R + \varepsilon$  (рис. 4.7), де  $\varepsilon > 0$  таке, що  $\bar{K}_1^* \subset D$ . У крузі  $K_1^*$  гармонічні функції  $v_{m,p}(M)$  представимо у вигляді інтеграла Пуассона

$$v_{m,p}(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{m,p}(R + \varepsilon, \psi) \frac{[(R + \varepsilon)^2 - \rho^2] d\psi}{(R + \varepsilon)^2 + \rho^2 - 2(R + \varepsilon)\rho \cos(\psi - \varphi)}. \quad (4.60)$$

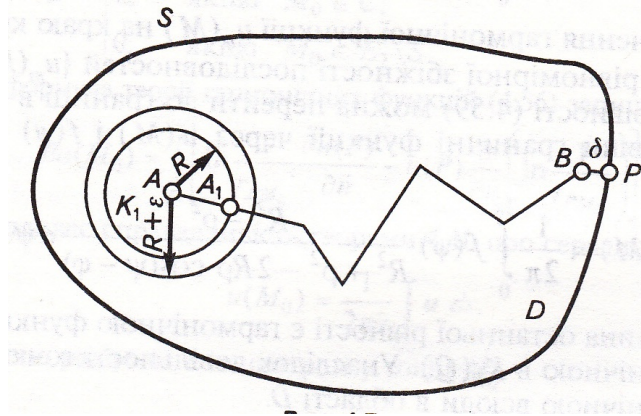


Рис. 4.7:

Оскільки  $-1 \leq \cos(\psi - \varphi) \leq 1$ , то

$$\frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} \leq \frac{(R + \varepsilon)^2 - \rho^2}{(R + \varepsilon)^2 + \rho^2 - 2(R + \varepsilon)\rho \cos(\psi - \varphi)} \leq \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho},$$

а отже, з (4.60) маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} \int_0^{2\pi} v_{m,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi &\leq u_{m,p}(M) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho} \int_0^{2\pi} v_{m,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi. \end{aligned}$$



На підставі теореми про середнє значення

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{m,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi = u_{m,p}(0, \psi) = u_{m,p}(A).$$

Таким чином, попередня нерівність запишеться у вигляді

$$\frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} v_{m,p}(A) \leq v_{m,p}(M) \leq \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho} v_{m,p}(A). \quad (4.61)$$

Із нерівностей (4.61) випливає рівномірна збіжність послідовності  $\{u_m(M)\}$  у крузі  $\bar{K}_1$ , якщо вона збігається в точці  $A$ . Згідно з першою теоремою Гарнака гранична функція буде гармонічною в  $K_1$ .

Доведемо збіжність послідовності гармонічних функцій у довільній внутрішній точці  $B$  області  $D$ . Для цього сполучимо цю точку з точкою  $A$  ламаною  $l$ , яка складається зі скінченного числа відрізків і повністю лежить усередині області  $D$ . Ламана  $l$  разом із точками  $A$  і  $B$  є замкненою множиною. Оскільки  $l$  не має спільних точок із краєм  $S$ , то через  $\delta$  позначимо відстань від краю  $S$  до ламаної  $l$ :

$$\delta = \inf r_{M'P} \quad M' \in l, \quad P \in S.$$

Очевидно,  $\delta$  є замкненою множиною.

Візьмемо на перетині ламаної  $l$  із кругом  $K_1$  точку  $A_1$  і навколо неї, як із центра, опишемо круг  $K_2$  радіусом  $\delta/2$ . Згідно з нашими міркуваннями круг  $\bar{K}_2 \in D$ , а отже послідовність  $\{u_m\}$  у крузі  $\bar{K}_2$  збігається рівномірно до гармонічної функції. Повторюючи міркування через скінчену кількість кроків, доведемо рівномірну збіжність послідовності гармонічних функцій  $\{u_m(M)\}$  у крузі радіуса  $\delta/2$  із центром в точці  $B$ . Унаслідок довільності точки  $B$  звідси випливає, що послідовність гармонічних функцій  $\{u_m(M)\}$  рівномірно збігається до гармонічної функції в довільному крузі  $K$ , який міститься разом із краєм в області  $D$ .

Згідно з теоремою Гейне–Бореля, довільну замкнену область  $\bar{D}_1$ , яка разом із своїм краєм знаходиться всередині області  $D$ , можемо покрити скінченим числом кругів, які цілком належать  $D$ .

За доведеним, у всіх цих кругах розглядувана послідовність  $\{u_m(M)\}$  збігається рівномірно, а отже, вона збігається рівномірно й в області  $\bar{D}_1$ , причому гранична функція буде гармонічною в  $D$ .

**Теорема 4.13. (Ліувіля).** *Гармонічна на всій площині функція  $u(x, y)$  не може бути обмеженою зверху або знизу, якщо вона не стала.*

**Доведення.** Нехай гармонічна функція на всій площині  $u(x, y) \geq A = \text{const}$ . Тоді функція  $v(x, y) = u(x, y) - A \geq 0$  також гармонічною на всій площині.

Позначимо через  $Q(x, y)$  довільну точку площини й проведемо круг  $K$  із центром у початку координат такого радіуса  $R$ , щоб точка  $Q$  була внутрішньою для цього круга. Внаслідок гармонічності функції  $v(x, y)$  представимо її в крузі  $K$  за допомогою інтеграла Пуассона:

$$v(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(R, \psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi. \quad (4.62)$$

Згідно з (4.61) із (4.62) дістанемо

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} v(0, 0) \leq v(Q) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} v(0, 0).$$

Перейшовши в останніх нерівностях до границі, коли  $R \rightarrow \infty$ , матимемо

$$v(0, 0) \leq v(Q) \leq v(0, 0),$$

тобто  $v(Q) = v(0, 0)$ . Унаслідок довільності точки  $Q$  звідси випливає, що  $u(Q) = v(Q) + A = v(0, 0) + A$  є сталою на всій площині.

Теорему доведено.

#### 4.11 Функція Гріна оператора Лапласа

Нехай в тривимірному просторі задано обмежену поверхнею  $S$  область  $D$ . Припустимо, що функція  $u(M_0)$ ,  $M_0 = M_0(x, y, z)$ , гармонічна в  $D$  і належить класу  $C^1(\bar{D})$ . Тоді, як було показано в п. 4.9, справедлива основна формула теорії гармонічних функцій

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right] ds. \quad (4.63)$$

Нехай відома функція  $g(P, M_0)$ , яка має такі дві властивості:

- 1) як функція змінної точки  $P$  вона є гармонічною в області  $D$  і належить класу  $C^1(\bar{D})$ ;
- 2) на поверхні  $S$  функція  $g(P, M_0)$  набуває граничних значень  $-(4\pi r_{PM_0})^{-1}$ .

Застосовуючи другу формулу Гріна (4.49) до гармонічних функцій  $u(P)$  і  $g(P, M_0)$ , дістаємо

$$\iint_S \left[ u(P) \frac{\partial g(P, M_0)}{\partial \vec{n}} - g(P, M_0) \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} \right] ds = 0.$$

Беручи до уваги граничні значення для функції  $g(P, M_0)$ , з останньої рівності матимемо

$$\iint_S \left[ u(P) \frac{\partial g(P, M_0)}{\partial \vec{n}} + \frac{1}{4\pi r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} \right] ds = 0.$$

Віднявши дану рівність із (4.63), дістанемо

$$u(M_0) = - \iint_S u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left[ \frac{1}{4\pi r_{PM_0}} + g(P, M_0) \right] ds. \quad (4.64)$$

Покладемо

$$G(P, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{PM_0}} + g(P, M_0). \quad (4.65)$$

► **Означення 4.2.** Функція  $G(P, M_0)$  називається **функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа**, якщо вона задовольняє такі умови:

- 1) як функція точки  $P$  є гармонічною в області  $D$ , за винятком точки  $M_0$ , де вона перетворюється в нескінченність;
- 2) задовольняє крайову умову

$$G(P, M_0)|_S = 0; \quad (4.66)$$

- 3) в області  $D$  допускає вигляд (4.65), де  $g(P, M_0)$  — гармонічна функція всюди в області  $D$ .

Побудова функції Гріна зводиться до відшукування її регулярної частини  $g(P, M_0)$ , яка визначається із задачі Діріхле

$$\Delta g(P, M_0) = 0, \quad g(P, M_0)|_S = -\frac{1}{4\pi r_{PM_0}}, \quad M_0 \in D. \quad (4.67)$$

Згідно з формулою (4.64), розв'язок внутрішньої задачі Діріхле

$$\Delta u(M_0) = 0, \quad u(P)|_S = f(P), \quad M_0 \in D, \quad P \in S, \quad (4.68)$$

якщо він існує, подається у вигляді

$$u(M_0) = - \iint_S f(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial \vec{n}} ds. \quad (4.69)$$

Якщо задано задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta u(M_0) &= \varphi(M_0), \quad M_0 \in D, \\ u(P)|_S &= f(P), \quad P \in S, \end{aligned} \quad (4.70)$$

причому  $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ , то, поклавши у (4.52) замість  $-(4\pi r_{PM_0})^{-1}$  функцію Гріна та врахувавши (4.66) і (4.70), дістанемо

$$u(M_0) = - \iint_S f(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial \vec{n}} ds - \iiint_D \varphi(P) G(P, M_0) dP. \quad (4.71)$$

Виводячи формули (4.69) і (4.71), ми вважали, що шукані розв'язки відповідних задач Діріхле (4.68) та (4.70) належать класу  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ .

О.М.Ляпунов показав, що формули (4.69) та (4.71) представляють розв'язки задач Діріхле (4.68), (4.70) відповідно і в класі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ , якщо поверхня  $S$  області  $D$  задовольняє наступні умови:

- 1) в кожній точці поверхні  $S$  існує дотична площина;
- 2) існує таке число  $d > 0$ , одне й те саме для всіх точок поверхні, що якщо  $P$  — довільна точка  $S$ , то довільна сфера з центром у точці  $P$  і радіусом  $d$  або меншим ділить  $S$  на дві частини, одна з яких міститься всередині сфери, а інша — поза нею, й прями, паралельні нормалі до  $S$  в точці  $P$ , перетинають частину  $S$ , яка знаходиться у сфері, не більше, ніж в одній точці;
- 3) якщо  $\theta$  — гострий кут, утворений нормальними до поверхні  $S$  у двох її точках  $P_1$  і  $P_2$ , а  $r_{1,2}$  — відстань між цими точками, то існують два додатні числа  $a$  і  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ), незалежні від вибору точок  $P_1$  і  $P_2$  таких, що справедлива нерівність  $\theta \leq ar_{1,2}^\alpha$  за довільних положень  $P_1$  і  $P_2$  на  $S$ .

Поверхня, яка задовольняє наведені три умови, називається *поверхнею Ляпунова*.

Зазначимо, що умова 1) означення поверхні Ляпунова дає змогу в кожній точці  $P \in S$  побудувати місцеву прямокутну систему координат  $Pxyz$ , тобто таку систему, в якій точка  $P$  є початком координат, дотична площина до поверхні  $S$  в точці  $P$  є площиною  $xPy$ , а нормаль до поверхні в точці  $P$  збігається з віссю  $Pz$ .

Умова 2) показує, що в цій місцевій системі координат рівняння частини поверхні  $S$ , яка міститься у внутрішній частині сфери  $C_d(P)$  із центром у точці  $P$  і радіусом  $d$ , набуває вигляду  $\zeta = \omega(\xi, \eta)$ , де  $(\xi, \eta, \zeta)$  — змінна точка поверхні  $S$ .

Із умови 3) випливає, що частинні похідні  $\omega_\xi$  і  $\omega_\eta$ , існування яких забезпечується умовою 1), є неперервними функціями  $\xi$  і  $\eta$ .

Розглянемо деякі властивості функції Гріна.

1. *Функція Гріна  $G(P, M_0)$  невід'ємна в області  $D$ .*

Справді, згідно з означенням функція Гріна на краю  $S$  області  $D$  рівна нулю. Оскільки  $\lim_{P \rightarrow M_0} G(P, M_0) = +\infty$ , то на поверхні сфери  $C_\varepsilon(M_0)$  достатньо малого радіуса  $\varepsilon$  із центром в точці  $M_0$  функція Гріна функція  $G(P, M_0) > 0$ .

Таким чином, на краю  $S \cup C_\varepsilon(M_0)$  функція  $G(P, M_0) \geq 0$ , отже, внаслідок принципу максимуму  $G(P, M_0) \geq 0$  всюди в області  $D \setminus K_\varepsilon(M_0)$ , де  $K_\varepsilon(M_0)$  — куля радіуса  $\varepsilon$  із центром  $M_0$ . Звідси можемо зробити висновок, що  $G(P, M_0) \geq 0$  всюди в  $\bar{D}$ .

Оскільки  $g(P, M_0)|_S = -(4\pi r_{PM_0})^{-1}$ , і вона є гармонічною в  $D$ , то  $g(P, M_0) < 0$  всюди в  $\bar{D}$ . Отже, з (4.65) маємо

$$0 < G(P, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{PM_0}}, \quad P \in D. \quad (4.72)$$

2. Функція Гріна  $G(P, M_0)$  симетрична відносно точок  $P$  і  $M_0$ , тобто

$$G(P, M_0) = G(M_0, P). \quad (4.73)$$

Для доведення цієї властивості розглянемо область  $D_\varepsilon = D \setminus K_\varepsilon(P) \cup K_\varepsilon(M_0)$ , де  $K_\varepsilon(M_0)$  і  $K_\varepsilon(P)$  — кулі досить малого радіуса  $\varepsilon$  із центрами в точках  $P$  і  $M_0$  відповідно (рис. 4.8).

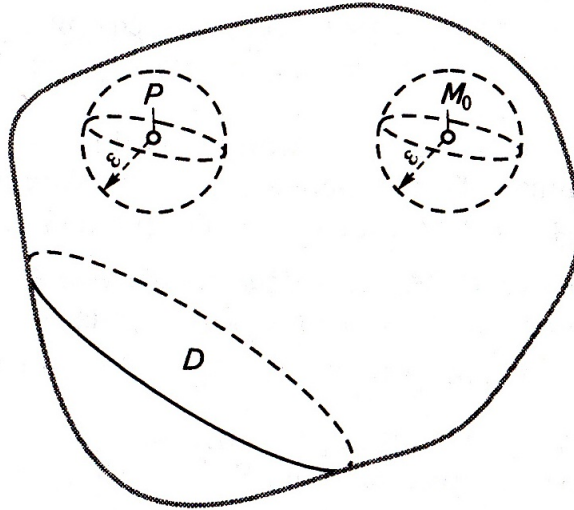


Рис. 4.8:

Функції  $G(Q, M_0)$  і  $G(Q, P)$  гармонічні в області  $D_\varepsilon$ . Застосувавши до них в цій області другу формулу Гріна (4.49) та врахувавши, що  $G(Q, M_0) = G(Q, P) = 0$  при  $Q \in S$ , матимемо

$$\begin{aligned} & \iint_{C_\varepsilon(P)} \left[ G(Q, P) \frac{\partial G(Q, M_0)}{\partial \vec{n}} - G(Q, M_0) \frac{\partial G(Q, P)}{\partial \vec{n}} \right] ds + \\ & + \iint_{C_\varepsilon(M_0)} \left[ G(Q, P) \frac{\partial G(Q, M_0)}{\partial \vec{n}} - G(Q, M_0) \frac{\partial G(Q, P)}{\partial \vec{n}} \right] ds = 0, \end{aligned} \quad (4.74)$$

де  $C_\varepsilon(P)$  і  $C_\varepsilon(M_0)$  — сфери радіусами  $\varepsilon$  із центрами в точках  $P$  і  $M_0$  відповідно.

Беручи до уваги, що

$$G(Q, P) = (4\pi R_{QP})^{-1} + g(Q, P), \quad G(Q, M_0) = (4\pi R_{QM_0})^{-1} + g(Q, M_0),$$

де  $g(Q, P)$  і  $g(Q, M_0)$  — гармонічні функції, з (4.74) дістанемо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \iint_{C_\varepsilon(P)} \left[ \frac{1}{r_{QP}} \frac{\partial G(Q, M_0)}{\partial \vec{n}} - G(Q, M_0) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{QP}} \right) \right] ds + \\ & + \iint_{C_\varepsilon(P)} \left[ g(Q, P) \frac{\partial G(Q, M_0)}{\partial \vec{n}} - G(Q, M_0) \frac{\partial g(Q, P)}{\partial \vec{n}} \right] ds = \\ & = \frac{1}{4\pi} \iint_{C_\varepsilon(M_0)} \left[ \frac{1}{r_{QM_0}} \frac{\partial G(Q, P)}{\partial \vec{n}} - G(Q, P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{QM_0}} \right) \right] ds + \\ & + \iint_{C_\varepsilon(M_0)} \left[ g(Q, M_0) \frac{\partial G(Q, P)}{\partial \vec{n}} - G(Q, P) \frac{\partial g(Q, M_0)}{\partial \vec{n}} \right] ds. \end{aligned}$$

Застосувавши до перших поверхневих інтегралів у лівій і правій частинах останньої рівності основну формулу теорії гармонічних функцій (4.56), а до других інтегралів — другу формулу Гріна (4.49), матимемо

$$G(P, M_0) = G(M_0, P),$$

і симетричність доведено.

◇ **Зауваження 4.4.** У випадку площини функція Гріна має вигляд

$$G(P, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM_0}} + g(P, M_0), \quad M_0 = M_0(x, y).$$

## 4.12 Інтегрування задачі Діріхле для кулі. Формула Пуассона

У тривимірному просторі розглянемо кулю  $K_R$  радіусом  $R$  із центром у початку координат і розв'яжемо таку задачу: знайти функцію  $u(x, y, z)$ , гармонічну в кулі  $K_R$  і неперервну в  $\bar{K}_R = K_R \cup S$ , якщо на поверхні  $S$  цієї кулі вона набуває наперед заданих неперервних значень  $f(\xi, \eta, \varsigma)$ .

Спочатку явно побудуємо функцію Гріна для нашої задачі, а тоді покажемо, що гармонічна функція  $u(x, y, z)$ , яка визначається формулою (4.69), задовольняє рівняння та крайову умову в (4.68) (рис. 4.9).

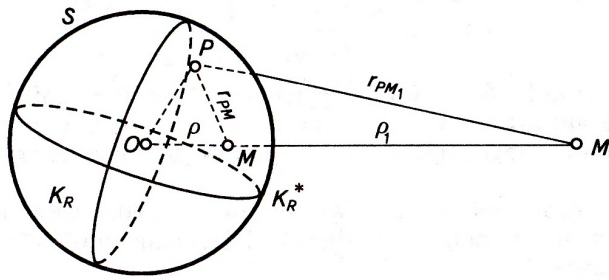


Рис. 4.9:

Для цього в кулі  $K_R$  візьмемо довільну внутрішню точку  $M(x, y, z)$  і позначимо через  $\rho$  відстань цієї точки від початку координат  $O$ . Через центр кулі  $O$  і точку  $M$  у напрямі  $M$  проведемо пряму й на ній відкладемо такий відрізок  $OM_1$ , щоб

$$\rho\rho_1 = R^2, \quad \rho_1 = |OM_1|. \quad (4.75)$$

Перетворення (4.75), яке ставить у відповідність точці  $M$  цілком певну точку  $M_1$ , називається *перетворенням обернених радіусів* (перетворенням інверсії відносно сфери  $S$ ), а сама точка  $M_1$  називається *спряженою* з точкою  $M$ .

Візьмемо тепер деяку точку  $P(\xi, \eta, \varsigma)$  і позначимо через  $r_{PM}$  і  $r_{PM_1}$  відстані цієї точки до точок  $M$  і  $M_1$  відповідно. Знайдемо співвідношення між  $r_{PM}$  і  $r_{PM_1}$ , коли точка  $P$  знаходиться на поверхні сфери  $S$ . З цією метою розглянемо трикутники  $OPM$  і  $OPM_1$ . Вони подібні, оскільки кут при вершині  $O$  є спільним, а сторони, які утворюють цей кут, пропорційні внаслідок (4.75):

$$\frac{\rho_1}{R} = \frac{R}{\rho}.$$

Із подібності трикутників випливає, що  $\frac{r_{PM}}{r_{PM_1}} = \frac{\rho}{R}$ , або

$$\frac{1}{r_{PM}} = \frac{R}{\rho r_{PM_1}}. \quad (4.76)$$

Отже, (4.76) є шуканим співвідношенням між  $r_{PM}$  і  $r_{PM_1}$ .

Покажемо тепер, що функція Гріна для кулі має вигляд

$$G(P, M) = \frac{1}{4\pi r_{PM}} - \frac{1}{4\pi \rho r_{PM_1}}. \quad (4.77)$$

Справді, функція  $G(P, M)$  як функція точки  $P$  є гармонічною в кулі  $K_R$ , за винятком точки  $M$ , де вона перетворюється в нескінченність. На поверхні сфери  $S$  внаслідок (4.76) вона перетворюється в нуль.

Таким чином, побудована функція (4.77) задовольняє всі умови означення функції Гріна задачі Діріхле. Підставивши (4.77) у формулу (4.69), дістанемо

$$u(M) = - \iint_S \frac{1}{4\pi} f(P) \frac{\partial \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{\rho r_{PM_1}} \right)}{\partial \vec{n}} ds. \quad (4.78)$$

Обчислимо похідну  $4\pi \frac{\partial G(P, M)}{\partial \vec{n}}$ , де  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до сфери  $S$ .  
Маємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM}} \right) = \\ &= \frac{\partial (r_{PM})^{-1}}{\partial \xi} \cos(\vec{n}, \xi) + \frac{\partial (r_{PM})^{-1}}{\partial \eta} \cos(\vec{n}, \eta) + \frac{\partial (r_{PM})^{-1}}{\partial \varsigma} \cos(\vec{n}, \varsigma) = \\ &= -\frac{1}{r_{PM}^2} \left[ \frac{\xi - x}{r_{PM}} \cos(\vec{n}, \xi) + \frac{\eta - y}{r_{PM}} \cos(\vec{n}, \eta) + \frac{\varsigma - z}{r_{PM}} \cos(\vec{n}, \varsigma) \right] = \\ &= -\frac{1}{r_{PM}^2} [\cos(r_{PM}, \xi) \cos(\vec{n}, \xi) + \cos(r_{PM}, \eta) \cos(\vec{n}, \eta) + \\ & \quad + \cos(r_{PM}, \varsigma) \cos(\vec{n}, \varsigma)] = -\frac{1}{r_{PM}^2} \cos(r_{PM}, \vec{n}). \end{aligned}$$

Аналогічно  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} (r_{PM_1})^{-1} = -(r_{PM_1})^{-2} \cos(r_{PM_1}, \vec{n})$ . Отже,

$$4\pi \frac{\partial G(P, M)}{\partial \vec{n}} = -\frac{1}{r_{PM}^2} \cos(r_{PM}, \vec{n}) + \frac{R}{\rho r_{PM_1}^2} \cos(r_{PM_1}, \vec{n}), \quad P \in S. \quad (4.79)$$

Із трикутників  $OPM$  і  $OPM_1$ , коли  $P \in S$ , дістаємо

$$\rho^2 = R^2 + r_{PM}^2 - 2Rr_{PM} \cos(r_{PM}, \vec{n}),$$

$$\rho_1^2 = R^2 + r_{PM_1}^2 - 2Rr_{PM_1} \cos(r_{PM_1}, \vec{n}).$$

Визначивши звідси  $\cos(r_{PM}, \vec{n})$  та  $\cos(r_{PM_1}, \vec{n})$  і підставивши їх у (4.79), матимемо

$$4\pi \frac{\partial G(P, M)}{\partial \vec{n}} = \frac{\rho^2 - R^2 - r_{PM}^2}{2Rr_{PM}^3} + \frac{R^2 + r_{PM_1}^2 - \rho_1^2}{2\rho_1 r_{PM_1}^3}.$$



На підставі (4.75) і (4.76)  $r_{PM_1} = \rho^{-1}r_{PM}R$ ,  $\rho_1 = \rho^{-1}R^2$ , а отже,

$$4\pi \frac{\partial G(P, M)}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{\rho r_{PM_1}} \right) = \frac{\rho^2 - R^2}{2Rr_{PM}^3} - \frac{1}{2Rr_{PM}} + \\ + \frac{R^2 + \rho^{-2}(r_{PM}^2 R^2 - R^4)}{2\rho \rho^{-3}r_{PM}^3 R^3} = \frac{\rho^2 - R^2}{Rr_{PM}^3}, \quad P \in S.$$

Підставивши добутий результат у (4.78), остаточно маємо

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} f(P) ds. \quad (4.80)$$

Формула (4.80) називається *формулою Пуассона*.

Переконаємося тепер: якщо функція  $f(P)$  неперервна, то формула Пуассона (4.80) дає розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для кулі. Для цього потрібно показати, що функція  $u(M)$ , визначена формулою (4.80), є гармонічною в  $K_R$ , неперервною в замкнутій кулі  $\bar{K}_R$  і набуває заданих неперервних значень  $f(P)$  на поверхні сфери  $S$ , тобто

$$\lim_{M \rightarrow P} u(M) = f(P), \quad P \in S.$$

При цьому  $u(M)$  стає неперервною функцією в  $\bar{K}_R$ , якщо її відповідним чином визначити на поверхні  $S$ .

Маємо

$$\Delta u(M) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \Delta \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} f(P) ds = \\ = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \left\{ \Delta \frac{R^2 + r_{PM}^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} - \Delta \frac{1}{r_{PM}} \right\} f(P) ds = \\ = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \left( -2R \Delta \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \frac{1}{r_{PM}} \right) f(P) ds = \\ = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \Delta \frac{1}{r_{PM}} \right) f(P) ds \equiv 0,$$

отже, при  $\rho < R$  функція (4.80) є гармонічною.

Візьмемо на поверхні сфери  $S$  довільну точку  $N$  і доведемо, що  $\lim_{M \rightarrow N} u(M) = f(N)$ .

Зазначимо, що формула (4.80) є справедливою при  $f(P) \equiv 1$ . Унаслідок єдиності розв'язку задачі Діріхле  $\Delta u = 0$ ,  $u|_S = 1$  дістаємо

$$1 = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds.$$

Домножимо останню рівність на  $f(N)$  і результат віднімемо з формули (4.80). Маємо

$$u(M) - f(N) = \iint_S \frac{1}{4\pi R} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds. \quad (4.81)$$

Побудуємо сферу з центром у точці  $N$  і радіусом  $2\delta$ , де  $\delta$  вибираємо таким малим, щоб у всіх точках поверхні  $S$ , які потрапляють усередину цієї сфери, внаслідок неперервності функції  $f(P)$ , мала місце нерівність

$$|f(P) - f(N)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.82)$$

де  $\varepsilon < 0$  — довільно задане мале число.

Позначимо через  $S_1$  частину поверхні  $S$ , яка знаходиться всередині сфери радіусом  $2\delta$  з центром у точці  $N$  (Рис. 4.10).

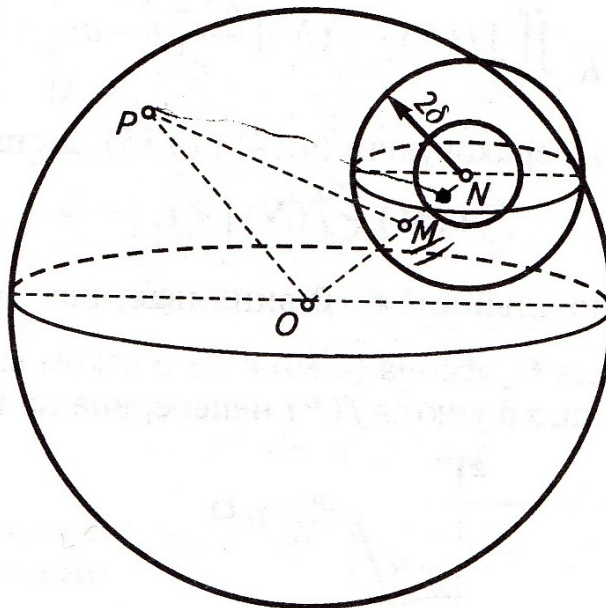


Рис. 4.10:

Тоді (4.81) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
 u(M) - f(N) &= \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_1} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds + \\
 &+ \frac{1}{4\pi R} \iint_{S \setminus S_1} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds.
 \end{aligned}
 \tag{4.83}$$

Дамо оцінку кожного доданка в правій частині рівності (4.83). Враховуючи (4.82), дістаємо

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_1} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds \right| &< \frac{\varepsilon}{8\pi R} \iint_{S_1} \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds \leq \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{8\pi R} \iint_S \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds = \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.84}$$

Ця нерівність справедлива для довільного положення точки  $M$  у кулі  $K_R$ .

Дамо оцінку другого доданка в (4.83). Для цього побудуємо сферу радіуса  $\delta$  із центром у точці  $N$  і припустимо, що, наближаючись до точки  $N$ , точка  $M$  знаходиться всередині цієї сфери. Тоді  $r_{PM} > \delta$  при  $P \in S \setminus S_1$ .

Унаслідок неперервності функції  $f(P)$  на сфері  $S$  існує така скінченна стала  $K$ , що  $|f(P)| \leq K$ .

Отже,

$$\left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{S \setminus S_1} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds \right| \leq \frac{2K(R^2 - \rho^2)R}{\delta^3}.$$

Коли  $M \rightarrow N$ , то  $\rho \rightarrow R$ , і з останньої нерівності маємо

$$\left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{S \setminus S_1} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} ds \right| < \frac{\varepsilon}{2}.
 \tag{4.85}$$

Із рівності (4.83), враховуючи (4.84) і (4.85), дістаємо

$$|u(M) - f(N)| < \varepsilon,$$

звідки внаслідок довільності  $\varepsilon < 0$ , випливає, що  $\lim_{M \rightarrow P} u(M) = f(P)$ ,  $P \in S$ .

Отже, формула Пуассона (4.80) є розв'язком внутрішньої задачі Діріхле для кулі, якщо функція  $f(P)$  є неперервною на її краю  $S$ .

Запишемо формулу Пуассона (4.80) у сферичній системі координат. Маємо (рис. 4.11)

$$\xi = R \sin \theta' \cos \varphi', \quad \eta = R \sin \theta' \sin \varphi', \quad \zeta = R \cos \theta';$$

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Позначимо через  $\gamma$  кут між векторами  $\vec{OP}$  і  $\vec{OM}$ . Тоді

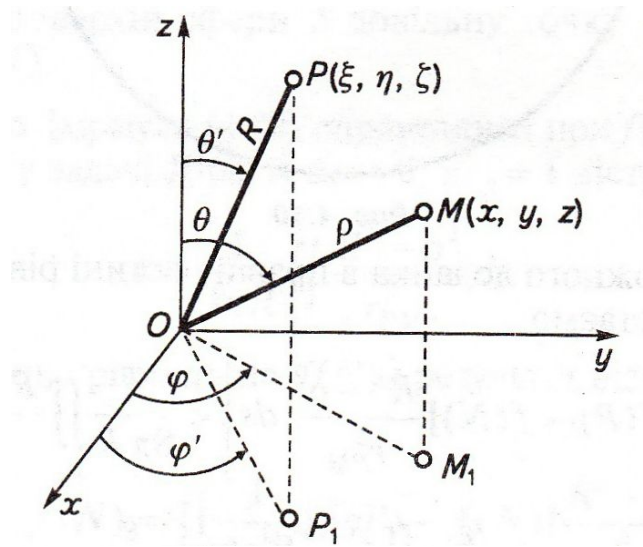


Рис. 4.11:

$$R\rho \cos \gamma = R\rho (\sin \theta' \cos \varphi' \sin \theta \cos \varphi + \sin \theta' \sin \varphi' \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta' \cos \theta),$$

або

$$\cos \gamma = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi' - \varphi). \quad (4.86)$$

Із курсу математичного аналізу відомо, що

$$ds = \sqrt{EG - F} d\theta' d\varphi',$$

де

$$E = \left( \frac{\partial \xi}{\partial \theta'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \theta'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \theta'} \right)^2,$$

$$G = \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \varphi'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi'} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial \xi}{\partial \theta'} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi'} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta'} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi'} + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta'} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi'}.$$

Отже,

$$ds = R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (4.87)$$

Беручи до уваги, що  $r_{PM} = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma}$ , і підставляючи (4.87) у (4.80), дістаємо

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta', \varphi') \frac{(R^2 - \rho^2) \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.88)$$

де  $\cos \gamma$  визначається за формулою (4.86), а

$$f(\theta', \varphi') = f(R \sin \theta' \cos \varphi', R \sin \theta' \sin \varphi', R \cos \theta').$$

Розглянемо тепер зовнішню задачу Діріхле для сфери: в області  $K_R^* = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > R^2\}$  знайти гармонічну функцію  $u(x, y, z)$ , неперервну в  $\bar{K}_R^* = K_R^* \cup S$ , яка на сфері  $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  набуває наперед заданих неперервних значень  $f(P)$ .

Покажемо, що розв'язок поставленої задачі дається формулою Пуассона (див. рис. 4.9)

$$u(M_1) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S f(P) \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} ds. \quad (4.89)$$

Справді, як і для внутрішньої задачі Діріхле, легко показати, що функція  $u(M_1)$ , визначена за формулою (4.89), задовольняє рівняння Лапласа.

Потрібно ще довести, що  $u(M_1)$  прямує до нуля рівномірно коли  $M \rightarrow \infty$ . Очевидно,  $r_{PM_1} > \rho_1 - R$ .

Візьмемо тепер точку  $M_1$  настільки віддалену від початку координат  $O$ , щоб  $\rho_1 > 2R$ , тобто  $R < 0,5\rho_1$ , а тоді  $r_{PM_1} > 0,5\rho_1$ . Звідси

$$\frac{1}{r_{PM_1}^3} < \frac{8}{\rho_1^3} \quad \text{і} \quad \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} < \frac{8(\rho_1^2 - R^2)}{\rho_1^3} < \frac{8}{\rho_1}.$$

Отже,

$$|u(M_1)| \leq \frac{1}{\rho_1} \frac{2}{\pi R} \iint_S |f(P)| ds = \frac{C}{\rho_1},$$

де

$$C = \frac{2}{\pi R} \iint_S |f(P)| ds.$$

З останньої оцінки бачимо, що  $u(M_1) \xrightarrow{\rho_1 \rightarrow \infty} 0$ .

Аби довести, що  $u(M_1) \xrightarrow{M_1 \rightarrow N} f(N)$ , запишемо інтеграл Пуассона (4.89) в сферичній системі координат:

$$u(\rho_1, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta', \varphi') \frac{(\rho_1^2 - R^2) \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(R^2 - 2R\rho_1 \cos \gamma + \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.90)$$

де  $(\rho_1, \theta, \varphi)$  — сферичні координати точки  $M_1$ ;  $\gamma = \angle M_1OP$ .

Піддамо точку  $M_1(\rho_1, \theta, \varphi)$  перетворенню інверсії (4.75) відносно сфери  $S$ . Перетворена точка  $M_1(\rho_1, \theta, \varphi)$  лежатиме на прямій  $OM_1$  усередині кулі на відстані  $\rho$  від центра, причому  $\rho_1 = R^2\rho^{-1}$ . Тоді (4.90) можна записати у вигляді

$$u(\rho_1, \theta, \varphi) = \frac{\rho}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta', \varphi') \frac{(R^2 - \rho^2) \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.91)$$

при цьому  $\rho < R$ . Якщо точка  $M_1(\rho_1, \theta, \varphi)$  буде прямувати до довільної точки  $N(R, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$  на сфері  $S$ , то точка  $M(\rho, \theta, \varphi)$  із внутрішньої частини кулі  $K_R$  буде прямувати до тієї самої точки  $N(R, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ . Для внутрішньої задачі Діріхле ми показали, що

$$\frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta', \varphi') \frac{(R^2 - \rho^2) \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow f(N),$$

коли  $M \rightarrow N$ . Але тоді права частина (4.91) також прямує до  $f(N)$ , тому що  $\rho \rightarrow R$  при  $M \rightarrow N$ .

Отже, формула Пуассона (4.91) є розв'язком зовнішньої задачі Діріхле для сфери.

### 4.13 Деякі наслідки формул Пуассона

- Розглянемо невід'ємну в області  $D$  гармонічну функцію  $u(M)$ .

Опишемо з деякої внутрішньої точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  сферу  $S_R(M_0)$  радіусом  $R$ , яка повністю міститься всередині області  $D$ . Позначимо через  $M(x, y, z)$  довільну внутрішню точку кулі  $K_R(M_0)$ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < R^2.$$

Оскільки для довільної точки  $M \in K_R(M_0)$  (рис. 4.12)

$$\frac{1}{4\pi R} \frac{R - \rho}{(R + \rho)^2} \leq \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho^2}{r_{PM}^3} \leq \frac{1}{4\pi R} \frac{R + \rho}{(R - \rho)^2}, \quad \rho = |M_0M|,$$

то з формули Пуассона (4.80) маємо

$$\frac{R(R - \rho)}{(R + \rho)^2} \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R(M_0)} u(P) ds \leq u(M) \leq \frac{R(R + \rho)}{(R - \rho)^2} \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R(M_0)} u(P) ds.$$

Застосовуючи теорему про середнє значення, дістаємо нерівність Гарнака для невід'ємних гармонічних функцій

$$\frac{R(R - \rho)}{(R + \rho)^2} u(M_0) \leq u(M) \leq \frac{R(R + \rho)}{(R - \rho)^2} u(M_0). \quad (4.92)$$

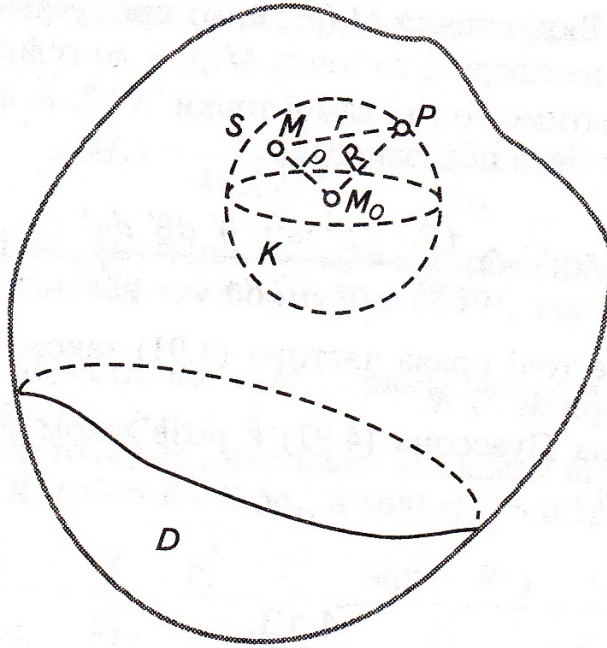


Рис. 4.12:

**Теорема 4.14.** Функція, гармонічна у всьому просторі, тотожно рівна нулю.

**Доведення.** Нехай  $u(M)$  — гармонічна функція в усьому просторі. Побудуємо сферу  $S_R(0)$  довільного радіуса  $R$  із центром у початку координат. Тоді на підставі формули Пуассона (4.80) маємо

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} u(P) \frac{R^2 - \rho^2}{r_{MP}^3} ds. \quad (4.93)$$

Оскільки  $u(M) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$ , то виберемо радіус  $R$  таким великим, щоб на поверхні сфери  $S_R(0)$   $|u(P)| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon > 0$  — довільне як завгодно мале число. Тоді з (4.93) дістанемо

$$|u(M)| \leq \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} |u(P)| \frac{R^2 - \rho^2}{r_{MP}^3} ds < \frac{\varepsilon}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} \frac{R^2 - \rho^2}{r_{MP}^3} ds = \varepsilon.$$

Унаслідок довільності  $\varepsilon$  звідси випливає, що  $u(M) = 0$ . Але точка  $M$  також довільна, отже  $u(M) \equiv 0$  в усьому просторі.

Теорему доведено.

• Нехай у тривимірному просторі задано область  $D$ , обмежену поверхнею  $\Sigma$ . Через  $D^*$  позначимо необмежену область, зовнішню по відношенню до  $D$ . Вважаємо, що початок координат належить області  $D$ .

Доведемо: якщо функція  $u(M_1)$  гармонічна в  $D^*$ , то для достатньо віддалених від початку координат точок області  $D^*$  справедливі нерівності

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \frac{A}{\rho_1^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \frac{A}{\rho_1^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| < \frac{A}{\rho_1^2}, \quad (4.94)$$

де  $A$  — деяка стала;  $\rho_1$  — відстань точки  $M_1$  від початку координат.

Для доведення нерівностей (4.94) опишемо сферу  $S_R(0)$  із центром в початку координат і такого радіуса  $R$ , щоб поверхня  $\Sigma$  лежала всередині нашої сфери.

Функція  $u(M_1)$  гармонічна в  $D^*$ , отже, вона буде гармонічною і в області  $\bar{K}^* : x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$ . Тоді в  $\bar{K}^*$  функцію  $u(M_1)$  можна представити за допомогою формули Пуассона (4.89)

$$u(M_1) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} u(P) \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} ds, \quad (4.95)$$

де  $\rho_1 = |OM_1| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Диференціюючи (4.95), наприклад, за  $x$ , дістаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} u(P) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} \right) ds, \quad (4.96)$$

де

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} \right) = \frac{2x}{r_{PM_1}^3} - \frac{3(\rho_1^2 - R^2)x - \xi}{r_{PM_1}^4}.$$

Нехай точка  $M_1$  настільки віддалена від початку координат, що  $\rho_1 > 2R$ . Тоді з нерівності трикутника  $r_{PM_1} > \rho_1 - R > \frac{1}{2}\rho_1$ , тобто  $\frac{1}{r_{PM_1}} < \frac{2}{\rho_1}$ . Оскільки

$|x| \leq \rho_1$ ,  $\frac{|x - \xi|}{r_{PM_1}} \leq 1$ , то

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_{PM_1}^3} \right) \leq \frac{16}{\rho_1^2} + \frac{48}{\rho_1^2} = \frac{64}{\rho_1^2},$$

а отже, з (4.96) маємо

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} |u(P)| \frac{64}{\rho_1^2} ds = \frac{A}{\rho_1^2},$$

де  $A = \frac{16}{\pi R} \iint_{S_R(0)} |u(P)| ds$ .

Аналогічно доводяться й решта оцінок у (4.94).



#### 4.14 Друга крайова задача для рівнянь еліптичного типу

В п. 4.8 було показано, що розв'язок внутрішньої задачі Неймана (4.50), (4.51) визначається з точністю до довільної сталої. Стосовно зовнішньої задачі Неймана доведемо таку теорему.

**Теорема 4.15.** *В класі функцій  $C^2(D^*) \cap C^1(\bar{D}^*)$  розв'язок зовнішньої задачі Неймана єдиний.*

**Доведення.** Припустимо, що зовнішня задача Неймана має два розв'язки  $u_1(M)$  і  $u_2(M)$ . Тоді їх різниця  $u(M) = u_1(M) - u_2(M)$  є гармонічною функцією в  $D^*$ , і для неї виконуються умови

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\Sigma} = 0, \quad |u(M)| < \frac{A}{\rho}. \quad (4.97)$$

Побудуємо сферу  $S_R(0)$  з центром у початку координат і такого радіуса  $R$ , щоб поверхня  $\Sigma$  належала внутрішній частині сфери  $S_R(0)$ . Позначимо через  $D_1$  область, обмежену поверхнями  $\Sigma$  і  $S_R(0)$ . Застосувавши першу формулу Гріна (4.48) для гармонічної функції  $u(M)$  до області  $D_1$  і поклавши  $v(M) = u(M)$ , дістанемо

$$\iint_{S_R(0)} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds + \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \iiint_{D_1} [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz,$$

або внаслідок (4.97)

$$\iint_{S_R(0)} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \iiint_{D_1} [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz. \quad (4.98)$$

Оскільки  $u(M)$  є гармонічною в  $D^*$ , то для неї справедливі оцінки (4.94), а отже ,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{n}, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\vec{n}, z) \right| < \frac{3A}{R^2}$$

при  $M \in S_R(0)$ .

Таким чином,

$$\left| \iint_{S_R(0)} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \right| < \frac{3A^2}{R^3} \iint_{S_R(0)} ds = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

Але тоді з (4.98) за досить великих  $R$  маємо

$$\iiint_{D_1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz < \varepsilon$$

для довільних як завгодно малих  $\varepsilon > 0$ , а це можливо тільки за умови, що  $u_x = u_y = u_z = 0$ , тобто  $u(M) = \text{const}$ . Унаслідок умови регулярності на нескінченності  $u(M) \equiv 0$ , а отже,  $u_1(M) \equiv u_2(M)$ .

Теорему доведено.

В площині  $xOy$  розглянемо внутрішню задачу Неймана: в класі функцій  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ ,  $\bar{D} = D \cup S$ , знайти розв'язок крайової задачі

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_S = f(x, y), \quad (x, y) \in S, \quad (4.99)$$

де  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до краю  $S$ .

Вважаємо, що крива  $S$  має в кожній точці скінченну кривину.

Покажемо, що задачу (4.99) можна звести до внутрішньої задачі Діріхле. Справді, побудуємо в  $\bar{D}$  функцію  $v(x, y)$  так, щоб в області  $D$  задовольнялись умови Д'Аламбера-Ейлера:

$$v_x(x, y) = u_y(x, y), \quad v_y(x, y) = -u_x(x, y). \quad (4.100)$$

Очевидно, якщо  $u(x, y)$  — гармонічна функція, то й  $v(x, y)$  є гармонічною, причому вона визначається з рівнянь (4.100) з точністю до сталого доданка.

Нехай напрям  $\vec{n}$  одержується поворотом проти годинникової стрілки деякого напрямку  $\vec{l}$  на кут  $\pi/2$ . Тоді, беручи до уваги (4.100), дістаємо (рис. 4.13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{n}, y) = -\frac{\partial v}{\partial y} \cos(\vec{n}, x) + \\ &+ \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\vec{n}, y) = \frac{\partial v}{\partial y} \cos(\vec{l}, y) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\vec{l}, x) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial \vec{l}}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

На краю  $S$  області  $D$  зафіксуємо деяку точку  $A$ . Позначивши через  $\vec{n}$  нормаль до  $S$  в довільній точці  $B \in S$ , а через  $\vec{l}$  — дотичну в цій точці, внаслідок рівності (4.101) матимемо

$$\begin{aligned} \int_{AB} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds &= \int_{AB} \frac{\partial v}{\partial \vec{l}} ds = \int_{AB} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\vec{l}, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(\vec{l}, y) \right] ds = \\ &= \int_{AB} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_{AB} du = v(B) - v(A). \end{aligned}$$

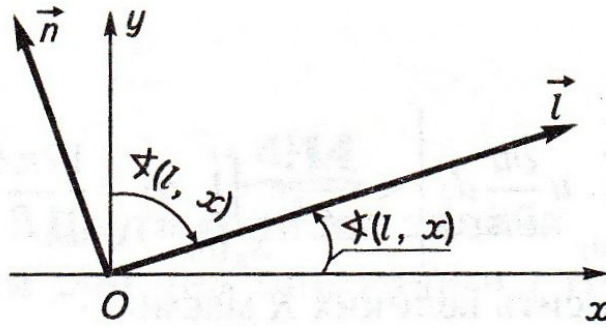


Рис. 4.13:

Таким чином, на підставі крайової умови в (4.99) дістаємо

$$v(B) = v(A) + \int_{AB} f(x, y) ds. \quad (4.102)$$

Оскільки  $\int_S f(x, y) ds = 0$ , то рівність (4.102) визначає функцію  $v(x, y)$  на краю  $S$  області  $D$  як всюди неперервну й однозначну функцію. За відомого значення гармонічної функції  $v(x, y)$  на краю  $S$  однозначно визначимо її і в області  $D$ . Але тоді з рівнянь (4.100) з точністю до сталого доданка визначається розв'язок внутрішньої задачі Неймана (4.99).

У випадку тривимірного простору аналогічні побудови неможливі.

#### 4.15 Розв'язки внутрішньої та зовнішньої задач Неймана для кулі

Позначимо через  $K_R$  кулю радіусом  $R$  із центром у початку координат, тобто

$$K_R = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < R^2\},$$

а через  $K_R^*$  — область

$$K_R^* = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 > R^2\}.$$

Спочатку побудуємо розв'язок внутрішньої задачі Неймана для кулі: в класі функцій  $C^2(K_R) \cap C^1(\bar{K}_R)$  знайти розв'язок другої крайової задачі

$$\Delta u(M) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\rho=R} = \varphi(P), \quad M = M(\rho, \theta, \varphi), \quad P = P(\rho, \theta, \varphi), \quad (4.103)$$

де  $\rho, \theta, \varphi$  — сферичні координати точки  $M$ .

Для розв'язання задачі (4.103) доведемо таку властивість гармонічних функцій у тривимірному просторі: якщо функція є гармонічною в деякій області, яка містить початок координат, і, то гармонічною буде й функція

$$\nu(M) = \int_0^\rho u(\rho_0, \theta, \varphi) \frac{d\rho_0}{\rho_0}. \quad (4.104)$$

Справді, використавши вираз оператора Лапласа у сферичних координатах (4.14), дістаємо

$$\Delta \nu(M) = \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u(M)] + \int_0^\rho \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] \frac{d\rho_0}{\rho_0} \right\}.$$

Оскільки  $\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u]_{\rho=0} = 0$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u(M)] &= \int_0^\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho_0^2} (\rho_0 u) d\rho_0 = \int_0^\rho \left( \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_0^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \right) d\rho_0 = \\ &= \int_0^\rho \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left( \rho_0^2 \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \right) \frac{d\rho_0}{\rho_0}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги останню рівність, маємо тоді функція  $\nu(M)$ , визначена формулою (4.104), є гармонічною.

Покажемо тепер, що розв'язок внутрішньої задачі Неймана для кулі (4.103) можна записати у вигляді

$$u(\rho, \theta, \varphi) = R \int_0^\rho \left\{ \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} \varphi(P) \frac{(R^2 - \rho_0^2) ds}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} \right\} \frac{d\rho_0}{\rho_0}, \quad (4.105)$$

де  $S_R(0) : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$ .

Справді, внаслідок необхідної умови розв'язності другої крайової задачі  $\iint_{S_R(0)} \varphi(P) ds = 0$ , отже, інтеграл Пуассона у фігурних дужках формули (4.105) у початку координат дорівнює нулю, а тому на підставі доведеної властивості функція (4.105) буде гармонічною в кулі  $K_R$ .

Очевидно, що ця функція є неперервною в  $\bar{K}_R$ , а на сфері  $S_R(0)$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\rho=R} = \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} \varphi(P) \frac{(R^2 - \rho^2) ds}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{3/2}} \Bigg|_{\rho=R} = \varphi(R).$$

Таким чином, функція  $u(\rho, \eta, \varphi)$ , визначена формулою (4.105), є розв'язком внутрішньої задачі Неймана.

Аналогічно, враховуючи поведінку гармонічної функції на нескінченності, дістаємо розв'язок зовнішньої задачі Неймана для області  $K_R^*$  за крайової функції  $\varphi(P)$  у вигляді

$$u(\rho_1, \theta, \varphi) = -R \int_{-\infty}^{\rho_1} \left\{ \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} \varphi(P) \frac{(\rho_0^2 - R^2) ds}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} \right\} \frac{d\rho_0}{\rho_0}, \quad (4.106)$$

де точка  $M_1(\rho_1, \theta, \varphi) \in K_R^*$ .

Формули (4.105), і (4.106) можна представити у простішому вигляді. Так у випадку внутрішньої крайової задачі  $\iint_{S_R(0)} \varphi(P) ds = 0$ , і формула (4.105) запишеться так:

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\rho \left\{ \iint_{S_R(0)} \varphi(P) \left[ \frac{(R^2 - \rho_0^2)}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} - \frac{1}{R} \right] ds \right\} \frac{d\rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R(0)} \varphi(P) \left\{ \int_0^\rho \left[ \frac{(R^2 - \rho_0^2)}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} - \frac{1}{R} \right] \frac{d\rho_0}{\rho_0} \right\} ds. \quad (4.107)$$

Нехай  $F(\rho_1) = (R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{1/2}$ . Тоді маємо

$$2\rho_0 \frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0} = 2\rho_0 \frac{\rho_0 - R \cos \gamma}{F(\rho_0)} = F(\rho_0) - \frac{R^2 - \rho_0^2}{F(\rho_0)},$$

тобто

$$\begin{aligned} \frac{R^2 - \rho_0^2}{[F(\rho_0^2)]^3} &= \frac{1}{F(\rho_0)} - 2\rho_0 \frac{1}{[F(\rho_0)]^2} \frac{\partial F(\rho_0)}{\partial \rho_0} = \\ &= \frac{1}{F(\rho_0)} + 2\rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left( \frac{1}{F(\rho_0)} \right) \end{aligned}$$

Отже,

$$J = \int_0^\rho \left[ \frac{R^2 - \rho_0^2}{[F(\rho_0)]^3} - \frac{1}{R} \right] \frac{d\rho_0}{\rho_0} = \int_0^\rho \left[ \frac{1}{F(\rho_0)} + 2\rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left( \frac{1}{F(\rho_0)} \right) - \frac{1}{R} \right] \frac{d\rho_0}{\rho_0} = \int_0^\rho \left( \frac{1}{F(\rho_0)} - \frac{1}{R} \right) \frac{d\rho_0}{\rho_0} + 2 \left( \frac{1}{F(\rho)} - \frac{1}{R} \right).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{F(\rho_0)} - \frac{1}{R} \right) \frac{d\rho_0}{\rho_0} &= \left( \frac{1}{\rho_0 \left( 1 + \left( \frac{R}{\rho_0} \right)^2 - 2 \frac{R}{\rho_0} \cos \gamma \right)^{1/2}} - \frac{1}{R} \right) \frac{d\rho_0}{\rho_0} = \\ &= - \left( \frac{1}{(1 + x^2 - 2x \cos \gamma)^{1/2}} - \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{R}, \end{aligned}$$

де  $x = R/\rho_0$ , а

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2 - 2x \cos \gamma)^{1/2}} = \ln \left| x - \cos \gamma + \sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \gamma} \right| + const,$$

то

$$J = 2 \left( \frac{1}{F(\rho_0)} - \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \ln(R - \rho \cos \gamma + F(\rho)) + \frac{\ln 2R}{R}.$$

Підставляючи знайдений інтеграл у (4.107) і враховуючи, що  $\iint_{S_R(0)} \varphi(P) ds = 0$ , дістаємо розв'язок внутрішньої задачі Неймана у вигляді

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R(0)} \varphi(P) [2(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{1/2} - \\ &- \frac{1}{R} \ln(R - \rho \cos \gamma + (R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{1/2})] ds. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Аналогічно, змінюючи порядок інтегрування у формулі (4.106), розв'язок зовнішньої задачі Неймана для сфери запишемо так:

$$\begin{aligned} u(\rho_1, \theta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R(0)} [2(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1 \cos \gamma)^{1/2} - \frac{1}{R} \ln([R - \rho_1 \cos \gamma + \\ &+ (R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1 \cos \gamma)^{1/2}] \rho_1^{-1} (1 - \cos \gamma)^{-1})] \varphi(P) ds. \end{aligned}$$

#### 4.16 Потенціал об'єму простого й подвійного шарів. Основні означення

Одним із важливих розділів математичної фізики є теорія потенціалу, яка дістала розвиток історично досить рано. Вона має важливе значення з погляду фізичних застосувань та розвитку методів розв'язання крайових задач теорії рівнянь еліптичного типу.

Важливу роль у розвитку теорії потенціалу й дослідженні крайових задач для рівнянь Лапласа відіграла праця О. М. Ляпунова "Про деякі питання, пов'язані із задачею Діріхле"(1898). У даній темі буде використано низку результатів цієї роботи.

Нехай у деякій точці  $A(a, b, c)$  тривимірного простору міститься електричний (або магнітний) заряд  $q$ . Тоді на підставі закону Кулона цей заряд створює електростатичне поле, напруга якого  $\vec{E}$  в довільній точці  $M(x, y, z)$ , відмінний від  $A(a, b, c)$ , становить

$$\vec{E} = kq \frac{\vec{r}}{r^3}$$

або в проекціях

$$E_x = kq \frac{x - a}{r^3}, \quad E_y = kq \frac{y - b}{r^3}, \quad E_z = kq \frac{z - c}{r^3}, \quad (4.109)$$

де  $\vec{r} = \vec{AM}$ ;  $r = |\vec{AM}|$ ;  $k$  — коефіцієнт пропорційності, що залежить від вибраної системи одиниць. Для простоти вважатимемо, що  $k = 1$ .

Неважко бачити, що праві частини формули (4.109) дорівнюють із протилежним знаком частинним похідним від функції

$$u(M) = \frac{q}{r} + C_1, \quad C_1 = const \quad (4.110)$$

за  $x, y$  і  $z$  відповідно. Ця функція називається *потенціалом електростатичного поля*. Вважається, що в (4.110)  $C_1 = 0$ , щоб  $u(M) \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Таким чином, точковий заряд  $q$  створює потенціал

$$u(M) = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}}. \quad (4.111)$$

Оскільки за кількох точкових зарядів потенціали, створені ними, додаються, то потенціали, створені неперервно розподіленими зарядами, обчислюються у вигляді границі суми, тобто у вигляді інтеграла.

Нехай заряд розподілений в об'ємі  $T$  з об'ємною густиною  $f(M)$ . Тоді потенціал, створений цим зарядом,

$$u(M) = \iiint_T \frac{f(N)}{r} d\tau, \quad r = |\vec{MN}|, \quad N = N(\xi, \eta, \zeta). \quad (4.112)$$

Права частина формули (4.112) називається *об'ємним потенціалом*.

Якщо заряд розподілений по поверхні  $S$  із поверхневою густиною  $\psi(N)$ , то потенціал, створений цим зарядом

$$\nu(M) = \iint_S \frac{\psi(N)}{r} ds, \quad (4.113)$$

де  $r$  — відстань від точки  $M$  до змінної точки  $N$  на поверхні  $S$ .

Права частина (4.113) називається *потенціалом простого шару*.

Припустимо тепер, що два точкових заряди  $q$  і  $-q$  (рис. 4.14), які знаходяться на осі  $l$  на відстані  $h$ , прямують до точки  $A$ , причому напрям від  $q$  до  $-q$  весь час збігається з додатним напрямом осі  $l$ . Тоді потенціал у довільній точці, крім  $A$ , є різницею двох величин, які намагаються стати рівними одна одній; тому цей потенціал прямує до нуля.

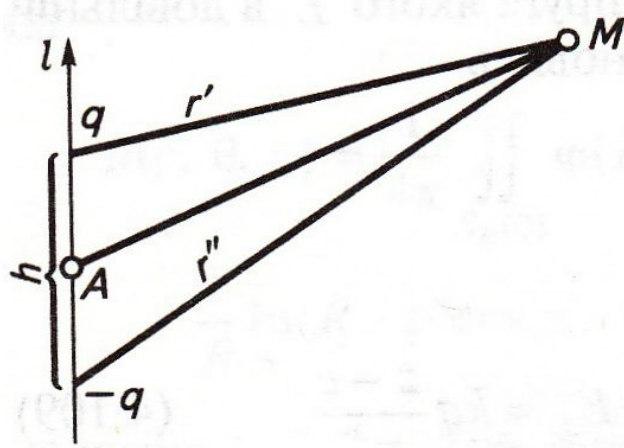


Рис. 4.14:

Якщо ж у процесі руху  $q$  змінюється таким чином, що  $qh = p = const$ , то границя потенціалу становить

$$\begin{aligned} \omega(M) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} p \frac{1/r' - 1/r''}{h} \\ &= p \frac{\partial}{\partial \vec{l}} \left( \frac{1}{r} \right) = p \frac{\cos(\vec{AM}, \vec{l})}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Граничне розміщення зарядів у фізиці називають диполем, величину  $p$  — моментом, а вісь  $\vec{l}$  — віссю цього диполя. За допомогою точкових зарядів диполь може бути реалізований тільки наближено (два великих заряди на малій відстані один від одного).

Нехай тепер дано орієнтовну поверхню  $S$ , тобто таку, на якій вказано зовнішні й внутрішні сторони. Нехай на  $S$  розподілений диполь із густиною  $\mu(N)$ , причому в кожній точці  $N$  напрям осі диполя збігається з напрямом внутрішньої нормалі до  $S$  у точці  $N$ . Тоді потенціал, створений диполем,

$$\omega(M) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\vec{NM}, \vec{n}_i)}{r^2} ds, \quad (4.115)$$

де вектор  $\vec{r}$  напрямлений від  $N$  до  $M$ ;  $\vec{n}_i$  — внутрішня нормаль до  $S$ .



Цей інтеграл називається *потенціалом подвійного шару*, оскільки розглядуваний розподіл диполя може бути наближено реалізований як два накладені на поверхню  $S$  розподіли зарядів із густиною  $h^{-1}\mu(N) - h^{-1}\mu(N)$  на відстані  $h$  (по нормалі до  $S$ ) один від одного, якщо тільки  $h$  досить мале.

Надалі вважатимемо, що вектор  $\vec{r}$  напрямлений від точки  $M$  до  $N$  і нормаль до  $S$  братимемо зовнішню. Тоді (4.115) можемо записати у вигляді

$$\omega(M) = - \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi}{r^2} ds, \quad (4.116)$$

де  $\varphi = (\vec{r}, \vec{n})$  — кут між зовнішньою нормаллю й вектором  $\vec{r} = \vec{MN}$ .

#### 4.17 Об'ємний потенціал

Розглянемо потенціал об'єму

$$\nu(M) = \iiint_T \frac{f(N)}{r} d\tau, \quad r = |\vec{MN}|, \quad (4.117)$$

де  $T$  — скінченна область, обмежена поверхнею  $S$ ;  $\bar{T} = T \cup S$ . Вважаємо, що функція  $f(N)$  — обмежена й інтегрована в  $T$ . Інтеграл (4.117) є власним інтегралом, якщо точка  $M$  лежить поза  $T$  ( $r \neq 0$ ). У цьому випадку функція  $\nu(M)$  неперервна й має частинні похідні всіх порядків. Ці похідні можна дістати диференціюванням під знаком інтеграла, й  $\nu(M)$  задовольняє рівняння Лапласа  $\Delta \nu(M) = 0$  поза  $T$ . Покажемо, що при  $M \rightarrow \infty$  у довільному напрямі функція прямує до нуля, так що

$$|\nu(M)| < A/\rho_1, \quad A = \text{const},$$

де  $\rho_1$  — відстань точки  $M$  від початку координат.

Розташуємо початок координат у середині області  $T$  (рис. 4.15).

Тоді  $MN \geq OM - ON$ , або  $r \geq \rho_1 - ON$ . Позначимо через  $d$  діаметр області  $T$ . Тоді  $r \geq \rho_1 - d$ . Вважатимемо, що точка  $M$  настільки віддалена від початку координат, що  $\rho_1 > 2d$ , тобто  $d < \rho_1/2$ . Але тоді  $r \geq 0,5\rho_1$ , або  $r^{-1} \geq 2\rho_1^{-1}$ . Ураховуючи дану нерівність, маємо формулу

$$|\nu(M)| \leq \iiint_T |f(N)| \frac{d\tau}{r} < \frac{2}{\rho_1} \iiint_T |f(N)| d\tau = \frac{A}{\rho_1},$$

де  $A = 2 \iiint_T |f(N)| d\tau$ .

Таким чином потенціал об'єму є гармонічною функцією поза областю  $T$ .

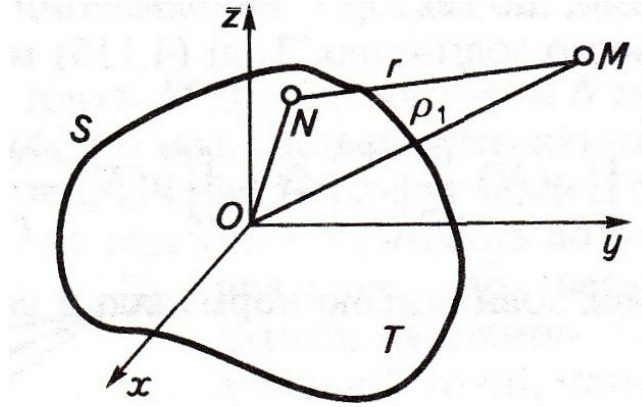


Рис. 4.15:

Нехай тепер точка  $M \in T$ . Тоді інтеграл (4.117) буде невласним. Унаслідок обмеженості  $f(N)$  інтеграл (4.117) збігається, оскільки  $|f(N)|r^{-1} < Cr^{-1}$ . Покажемо, що він є неперервною функцією.

Справді, нехай  $M_0$  — довільна внутрішня точка області  $T$ . Візьмемо в області  $T$  область  $T_\delta$ , яка містить точку  $M_0$ , і обчислимо модуль інтеграла

$$|\nu_\delta(M)| = \left| \iiint_{T_\delta} \frac{f(N)}{r} d\tau \right| < C \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} d\tau,$$

де  $K_\delta(M_0)$  — куля радіусом  $\delta$  із центром у точці  $M_0$ , яка містить область  $T_\delta$ ,  $T_\delta \subset K_\delta(M_0)$ . Для обчислення останнього інтеграла введемо сферичну систему координат із центром у точці  $M$ . Очевидно, що

$$C \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} d\tau < C \iiint_{K_{2\delta}(M)} r^{-1} d\tau = C \int_0^{2\delta} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin \theta d\varphi d\theta dr = 8C\pi\delta^2,$$

де  $K_{2\delta}(M)$  — куля радіусом  $2\delta$  із центром у точці  $M$ . Отже,  $|\nu_\delta(M)| < 8\pi C\delta^2$  і при  $\delta \rightarrow 0$   $|\nu_\delta(M)| \rightarrow 0$  незалежно від точки  $M_0$ , тобто, якщо задано  $\varepsilon > 0$ , то, вибираючи  $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{8\pi C}\right)^{1/2}$ , переконуємося в рівномірній збіжності інтеграла (4.117) у довільній точці  $M_0$  області  $T$ . Оскільки рівномірну збіжність інтеграла (4.117) доведено за умови обмеженості густини  $f(N)$ , то цей інтеграл неперервний також і у точках розриву першого роду функції  $f(N)$ .

Справедлива наступна теорема.

**Теорема 4.16.** *Якщо  $f(N)$  обмежена й інтегровна в області  $T$ , то потенціал  $\nu(M)$  і його частинні похідні першого порядку неперервні в усьому просторі, й ці похідні можна дістати диференціюванням під знаком інтеграла.*

**Доведення.** Для доведення теореми залишилося показати, що частинні похідні першого порядку  $\nu_x(M)$ ,  $\nu_y(M)$ ,  $\nu_z(M)$  в області  $T$  є неперервними і їх можна дістати диференціюванням під знаком інтеграла (4.117).

Для цього розглянемо інтеграли

$$\begin{aligned} X(M) &= - \iiint_T f(N) \frac{x - \xi}{r^3} d\tau, \\ Y(M) &= - \iiint_T f(N) \frac{y - \eta}{r^3} d\tau, \\ Z(M) &= - \iiint_T f(N) \frac{z - \zeta}{r^3} d\tau, \end{aligned} \quad (4.118)$$

які дістаються диференціюванням (4.117) відповідно за  $x$ ,  $y$  і  $z$  під знаком інтеграла.

Повторюючи вищенаведені міркування для інтегралів (4.118), маємо

$$|X(M)| < C \iiint_{T_\delta} \frac{|x - \xi|}{r^3} d\tau < C \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-2} d\tau < C \iiint_{K_{2\delta}(M_0)} r^{-2} d\tau = 8\pi C \delta < \varepsilon,$$

$$|Y(M)| < \varepsilon, \quad |Z(M)| < \varepsilon,$$

якщо  $\delta < \varepsilon(8\pi C)^{-1}$ . Звідси випливає рівномірна збіжність інтегралів (4.118) та їх неперервність у точках розриву функції  $f(N)$ . Точки краю  $S$  області  $T$  можна розглянути як точки розриву густини  $f(N)$ , яка дорівнює нулю за межами  $T$ . Отже, потенціал  $\nu(M)$  та інтеграли (4.118) неперервні в усьому просторі.

Покажемо, що  $X(M) = \nu_x$  для довільних точок  $M(x, y, z) \in T$ , для цього доведемо:  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , що як тільки  $|\Delta x| < \delta$ , то

$$\left| \frac{\nu(x + \Delta x, y, z) - \nu(x, y, z)}{\Delta x} - X(M) \right| < \varepsilon.$$

Розглянемо кулю  $K_{\delta'}(M)$  досить малого радіуса  $\delta'$  із центром у точці  $M$ , яка належить області  $T$ . Вважаємо, що точка  $M_1(x + \Delta x, y, z) \in K_{\delta'}(M)$ . Розділимо  $\nu(M)$  на два доданки:

$$\nu(M) = \nu_1(M) + \nu_2(M),$$

де

$$\nu_1(M) = \iiint_{K_{\delta'}(M)} r^{-1} f(N) d\tau;$$

$$\nu_2(M) = \iiint_{T \setminus K_{\delta'}(M)} r^{-1} f(N) d\tau.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\nu(x + \Delta x, y, z) - \nu(x, y, z)}{\Delta x} &= \frac{\nu_1(x + \Delta x, y, z) - \nu_1(x, y, z)}{\Delta x} + \\ &+ \frac{\nu_2(x + \Delta x, y, z) - \nu_2(x, y, z)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Для довільних фіксованих розмірів кулі  $K_{\delta'}(M)$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{\nu_2(x + \Delta x, y, z) - \nu_2(x, y, z)}{\Delta x} &= X_2(M) = \\ &= \iiint_{T \setminus K_{\delta'}(M)} f(N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau, \end{aligned}$$

тому, що точка  $M$  лежить за межами області  $T \setminus K_{\delta'}(M)$ .

Поклавши  $X(M) = X_1(M) + X_2(M)$ , оцінимо

$$\begin{aligned} &\left| X(M) - \frac{\nu(x + \Delta x, y, z) - \nu(x, y, z)}{\Delta x} \right| \leq \\ &\leq \left| X_2(M) - \frac{\nu_2(x + \Delta x, y, z) - \nu_2(x, y, z)}{\Delta x} \right| + \\ &+ |X_1(M)| + \left| \frac{\nu_1(x + \Delta x, y, z) - \nu_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| \end{aligned}$$

і покажемо, що кожний доданок можна зробити меншим за  $\varepsilon/3$ . Справді, оскільки  $|f(N)| < C$  і  $|r^{-1}(x - \xi)| < 1$ , то

$$|X_1(M)| = \left| \iiint_{K_{\delta'}(M)} f(N) \frac{x - \xi}{r^3} d\tau \right| < C \int_0^{\delta'} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2} dr = 4\pi C \delta'.$$

Розглянемо останній доданок

$$|d| = \left| \frac{\nu_1(x + \Delta x, y, z) - \nu_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| = \left| \iiint_{K_{\delta'}(M)} f(N) (r_1^{-1} - r^{-1}) d\tau \right| =$$

$$= \left| \iiint_{K_{\delta'}(M)} f(N) \frac{r - r_1}{r_1 r} d\tau \right|,$$

де  $r_1 = \sqrt{[(x + \Delta x) - \xi]^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ . Сторони трикутника  $MNM_1$  дорівнюють  $r$ ,  $r_1$ ,  $\Delta x$ , отже,  $|r - r_1| < |\Delta x|$ . Унаслідок нерівності  $2ab \leq a^2 + b^2$  маємо

$$|d| \leq C \iiint_{K_{\delta'}(M)} (rr_1)^{-1} d\tau \leq \frac{C}{2} \left[ \iiint_{K_{\delta'}(M)} r_1^{-2} d\tau + \iiint_{K_{\delta'}(M)} r^{-2} d\tau \right] = 8\pi\delta'.$$

Нехай  $\delta' = \varepsilon(18\pi C)^{-1}$ . Тоді справедливі оцінки

$$|X_1(M)| < \varepsilon/3, \quad |d| < \varepsilon/3. \quad (4.119)$$

Фіксуємо кулю  $K_{\delta'}(M)$ . Тоді фіксованою буде й область  $T \setminus K_{\delta'}(M)$ . Рівність (4.118) відносно вибраної області  $T \setminus K_{\delta'}(M)$  означає, що для довільного  $\varepsilon > 0$  можна взяти таке  $\delta''$ , що як тільки  $|\Delta x| < \delta''$ , то

$$\left| \frac{\nu_2(x + \Delta x, y, z) - \nu_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2(M) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Покладемо  $\delta = \min(\delta', \delta'')$ . Тоді враховуючи (4.119), дістанемо

$$\left| \frac{\nu(x + \Delta x, y, z) - \nu(x, y, z)}{\Delta x} - X(M) \right| < \varepsilon,$$

якщо  $|\Delta x| < \delta$ , що й потрібно було довести.

Аналогічно доводиться справедливість формули  $Y(M) = \nu_y$  і  $Z(M) = \nu_z$ .

**Теорема 4.17.** Якщо густина  $f(N) \in C(\bar{T}) \cap C^1(T)$ , то потенціал об'єму (4.119) має неперервні похідні другого порядку в області  $T$  і задовольняє в цій області рівняння Пуассона

$$\Delta \nu(M) = -4\pi f(M). \quad (4.120)$$

**Доведення.** Нехай  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  — довільна точка області  $T$ . Позначимо через  $K_\delta(M_0)$  кулю радіусом  $\delta$  із центром у точці  $M_0$ , яка цілком міститься всередині області  $T$ , а через  $T_1$  — область  $T_1 = T \setminus K_\delta(M_0)$ . Як і в теоремі 4.17, розділимо потенціал об'єму (4.117) на два доданки:

$$\nu(M) = \iiint_{T_1} r^{-1} f(N) d\tau + \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} f(N) d\tau = \nu_1(M) + \nu_2(M). \quad (4.121)$$

На підставі доведеної теореми маємо

$$\nu_x(M) = \iiint_{T_1} f(N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau + \iiint_{K_\delta(M_0)} f(N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau. \quad (4.122)$$

Але

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right), \quad r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2},$$

отже,

$$\nu_x(M) = \iiint_{T_1} f(N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau - \iiint_{K_\delta(M_0)} f(N) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau.$$

Перетворимо другий інтеграл:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_2(M)}{\partial x} &= - \iiint_{K_\delta(M_0)} f(N) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = - \iiint_{K_\delta(M_0)} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( f(N) \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] d\tau = \\ &= - \iiint_{K_\delta(M_0)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( f(N) \frac{1}{r} \right) d\tau + \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} \frac{\partial f}{\partial \xi} d\tau. \end{aligned}$$

Застосуємо до першого інтеграла формулу Гауса–Остроградського. Тоді

$$\frac{\partial \nu_2(M)}{\partial x} = - \iint_{S_\delta(M_0)} f(N) \frac{\cos(\vec{n}, \xi)}{r} ds + \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} \frac{\partial f}{\partial \xi} d\tau,$$

де  $S_\delta(M_0)$  — сфера радіусом  $\delta$  із центром у точці  $M_0$ ;  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до  $S_\delta(M_0)$  у точці  $N$ .

Підставивши знайдену похідну в (4.122), дістанемо

$$\begin{aligned} \nu_x(M) &= \iiint_{T_1} f(N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau + \iiint_{K_\delta(M_0)} \frac{1}{r} \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} d\tau - \\ &\quad - \iint_{S_\delta(M_0)} f(N) \frac{\cos(\vec{n}, \xi)}{r} ds. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Перший доданок у правій частині (4.123) є власним інтегралом для точки  $M$ , яка лежить у кулі  $K_\delta(M_0)$ , і він має в  $K_\delta(M_0)$  похідні всіх порядків. Те саме можна стверджувати стосовно третього доданка, тому що точка  $N \in S_\delta(M_0)$ , а точка  $M \in K_\delta(M_0)$ .

Другий доданок є потенціалом об'єму з неперервною густиною  $\frac{\partial f(N)}{\partial \xi}$  і на підставі теореми 4.17 він має неперервні похідні першого порядку в усьому просторі.

Таким чином, можна стверджувати, що  $\nu_x(M)$  формула має неперервні похідні першого порядку в кулі  $K_\delta(M_0)$ . Унаслідок довільності вибору точки  $M_0 \in T$  звідси випливає існування неперервних похідних першого порядку від функції  $\nu_x(M)$  всюди в області  $T$ . Застосовуючи аналогічні міркування до функцій  $\nu_y(M)$  і  $\nu_z(M)$ , дістаємо, що величина  $\nu(M)$  має в області  $T$  неперервні похідні до другого порядку включно.

Покажемо тепер, що об'ємний потенціал  $\nu(M)$  задовольняє в області  $T$  рівняння Пуассона. Звернемося до формул (4.121), (4.123). Потенціал  $\nu_1(M)$  по області  $T_1$  є гармонічною функцією в кулі  $K_\delta(M_0)$ , тому що  $K_\delta(M_0)$  лежить поза  $T_1$ , тобто  $\Delta \nu_1(M) = 0$  в кулі  $K_\delta(M_0)$ , а отже,  $\Delta \nu(M) = \Delta \nu_2(M)$  у кулі  $K_\delta(M_0)$ . Таким чином, для обчислення  $\Delta \nu(M)$  достатньо здиференціювати за  $x$  під знаком інтеграла ті члени в (4.123), в яких інтегрування здійснюється по  $K_\delta(M_0)$  і  $S_\delta(M_0)$ , скласти аналогічні вирази для похідних другого порядку за  $y$  і  $z$  і додати всі три похідні. Обчисливши таким чином  $\Delta \nu(M)$  у кулі  $K_\delta(M_0)$ , візьмемо всі його значення в точці  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Дістанемо

$$\begin{aligned} \Delta \nu(M_0) &= \\ &= \iiint_{K_\delta(M_0)} \left[ \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \frac{\xi - x_0}{r_0^3} + \frac{\partial f(N)}{\partial \eta} \frac{\eta - y_0}{r_0^3} + \frac{\partial f(N)}{\partial \zeta} \frac{\zeta - z_0}{r_0^3} \right] d\tau - \\ &\quad - \iint_{S_\delta(M_0)} f(N) \left[ \frac{\xi - x_0}{r_0^3} \cos(\vec{n}, \xi) + \frac{\eta - y_0}{r_0^3} \cos(\vec{n}, \eta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta - z_0}{r_0^3} \cos(\vec{n}, \zeta) \right] ds, \end{aligned} \quad (4.124)$$

де  $r_0 = \sqrt{[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2]}$ .

Формула (4.124) справедлива для всякого  $\delta$ , якщо  $K_\delta(M_0) \subset T$ , а величина  $\Delta \nu(M_0)$  не залежить, очевидно, від вибору  $\delta$ . Доведемо, що при  $\delta \rightarrow 0$  потрібний інтеграл прямує до нуля. Справді, нехай  $m = \max \left| \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \right|$  у деякій фіксованій досить малій кулі  $K_{\delta_0}(M_0)$ . Тоді при  $\delta \leq \delta_0$ , беручи до уваги, що  $|(\xi - x_0)r_0^{-1}| = |\cos(\vec{n}, \xi)| \leq 1$ , дістаємо

$$\left| \iiint_{K_\delta(M_0)} \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \frac{\xi - x_0}{r_0^3} d\tau \right| \leq m \iiint_{K_\delta(M_0)} r_0^{-2} d\tau.$$

Ввівши сферичні координати з центром у точці  $M_0$ , матимемо

$$\left| \iiint_{K_\delta(M_0)} \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \frac{\xi - x_0}{r_0^3} d\tau \right| \leq m \int_0^\delta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\varphi d\theta dr = 4\pi m \delta$$

Аналогічно оцінюються решта доданків у потрібному інтегралі. Отже, потрібний інтеграл у формулі (4.124) прямує до нуля при  $\delta \rightarrow 0$ .

Дослідимо тепер в (4.124) інтеграл по сфері  $S_\delta(M_0)$ . Оскільки зовнішня нормаль до сфери  $S_\delta(M_0)$  напрямлена вздовж її радіуса, то

$$\begin{aligned} & (\xi - x_0)r_0^{-3} \cos(\vec{n}, \xi) + (\eta - y_0)r_0^{-3} \cos(\vec{n}, \eta) + (\zeta - z_0)r_0^{-3} \cos(\vec{n}, \zeta) = \\ & = r_0^{-2} [\cos^2(\vec{n}, \xi) + \cos^2(\vec{n}, \eta) + \cos^2(\vec{n}, \zeta)] = \frac{1}{r_0^2}, \end{aligned}$$

а отже, інтеграл по  $S_\delta(M_0)$  можна записати у вигляді

$$\frac{1}{\delta^2} \iint_{S_\delta(M_0)} f(N) ds.$$

Застосовуючи до поверхневого інтеграла теорему 4.10 про середнє значення, дістаємо

$$\frac{1}{\delta^2} \iint_{S_\delta(M_0)} f(N) ds = 4\pi f(N_\delta),$$

де  $N_\delta$  — деяка точка  $S_\delta(M_0)$ . Коли  $\delta \rightarrow 0$ , точка  $N_\delta \rightarrow M_0$  і інтеграл по  $S_\delta(M_0)$  прямує до  $4\pi f(M_0)$ . Отже, формула (4.124) при  $\delta \rightarrow 0$  дає

$$\Delta \nu(M_0) = -4\pi f(M_0),$$

що й потрібно було довести.

◇ **Зауваження 4.5.** Якщо  $f(N) \in C(\bar{T}) \cap C^1(T)$ , то рівняння  $\nu(M) = -f(M)$  має частинний розв'язок

$$\nu(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{f(N)}{r} dr, \quad r = |MN|.$$

## 4.18 Потенціал подвійного шару

Розглянемо потенціал подвійного шару неперервної густини  $\mu(N)$ , розподіленої на поверхні Ляпунова  $S$ :

$$\omega(M) := - \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds, \quad (4.125)$$



де похідна береться за напрямом зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  у точці  $N(\xi, \eta, \zeta)$ ; вектор  $\vec{r}$  напрямлений від точки  $M(x, y, z)$  до точки  $N(\xi, \eta, \zeta)$ .

Потенціал подвійного шару поза  $S$  всюди має похідні всіх порядків і задовольняє рівняння Лапласа.

Покажемо, що потенціал подвійного шару прямує до нуля на нескінченності.

Візьмемо початок координат у середині області  $T$ , обмеженою поверхнею  $S$  (рис. 4.16).

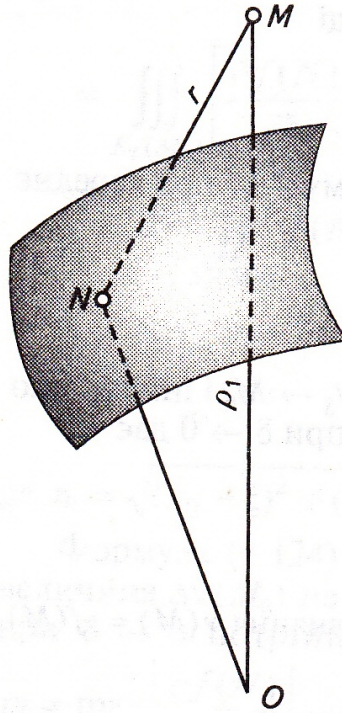


Рис. 4.16:

Тоді  $MN \geq OM - ON$ , або  $r \geq \rho_1 - ON$ . Позначимо через  $L$  найбільшу відстань точки поверхні від початку координат. Тоді  $r \geq \rho_1 - L$ . Вважатимемо, що точка  $M$  настільки віддалена від початку координат, що  $\rho_1 > 2L$ , тобто  $L < 0,5\rho_1$ ; отже,  $r > 0,5\rho_1$ , або  $r^{-1} < 2\rho_1^{-1}$ .

Ураховуючи останню нерівність, маємо

$$\begin{aligned} |\omega(M)| &\leq \iint_S |\mu(N)| \frac{|\cos(\vec{r}, \vec{n})|}{r^2} ds \leq \\ &\leq \frac{4}{\rho_1^2} \iint_S |\mu(N)| ds = A\rho_1^{-2}, \end{aligned}$$

де  $A = 4 \iint_S |\mu(N)| ds$ .

Отже, потенціал подвійного шару прямує до нуля на нескінченності як  $\rho_1^{-2}$ . Нехай тепер точка  $M$  збігається з деякою точкою  $N_0$ , що лежить на

поверхні  $S$ . Тоді  $r_0 = |N_0 \vec{N}|$  перетворюється в нуль у разі збігу точок  $N$  і  $N_0$ , і інтеграл (4.125) у цьому разі є невласним. Покажемо, що він збіжний. Для цього достатньо дослідити підінтегральну функцію на деякій частині  $\sigma_0$  поверхні  $S$  поблизу точки  $N_0$ . По частині поверхні  $S \setminus \sigma_0$  інтеграл має скінченне значення, тому, що  $N_0 \notin S \setminus \sigma_0$ .

Поверхня  $\sigma_0$  є поверхнею Ляпунова. Отже, в точці  $N_0$  можна побудувати місцеву систему координат, і рівняння частини  $\sigma_0$  поверхні  $S$  подається в цій системі у вигляді  $\zeta = f(\xi, \eta)$ .

У місцевій системі координат точка  $N_0$  має координати  $(0, 0, 0)$ , а точка  $N$  — координати  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Тоді  $r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ .

Знайдемо вираз для  $\cos(\vec{r}_0, \vec{n})$ , де  $\vec{r}_0$  — напрям  $N_0 \vec{N}$ . Маємо

$$\cos(\vec{r}_0, \vec{n}) = \cos(\vec{r}_0, \xi) \cos(\vec{n}, \xi) + \cos(\vec{r}_0, \eta) \cos(\vec{n}, \eta) + \cos(\vec{r}_0, \zeta) \cos(\vec{n}, \zeta).$$

Але

$$\cos(\vec{r}_0, \xi) = \xi r_0^{-1}, \quad \cos(\vec{r}_0, \eta) = \eta r_0^{-1}, \quad \cos(\vec{r}_0, \zeta) = \zeta r_0^{-1},$$

отже,

$$\cos(\vec{r}_0, \vec{n}) = \frac{1}{r_0} [\xi \cos(\vec{n}, \xi) + \eta \cos(\vec{n}, \eta) + \zeta \cos(\vec{n}, \zeta)].$$

Напрявні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні  $\sigma_0$  виражаються формулами

$$\cos(\vec{n}, \xi) = \frac{f_\xi}{\sqrt{1 + f_\xi^2 + f_\eta^2}}, \quad \cos(\vec{n}, \eta) = \frac{f_\eta}{\sqrt{1 + f_\xi^2 + f_\eta^2}},$$

$$\cos(\vec{n}, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_\xi^2 + f_\eta^2}}.$$

У місцевій системі координат  $f_\xi(N_0) = f_\eta(N_0) = 0$ . Надалі вважатимемо поверхню  $\sigma_0$  настільки малою, що

$$ad^\alpha \leq 1 \tag{4.126}$$

(див. означення поверхні Ляпунова в п. 4.11). Тоді кут  $\theta_0 = (\vec{n}, \xi)$  між нормаллями в точках  $N_0$  і  $N$  до поверхні  $\sigma_0$  менший за  $0,5\pi$ . Отже, на підставі третьої умови означення поверхні Ляпунова маємо

$$\cos \theta_0 \geq 1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 \geq 1 - \frac{1}{2} a^2 r_0^{2\alpha}, \tag{4.127}$$

звідси

$$\frac{1}{\cos \theta_0} = \sqrt{1 + f_\xi^2 + f_\eta^2} \leq \frac{2}{2 - a^2 r_0^{2\alpha}} \leq 1 + a^2 r_0^{2\alpha} \leq 2.$$

Унаслідок (4.126)

$$f_\xi^2 + f_\eta^2 \leq 2a^2 r_0^{2\alpha} + a^4 r_0^{4\alpha} \leq 3a^2 r_0^{2\alpha} \quad (4.128)$$

і

$$|f_\xi| \leq \sqrt{3} a r_0^\alpha, \quad |f_\eta| \leq \sqrt{3} a r_0^\alpha \quad (4.129)$$

Введемо полярні координати:

$$\xi = \rho_0 \cos \theta, \quad \eta = \rho_0 \sin \theta, \quad \rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

Тоді

$$\zeta_{\rho_0}^2 = (f_\xi \cos \theta + f_\eta \sin \theta)^2 \leq f_\xi^2 + f_\eta^2.$$

Звідси беручи до уваги (4.128), дістаємо

$$|\zeta_{\rho_0}| \leq \sqrt{3} a r_0^\alpha \leq \sqrt{3}, \quad a r_0^\alpha \leq 1, \quad (4.130)$$

або

$$|\zeta| \leq \sqrt{3} \rho_0, \quad (4.131)$$

але тоді

$$r_0 = \sqrt{\rho_0^2 + \zeta^2} \leq 2\rho_0. \quad (4.132)$$

Із нерівностей (4.130), (4.132) маємо

$$|\zeta_{\rho_0}| \leq \sqrt{3} a \cdot 2^\alpha \rho_0^\alpha,$$

звідки

$$|\zeta| \leq \frac{2^\alpha \rho_0^{\alpha+1}}{1 + \alpha} \sqrt{3} a.$$

При  $\alpha \leq 1$  буде  $2^\alpha \leq 1 + \alpha$ , а отже, попередню нерівність можна подати у вигляді  $|\zeta| \leq 2a\rho_0^{\alpha+1}$ .

Із (4.127) і (4.132) дістаємо

$$1 - \cos \theta_0 \leq \frac{1}{2} a^2 r_0^{2\alpha} \leq 2^{2\alpha-1} a^2 \rho_0^{2\alpha}.$$

Дамо оцінку напрямних косинусів одиничного вектора  $\vec{n}$  зовнішньої нормалі до поверхні  $S$  у точці  $N$ . На підставі (4.129) і (4.132) маємо

$$|\cos(\vec{n}, \xi)| \leq |f_\xi| \leq \sqrt{3} a r_0^\alpha \leq \sqrt{3} a 2^\alpha \rho_0^\alpha,$$

$$|\cos(\vec{n}, \eta)| \leq |f_\eta| \leq \sqrt{3} a 2^\alpha \rho_0^\alpha.$$

Оскільки  $\cos(\vec{n}, \zeta) = \cos \theta_0$ , то  $\cos(\vec{n}, \zeta) \geq 0$ , 5.

Позначимо  $C = \sup\{2a, \sqrt{3}a2^\alpha, 2^{2\alpha-1}a^2\}$ . Тоді з попередніх оцінок дістаємо

$$|\zeta| \leq C\rho_0^{\alpha+1}, \quad \cos(\vec{n}, \xi) \leq C\rho_0^\alpha, \quad \cos(\vec{n}, \eta) \leq C\rho_0^\alpha,$$

$$1 - \cos(\vec{n}, \zeta) \leq C\rho_0^{2\alpha}, \quad \cos(\vec{n}, \zeta) \geq 0, 5. \quad (4.133)$$

Беручи до уваги оцінки (4.133) та враховуючи очевидні нерівності  $|\xi| \leq \rho_0$ ,  $|\eta| \leq \rho_0$ ,  $\rho_0 \leq r_0$ , де  $\rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , маємо

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} \right| &\leq \frac{|\cos(\vec{n}, \xi)|}{r_0^2} + \frac{|\cos(\vec{n}, \eta)|}{r_0^2} + \frac{|\zeta|}{r_0^3} \leq \\ &\leq 3C\rho_0^{\alpha-2} = \frac{b}{\rho_0^{2-\alpha}}, \quad b = 3C. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Функція  $\mu(N)$  неперервна на поверхні  $S$ , отже,

$$|\mu(N)| \leq \max_S |\mu(N)| = A. \quad (4.135)$$

Замінюючи інтеграл по  $\sigma_0$  інтегралом по проекції  $\sigma'_0$  частини поверхні  $\sigma_0$  на площину  $\xi O \eta$  місцевої системи координат, дістаємо

$$\iint_{\sigma_0} \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} ds = \iint_{\sigma'_0} \mu(\xi, \eta) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} \frac{d\xi d\eta}{\cos \theta_0}.$$

На підставі (4.133)–(4.135) легко переконатися в справедливості оцінки

$$\left| \mu(\xi, \eta) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} \frac{1}{\cos \theta_0} \right| \leq \frac{2Ab}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

звідки впливає збіжність інтеграла (4.125), якщо точка  $M$  належить поверхні  $S$ . Таким чином, потенціал подвійного шару (4.125) визначений у всьому просторі.

Якщо точка  $M \in S$ , наприклад, збігається з точкою  $N_0$  поверхні  $S$ , то значення інтеграла (4.125) у цій точці називається *прямим значенням потенціалу подвійного шару*.

Нехай точка  $M(x, y, z)$  знаходиться поза поверхнею  $S$  і наближається до точки  $N_0 \in S$ . Якщо при цьому наближенні виявиться, що потенціал подвійного шару  $\omega(M)$  прямує до деякої скінченної границі, то казатимемо, що *потенціал подвійного шару набуває в точці  $N_0$  граничного значення*.

Надалі покажемо, що граничні значення потенціалу подвійного шару  $\omega(M)$ , взагалі кажучи, різні залежно від того, ззовні чи зсередини прямує точка  $M$  до  $S$ , і ці граничні значення не збігаються з прямими значеннями, тобто покажемо, що потенціал подвійного шару (4.125) зазнає розриву, коли точка  $M$  переходить поверхню  $S$ .

Розглянемо спочатку потенціал (4.125), коли  $\mu(N) \equiv 1$ . Тоді

$$\omega_1(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \frac{\cos \varphi}{r^2} ds.$$

Нехай точка  $M$  знаходиться поза замкненою поверхнею  $S$ . При цьому  $r^{-1}$  є гармонічною всередині  $S$  із неперервними похідними всіх порядків аж до  $S$ . Тоді, згідно з властивостями гармонічних функцій,

$$\omega_1(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = 0 \quad (M - \text{поза } S).$$

Нехай точка  $M$  знаходиться всередині  $S$ . Побудуємо кулю  $K_\delta(M)$  із центром у точці  $M$  і такого малого радіуса  $\delta$ , щоб  $K_\delta(M)$  цілком містилася всередині області  $T$ , яка обмежена поверхнею  $S$ . Тоді в області  $T \setminus K_\delta(M)$  функція  $r^{-1}$  гармонічна й маємо

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds + \iint_{C_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = 0,$$

де  $C_\delta(M)$  — сфера радіусом  $\delta$  із центром у точці  $M$ .

У точках сфери  $C_\delta(M)$  зовнішня щодо області  $T \setminus K_\delta(M)$  нормаль має напрям, протилежний напрямку радіуса сфери, а отже

$$\left. \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{C_\delta(M)} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{C_\delta(M)} = \frac{1}{\delta^2}.$$

Таким чином, попередня рівність запишеться у вигляді

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds + \frac{1}{\delta^2} \iint_{C_\delta(M)} ds = 0,$$

або

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds + 4\pi = 0,$$

звідки

$$\omega_1(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = 4\pi \quad (M - \text{всередині } S).$$

Припустимо, що точка  $M$  знаходиться на поверхні  $S$ . Знайдемо пряме значення потенціалу

$$\omega_1(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds.$$

Проведемо малу сферу  $C_\delta(M)$  із центром у точці  $M$  і радіусом  $\delta \leq d$  ( $d$  — стала, яка фігурує в означенні поверхні Ляпунова). Ця сфера вирізає частину

$\sigma$  поверхні  $S$ . Згідно з означенням невластного інтеграла маємо

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{S \setminus \sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds.$$

Нехай  $C'_\delta(M)$  — частина поверхні  $C_\delta(M)$ , яка знаходиться всередині поверхні  $S$  ( $C'_\delta(M) \subset T$ ). Розглянемо область, обмежену поверхнями  $S_\sigma$  та  $C'_\delta(M)$ . Оскільки точка  $M$  знаходиться поза цією областю, то в цій області функція  $r^{-1}$  є гармонічною, і

$$\iint_{S \setminus \delta} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds + \iint_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = 0,$$

або з урахуванням попередньої рівності

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds. \quad (4.136)$$

Введемо сферичні координати з центром у точці  $M$ . Як і раніше, маємо

$$\left. \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{C'_\delta(M)} = \frac{1}{\delta^2}, \quad ds = \delta^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \iint_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds &= \int_0^{2\pi} \int_{\theta(\varphi)}^{\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} [1 + \cos \theta(\varphi)] d\varphi = \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} \cos \theta(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Покажемо, що

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} [1 + \cos \theta(\varphi)] d\varphi = 0.$$

Для цього введемо місцеву систему координат із початком у точці  $M$ , спрямувавши вісь  $M\zeta$  по нормалі до  $S$  у точці  $M$ , а за площину  $xMy$  візьмемо площину, дотичну до поверхні  $S$  у точці  $M$ . Тоді  $\cos \theta(\varphi) = \zeta/\delta$ .

Зазначимо, що точки  $(\delta, \varphi, \theta(\varphi))$  лежать на лінії перетину сфери  $C_\delta(M)$  із поверхнею Ляпунова  $S$ , тому для координат  $\zeta$ , точок цієї лінії справедлива оцінка  $|\zeta| \leq C\delta^{1+\alpha}$  [див. оцінки (4.133)].

Отже,  $|\cos \theta(\varphi)| \leq C\delta^\alpha$ , а звідси випливає, що  $\cos \theta(\varphi) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  рівномірно, тобто незалежно від точки  $M$ , і

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta(\varphi) d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Таким чином із (4.137) маємо

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = 2\pi$$

і остаточно з рівності (4.136) дістаємо

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = -2\pi, \quad M \in S.$$

Об'єднаємо добуті результати:

$$\omega_1(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \begin{cases} 0 & (M - \text{поза } S), \\ 2\pi & (M \in S), \\ 4\pi & (M - \text{усередині } S). \end{cases} \quad (4.138)$$

Інтеграл  $\omega_1(M)$  називається *інтегралом Гауса*, який є розривною функцією.

Надалі вважатимемо поверхню  $S$  такою, що за довільного положення точки  $M$  виконується нерівність

$$\iint_S \frac{|\cos \varphi|}{r^2} ds \leq C, \quad (4.139)$$

де  $C$  — цілком певне додатне число. Припустимо, наприклад, що існує таке ціле додатне число  $K$ , що за довільного положення  $M$  можна розділити  $S$  на окремі частини, кількість яких не перевищує  $K$ , так, що пряма, яка проходить через  $M$ , перетинає кожен частину не більше, ніж в одній точці, причому на кожній із частин  $\cos \varphi$  зберігає знак. За цієї умови нерівність (4.139) виконується, якщо взяти  $C = 4\pi K$ .

Формули (4.138) показують, що при  $\mu(N) \equiv 1$  потенціал подвійного шару (4.124) зазнає розриву неперервності, коли  $M$  перетинає поверхню  $S$ . Покажемо, що дане твердження справедливе для довільної неперервної густини  $\mu(N)$ .

**Теорема 4.18.** *Потенціал подвійного шару  $\omega(M)$  має границі, коли точка  $M$  прямує до точки  $N_0 \in S$  ззовні або зсередини. Якщо границю значень  $\omega(M)$  ззовні позначити через  $\omega_e(N_0)$ , а границю зсередини — через  $\omega_i(N_0)$ , то справедливі формули*

$$\begin{aligned} \omega_e(N_0) &= \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi_0}{r_0^2} ds - 2\pi\mu(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0), \\ \omega_i(N_0) &= \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi_0}{r_0^2} ds + 2\pi\mu(N_0) = \\ &= \omega(N_0) + 2\pi\mu(N_0), \end{aligned} \quad (4.140)$$

де  $\varphi_0$  кут, утворений напрямом  $\vec{r}_0 = N_0\vec{N}$  і зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  у змінній точці  $N$ .

**Доведення.** Нехай  $N_0$  — фіксована точка поверхні  $S$ . Складемо потенціал подвійного шару

$$\omega_0(M) = \iint_S [\mu(N) - \mu(N_0)] \frac{\cos \varphi}{r^2} ds \quad (4.141)$$

і покажемо, що він зберігає неперервність, коли  $M$  перетинає поверхню  $S$  у точці  $N_0$ . Нехай  $\varepsilon$  — задане додатне число. Виділимо таку частину  $\sigma$  поверхні  $S$ , усередині якої міститься точка  $N_0$  і на якій внаслідок неперервності виконується нерівність

$$|\mu(N) - \mu(N_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4C}, \quad N \in \sigma, \quad (4.142)$$

де  $C$  — стала, що входить в умову (4.139).

Розділивши поверхню  $S$  на дві частини  $\sigma$  і  $S/\sigma$ , матимемо

$$\begin{aligned} \omega_0(M) &= \iint_S [\mu(N) - \mu(N_0)] \frac{\cos \varphi}{r^2} ds + \\ &+ \iint_{S/\sigma} [\mu(N) - \mu(N_0)] \frac{\cos \varphi}{r^2} ds = \omega_0^{(1)}(M) + \omega_0^{(2)}(M). \end{aligned} \quad (4.143)$$

У разі довільного положення точки  $M$  справедлива нерівність

$$|\omega_0^{(1)}(M)| \leq \iint_{\sigma} |\mu(N) - \mu(N_0)| \frac{|\cos \varphi_0|}{r^2} ds,$$

звідки на підставі (4.139), (4.143) дістаємо

$$|\omega_0^{(1)}(M)| \leq \varepsilon/4. \quad (4.144)$$

Із (4.143) випливає

$$\omega_0(M) - \omega_0(N_0) = \omega_0^{(1)}(M) - \omega_0^{(1)}(N_0) + [\omega_0^{(2)}(M) - \omega_0^{(2)}(N_0)],$$

отже,

$$|\omega_0(M) - \omega_0(N_0)| \leq |\omega_0^{(1)}(M)| + |\omega_0^{(1)}(N_0)| + |\omega_0^{(2)}(M) - \omega_0^{(2)}(N_0)|,$$

або внаслідок (4.144)

$$|\omega_0(M) - \omega_0(N_0)| \leq \varepsilon/2 + |\omega_0^{(2)}(M) - \omega_0^{(2)}(N_0)|. \quad (4.145)$$



У потенціалі подвійного шару  $\omega_0^{(2)}(M)$  інтегрування здійснюється по поверхні  $S \setminus \sigma$ , а точка  $N_0$  знаходиться всередині  $\sigma$ , тому функція  $\omega_0^{(2)}(M)$  у точці  $N_0$  та її деякому околі неперервна й має похідні всіх порядків.

Таким чином, за всіх  $M$ , досить близьких до  $N_0$ , маємо

$$|\omega_0^{(2)}(M) - \omega_0^{(2)}(N_0)| \leq \varepsilon/2$$

і внаслідок (4.145)

$$|\omega_0(M) - \omega_0(N_0)| \leq \varepsilon$$

звідки з огляду на довільність  $\varepsilon > 0$  випливає неперервність функції  $\omega_0(M)$  у точці  $N_0$ .

Нехай точка  $M \in S$ . Позначимо її через  $N$ . З урахуванням (4.138) маємо

$$\omega_0(N) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos \varphi}{r^2} ds - \mu(N_0) \iint_S \frac{\cos \varphi}{r^2} ds = \omega(N) - 2\pi\mu(N_0),$$

$$\omega_0(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0), \quad (4.146)$$

де  $\omega(N_0)$  — значення інтеграла (4.124) у точці  $N_0$ .

Нехай  $N \rightarrow N_0$  ( $N \in S$ ). Унаслідок доведеної неперервності  $\omega_0(M)$

$$\omega_0(N) \rightarrow \omega_0(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0).$$

Звідси за формул (4.146) бачимо, що  $\omega(N)$  має при цьому границю  $\omega(N_0)$ , тобто функція  $\omega(M)$ , визначена формулою (4.125), є неперервною на поверхні  $S$ .

Припустимо тепер, що точка  $M$  знаходиться всередині  $S$ . На підставі (4.138) маємо

$$\omega_0(M) = \omega(M) - 4\pi\mu(N_0). \quad (4.147)$$

Нехай точка  $M$  прямує до  $N_0$ . Унаслідок доведеної неперервності  $\omega_0(M)$

$$\omega_0(M) \rightarrow \omega_0(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0). \quad (4.148)$$

Але тоді з (4.147) випливає, що й  $\omega(M)$  має границю, коли точка  $M$  прямує до  $N_0$  зсередини  $S$ , причому на підставі (4.148)

$$\omega_i(N_0) - 4\pi\mu(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0),$$

тобто

$$\omega_i(N_0) = \omega(N_0) + 2\pi\mu(N_0). \quad (4.149)$$

Із (4.149) бачимо, що границя  $\omega_i(N_0)$  і значення функції  $\omega(M)$  у точці  $N_0$  різні, якщо тільки  $\mu(N_0) \neq 0$ .

Нехай точка  $M$  знаходиться поза поверхнею  $S$ . Тоді згідно з (4.138)  $\omega_0(M) = \omega(M)$ . Повторюючи вищенаведені міркування, маємо

$$\omega_e(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0). \quad (4.150)$$

Із формул (4.149), (4.150) безпосередньо дістаємо значення стрибка потенціалу подвійного шару в довільній точці  $N_0 \in S$ :

$$\omega_i(N_0) - \omega_e(N_0) = 4\pi\mu(N_0)$$

Зазначимо, що функція  $\omega(M)$ , визначена формулою (4.125), є неперервною всередині  $S$  і аж до  $S$ . Це випливає із формул (4.140) і неперервності функції  $\omega(N_0)$  на поверхні  $S$ . Аналогічно можна стверджувати, що вона є неперервною поза  $S$  і аж до  $S$ .

#### 4.19 Потенціал простого шару

Розглянемо потенціал простого шару з неперервною густиною  $\psi(N)$ , яка розподілена по поверхні Ляпунова:

$$u(M) = \iint_S \frac{\psi(N)}{r} ds, \quad r = |M\vec{N}|. \quad (4.151)$$

У всіх точках  $M(x, y, z)$  простору, які не належать поверхні  $S$ , потенціал простого шару має похідні всіх порядків і задовольняє рівняння Лапласа. Як і в п. 4.18, можна показати, що потенціал простого шару прямує до нуля на нескінченності як  $B^{-1}$ , де  $B = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Теорема 4.19.** *Потенціал простого шару (4.151) із неперервною густиною є функцією, неперервною у всьому просторі.*

Якщо точка  $M \in S$ , то потенціал простого шару (4.151) є невластним інтегралом. Покажемо, що в точках поверхні  $S$  він збігається рівномірно і  $u(M)$  є функцією, неперервною на  $S$ .

Нехай  $N_0$  — довільна точка поверхні  $S$ . В точці  $N_0$  побудуємо місцеву систему координат ( $S$  є поверхнею Ляпунова). Нехай  $\varepsilon > 0$  задане число і  $\sigma_1$  — частина поверхні  $S$ , визначена умовою  $\xi^2 + \eta^2 \leq d_1^2$  ( $d_1 \leq 0,25d$ ,  $d$  — стала, яка фігурує в означенні поверхні Ляпунова).

Покажемо, що можна вибрати  $d_1$  настільки малим, що для довільного положення  $M$  в деякому околі точки  $N_0$  виконується нерівність

$$\left| \iint_{\sigma_1} \frac{\psi(N)}{r} ds \right| \leq \varepsilon. \quad (4.152)$$

Унаслідок неперервності функції  $\psi(N)$  на  $S$  існує така стала  $A$ , що  $|\psi(N)| \leq A$  для всіх  $N \in S$ . Маємо

$$\left| \iint_{\sigma_1} \frac{\psi(N)}{r} ds \right| \leq 2A \iint_{\sigma_{d_1}(N_0)} \frac{d\xi d\eta}{\rho_1}, \quad (4.153)$$

де  $\sigma_{d_1}(N_0)$  — круг радіуса  $d_1$  з центром в  $N_0$ ;  $\rho_1$  — довжина проекції  $M_1N_1$  відрізка  $MN$  на дотичну площину до  $S$  в точці  $N_0$ . Припустимо, що точка  $M$  знаходиться всередині кулі радіуса  $d_1$  з центром в точці  $N_0$ . Тоді точка  $M_1 \in \sigma_{d_1}(N_0)$ , і якщо на площині  $(\xi, \eta)$  візьмемо круг  $\sigma_{2d_1}(M_1)$ , то він буде містити весь круг  $\sigma_{d_1}(N_0)$ , а отже, враховуючи (4.153), одержуємо

$$\left| \iint_{\sigma_1} \frac{\psi(N)}{r} ds \right| \leq 2A \iint_{\rho_1 \leq 2d_1} \frac{d\xi d\eta}{\rho_1} = 2A \int_0^{2\pi} \int_0^{2d_1} \frac{\rho_1 d\rho_1 d\varphi}{\rho_1} = 8\pi A d_1.$$

Остання оцінка справедлива при довільному положенні точки  $N_0$  на поверхні  $S$ . Для того, щоб одержати оцінку (4.152), достатньо вибрати  $d_1$  таким чином, щоб  $8\pi A d_1 < \varepsilon$ . Оцінка (4.152) справедлива за довільного положення точки  $M$  в кулі радіуса  $d_1$  з центром в точці  $N_0$ , отже, інтеграл (4.151) збігається рівномірно на поверхні  $S$  і функція  $u(M)$  є неперервною в точці  $N_0 \in S$ , що й треба було довести.

## 4.20 Нормальна похідна потенціалу простого шару

Нехай  $\vec{n}_0$  — напрям зовнішньої нормалі до поверхні  $S$  в точці  $N_0$  (рис. 60). Вважаючи, що  $M \notin S$ , складемо похідну від функції (4.151) за напрямом  $\vec{n}_0$ . Від точки  $M$  залежить тільки множник  $r^{-1}$ , і ми можемо диференціювати його під знаком інтеграла:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0} = \iint_S \psi(N) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0)}{r^2} ds. \quad (4.154)$$

Наголосимо на різницю між останнім інтегралом і потенціалом подвійного шару (4.125). В інтегралі (4.125) береться кут між напрямом  $\vec{r} = \overrightarrow{MN}$  і зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  в змінній точці інтегрування  $N$ , а в інтегралі (4.154) розглядається кут між  $\vec{r}$  і зовнішньою нормаллю до  $S$  у фіксованій точці  $N_0$  (рис. 4.17).

Покажемо, що інтеграл (4.154) рис. 4.17 існує і в тому випадку, коли  $M$  співпадає з точкою  $N_0$ . Тоді будемо мати

$$\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0} = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds, \quad (4.155)$$

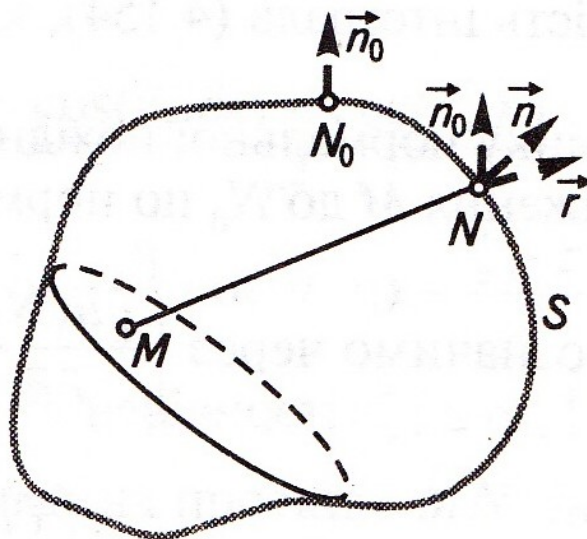


Рис. 4.17:

де  $r_0$  — відстань  $|N_0N|$ . Для доведення існування інтеграла (4.155) достатньо розглянути його на частині  $\sigma_0$  поверхні  $S$ , яка містить точку  $N_0$ , тобто  $N_0 \in \sigma_0$ . В точці  $N_0$  побудуємо місцеву систему координат. Як і в попередніх параграфах, через  $(x, y, z)$  позначимо координати  $M$ , а через  $(\xi, \eta, \zeta)$  — координати точки  $N$  в місцевій системі координат. Тоді інтеграл (4.154) запишемо у вигляді

$$\iint_{\sigma_0} \psi(N) \frac{\zeta - z}{r^3} ds.$$

Якщо  $M$  збігається з  $N_0$ , то  $z = 0$ , і інтеграл набуває вигляду

$$\iint_{\sigma_0} \psi(N) \frac{\zeta}{r_0^3} ds = \iint_{\sigma'_0} \psi(\xi, \eta) \frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3 \cos(\vec{n}, z)} d\xi d\eta,$$

де  $\sigma'_0$  — проекція  $\sigma_0$  на дотичну площину до поверхні  $S$ , в точці  $N_0$ , а  $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$  — рівняння частини  $\sigma_0$  поверхні  $S$  в місцевій системі координат.

Беручи до уваги (4.133) та нерівності  $r_0 \geq \rho_0$ ,  $|\psi(N)| \leq A$ , одержуємо наступну оцінку підінтегральної функції:

$$\left| \psi(\xi, \eta) \frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3 \cos(\vec{n}, z)} \right| \leq \frac{2CA}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

звідки і випливає збіжність інтегралу (4.154), коли точка  $M$  збігається з точкою  $N_0 \in S$ .

З'ясуємо тепер поведінку нормальної похідної потенціалу простого шару (4.154) при наближенні  $M$  до  $N_0$  по нормалі зсередини та зовні поверхні  $S$ . Для цього позначимо через  $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i$  границю  $\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0}$ , коли  $M \rightarrow N$  зсередини поверхні  $S$ , а через  $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e$  — ззовні  $S$ .

Покажемо, що нормальна похідна потенціалу простого шару (4.154) має цілком визначені границі і для них мають силу наступні формули:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0} \right)_i &= \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds + 2\pi \psi(N_0), \\ \left( \frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0} \right)_e &= \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds - 2\pi \psi(N_0). \end{aligned} \quad (4.156)$$

Для доведення справедливості формул (4.156) складемо різницю інтеграла (4.154) і потенціалу подвійного шару з тією ж густиною  $\psi(N)$ :

$$F(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0} - \omega(M) = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds. \quad (4.157)$$

Цей інтеграл має сенс, якщо точка  $M$  знаходиться за межами поверхні  $S$  ( $M \notin S$ ), або якщо  $M$  збігається з точкою  $N_0 \in S$ .

Доведемо, що різниця (4.157) залишається неперервною, коли  $M$  перетинає поверхню  $S$  в точці  $N_0$ . Для цього покажемо, що  $F(M) \rightarrow F(N_0)$ , коли точка  $M \rightarrow N_0$  по нормалі  $\vec{n}_0$ . В точці  $N_0$  побудуємо місцеву систему координат. Нехай  $\sigma_1$  — частина поверхні  $S$ , яка визначена умовою  $\xi^2 + \eta^2 \leq d_1^2$ , ( $d_1 \leq \frac{1}{2}d$ ,  $N_0 \in S$ ). Точка  $M$  знаходиться на нормалі до  $S$  в точці  $N_0$ . Тоді в місцевій системі координат  $x = y = 0$ , а отже

$$\begin{aligned} \cos(\vec{r}, \vec{n}) &= \frac{\xi}{r} \cos(\vec{n}, \xi) + \frac{\eta}{r} \cos(\vec{n}, \eta) + \frac{\zeta - z}{r} \cos(\vec{n}, \zeta), \\ \cos(\vec{r}, \vec{n}_0) &= \frac{\zeta - z}{r}, \end{aligned}$$

таким чином,

$$\begin{aligned} &\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} = \\ &= -\frac{\xi}{r^3} \cos(\vec{n}, \xi) - \frac{\eta}{r^3} \cos(\vec{n}, \eta) - \frac{\zeta - z}{r^3} \times [\cos(\vec{n}, \zeta) - 1]. \end{aligned}$$

Беручи до уваги (4.133) та нерівності  $|\xi| \leq \rho_0$ ,  $|\eta| \leq \rho_0$ ,  $r \geq \rho_0$ ,  $|\zeta - z| \leq r$ , де  $\rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  — довжина проекції  $\vec{MN}$  на дотичну площину до  $S$  в точці  $N_0$ , одержуємо

$$\frac{|\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})|}{r^2} \leq \frac{b_1}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

де  $b_1$  — стала. Унаслідок неперервності густини  $\psi(N)$  на  $S$ :  $|\psi(N)| \leq A$ , а отже,

$$\left| \iint_{\sigma_1} \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds \right| \leq \iint_{\rho_0 \leq d_1} \frac{2Ab_1}{\rho_0^{2-\alpha}} d\xi d\eta =$$

$$= 2Ab_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{d_1} \frac{d\rho_0 d\varphi}{\rho_0^{1-\alpha}} = b_2 d_1^\alpha,$$

де  $b_2$  — стала.

Добута оцінка має місце при довільному положенні точки  $M$  на нормалі до  $S$  в точці  $N_0$ , причому  $M$  може збігатися з точкою  $N_0$ . Звідси випливає, що для заданого  $\varepsilon > 0$ , вибираючи  $d_1$  таким чином, щоб  $b_2 d_1^\alpha < 0,25\varepsilon$ , будемо мати

$$\left| \iint_{\sigma_1} \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds \right| \leq 0,25\varepsilon. \quad (4.158)$$

Запишемо (4.157) у вигляді

$$F(M) = \iint_{\sigma_1} \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds + \\ + \iint_{S \setminus \sigma_1} \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds = F_1(M) + F_2(M).$$

Тоді

$$F(M) - F(N_0) = F_1(M) - F_1(N_0) + F_2(M) - F_2(N_0),$$

звідси

$$|F(M) - F(N_0)| \leq |F_1(M)| + |F_1(N_0)| + |F_2(M) - F_2(N_0)|,$$

або внаслідок (4.158)

$$|F(M) - F(N_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |F_2(M) - F_2(N_0)| \quad (4.159)$$

якщо вважати, що точка  $M$  знаходиться на нормалі до  $S$  в точці  $N_0$ . В інтегралі  $F_2(M)$  інтегрування здійснюється по поверхні  $S \setminus \sigma_1$ , а точка  $N_0 \in \sigma_1$ . Тому функція  $F_2(M)$  в точці  $N_0$  і її деякому околі є неперервною, отже, для всіх  $M$ , досить близьких до  $N_0$ ,

$$|F_2(M) - F_2(N_0)| < 0,5\varepsilon.$$

Таким чином, із (4.159) дістаємо

$$|F(M) - F(N_0)| < \varepsilon,$$

звідки випливає внаслідок довільності  $\varepsilon > 0$ , що

$$\lim_{M \rightarrow N_0} F(M) = F(N_0), \quad (4.160)$$

причому  $M \rightarrow N_0$  по нормалі до  $S$  в точці  $N_0$  зсередини або зовні поверхні  $S$ . Раніше було показано, що потенціал подвійного шару  $\omega(M)$  має границі при прямуванні  $M$  до  $N_0$  по нормалі зсередини або зовні поверхні  $S$ . Тоді з (4.157) на підставі (4.160) випливає, що нормальна похідна потенціалу простого шару (4.154) має границі при  $M \rightarrow N_0$  по нормалі зсередини або зовні поверхні  $S$ . Використовуючи (4.160), одержуємо

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \omega_i(N_0) = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds - \omega(N_0),$$

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e - \omega_e(N_0) = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds - \omega(N_0).$$

Беручи до уваги (4.140), переконуємося в справедливості формул (4.156). Із цих формул безпосередньо випливає величина скачка нормальної похідної потенціалу простого шару

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e = 4\pi\psi(N_0).$$

Зазначимо, що нормальна похідна потенціалу простого шару прямує до своїх граничних значень  $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i$  і  $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e$  рівномірно для всієї поверхні  $S$  при прямуванні  $M$  до  $N_0$  по нормалі.

Казатимемо, що гармонічна всередині чи зовні  $S$  функція  $u(M)$  має правильну нормальну похідну, якщо при прямуванні  $M$  до  $N_0$  по нормалі до  $S$  її нормальна похідна  $\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0}$  прямує до своїх граничних значень рівномірно відносно точки  $N_0 \in S$ .

Отже, справедлива наступна

**Теорема 4.20.** *Потенціал простого шару з неперервною густиною має правильні нормальні похідні як всередині, так і зовні поверхні  $S$ .*

## 4.21 Логарифмічний потенціал

У випадку площини логарифмічні потенціали простого та подвійного шарів мають вигляд

$$u(M) = \int_l \psi(N) \ln \frac{1}{r} ds, \quad M = M(x, y), \quad (4.161)$$

$$N = N(\xi, \eta), \quad r = |\vec{MN}|;$$

$$\omega(M) = - \int_l \mu(N) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \ln \frac{1}{r} \right) ds = \int_l \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds, \quad (4.162)$$

де  $l$  — деяка замкнена крива на площині  $xOy$ ;  $\psi(N)$  — лінійна густина простого шару;  $\mu(N)$  — густина моменту лінійного подвійного шару.

Вираз  $r^{-1} \cos(\vec{r}, \vec{n}) ds$  дає кут, під яким бачимо елемент кривої  $ds$  із точки  $M$ , причому цей кут буде додатним, якщо  $\cos \varphi > 0$ , і від'ємним, якщо  $\cos \varphi < 0$ .

Надалі будемо вважати, що функції  $\psi(N)$  і  $\mu(N)$  є неперервними, а  $l$  є кривою Ляпунова (визначення кривої Ляпунова аналогічне визначенню поверхні Ляпунова).

У випадку двох незалежних змінних формула (4.163) матиме вигляд

$$\omega(M) = \int_l \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = \begin{cases} 0 & (M - \text{поза } l), \\ \pi & (M \in l), \\ 2\pi & (M - \text{всередині } l). \end{cases} \quad (4.163)$$

Покажемо: якщо  $l$  має неперервну кривину, то потенціал подвійного шару в точках кривої  $l$  існує. Для цього розглянемо криву на площині  $xOy$  і виберемо початок координат в точці  $N$ , вісь  $Ox$  напрямимо по дотичній, а вісь  $Oy$  — по нормалі в цій точці (рис. 4.18). Рівняння кривої в деякому околі то-

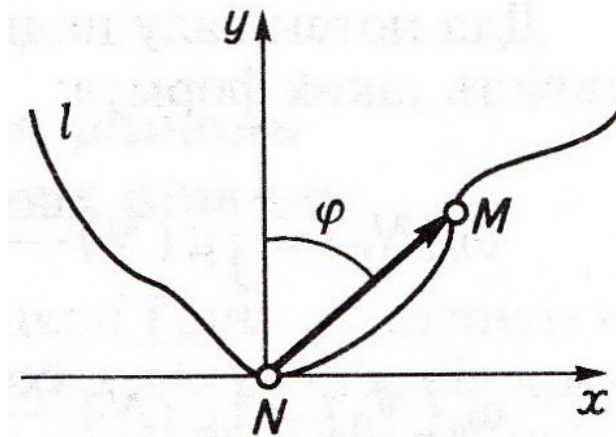


Рис. 4.18:

чки  $N$  запишеться у вигляді  $y = y(x)$ . За припущенням крива має неперервну кривину, тобто  $y(x)$  має неперервні похідні до 2-го порядку включно.

Застосовуючи формулу Тейлора, маємо

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(\theta x), \quad 0 < \theta < 1,$$

звідси внаслідок вибору системи координат

$$y(x) = \frac{x^2}{2} y''(\theta x).$$



Враховуючи цю рівність, одержуємо

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4} [y''(\theta x)]^2} = x \sqrt{1 + x^2 [0,5y''(\theta x)]^2},$$

$$\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \cos \varphi = \frac{y}{r} = \frac{xy''(\theta x)}{2\sqrt{1 + x^2 [0,5y''(\theta x)]^2}},$$

$$\frac{\cos \varphi}{r} = \frac{y''(\theta x)}{2 \left(1 + x^2 [0,5y''(\theta x)]^2\right)}.$$

Із виразу кривини  $K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$  випливає  $y''(0) = K(N)$ . У зв'язку з цим

$$\lim_{MN \rightarrow 0} \frac{\cos \varphi}{r} = 0,5K(N).$$

Таким чином, функція  $r^{-1} \cos \varphi$  є неперервною функцією вздовж кривої  $l$ , а отже, можемо стверджувати, що потенціал подвійного шару існує і є неперервною функцією, якщо  $M \in l$ . В тривимірному просторі функція  $r^{-2} \cos \varphi$  мала, взагалі кажучи, полярність при збіганні точок  $M$  і  $N$ .

Для потенціалу подвійного шару (4.162) можна довести справедливості наступних формул:

$$\omega_i(N_0) = \int_l \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0} ds + \pi \mu(N_0) = \omega(N_0) + \pi \mu(N_0), \quad (4.164)$$

$$\omega_e(N_0) \int_l \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0} ds - \pi \mu(N_0) = \omega(N_0) - \pi \mu(N_0),$$

де  $r_0 = |N_0 N|$  і  $(\vec{r}_0, \vec{n})$  — кут, утворений напрямом  $\vec{N}_0 N$  з напрямом зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  до кривої  $l$  в точці  $N$ ;  $N_0$  — фіксована точка на  $l$ . Формули (4.164) є аналогом формул (4.140).

Із (4.164) випливає, що

$$\omega_i(N_0) - \omega_l(N_0) = 2\pi \mu(N_0).$$

Потенціал простого шару (4.161) визначений у всіх точках площини і неперервний на всій площині. Нехай точка  $N_0 \in l$  і  $\vec{n}_0$  — напрям нормалі в цій точці. Якщо  $M \notin l$ , то

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0} = \int_l \psi(N) \frac{\partial \ln(r^{-1})}{\partial \vec{n}_0} ds = \int_l \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0)}{r} ds. \quad (4.165)$$

При наближенні  $M$  до  $N_0$  по нормалі зсередини і ззовні  $l$  похідна (4.165) має границі, які визначаються за формулами (див. формули (4.156))

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i = \int_l \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0)}{r_0} ds + \pi\psi(N_0),$$

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_l = \int_l \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0)}{r_0} ds - \pi\psi(N_0),$$

з яких випливає

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_l = 2\pi\psi(N_0).$$

Як і вище, можна показати, що вираз  $r_0^{-1} \cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)$  є функція неперервна. Відзначимо, що потенціал простого шару (4.161) не перетворюється в нуль на нескінченності.

#### 4.22 Зведення крайових задач для рівнянь еліптичного типу до інтегральних рівнянь

Метод відокремлення змінних та метод функції Гріна, розглянуті в попередній темі, дають можливість одержати явний вираз для розв'язків крайових задач. Але їх можна застосувати тільки у випадку областей найпростішого вигляду.

В даному параграфі покажемо, що у випадку досить широкого класу областей задачі Діріхле та Неймана (внутрішні чи зовнішні) для рівнянь Лапласа і Пуассона за допомогою поверхневих потенціалів можуть бути зведені до інтегральних рівнянь. Цей спосіб є часто досить ефективним при якісному дослідженні крайових задач (теоретичне дослідження питання існування та єдиності розв'язку крайових задач, його стійкості тощо) та їх наближеному інтегруванні.

Розглянемо внутрішню задачу Діріхле: в класі  $C^2(D) \cap C(D \cup S)$  знайти гармонічну функцію  $u(x, y, z)$ , яка задовольняє крайову умову

$$u(M)|_S = \varphi(N), \quad M = M(x, y, z), \quad N \in S. \quad (4.166)$$

Будемо шукати розв'язок поставленої задачі у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u(M) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds, \quad r = |MN|. \quad (4.167)$$

У разі довільного вибору густини  $\mu(N)$  функція (4.167) задовольняє в області  $D$  рівняння Лапласа. Виберемо  $\mu(N)$  таким чином, щоб функція (4.167) задовольняла крайову умову (4.166).

Згідно з другою з формул (4.140) маємо

$$\varphi(N_0) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} ds + 2\pi\mu(N_0), \quad r_0 = |N_0N|.$$

Позначимо  $K(N_0; N) = -\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{2\pi r_0^2}$ . Тоді попереднє рівняння запишеться у вигляді

$$\mu(N_0) = \frac{1}{2\pi}\varphi(N_0) + \iint_S \mu(N)K(N_0; N)ds. \quad (4.168)$$

Знайшовши розв'язок інтегрального рівняння (4.168) та підставивши його в (4.167), дістанемо розв'язок внутрішньої задачі Діріхле.

Відзначимо, що ядро  $K(N_0; N)$  не симетричне, оскільки нормаль береться в точці  $N$  і  $r_0$  має напрям  $N_0N$ .

У випадку площини внутрішня задача Діріхле для рівняння Лапласа зводиться до інтегрального рівняння вигляду

$$\mu(N_0) = \frac{1}{\pi}\varphi(N_0) + \int_l \mu(N)K_1(N_0; N)ds, \quad (4.169)$$

де  $K_1(N_0; N) = -\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{\pi r_0}$ .

Для зведення зовнішньої задачі Діріхле до інтегрального рівняння користуємося першою з формул (4.140). Матимемо

$$\mu(N_0) = -\frac{1}{2\pi}\varphi(N_0) - \iint_S \mu(N)K(N_0; N)ds. \quad (4.168a)$$

Розглянемо тепер внутрішню задачу Неймана: в просторі функцій  $C^2(D) \cap C(D \cup S)$  знайти розв'язок рівняння Лапласа, який задовольняє крайову умову

$$\lim_{M \rightarrow N} \frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}} = \Phi(N), \quad M \in D, \quad N \in S. \quad (4.170)$$

Шукаємо розв'язок поставленої задачі Неймана у вигляді потенціалу простого шару:

$$u(M) = \iint_S \frac{\psi(N)}{r} ds. \quad (4.171)$$

Згідно з доведеною теоремою 4.20, якщо  $\psi(N) \in C(S)$ , то функція (4.171) є неперервною у всьому просторі і в області  $D$  задовольняє рівняння Лапласа.

Виберемо густину  $\psi(N)$  таким чином, щоб задовольнялась і крайова умова (4.170). Для цього використаємо першу з формул (4.156). Маємо

$$\Phi(N_0) = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds + 2\pi\psi(N_0),$$

або

$$\psi(N_0) = \frac{1}{2\pi}\Phi(N_0) - \iint_S \psi(N) K_2(N_0; N) ds, \quad (4.172)$$

де  $K_2(N_0; N) = -\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2}$ .

Для зовнішньої задачі Неймана користуємось другою із формул (4.156). Дістаємо

$$\psi(N_0) = -\frac{1}{2\pi}\Phi(N_0) - \iint_S \psi(N) K_2(N_0; N) ds. \quad (4.172a)$$

У випадку двовимірного простору внутрішня та зовнішня задачі Неймана зведуться відповідно до інтегральних рівнянь

$$\psi(N_0) = \frac{1}{\pi}\Phi(N_0) + \int_l \psi(N) K_3(N_0; N) ds, \quad (4.173)$$

$$\psi(N_0) = -\frac{1}{\pi}\Phi(N_0) - \int_l \psi(N) K_3(N_0; N) ds, \quad (4.173a)$$

де  $K_3(N_0; N) = -\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{\pi r_0}$ .

Можна показати: якщо  $S$  (або  $l$ ) є поверхнею (кривою) Ляпунова і в її визначенні  $\alpha = 1$ , то для одержаних рівнянь (4.168), (4.169), (4.168a), (4.172) – (4.173a) справедливі основні теореми теорії інтегральних рівнянь, які розглядаються в курсі функціонального аналізу.

**Вправа.** За допомогою потенціала подвійного шару знайти розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа у випадку круга радіуса  $R$  із центром в початку координат.

### Задачі для самостійного розв'язування

1. Вивести рівняння стаціонарного процесу дифузії в однорідному ізотропному середовищі, яке:

а) знаходиться в стані спокою;

б) рухається із заданою швидкістю  $\vec{\nu}(\nu_x, \nu_y, \nu_z)$  вздовж осі  $Ox$ .

Відповідь:

а)  $\Delta u(x, y, z) = 0$ , де  $u(x, y, z)$  – концентрація ;

б)

$$k\Delta u - v_x \frac{\partial u}{\partial x} - v_y \frac{\partial u}{\partial y} - v_z = 0,$$

де  $k$  — коефіцієнт дифузії;  $v_x, v_y, v_z$  — проекції швидкості  $\vec{v}$  на координатні осі. Якщо  $v_x = v_y = v_z = 0$ , то рівняння набуває вигляду  $k\Delta u - \nu u_x = 0$ . Останнє рівняння ще називають *рівнянням газової атаки*.

**Вказівка.** Для виведення рівнянь стаціонарного процесу дифузії потрібно використати закон збереження речовини для довільного об'єму  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$ , і застосувати формулу Остроградського. Закон збереження речовини для нерухомої поверхні  $S$  записується так:

$$\iint_S \left( -k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + v_n u \right) ds = 0,$$

або

$$\iiint_V [\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(\vec{v}u)] dx dy dz = 0,$$

звідки внаслідок довільності об'єму  $V$ , а також умови  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  і випливає рівняння дифузії.

- Виходячи з рівнянь Максвелла, показати, що потенціал електростатичного поля задовольняє рівняння Пуассона з правою частиною, яка є пропорційною об'ємній густині зарядів  $\rho(x, y, z)$ .

**Вказівка.** Рівняння Максвелла мають вигляд

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}), \quad \vec{J} = \sigma \vec{E},$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H});$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}(\mu \vec{H}) = 0,$$

де  $\vec{E}, \vec{H}$  — вектори електричного і магнітного полів;  $\varepsilon$  — діелектрична стала;  $\mu$  — магнітна проникливість;  $\sigma$  — провідність середовища;  $c$  — швидкість світла в порожнечі;  $\vec{J}$  — густина струму провідності.

Рівняння, які задовольняє поле стаціонарно розподілених зарядів, одержуються із рівнянь Максвелла, якщо всі похідні по часу покласти рівними нулю. Для електростатичного поля в середовищі, яке не є провідником, одержуємо

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = 4\pi\rho.$$

Із першого з рівнянь випливає, що  $\vec{E}$  — потенціальний вектор, тобто існує така скалярна функція  $u(x, y, z)$ , що  $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$ .  $u(x, y, z)$  називають *потенціалом поля*. Із другого рівняння маємо

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho(x, y, z).$$

Якщо  $\varepsilon = \text{const}$ , то для  $u(x, y, z)$ , одержуємо

$$\Delta u(x, y, z) = -\frac{1}{\varepsilon} 4\pi\rho(x, y, z).$$

В порожнечі  $\varepsilon = 1$ .

3. Показати, що потенціал стаціонарного магнітного поля задовольняє рівняння Лапласа.

**Вказівка.** Якщо магнітне поле є стаціонарним, то воно повинне визначатися рівняннями

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div}(\mu \vec{H}) = 0.$$

З першого рівняння випливає потенціальність вектора  $\vec{H}$ :  $\vec{H} = -\operatorname{grad} u$ . Підставляючи цей вираз у друге рівняння і враховуючи однорідність та ізотропність середовища ( $\mu = \operatorname{const}$ ), одержуємо рівняння Лапласа.

4. Скласти математичну модель стаціонарного процесу розподілу температури в ізотропному неоднорідному тілі  $V$  з краєм  $S$ , якщо в тілі є джерела тепла інтенсивності  $f(x, y, z)$ , а поверхня  $S$  — теплоізольована. Коефіцієнт теплопровідності рівний  $k(x, y, z)$ .
5. Знайти форму рівноваги прямокутної мембрани зі сторонами  $2a$  і  $2b$ , яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження  $q$  (початок координат вибрано в центрі мембрани). Сторони нерухомо закріплені. Обчислити прогин центра мембрани, вважаючи, що  $b/a = 2$ .
6. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині нескінченного кругового циліндра радіуса  $l$ , якщо на його поверхні підтримується температура  $u(l, \varphi) = u_0 \sin \varphi$  ( $u_0 = \operatorname{const}$ ). Розв'язок знайти у формі ряду і у формі інтеграла Пуассона.
7. Дано прямокутну пластинку  $OACB$  (рис. 4.19). Через сторону  $OA$  тепло рівномірно підводиться, через  $OB$  — рівномірно відводиться, а дві сторони  $AC$  і  $BC$  покриті тепловою ізоляцією. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок пластинки.

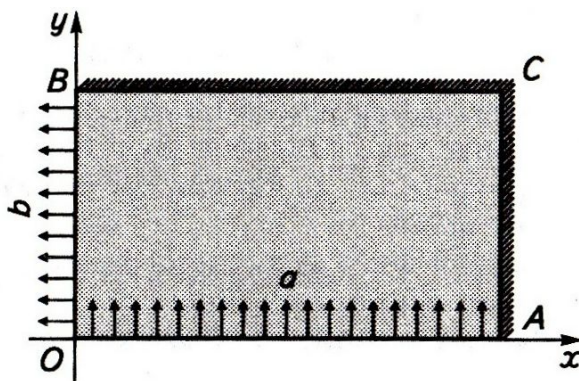


Рис. 4.19:

8. Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму півкруга радіуса  $a$ , якщо на неї діє рівномірно розподілене навантаження  $q$ . Краї мембрани нерухомо закріплені.
9. Дві сторони  $AC$  і  $BC$  прямокутної однорідної пластинки  $OACB$  (рис. 4.20) теплоізольовані, а на двох інших підтримується нульова температура. Знайти стаціонарний розподіл температури за умови, що в пластинці виділяється тепло з густиною  $Q = \operatorname{const}$ .
10. Дослідити стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму криволінійного прямокутника, дві сторони якого утворені дугами концентричних кіл, а дві інші — відрізками радіусів (рис. 4.21). Одна з граней ( $\rho = b$ ) має температуру  $T_0 = \operatorname{const}$ , інші підтримуються за нульової температури.

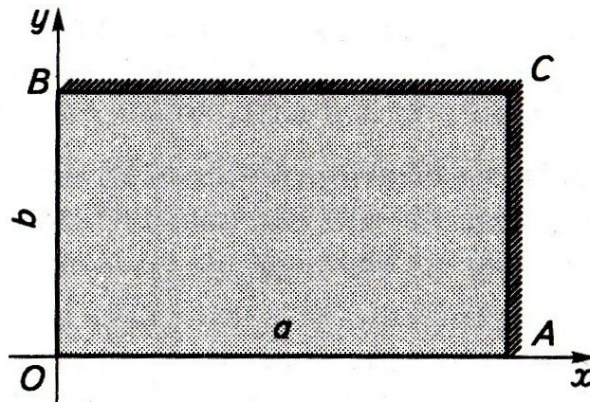


Рис. 4.20:

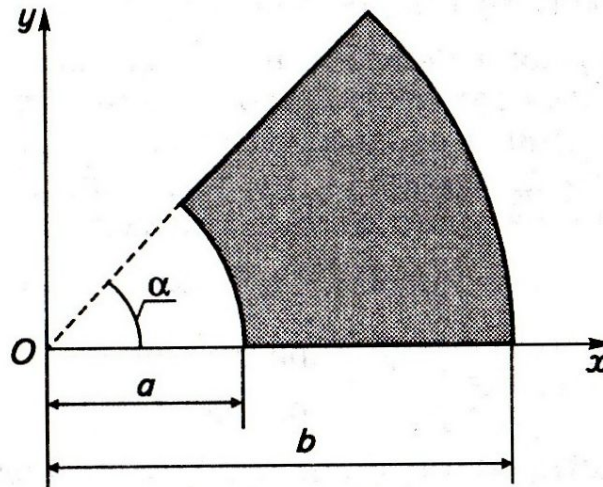


Рис. 4.21:

11. Тонка плівка натягнена на дротяний каркас, який проектується на площину  $xOy$  в прямокутник зі сторонами  $x = 0$ ,  $x = l$ ,  $y = 0$ ,  $y = m$ ; відхилення точок контуру від площини  $xOy$  задається рівностями  $u(0, y) = 0$ ,  $u(l, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, m) = h \sin \frac{\pi x}{l}$  ( $h = const$ ). Знайти форму поверхні, на якій розміститься плівка.
12. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині нескінченного кругового циліндра радіуса  $l$ , якщо на поверхні циліндра підтримується стала температура:  $0^\circ$  — в тих точках, де  $\alpha < \varphi < 2\pi$ ;  $2\pi u_0 \alpha^{-1}$  в тих точках, де  $0 < \varphi < \alpha$  ( $u_0, \alpha = const$ ). Розглянути випадок, коли  $\alpha$  досить мале.
13. Знайти закон стаціонарного розподілу температури в прямокутній пластинці, дві протилежні сторони  $y = 0$  і  $y = b$  якої знаходяться відповідно при нульовій температурі і  $T_0 = const$ , а дві інші ( $x = \pm a$ ) випромінюють тепло по закону Ньютона в навколишнє середовище, температура якого рівна нулю.
14. Тонка плівка натягнена на дротяний каркас, який проектується на площину  $xOy$  в круговий сектор  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $0 \leq \rho \leq R$ . На плівку діє рівномірно розподілене навантаження  $q$ . Сторони  $\varphi = 0$  і  $\varphi = \alpha$  нерухомо закріплені, а край  $\rho = R$  вільний. Знайти форму поверхні, на якій розміститься плівка.
15. Визначити форму прогину однорідної прямокутної мембрани із сторонами  $a$  і  $b$ , якщо

три сторони  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$  вільні, а на четвертій задане відхилення  $u(0, y) = y(y - b)$ .

16. Напівкругла мембрана радіуса  $a$  нерухомо закріплена на півколі і вільна на прямо-лінійному краї. Знайти форму прогину мембрани під рівномірним навантаженням  $q$ .

17. Усередині нескінченного кругового циліндра радіуса  $l$  проходить рух нестисливої рідини. Вважаючи рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон руху, якщо проекція швидкості  $\vec{v}$  на зовнішню нормаль циліндра в кожній точці на поверхні циліндра задається формулами:

а)  $\text{Pr}_{\vec{n}}\vec{v} = v_0 \sin \varphi, \quad v_0 = \text{const};$

б)  $\text{Pr}_{\vec{n}}\vec{v} = \begin{cases} -v_0, & \text{при } \varphi \in (0, \pi), \\ v_0, & \text{при } \varphi \in (-\pi, 0). \end{cases}$

18. Знайти закон стаціонарного розподілу температури в однорідній прямокутній пластинці, яка підігрівається джерелом тепла, що виділяє в одиниці площі тепло  $Q = \text{const}$ , якщо крізь сторони пластинки тепловіддача в навколишнє середовище нульової температури відбувається за законом Ньютона.

19. Зінтегрувати наступні крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а)  $\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 2 < \rho < 4, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$

$$u(2, \varphi) = A\varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=4} = 0, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi, \quad A = \text{const};$$

б)  $\Delta u(x, y) = 2x, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b),$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad y \in [0, b],$$

$$u_y|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0, \quad x \in [0, a];$$

в)  $\Delta u(\rho, \varphi) = \varphi, \quad 0 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{4},$

$$u(\rho, 0) = u\left(\rho, \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 2,$$

$$u(2, \varphi) = A \sin 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad A = \text{const}.$$

г)  $\Delta u(x, y) = \sin x \sin y, \quad 0 < x, y < \pi,$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad y \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u(x, \pi) = \sin x, \quad x \in [0, \pi];$$

д)  $\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in [0, +\infty], \quad y \in (0, b),$

$$u|_{x=0} = Ay, \quad u(\infty, y) = 0, \quad y \in [0, b], \quad A = \text{const},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} + u(x, b) = 0, \quad x \in [0, +\infty];$$



$$e) \Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi, \quad \rho \in (a, b),$$

$$\frac{\partial u(a, \varphi)}{\partial \rho} = A \cos \varphi, \quad u(l, \varphi) = B \sin 2\varphi + Q, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

$A, B, Q$  — — — *const.*

20. Побудувати функцію Гріна для рівняння Лапласа у випадку внутрішньої задачі Діріхле, якщо область має вигляд: а) півкруга ; б) кільця; в) шару  $z \in [0, l]$ .

Відповідь (див. рис. 4.22):

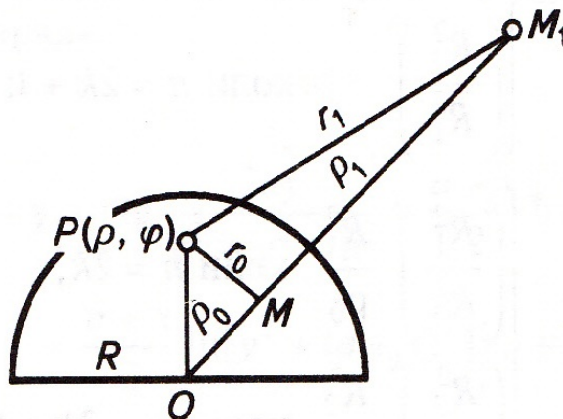


Рис. 4.22:

а)  $G(P, M) = G_1(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) - G_1(\rho, \varphi, \rho_0, 2\pi - \varphi_0)$ , де

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r_1}{R r_0}$$

$$r_0 = |PM|, \quad r_1 = |PM_1|, \quad \rho_0 = |OM|, \quad \rho_1 = |OM_1|,$$

$$M(\rho_0, \varphi_0), \quad M_1(\rho_1, \varphi_1);$$

б)  $G(P, M) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{e_n r'_n}{r_n e'_n}$ , де  $r_n = |PM_n|$ ;  $r'_n = |PM'_n|$ ;

$$M_n = P(\rho_n, \varphi_0); \quad M'_n = P(\rho'_n, \varphi_0);$$

$$e_n = \begin{cases} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k, & \text{коли } n = 2k, \\ \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{k+1}, & \text{коли } n = 2k + 1; \end{cases}$$

$$e'_n = \begin{cases} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k \frac{R_1}{\rho_0}, & \text{коли } n = 2k, \\ \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \frac{R_2}{\rho_0}, & \text{коли } n = 2k + 1, \end{cases};$$

$$\rho_n = \begin{cases} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^k \rho_0, & \text{коли } n = 2k, \\ \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)^{k+1} \rho_0, & \text{коли } n = 2k + 1; \end{cases}$$

$$\rho'_n = \begin{cases} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^k \frac{R_1^2}{\rho_0}, & \text{коли } n = 2k, \\ \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)^k \frac{R_2^2}{\rho_0}, & \text{коли } n = 2k + 1, \end{cases}$$

$R_1, R_2$  — радіуси;

в)  $G(P, M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n}\right)$ , де

$$r_n = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl + \xi)]^2},$$

$$r'_n = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl - \xi)]^2}.$$

21. Знайти об'ємний потенціал  $V$  кулі при сталій густині  $f(N) = \rho_0$ :

а) поставивши крайову задачу для  $V$  і розв'язавши її;

б) шляхом прямого обчислення об'ємного інтеграла.

Відповідь:

$$V = u(r) = \begin{cases} 2\pi\rho_0(R^2 - r^2/3), & \text{коли } r < R, \\ \frac{M}{r}, & \text{коли } r > R, \end{cases}$$

де  $R$  — радіус кулі;  $M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$  — її маса.

22. Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка з густиною  $\psi(M) = x$ .

Відповідь:

$$u(x, y) = \frac{a^2 - x^2 + y^2}{2} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} + ax - xy \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}, \quad x \in [-a, a].$$

23. Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка зі сталою густиною заряду.

Відповідь:

$$u(x, y) = \rho_0 \left\{ 2a - y \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} - \frac{a-x}{2} \ln[y^2 + (a-x)^2] - \frac{a+x}{2} \ln[y^2 + (a+x)^2] \right\}$$

де  $\rho_0$  — густина.

## НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Одним із актуальних напрямків сучасної математичної фізики є вивчення нелінійних математичних моделей різних явищ та процесів природи. Поява таких моделей обумовлена використанням у сучасній фізиці і техніці впливів на речовину електричних полів великої інтенсивності, пучків частинок високої енергії, потужного лазерного когерентного (від лат. *cohaerens* — взаємозв'язаний; когерентні хвилі — такі, що в них не змінюється в часі різниця фаз) випромінювання ударних хвиль високої інтенсивності, потужних теплових потоків.

Лінійні математичні моделі є всього лише певними наближеннями при описанні різних процесів. Їх можна використовувати тільки в тих випадках, коли досліджувані фізичні величини в розглядуваному процесі змінюються не в дуже широкому діапазоні значень.

Нелінійні моделі дозволяють описати явища чи процеси в більш широкому діапазоні змін параметрів. При цьому нелінійності міняють не тільки кількісні характеристики процесів, але і якісну картину їх протікання. В основі нелінійних моделей лежать нелінійні ДРЧП, закінченої теорії і загальних методів розв'язання задач для яких в даний час не розроблено. Однак для ряду нелінійних задач математичної фізики вдається знайти точні аналітичні розв'язки, аналіз властивостей яких дозволяє виявити якісно нові нелінійні ефекти в досліджуваних процесах.

У теорії нелінійних ДРЧП одним із центральних питань є вивчення впливу характеру нелінійності на розв'язність класичних лінійних задач для розглядуваного нелінійного рівняння. При цьому особливий інтерес представляють рівняння і задачі, які не задовольняють відомі стандартні умови існування і єдиності розв'язку. До них в частинному випадку належать ряд нелінійних рівнянь гідромеханіки, теорії гравітаційного поля, теорії поверхонь та інші.

У даному розділі пропонується простий метод встановлення структурних і якісних властивостей розв'язків деяких важливих класів нелінійних ДРЧП, а також досліджується ряд нелінійних математичних моделей.

## Тема 1

### Структурні та якісні властивості нелінійних рівнянь другого порядку

#### 5.1 Структурні властивості розв'язків деяких класів нелінійних ДРЧП

Розглянемо нелінійне рівняння другого порядку вигляду

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)[u_{x_i x_j} - b(u(x))u_{x_i}u_{x_j}] + \sum_{i=1}^n c_i(x)u_{x_i} + f(x, u) = 0. \quad (5.1)$$

Введемо в розгляд нові невідомі функції  $\varphi(v)$  і  $v(x)$  пов'язані з шуканою функцією  $u(x)$  співвідношеннями

$$u(x) = \varphi(v(x)). \quad (5.2)$$

Тоді рівняння (5.1) можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) [\varphi''(v) - b(\varphi)\varphi'^2(v)] v_{x_i}v_{x_j} + \\ & + \varphi'(v) \left( \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i} \right) + f(x, \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Із останнього рівняння випливає: якщо функції  $\varphi(v)$  і  $v(x)$  є розв'язками відповідно рівнянь

$$\varphi''(v) - b(\varphi)\varphi'^2(v) = 0, \quad (5.3)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i} + \frac{1}{\varphi'(v)}f(x, \varphi) = 0, \quad (5.4)$$

то функція  $\psi'(0) = \frac{1}{2}\varphi'(0)$ , визначена згідно з (5.2), буде розв'язком рівняння (5.1).

Рівняння (5.3) є звичайне нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, загальний розв'язок якого в неявному вигляді можна записати наступним чином

$$v(x) = C_1 \int_0^u \exp \left( - \int_0^\tau b(t) dt \right) d\tau + C_2, \quad (5.5)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  — довільні сталі.

Коли із рівності (5.5) можна визначити  $u(x)$  як функцію  $v(x)$ :  $u(x) = \varphi(v(x))$ , то за умови  $\varphi'(v) \neq 0$ , для визначення функції  $v(x)$  одержимо рівняння з частинними похідними (5.4), яке є лінійним відносно перших і других похідних. В частинному випадку, коли

$$\frac{1}{\varphi'(x)} f(x, \varphi) = f_1(x)v(x) + f_2(x),$$

рівняння (5.4) є лінійним:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i} + f_1(x)v + f_2(x) = 0. \quad (5.6)$$

Таким чином, якщо  $v(x)$  — загальний розв'язок рівняння (5.6), то формула (5.2) дає загальний розв'язок рівняння (5.1), а отже в цьому випадку вплив характеру нелінійності рівняння (5.1) на структурні властивості його розв'язків повністю описуються співвідношенням (5.5) між  $u(x)$  і  $v(x)$ . Отже, задачі (крайові, Коші, Гурса, мішані і т.д., в залежності від типу рівняння), поставлені для рівняння (5.1), породжують відповідні задачі для рівняння (5.6), причому коректність постановки задачі для вихідного рівняння (5.1) зумовлюється коректністю одержаної відповідної задачі для рівняння (5.6) і від можливості визначення із рівності (5.5)  $\{z_p(x, y)\}$ ,  $\{v_p(x, y)\}$  як функцій  $v(x)$ , причому наявність або відсутність біфуркації (від лат. bifurcus — роздвоєний) розв'язків рівняння (5.1) суттєво залежить від структури ріманової поверхні функціональної залежності (5.5) між  $u(x)$  і  $v(x)$ .

У випадку системи нелінійних рівнянь вигляду

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \left[ u_{k_{x_i x_j}} - \sum_{l,s=1}^m b_{k,s,l}(u_1, \dots, u_m) u_{s_{x_i}} u_{l_{x_j}} \right] = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad (5.7)$$

будемо шукати її розв'язки  $u_1, \dots, u_m$  за формулами

$$u_k(x) = \varphi_k(v(x)), \quad k = \overline{1, m}, \quad (5.8)$$

де  $\varphi_1(v), \dots, \varphi_m(v)$  — розв'язок системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$\varphi_k''(u) - \sum_{s,l=1}^m b_{k,s,l}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \varphi_s'(v) \varphi_l'(v) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (5.9)$$

Для визначення функції  $z_{p+1}(x, y) = T_1 f_p(t, \eta) - T_2 f_p(t, \eta)$  одержуємо лінійне рівняння з частинними похідними

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)v_{x_i x_j} = 0, \quad (\varphi_k'(v) \neq 0). \quad (5.10)$$

Якщо ми можемо знайти розв'язки системи (5.9)  $L_\varepsilon u_{\varepsilon n} = h + O(\varepsilon^{n+1}\alpha)$ , та загальний розв'язок  $v(x)$  лінійного однорідного рівняння (5.10), то формула (5.8), очевидно, дає клас частинних розв'язків системи (5.7).

## 5.2 Деякі прості приклади

**Рівняння Ріда–Барта.** Як один із прикладів розглянемо рівняння Ріда–Барта:

$$\begin{aligned} &xyu_{xy} - y^2u_{yy} - 2xu_x + 2yu_y + c(x, y, u) - \\ &-\gamma u^{-1} [xyu_xu_y - y^2(u_y)^2] = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

де при  $\gamma = 1$

$$c = -2u \ln |u| \quad (5.12)$$

і при  $\gamma = \text{const} \neq 1$

$$c = \frac{-2}{1-\gamma} u(x, y). \quad (5.13)$$

Рівняння (5.11) гіперболічного типу при  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , параболічно вироджується вздовж прямих  $x = 0$  і  $y = 0$ , причому вздовж прямої  $y = 0$  має місце також виродження його порядку. На підставі формули (5.5) дістаємо

$$u(x, y) = e^{v(x, y)} \quad \text{при } \gamma = 1, \quad (5.14)$$

$$u(x, y) = [v(x, y)]^{(1-\gamma)^{-1}} \quad \text{при } \gamma \neq 1. \quad (5.15)$$

В силу (5.4) в обох розглянутих випадках (5.12), (5.13) функція  $v(x, y)$  повинна задовольняти лінійне рівняння

$$xyv_{xy} - y^2v_{yy} - 2yv_x + 2yv_y - 2v = 0. \quad (5.16)$$

Оскільки при  $x \neq 0$  неособливою заміною незалежних змінних

$$\xi = x, \quad \eta = xy, \quad v = \xi^{-1}\eta^2 z(\xi, \eta)$$

рівняння (5.16) зводиться до такого:

$$z_{\xi\eta} = 0,$$

то загальний розв'язок рівняння (5.16) запишеться у вигляді

$$v(x, y) = y^2 f_1(x) + y f_2(x, y), \quad (5.17)$$

де  $f_1$  і  $f_2$  — довільні двічі неперервно диференційовні функції своїх аргументів. Використовуючи цей факт, унаслідок (5.14) і (5.15) дістаємо розв'язки рівняння (5.11)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp[y^2 f_1(x) + y f_2(xy)] \quad \text{при } \gamma = 1, \\ u(x, y) &= [y^2 f_1(x) + y f_2(xy)]^{(1-\gamma)^{-1}} \quad \text{при } \gamma \neq 1. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Із формули (5.17) випливає, що пряма  $x = 0$  не може бути носієм даних для рівняння (5.16). В області  $D$ , обмеженій, наприклад, прямими  $y = 0$  і  $y = 1$ , для рівняння (5.16) однозначно розв'язується крайова задача

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \varphi(x), \quad v(x, 1) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\psi'(0) = \frac{1}{2} \varphi'(0),$$

а сам розв'язок має вигляд

$$v(\psi, y) = \frac{1}{2} y^2 \varphi(x) + y \left[ \psi(xy) - \frac{1}{2} \varphi(xy) \right].$$

У відповідності з цим на підставі формули (5.18) робимо висновок, що в області  $D$  однозначно будується знакосталий (додатний) розв'язок крайової задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \varphi(x), \quad u(x, 1) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

і для рівняння (5.11) у випадку (5.12).

□ **Рівняння еліптичного типу. Задачі Діріхле та Неймана.** Нехай  $D$  — обмежена область простору  $E_n$  змінних  $x_1, \dots, x_n$  з ляпуновською границею  $S$  розмірності  $n - 1$ . Покажемо, яку роль може відіграти формула (5.5) в дослідженні задач Діріхле

$$u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad (5.19)$$

і Неймана

$$\frac{d}{dn}(u(x)) = f(x), \quad x \in S, \quad (5.20)$$

для рівняння

$$\Delta u(x) - (\nabla u(x))^2 = 0. \quad (5.21)$$

Унаслідок формули (5.5) маємо

$$v(x) = e^{-u(x)}, \quad (5.22)$$

де  $v(x)$  — довільна гармонічна функція. Отже, якщо  $u(x)$  — розв'язок рівняння (5.21) з простору функцій  $C^2(D) \cap C(\bar{D})$ , який задовольняє крайову умову (5.19), то функція  $v(x)$  буде гармонічною, належатиме тому ж простору функцій і задовольнятиме крайову умову

$$v(x) = e^{-f(x)}, \quad x \in S.$$

Звідси, в свою чергу, приходимо до висновку, що задача (5.19), (5.21) завжди має, причому єдиний, розв'язок, який з урахуванням формули (5.22) можна подати у вигляді

$$u(x) = -\ln v(x).$$

Задача Неймана (5.20), (5.21) згідно з формулою (5.22) зводиться до знаходження гармонічної в  $D$  функції  $v(x)$ , яка задовольняє крайову умову

$$\frac{dv(x)}{d\vec{n}} + f(x)v(x) = 0, \quad x \in S. \quad (5.23)$$

Якщо функція  $v(x)$  — додатній розв'язок задачі (5.23), то функція

$$u = -\ln v(x) + C,$$

при довільній сталій  $C$  буде розв'язком задачі (5.20), (5.21).

Щоб побачити складність при встановленні умов, які накладаються на функцію  $f(x)$  і які гарантують існування дійсних розв'язків задач (5.20), (5.21), розглянемо одновимірний випадок

$$u''(x) - u'^2(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (5.24)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=-1} = A, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = B. \quad (5.25)$$

Використовуючи (5.22), маємо

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} \equiv \Delta u(x) - (\nabla u(x))^2 = 0 \Rightarrow v(x) = ax + b,$$

де  $a$  і  $b$  — довільні сталі. В силу (5.25) та (5.22)

$$\begin{cases} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=-1} = -\frac{1}{v} v_x \Big|_{x=-1} = A \Rightarrow (1-A)a + Ab = 0 \\ \left. -\frac{1}{v} v_x \right|_{x=1} = B \Rightarrow (1+B)a + Bb = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

Якщо  $\begin{vmatrix} 1-A & A \\ 1+B & B \end{vmatrix} = B - A - 2AB = 0$ , то система (5.26) має нетривіальний розв'язок  $a = \lambda b$ ,  $b = -\lambda(B+1)$ . Оскільки

$$u(x) = -\ln(\lambda Bx - \lambda(B+1)) + C = C - \ln \bar{\lambda} - \ln(-(x-1)B + 1),$$



$$0 < \bar{\lambda} = -\lambda,$$

то існування дійсних розв'язків задачі (5.24), (5.25) буде забезпечено, якщо  $(-x + 1)B + 1 > 0$  при  $x \in (-1, 1)$  тобто, якщо  $B > -0,5$ .

Випадок рівняння

$$\Delta u(x) - \frac{1}{u(x)} (\nabla u(x))^2 = 0$$

розглянуто в [1, с. 392–395].

### 5.3 Рівняння мішаного типу

Розглянемо нелінійне ДРЧП змішаного типу з виродженням вздовж прямої  $y = 0$ :

$$y^{2m} u_{xx} + y u_{yy} - \frac{2m-1}{2} u_y - u^\delta [y^{2m} (u_x)^2 + y (u_y)^2] = 0, \quad (5.27)$$

де  $m$  — натуральне число більше за одиницю, а  $\delta$  набуває значень  $-1$  або  $0$ .

Позначимо через  $D_1$  скінченну область площини  $xOy$ , обмежену дугою  $\sigma_1$ :

$$x^2 + \left( \frac{2}{2m+1} \right)^2 y^{2m+1} = 1, \quad y \geq 0,$$

з кінцями в точках  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  і характеристиками  $A_1 F_1$ :

$$x - \frac{2}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}} = -1, \quad y \leq 0,$$

і  $B_1 F_1$ :

$$x + \frac{2}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1, \quad y \leq 0$$

рівняння (5.27), які виходять із точки

$$F_1 \left[ 0, - \left( \frac{2m+1}{2} \right)^{\frac{2}{2m+1}} \right].$$

Під задачею Трикомі для рівняння (5.27) розуміємо задачу відшукування в просторі функцій  $C^2(D_1) \cap C^{0,h}(\bar{D}_1)$  розв'язку  $u(x, y)$  цього рівняння, коли значення  $u(x, y)$  наперед задані на  $\sigma_1$  і  $A_1 F_1$ , причому

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{0,5-m} u_y = \lim_{y \rightarrow 0^-} (-y)^{0,5-m} u_y, \quad -1 < y < 1. \quad (5.28)$$

Через  $C^{0,h}(\bar{D}_1)$  позначений клас неперервних в  $D_1$  функцій за Гольдером з показником  $0 < h < 1$ .

Оскільки внаслідок заміни змінних

$$\xi = x, \eta = \frac{2}{2m+1} |y|^{\frac{2m+1}{2}} \operatorname{sgn} y,$$

$$u_1(\xi, \eta) = u_1 \left( x, \frac{2}{2m+1} |y|^{\frac{2m+1}{2}} \operatorname{sgn} y \right) = u(x, y)$$

рівняння (5.27) і умова (5.28) набувають відповідно вигляду

$$u_{1\xi\xi} + u_{1\eta\eta} \operatorname{sgn} \eta - u_1^\delta [u_{1\xi}^2 + u_{1\xi}^2 \operatorname{sgn} \eta] = 0, \quad (5.29)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} u_{1\eta} = \lim_{y \rightarrow -0} u_{1\eta},$$

то природно обмежитися наступною задачею: в скінченній області  $D$  площини  $(\xi, \eta)$ , обмеженої півколом  $\sigma : \xi^2 + \eta^2 = 1, \eta \leq 0$ , і відрізками  $AF$  і  $BF$  характеристик

$$\xi + \eta + 1 = 0, \quad \xi - \eta - 1 = 0, \quad \eta \leq 0,$$

рівняння (5.29), знайти функцію  $u_1(\xi, \eta)$  із простору

$$C^2(D, y \neq 0) \cap C^1(D) \cap C^{0,h}(\bar{D}),$$

яка задовольняє в  $D$  при  $y \neq 0$  рівняння (5.29) і крайові умови

$$\begin{cases} u_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in \sigma, \\ u_1(\xi, -\xi - 1) = \psi(\xi), & -1 \leq \xi \leq 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

де  $f$  і  $\psi$  — задані дійсні функції відповідно класів  $C^{0,h}(\sigma)$  і  $C^2(-1 \leq \xi \leq 0)$ , причому  $f(A) = \psi(A)$ .

Розглянемо два випадки.

1. Нехай у рівнянні (5.29)  $\delta = -1$ . Тоді його загальний розв'язок можна подати у вигляді (5.14), де  $v(\xi, \eta)$  — загальний розв'язок рівняння

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} \operatorname{sgn} \eta = 0. \quad (5.31)$$

Отже, в цьому випадку на підставі (5.14) і (5.31) для розв'язків рівняння (5.29) при  $\eta < 0$  маємо подання

$$u_1(\xi, \eta) = f_1(\xi + \eta) f_2(\xi - \eta), \quad (5.32)$$

де  $f_1$  і  $f_2$  — довільні функції з класу  $C^2(D)$ .

На підставі формули (5.32) робимо висновок, що в характеристичному прямокутнику  $d$  з вершинами в точках

$$M \left( \frac{x_0 - 1}{2}, -\frac{x_0 + 1}{2} \right), \quad F(0, -1), \quad N \left( \frac{x_0 + 1}{2}, \frac{x_0 - 1}{2} \right),$$

$$E(x_0, 0), \quad |x_0| < 1$$

знакосталій (без обмеження загальності можна вважати додатний) в  $d$  розв'язок  $u_1(\xi, \eta)$  рівняння (5.29) з простору  $C^2(D)$ , який задовольняє умови

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \xi - x_0) &= \Psi(\xi), \quad x_0 - 1 \leq 2\xi \leq 2x_0, \\ u_1(\xi, x_0 - \xi) &= \Phi(\xi), \quad 2x_0 \leq 2\xi \leq x_0 + 1, \\ \Psi(x_0) &= \Phi(x_0), \end{aligned} \quad (5.33)$$

де  $\Psi$  і  $\Phi$  — задані функції з класу  $C^2$ , визначається однозначно і має вигляд

$$u_1(\xi, \eta) = \frac{1}{\Phi(x_0)} \Psi\left(\frac{\xi + \eta + x_0}{2}\right) \Phi\left(\frac{\xi - \eta + x_0}{2}\right). \quad (5.34)$$

Якщо ж  $u_1(x_0, 0) = 0$ , то розв'язок задачі (5.29), (5.33) може існувати тільки тоді, коли принаймні одна із функцій  $\Psi(\xi)$ ,  $\Phi(\xi)$  тотожно рівна нулеві, причому в цих випадках існують нескінченні множини розв'язків

$$u_1(\xi, \eta) = \begin{cases} \Psi_1\left(\frac{\xi + \eta + x_0}{2}\right) \Phi\left(\frac{\xi - \eta + x_0}{2}\right), \\ \Psi(\xi) \equiv 0, \quad \Phi(x_0) = 0, \quad \Psi_1(x_0) = 1, \\ \Psi\left(\frac{\xi + \eta + x_0}{2}\right) \Phi_1\left(\frac{\xi - \eta + x_0}{2}\right), \\ \Phi(\xi) \equiv 0, \quad \Psi(x_0), \quad \Phi_1(x_0) = 1, \\ \Psi_1\left(\frac{\xi + \eta + x_0}{2}\right) \Phi_1\left(\frac{\xi - \eta + x_0}{2}\right), \\ \Phi(\xi) \equiv \Psi(\xi) \equiv 0, \quad \Phi_1(x_0) = \Psi_1(x_0) = 0, \end{cases}$$

де  $\Psi_1$  і  $\Phi_1$  — довільні із простору  $C^2$  функції.

Перетворення в нуль розв'язку  $u_1(\xi, \eta)$  задачі (5.29), (5.33) в деякій точці  $(\xi_1, \eta_1) \in d$  рівносильне тому, що виконана принаймні одна із умов

$$\Psi\left(\frac{\xi_1 + \eta_1 + x_0}{2}\right) = 0, \quad \Phi\left(\frac{\xi_1 - \eta_1 + x_0}{2}\right) = 0,$$

а отже, в цьому випадку єдиність розв'язку буде порушена.

В частинному випадку, коли  $u_1(x_0, 0) = 0$  і

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\xi_1 - \eta_1 + x_0}{2}\right) &= \Phi'\left(\frac{\xi_1 - \eta_1 + x_0}{2}\right) = \Phi''\left(\frac{\xi_1 - \eta_1 + x_0}{2}\right) = \\ &= \Psi\left(\frac{\xi_1 + \eta_1 + x_0}{2}\right) = \Psi'\left(\frac{\xi_1 + \eta_1 + x_0}{2}\right) = \Psi''\left(\frac{\xi_1 + \eta_1 + x_0}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

поряд з функцією  $u_1(\xi, \eta)$ , визначеною за формулою (5.34), розв'язком задачі (5.29), (5.33) в  $d$  є і функція  $u_0(\xi, \eta)$ , яка співпадає з  $u_1(\xi, \eta)$  над прямими  $\xi - \eta = \xi_1 - \eta_1$  і  $\xi + \eta = \xi_1 + \eta_1$ , а під цими прямими

$$u_0(\xi, \eta) = (\xi + \eta - \xi_1 - \eta_1)^3 (\xi - \eta - \xi_1 + \eta_1)^3 \Psi_2(\xi + \eta) \Phi_2(\xi - \eta),$$

де  $\Psi_2$  і  $\Phi_2$  — довільні із простору  $C^2$  функції.

Знакосталі в трикутнику  $ABF$  розв'язки рівняння (5.29), які задовольняють умови

$$\begin{cases} u_1(\xi, 0) = \tau(\xi), & -1 \leq \xi \leq 1, \\ u_1(\xi, -\xi - 1) = \psi(\xi), & -1 \leq \xi \leq 0, \\ \tau(-1) = \psi(-1), \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\begin{cases} u_{1_\eta}(\xi, 0) = \nu(\xi), & -1 < \xi < 1, \\ u_1(\xi, -\xi - 1) = \psi(\xi), & -1 \leq \xi \leq 0, \\ \begin{cases} u_1(\xi, 0) = \tau(\xi), & -1 \leq \xi \leq 1, \\ u_{1_\eta}(\xi, 0) = \nu(\xi), & -1 < \xi < 1, \end{cases} \end{cases} \quad (5.36)$$

даються формулами

$$u_1(\xi, \eta) = \tau(\xi + \eta) \psi\left(\frac{\xi - \eta - 1}{2}\right) / \psi\left(\frac{\xi + \eta - 1}{2}\right),$$

$$u_1(\xi, \eta) = \psi\left(\frac{\xi + \eta - 1}{2}\right) \psi\left(\frac{\xi - \eta - 1}{2}\right) \left[ \frac{1}{\psi(-1)} + \int_{-1}^{\xi + \eta} \frac{\nu(t) dt}{\psi^2\left(\frac{t-1}{2}\right)} \right], \quad (5.37)$$

$$u_{1_\eta}(\xi, \eta) = \sqrt{\tau(\xi + \eta)\tau(\xi - \eta)} \exp\left(0,5 \int_{\xi - \eta}^{\xi + \eta} \frac{\nu(t)}{\tau(t)} dt\right),$$

відповідно, причому у всіх трьох випадках розв'язки єдині.

Знайдемо розв'язки задачі (5.29), (5.36), коли  $\psi(\xi) = 0$ . Згідно з (5.32) маємо

$$u_{1_\eta}(\xi, \eta) = f'_1(\xi + \eta)f_2(\xi - \eta) - f_1(\xi + \eta)f'_2(\xi - \eta),$$

а отже, на підставі перших із умов (5.36)

$$\begin{cases} f'_1(\xi)f_2(\xi) - f_1(\xi)f'_2(\xi) = \nu(\xi), & \xi \in (-1, 1), \\ f_1(-1)f_2(2\xi + 1) = 0, & \xi \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Із другої умови  $f_{-1}(-1) = 0$  і вважаємо, що  $f_2(\xi) \neq 0$  при  $\xi \in [-1, 1]$ . Тоді із першої рівності одержуємо

$$f_2^2(\xi) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)} \right) = \nu(\xi) \Rightarrow f_1(\xi) = f_2(\xi) \int_{-1}^{\xi} \frac{\nu(t)}{f_2^2(t)} dt + C.$$

Оскільки  $f_1(-1) = 0$ , то  $C = 0$ . Таким чином одержуємо нескінченну кількість розв'язків

$$u_1(\xi, \eta) = f_2(\xi + \eta)f_2(\xi - \eta) \int_{-1}^{\xi + \eta} \frac{\nu(t)}{f_2^2(t)} dt,$$

де  $f_2(\xi)$  довільна із простору  $C^2([-1, 1])$  функція, яка ніде при  $\xi \in [-1, 1]$  не перетворюється в нуль.

Унаслідок формул (5.14) та (5.37) побудова знакосталого розв'язку задачі (5.29), (5.30) в півкрузі  $D^+ = D \cap \{y > 0\}$  зводиться до відшукування гармонічної функції  $v(\xi, \eta)$ , яка задовольняє крайові умови:

$$v(\xi, \eta) = \ln f(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \sigma,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} = \psi' \left( \frac{\xi-1}{2} \right) / \psi \left( \frac{\xi-1}{2} \right), \quad -1 < \xi < 1.$$

Як відомо, при  $(\xi, \eta) \in D^+$

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) = & \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma} \sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz} \right) \ln f(t) dt + \\ & + \operatorname{Re} \frac{2}{\pi(1+i)} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz} \right) \ln \psi \left( \frac{t-1}{2} \right) dt. \end{aligned} \quad (5.38)$$

При  $(\xi, \eta) \in D = D \cap \{\eta < 0\}$  маємо

$$v(\xi, \eta) = v(\xi + \eta, 0) - \ln \psi \left( \frac{\xi + \eta - 1}{2} \right) + \ln \psi \left( \frac{\xi - \eta - 1}{2} \right). \quad (5.39)$$

Підставивши вирази (5.38), (5.39) у праву частину формули (5.14), одержуємо єдиний розв'язок задачі (5.29), (5.30) при  $\delta = -1$ .

Зауважимо, що вимога знакосталості розв'язку  $u_1(\xi, \eta)$  задачі (5.29), (5.30) (а отже і знакосталості  $f$  і  $\psi$ ) є суттєвою. Справді, наприклад, при  $f \equiv \psi \equiv 1$  задача (5.29), (5.30) має багатопараметричну сім'ю розв'язків

$$u_1(\xi, \eta) = \prod_{k=1}^n u_{k,1}(\xi, \eta) u_{k,1}^*(\xi, \eta), \quad (5.40)$$

де

$$u_{k,1}(\xi, \eta) = \begin{cases} \left| \frac{z-\alpha_k}{1+\alpha_k} \right|^{2m_k}, & \eta \geq 0, \quad z = \xi + i\eta, \quad \alpha_k = a_k + ib_k, \quad b_k > 0, \\ \exp m_k \left[ \ln \left| \frac{(\xi-\alpha_k)^2 - \eta^2}{(1+\alpha_k)^2} \right| - \operatorname{arctg} \frac{\xi+\eta-a_k}{b_k} + \operatorname{arctg} \frac{\xi-\eta-a_k}{b_k} \right], & \eta \leq 0, \end{cases}$$

$$u_{k,1}^*(\xi, \eta) = \exp v_k(\xi, \eta),$$

причому  $v_k(\xi, \eta)$  визначаються згідно (5.38), (5.39), в яких  $\ln f(t)$  потрібно замінити на

$$-\ln \left| \frac{t-\alpha_k}{1+\alpha_k} \right|^{2m_k},$$

і  $\ln \psi \left( \frac{t-1}{2} \right)$  — на

$$- \ln \left| \frac{t - \alpha_k}{1 + \alpha_k} \right|^{2m_k} + m_k \operatorname{arctg} \frac{1 + a_k}{-b_k} - m_k \operatorname{arctg} \frac{t - a_k}{b_k},$$

де  $\alpha_k$  — довільні комплексні числа, розміщені в  $D^+$  і вони є нулями функції  $u_1(\xi, \eta)$ , визначеної згідно з (5.40).

У випадку, коли  $\psi(\xi) \equiv 0$ ,  $f(A) = 0$ , задача (5.29), (5.30) має нескінченну множину розв'язків. При  $\eta \geq 0$  вони набувають вигляду (5.14), причому  $v(\xi, \eta)$  визначається за формулою (5.38), в якій  $\psi \left( \frac{t-1}{2} \right)$  замінена довільною функцією —  $\psi_1(t)$  з простору  $C^2$ , яка ніде не перетворюється в нуль, а при  $\eta \leq 0$

$$u_1(\xi, \eta) = u_1(\xi + \eta, 0) \frac{\psi_1(\xi + \eta)}{\psi_1(\xi - \eta)}.$$

Якщо  $f(t)$  знакозмінна і функція  $\ln |f(t)|$  інтегровна, то дійсних розв'язків задача (5.29), (5.30) не має, всі її розв'язки комплексні. Вони знову отримуються за формулою (5.14), в якій  $v(\xi, \eta)$  дається рівністю (5.38), де замість  $f(t)$  потрібно писати  $|f(t)|$  і під знаками  $Re$  потрібно додати вираз

$$2k \int_{C\bar{E}} \sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz} \right) dt$$

і

$$\bar{D} \subset \bar{D}_1 \subset E_{12},$$

де  $\bar{E}$  — множина точок півкола  $\sigma$ , на якому  $f < 0$ , а  $C\bar{E}$  — доповнення  $\bar{E}$  до  $\sigma$ .

2. Нехай в рівнянні (5.29)  $\delta = 0$ . Тоді зв'язок між функціями  $u_1(\xi, \eta)$  і  $v(\xi, \eta)$  дається формулою (5.22), де  $v(\xi, \eta)$  розв'язок рівняння (5.31). Тому крайовими умовами (5.30) породжуються умови

$$\left. \begin{aligned} v(\xi, \eta) &= \exp[-f(\xi, \eta)], \quad (\xi, \eta) \in \sigma, \\ v(\xi, -\xi - 1) &= \exp[-\psi(\xi)], \quad -1 \leq \xi \leq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.41)$$

Унаслідок другої з умов (5.41)

$$\frac{\partial v(\xi, 0)}{\partial \xi} - \frac{\partial v(\xi, 0)}{\partial \eta} = -\psi' \left( \frac{\xi - 1}{2} \right) \exp \left[ -\psi \left( \frac{\xi - 1}{2} \right) \right], \quad -1 < \xi < 1. \quad (5.42)$$

Гармонічна в  $D^+$  функція  $v(\xi, \eta)$ , яка задовольняє першу із умов (5.41) і умову (5.42), очевидно, дається формулою (5.38), в якій  $\ln |f(t)|$  і  $\ln \psi \left( \frac{t-1}{2} \right)$  потрібно замінити через  $\exp[-f(t)]$  і  $\exp \left[ -\psi \left( \frac{t-1}{2} \right) \right]$  відповідно.

В області  $D^-$  маємо

$$v(\xi, \eta) = v(\xi + \eta, 0) + \exp \left[ -\psi \left( \frac{\xi - \eta - 1}{2} \right) \right] - \exp \left[ -\psi \left( \frac{\xi + \eta - 1}{2} \right) \right]. \quad (5.43)$$

На підставі формул (5.42), (5.43) робимо висновок, що виконання умови

$$\psi'(\xi) \leq 0, \quad -1 < \xi < 0,$$

гарантує існування єдиного дійсного розв'язку задачі (5.29), (5.30) в розглядуваному випадку.

## *Тема 2*

### *Нелінійні моделі дифузійних процесів*

#### 5.4 Теорія нелінійної теплопровідності

Досліджуючи високотемпературні теплові процеси з урахуванням дії таких механізмів перенесення енергії, як електронна або променева теплопровідності, необхідно враховувати залежність густини  $\rho$ , питомої теплоємності  $C$  і коефіцієнту теплопровідності середовища  $k$  від температури  $u$ .

Потужність теплових джерел, розподілених в об'ємі середовища, також може залежати від температури, якщо враховувати процеси дисоціації молекул, фазові переходи, випромінювання, горіння, хімічні реакції та інші екзотермічні та ендотермічні процеси, які проходять в нагрітому середовищі.

Рівняння теплопровідності, яке враховує залежність властивостей середовища від температури і нелінійну залежність від температури потужності розподілених в об'ємі теплових джерел, є квазілінійним параболічним рівнянням вигляду

$$\rho(u) C(u) u_t = \operatorname{div}(k(u) \operatorname{grad} u) + F(u, x, y, z, t), \quad (5.44)$$

$$u = u(t, x, y, z).$$

Нелінійність задачі теплопровідності може бути також обумовлена нелінійністю крайової умови. Такі задачі, на відміну від задач з внутрішньою нелінійністю, обумовленою нелінійністю рівняння, часто називають задачами із зовнішньою нелінійністю.

Нелінійна крайова умова на поверхні  $S$  тіла може мати вигляд

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \varphi(u(p), p, t), \quad (5.45)$$

де задана функція  $\varphi$  нелінійним чином залежить від температури.

До таких умов приходять, наприклад, коли через поверхню тіла  $S$  проходить випромінювання енергії. Тоді згідно із законом Стефана–Больцмана

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} = \varepsilon_0 \sigma_0 u^4(t, p), \quad p \in S, \quad t > 0,$$

де  $k$  — коефіцієнт теплопровідності,  $\varepsilon_0$  — ступінь чорноти матеріалу, яка в загальному випадку залежить від температури  $u(t, p)$ ,  $\sigma_0$  — стала Стефана-Больцмана.

Якщо ж на поверхні  $S$  задана умова конвективного теплообміну, то згідно із законом Ньютона

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + hu(p, t) = hf(p, t), \quad p \in S, \quad t > 0,$$

тут  $f(p, t)$  — температура зовнішнього середовища;  $h = \frac{\alpha_T}{k}$ ,  $\alpha_T$  — коефіцієнт теплообміну, який залежить від температури поверхні тіла.

Задача теплопровідності стає нелінійною, якщо враховувати фазові переходи в середовищі, такі як плавлення, випаровування, конденсація, кристалізація, які проходять при визначеній температурі і супроводжуються виділенням або поглинанням тепла.

У середовищі з фазовим переходом з'являється поверхня  $S_1$  розділення фаз, яку називають *фронтом фазового переходу*. Ця поверхня рухається зі скінченною швидкістю. Баланс теплової енергії на фронті фазового переходу з температурою  $f(t, p)$  дозволяє записати на рухомій поверхні  $S_1$  фронту крім умови

$$u_1(t, p) = u_2(t, p) = f(t, p), \quad p \in S_1, \quad (5.46)$$

другу крайову умову

$$\left( K_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{n}} - K_2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}} \right) |_{P \in S_1} = q\rho v, \quad (5.47)$$

де  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  — відповідно коефіцієнти теплопровідності і температури двох фаз, які дотикаються,  $q$  — питома масова теплота фазового переходу,  $v$  — миттєва швидкість руху фронту фазового переходу в напрямі нормалі  $\bar{n}$  до поверхні  $S_1$ .

Оскільки швидкість руху фронту  $v$  завчасно не відома і повинна бути знайдена в процесі розв'язування задачі теплопровідності, то крайова умова (5.47), яка називається *умовою Стефана*, робить задачу нелінійною.

Нелінійності міняють не тільки кількісні характеристики теплових процесів, але і якісну картину їх протікання.

Вони ускладнюють математичні моделі теплових процесів, причому у багатьох випадках ці складнощі пов'язані з неможливістю застосування для нелінійних задач принципу суперпозиції розв'язків. Число знайдених точних аналітичних розв'язків таких нелінійних задач теплопровідності вкрай обмежене, але саме аналіз цих розв'язків дозволяє виявити якісно нові нелінійні ефекти при розподілі тепла. Деякі такі розв'язки нелінійних задач теплопровідності розглянемо в наступних параграфах.

Квазілінійні параболічні рівняння другого порядку лежать в основі математичних моделей різноманітних явищ і процесів у механіці, фізиці, біології,



екології, технології та інших галузях знань. У частинному випадку рівняння нелінійної теплопровідності (5.44) за певних умов описує фільтрацію рідин і газів в пористих матеріалах, дифузію нейтронів, нелінійний скін-ефект (проходження змінного електричного струму високої частоти не через весь переріз провідника, а переважно лише в поверхневому шарі) при проникненні магнітного поля в провідні середовища. Це рівняння може бути застосоване при математичному описанні процесів горіння і детонації, хімічної кінетики, процесів росту і міграції біологічних популяцій, поширення забруднень у навколишньому середовищі. Такий широкий діапазон застосовували рівняння (5.44) зумовлений тим, що воно ґрунтується на фундаментальних законах збереження енергії, маси або кількості частинок.

## 5.5 Задача Стефана про фазовий перехід

Знайдемо аналітичний розв'язок одновимірної задачі теорії теплопровідності, яку називають задачею Стефана на честь Й. Стефана, який поставив і розв'язав у 1889 р. задачу про фазовий перехід.

Фазовий перехід може бути пов'язаний із кристалізацією рідини при її охолодженні. У цьому випадку задачу за звичаєм називають задачею про промерзання, маючи на увазі, що процес замерзання води при її охолодженні належить до процесів такого класу.

Нехай рідке середовище займає півпростір  $x > 0$  і нехай при  $t < 0$  температура всіх шарів рідини однакова і рівна  $u_0 > u^*$ , де  $u^*$  — температура затвердіння рідини. Без обмеження загальності будемо вважати, що  $u^* = 0$ .

З моменту часу  $t = 0$  на межі  $x = 0$  підтримується стала температура  $u_c < 0$ , яка є меншою за температуру кристалізації  $u^*$ . У цьому випадку при  $t > 0$  поблизу граничної поверхні виникає шар твердої фази, товщина якої з плином часу збільшується (рис. 5.1).

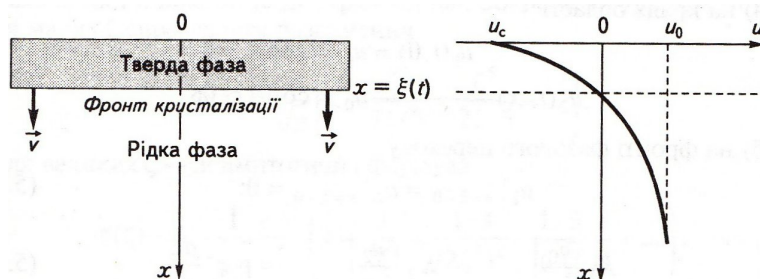


Рис. 5.1:

Фронт кристалізації  $x = \xi(t)$  в довільний момент часу відділяє тверду фазу від рідкої, рухаючись з деякою швидкістю  $V = d\xi/dt$  в напрямку рідкої фази. При постановці задачі  $\xi(0) = 0$ .

Теплота фазового переходу, яка виділяється при кристалізації рідини, відводиться в наслідок теплопровідності твердої фази через граничну поверхню  $x = 0$ .

Виділяючи явно рухомий фронт кристалізації, позначимо індексами 1 і 2 величини, які відносяться до твердої і рідкої фази. Тоді, рахуючи, що властивості середовища при фазовому переході змінюються стрибком, запишемо рівняння теплопровідності для обох фаз

$$\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \xi(t), \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad \xi(t) < x < \infty, \quad (5.49)$$

де  $a_1^2$  і  $a_2^2$  — коефіцієнти температуропровідності твердої і рідкої фаз відповідно.

Враховуючи, що в початковий момент часу існує тільки рідка фаза, початкову умову для задачі запишемо у вигляді

$$u_2(0, x) = u_0 = \text{const}, \quad x > 0. \quad (5.50)$$

Крайові умови задачі сформулюємо наступним чином:

а) на краях області

$$\begin{aligned} u_1(t, 0) &= u_c = \text{const} > 0, \\ u_2(t, x) &\xrightarrow[x \rightarrow \infty]{u_0} \text{const} > 0; \end{aligned} \quad (5.51)$$

б) на фронті фазового переходу

$$u_1|_{x=\xi-0} = u_2|_{x=\xi+0} = 0; \quad (5.52)$$

$$K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} - K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} = \rho_1 q^* \frac{d\xi}{dt}, \quad (5.53)$$

де  $q^*$  — питома теплота кристалізації, віднесена до одиниці маси твердої фази.

За допомогою перетворення Больцмана

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

зведемо рівняння (5.48), (5.49) до звичайних диференціальних рівнянь для функцій  $z_1(\eta)$  і  $z_2(\eta)$ :

$$0,5\eta z_i'(\eta) + a_i^2 z_i''(\eta) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.54)$$

Позначивши  $z_i'(\eta) = w_i(\eta)$ , запишемо рівняння (5.54) у вигляді

$$0,5\eta w_i(\eta) + a_i^2 w_i'(\eta) = 0 \Rightarrow \frac{dw_i(\eta)}{w_i(\eta)} = -\frac{\eta}{2a_i^2} d\eta.$$

Зінтегрувавши останню рівність, дістанемо

$$z_i'(\eta) = w_i(\eta) = \overline{B}_i \exp\left(-\frac{\eta^2}{4a_i^2}\right),$$

де  $\overline{B}_i$  — довільні сталі.

Зінтегрувавши ще раз, знаходимо загальний розв'язок рівняння (5.54) для  $i = 1, 2$ :

$$z_i(\eta) = A_i + \overline{B}_i \int_0^\eta \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a_i^2}\right) d\xi = A_i + B_i \Phi\left(\frac{\eta}{2a_i}\right),$$

де  $\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{-\xi^2} d\xi$ ;  $A_i, B_i$  — довільні сталі.

Функцію  $\Phi(\zeta) \equiv \text{erf} \zeta$  називають *інтегралом* або *функцією похибок*. Вона часто зустрічається в задачах математичної фізики і тому затабульована, як і її похідні та інтеграл від неї. Зокрема  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(\infty) = 1$ . Для малих  $\zeta$  має силу розклад

$$\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \zeta - \frac{\zeta^3}{1!3} + \frac{\zeta^5}{2!5} - \dots \right),$$

а при великих  $\zeta$  справедлива асимптотична формула

$$\Phi(\zeta) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta} \left( 1 - \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2\zeta^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2\zeta^2)^3} + \dots \right).$$

Повертаючись до старих незалежних змінних, знайдемо загальний розв'язок рівнянь (5.48), (5.49):

$$u_1(t, x) = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad t > 0, \quad 0 < x < \xi(t), \quad (5.55)$$

$$u_2(t, x) = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \quad t > 0, \quad \xi(t) < x < \infty.$$

Згідно з крайовими умовами (5.51) маємо

$$A_1 = u_c, \quad A_2 + B_2 = u_0. \quad (5.56)$$

Зауважимо, при цьому, що початкова умова (5.50) виконується.

Згідно з умовами (5.52) на фронті фазового переходу, тобто при  $x = \xi(t)$ , одержуємо

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi(t)}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0, \quad A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi(t)}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0. \quad (5.57)$$

Кожна із цих умов може бути виконана для довільного  $t > 0$  тільки в тому випадку, якщо аргументи функції  $\Phi(\zeta)$  в (5.57) не залежать від часу. Але це можливо, якщо

$$\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}} = \alpha = \text{const.}$$

Таким чином, з точністю до деякої сталої  $\alpha$  визначені закон руху фронту фазового переходу

$$\xi(t) = \alpha\sqrt{t}, \quad (5.58)$$

і його швидкість

$$v = \frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}, \quad (5.59)$$

яка зменшується з ростом часу, тобто зі збільшенням товщини шару твердої фази.

Підставляючи (5.58) у співвідношення (5.57) дістаємо

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right) = 0, \quad A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right) = 0. \quad (5.60)$$

Тепер із рівностей (5.56) і (5.60) знаходимо всі чотири сталі

$$A_1 = u_c, \quad B_1 = -\frac{u_c}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \quad A_2 = \frac{u_0 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right) - 1}, \quad B_2 = \frac{u_0}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \quad (5.61)$$

Щоб визначити  $\alpha$ , потрібно використати умову Стефана (5.53) на фронті фазового переходу. Оскільки

$$\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta^2},$$

то з урахуванням формул (5.55), (5.59), (5.61) умова (5.53) приводить до рівняння

$$\frac{K_1 u_c e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} - \frac{K_2 u_0 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2 \left[\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right) - 1\right]} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha \rho_1 q^*. \quad (5.62)$$

Аналіз трансцендентного рівняння (5.62) показує, що існує єдиний додатний розв'язок  $\alpha$  цього рівняння. Наближене значення кореня цього рівняння може бути знайдене чисельними методами.

У випадку, коли початкова температура всіх шарів рідини рівна температурі фазового переходу, тобто  $u_0 = 0$ , із рівностей (5.61) випливає, що

$$A_1 = u_c, \quad B_1 = -\frac{u_c}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \quad A_2 = B_2 = 0,$$

і трансцендентне рівняння (5.62) набуває простішого вигляду

$$\beta \Phi(\beta) \exp(\beta^2) = N, \quad (5.63)$$

де  $\beta = \frac{\alpha}{2a_1}$ ,  $N = |u_c| \frac{C_1}{\sqrt{\pi}q^*}$ ,  $C_1 = \frac{K_1}{a_1^2\rho_1}$ .

У загальному випадку наближений розв'язок рівняння (5.63) можна знайти графічним способом або із застосуванням чисельних методів розв'язування трансцендентних рівнянь. Якщо ж параметри задачі відповідають малим значенням  $N$ , то, скориставшись асимптотичними формулами  $\Phi(\beta) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta$ ,  $\exp(\beta^2) \simeq 1$ , які справедливі для малих значень  $\beta$ , із рівняння (5.63) одержимо

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta^2 = N, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2|u_c| C_1 a_1^2}{q^*}}.$$

Зазначимо, що нелінійні задачі теплопровідності з фазовими переходами широко використовуються для модулювання технологічних процесів зонної плавки, напрямленої кристалізації, вирощування монокристалів і одержання заданих структур напівпровідникових матеріалів. За допомогою математичних моделей може бути здійснена оптимізація таких процесів за різними параметрами.

## 5.6 Поширення теплових збурень в нелінійних середовищах

Аналіз властивостей цих розв'язків дозволяє виявити ряд важливих нелінійних ефектів при поширенні теплових збурень в середовищах, коефіцієнт теплопровідності яких залежить від температури.

Розглянемо середовище, коефіцієнт теплопровідності  $k$  якого змінюється в залежності від температури  $u$  за степеневим законом

$$k = k_0 u^\sigma, \quad (5.64)$$

де  $\sigma = \text{const} > 0$  — параметр нелінійності середовища. Густина середовища  $\rho$  і її теплоємність будемо вважати сталими, які не залежать від температури. Таке середовище, на відміну від середовища зі сталим коефіцієнтом теплопровідності ( $\sigma = 0$ ), будемо називати нелінійним, оскільки процес теплопровідності в такому середовищі при відсутності об'ємних теплових джерел описується нелінійним, точніше, квазілінійним параболічним рівнянням

$$u_t(t, p) = a^2 \text{div}(u^\sigma \text{grad } u), \quad (5.65)$$

де  $a^2 = \frac{k_0}{c\rho}$  — характерний коефіцієнт температуропровідності.

Моделюючи теплові процеси в нелінійному середовищі, необхідно використовувати такі розв'язки рівняння (5.65), які задовольняють умови неперервності температури і теплового потоку. Але оскільки густина теплового потоку  $\vec{q} = -k_0 u^\sigma \text{grad } u$  в такому середовищі залежить не тільки від градієнта температури, але і від значення самої температури, то розв'язки рівняння нелінійної теплопровідності (5.65) потрібно шукати в класі узагальнених функцій, які допускають розриви похідних за просторовими змінними там, де функція  $u(t, P)$  перетворюється в нуль і рівняння (5.65) вироджується.

Розглянемо задачу про вплив миттєвого зосередженого теплового джерела. Нехай в нелінійному середовищі в початковий момент часу  $t = 0$  в площині  $x = 0$  миттєво виділяється на одиницю площі кількість тепла  $Q_0$ . Від такого миттєвого зосередженого джерела теплові збурення почнуть поширюватися симетрично з обидвох боків від площини  $x = 0$ . Математична модель такого процесу запишеться у вигляді наступної задачі Коші для квазілінійного параметричного рівняння:

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a^2 \frac{\partial}{\partial x}(u^\sigma, u_x), & t > 0, x \in E_1, \\ u(0, x) = Q\delta(x). \end{cases} \quad (5.66)$$

Тут  $Q = \frac{Q_0}{\rho c}$ , а одновимірна дельта-функція  $\delta(x)$  характеризує температурний вплив плоского зосередженого джерела  $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \right)$ .

Збіжність розв'язку  $u(t, x)$  задачі (5.66) при  $t \rightarrow 0$  до початкового розподілу потрібно розуміти як слабку збіжність, тобто для довільної неперервної функції  $f(x)$  повинна виконуватись рівність

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) u(t, x) dx = Q f(0).$$

Фізична постановка задачі дозволяє стверджувати, що на нескінченності теплові збурення будуть настільки малими в довільний момент часу, що ними можна нехтувати, тобто  $u(t, x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$  і  $u^\sigma u_x(t, x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ .

Інтегруючи рівняння в (5.66) за незалежною змінною  $x$  в межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ , одержуємо

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = a^2 \{ u^\sigma u_x |_{x=+\infty} - u^\sigma u_x |_{x=-\infty} \} = 0.$$

Звідси з урахуванням початкової умови випливає, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = Q = \text{const}, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.67)$$

Співвідношення (5.67) відображає фізичний закон збереження теплової (внутрішньої) енергії середовища в довільний момент часу.

Покажемо, що розв'язком задачі Коші (5.66) є функція

$$u(t, x) = \begin{cases} U(t) \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}}, & |x| < x_0(t), \\ 0, & |x| \geq x_0(t), \end{cases} \quad (5.68)$$

де

$$\begin{aligned} U(t) &= \eta_0^{\frac{2}{\sigma}} Q^{\frac{2}{\sigma+2}} \left[ \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} (a^2 t)^{-\frac{1}{\sigma+2}}, \\ x_0(t) &= \eta_0 Q^{\frac{\sigma}{\sigma+2}} (a^2 t)^{\frac{1}{\sigma+2}}, \\ \eta_0 &= \left\{ 2I(\sigma) \left[ \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \right\}^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$I(\sigma) = \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{\sigma}} d\xi = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \frac{1}{\sigma})}{2 \Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sigma})},$$

$\Gamma(z)$  — гама-функція Ейлера ( $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$ ).

Справді,

$$\begin{aligned} u_x(t, x) &= U(t) \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}-1} \cdot \left( -\frac{2x}{x_0^2(t)} \right) \sigma, \\ \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma \cdot u_x) &= \\ &= U^{\sigma+1}(t) \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{4x^2}{\sigma x_0^4(t)} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - \frac{2}{x_0^2(t)} \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}} \right\}, \\ u_t(t, x) &= U'(t) \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{2x^2}{\sigma x_0^3(t)} U(t) x_0'(t) \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}, \\ U'(t) &= \eta_0^{\frac{2}{\sigma}} Q^{\frac{2}{\sigma+2}} \left[ \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \left( -\frac{a^2}{\sigma+2} \right) (a^2 t)^{-\frac{1}{\sigma+2}-1}, \\ x_0'(t) &= \frac{a^2 \eta_0}{\sigma+2} Q^{\frac{\sigma}{\sigma+2}} (a^2 t)^{\frac{1}{\sigma+2}-1}. \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння задачі (5.66), одержимо

$$u_t(t, x) - a^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma u_x) \equiv 0, \quad t > 0, \quad x \in E_1,$$

тобто функція, визначена за формулою (5.68), є розв'язком рівняння задачі (5.66).

**Вправа.** Показати, що функція, визначена формулою (5.68), задовольняє початкову умову задачі Коші (5.66).

Розв'язок (3.69) має вигляд фронтового розв'язку, який описує поширення *теплової хвилі* від миттєвого зосередженого теплового джерела, яке розміщене в площині  $x = 0$ . Зобразимо графічно якісний вигляд температурного профілю такої теплової хвилі в різні моменти часу ( $t_3 > t_2 > t_1 > 0$ ) (рис. 5.2).

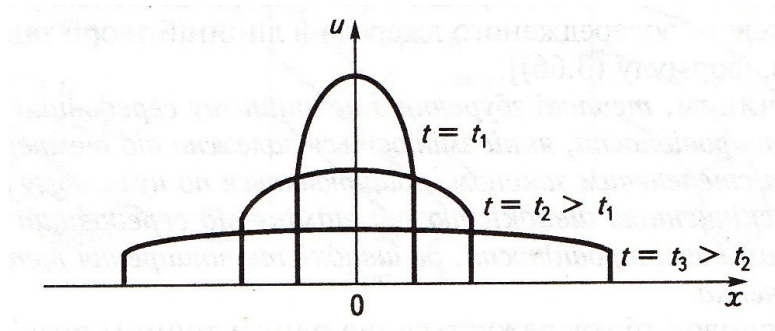


Рис. 5.2:

Фронти теплової хвилі, положення яких в довільний момент часу визначаються рівностями  $x = \pm x_0(t)$ , відокремлюють у просторі область збурень, де  $u > 0$ , від незбуреної області  $|x| > x_0(t)$ , куди теплові збурення від джерела ще не дійшли і де  $u(t, x) = 0$ . Фронти теплової хвилі рухаються зі скінченною швидкістю

$$v(t) = \frac{dx_0(t)}{dt} = \frac{a^2 \eta_0}{\sigma + 2} Q^{\frac{2}{\sigma+2}} (a^2 t)^{-\frac{\sigma+1}{\sigma+2}} \sim t^{-\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}.$$

Швидкість руху фронтів зменшується з плином часу, однак теплові збурення проникають в нелінійне середовище необмежено далеко, тому що  $x_0(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Зауважимо: якщо  $\sigma > 1$ , то фронти теплової хвилі є крутими, тому що в цьому випадку  $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \pm x_0 \mp 0$ . Однак, не дивлячись на необмежене зростання градієнта температури на крутому фронті теплової хвилі, густина теплового потоку  $q = -k_0 u^\sigma u_x(t, x)$  при наближенні до фронту із області збурень прямує до нуля, забезпечуючи виконання на фронті фізичної умови неперервності теплового потоку при довільних значеннях параметру нелінійності  $\sigma > 0$ . При цьому формулу (5.68) слід розглядати як узагальнений розв'язок задачі (5.56). Формули (5.68) і (5.69) допускають граничний перехід при  $\sigma \rightarrow 0$ , який відповідає переходу до середовища зі сталим коефіцієнтом теплопровідності, рівним  $k_0$ . В цьому випадку  $\eta_0 \rightarrow \infty$  і із розв'язку



(5.68) при  $\sigma \rightarrow 0$  можна отримати розподіл температури

$$u(t, x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left(1 - \sigma \frac{x^2}{4a^2 t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

який співпадає з нестационарним температурним полем в задачі про вплив миттєвого зосередженого джерела в лінійній теорії теплопровідності [див. формулу (3.67)].

Таким чином, *теплові збурення в нелінійному середовищі з коефіцієнтом теплопровідності, який змінюється в залежності від температури середовища за степеневим законом, поширюються по нульовому незбуреному фону зі скінченною швидкістю, на відміну від середовища з сталим коефіцієнтом теплопровідності, де швидкість поширення теплових збурень нескінченна.*

Цей висновок підтверджується ще одним точним розв'язком задачі нелінійної теплопровідності. Нехай спочатку ненагріте нелінійне середовище займає півпростір  $x > 0$  і з моменту  $t = 0$  температура на границі  $x = 0$  розпочинає збільшуватися за степеневим законом з показником степеня, пов'язаним із параметром нелінійності середовища  $\sigma$ . Процес розігріву середовища в цьому випадку описується наступною нелінійною задачею:

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma u_x), & t > 0, \quad x > 0, \\ u(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = u_0 t^{\frac{1}{\sigma}}. \end{cases} \quad (5.70)$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що задача (5.70) має фронтний розв'язок

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{x_0(t)}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \leq x < x_0(t), \\ 0, & x \geq x_0(t). \end{cases} \quad (5.71)$$

Тут  $x_0(t) = v_0 t$ ,  $v_0 = \left(\frac{a^2 u_0^\sigma}{\sigma}\right)^{0,5}$ .

Аналіз розв'язку (5.71) показує, що від нагрітої межі у внутрішню частину середовища по незбуреному нульовому фону поширюється теплова (температурна) хвиля, фронт якої рухається зі сталою швидкістю, котра дорівнює  $v_0$ . Швидкість  $v_0$  залежить від "амплітуди"  $u_0$  теплового збурення на стінці.

Якісний вигляд температурних полів в теплових хвилях (5.71) для різних значень параметру нелінійності  $\sigma$  зображений на рис. 5.3.

Як і в попередній задачі при значеннях параметру нелінійності  $\sigma > 1$  фронт теплової хвилі (5.71) виявляється крутим, оскільки при цьому  $|u_x(t, x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0} \infty$ . Однак можна перевірити, що тепловий потік неперервний у всіх точках простору і перетворюється в нуль при наближенні до фронтової точки  $x_0(t)$  із області збурень. Справді, обчислюючи густину теплового

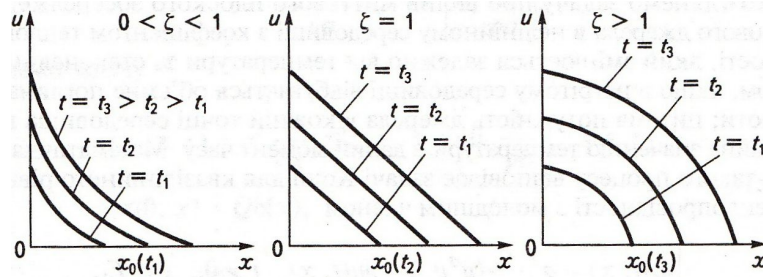


Рис. 5.3:

поток

$$q(t, x) = -k_0 u^\sigma u_x = \frac{k_0 u_0^{\sigma+1}}{\sigma v_0} \left( t - \frac{x}{v_0} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

і підставляючи сюди  $x = v_0 t$ , одержуємо, що  $q(t, x_0(t)) = 0$  для довільного  $\sigma > 0$ .

Таким чином, скінченна швидкість поширення теплових збурень вказує на появу в нелінійних середовищах своєрідних властивостей "інерції" теплових процесів, яка якісно змінює характер протікання теплових процесів в нелінійних середовищах в порівнянні з аналогічними процесами в середовищах зі сталим коефіцієнтом теплопровідності, де теплові збурення поширюються миттєво.

## 5.7 Просторова локалізація теплових збурень

Ще один цікавий нелінійний процес можна виявити при розгляді процесу поширення теплових збурень в нелінійних середовищах з об'ємним поглинанням тепла.

Розглянемо задачу про вплив миттєвого плоского зосередженого теплового джерела в нелінійному середовищі з коефіцієнтом теплопровідності, який змінюється в залежності від температури за степеневим законом, якщо в нагрітому середовищі проходить об'ємне поглинання тепла, питома потужність якого в кожній точці середовища пропорційна значенню температури в даний момент часу. Математична модель такого процесу відповідає задачі Коші для квазілінійного рівняння теплопровідності з молодшим членом

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma u_x) - p u(t, x), & t > 0, \quad x \in E_1, \\ u(0, x) = Q \delta(x). \end{cases} \quad (5.72)$$

Тут  $p = const \geq 0$  — коефіцієнт поглинання. Коли  $p = 0$ , задача (5.72) переходить в розглянуту вище задачу (5.66).

Поглинання енергії в об'ємі нелінійного середовища призводить до зменшення інтегральної (внутрішньої) теплової енергії середовища. Тому, інтегру-

ючи (5.72) за просторовою змінною  $x$  в межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ , знаходимо

$$\frac{dI(t)}{dt} = -pI(t), \quad (5.73)$$

де  $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx$ . Оскільки

$$I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, x) dx = Q \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = Q,$$

то, інтегруючи рівняння (5.73), матимемо

$$I(t) = Qe^{-pt}.$$

Для інтегрування задачі (5.72) введемо нову невідому функцію  $v(t, x)$  формулою

$$v(t, x) = u(t, x)e^{pt}. \quad (5.74)$$

Тоді рівняння для  $v(t, x)$  набуває вигляду

$$e^{p\sigma t} v_t(t, x) = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (v^\sigma v_x), \quad t > 0, \quad x \in E_1.$$

Ввівши нову незалежну змінну

$$\tau = \frac{1 - e^{-p\sigma t}}{p\sigma}, \quad \tau \in \left[0, \frac{1}{p\sigma}\right), \quad (5.75)$$

одержуємо задачу

$$\begin{cases} z_\tau(\tau, x) = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (z^\sigma z_x), & \tau \in \left(0, \frac{1}{p\sigma}\right), \quad x \in E_1, \\ z(0, x) = Q\delta(x), \end{cases} \quad (5.76)$$

де  $z(\tau, x) = z\left(\frac{1 - e^{-p\sigma t}}{p\sigma}, x\right) = v(t, x)$ .

З точністю до позначень задача (5.76) відповідає задачі (5.66) про вплив миттєвого зосередженого теплового джерела в нелінійному середовищі без об'ємного поглинання. Єдина відмінність полягає в тому, що задача (5.76) сформульована на скінченному "часовому" інтервалі. Тому, використавши співвідношення (5.68) та повертаючись до старих незалежних змінних, на підставі (5.74) маємо

$$u(t, x) = v(t, x)e^{-pt} = z\left(\frac{1 - e^{-p\sigma t}}{p\sigma}, x\right) e^{-pt}, \quad (5.77)$$

де

$$z(\tau, x) = \begin{cases} U(\tau) \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0(\tau)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}}, & |x| < x_0(\tau), \\ 0, & |x| \geq x_0(\tau). \end{cases} \quad (5.78)$$

Вирази  $U(\tau)$  та  $x_0(\tau)$  у (5.78) визначені за формулами (5.69), в яких час  $t$  потрібно замінити на  $\tau$ , розуміючи під  $\tau$  перетворення (5.75). При цьому суттєво відзначити, що перетворення (5.75) відображає напівнескінченний проміжок  $[0, +\infty)$  за змінною  $t$  в обмежений напівпроміжок  $\left[0, \frac{1}{p\sigma}\right)$  за змінною  $\tau$ .

Остаточний розв'язок (5.77) задачі (5.72) являє собою фронтовий розв'язок, який описує поширення теплової хвилі від миттєвого зосередженого джерела зі скінченною швидкістю руху фронтів  $x = \pm x_0(\tau)$ . Але головну особливість цього розв'язку можна виявити, якщо проаналізувати закони руху фронтів теплової хвилі. Із цього аналізу випливає, що функція  $u(t, x)$  в довільний момент часу  $t > 0$  рівна нулеві за межами області  $|x| < L(t)$ , де

$$L(t) = L_m (1 - e^{-tp\sigma})^{\frac{1}{\sigma+2}}, \quad (5.79)$$

$$L_m = \eta_0 \left( Q^\sigma a^2 \frac{1}{p\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma+2}}. \quad (5.80)$$

Оскільки  $L(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} L_m < \infty$ , то теплові збурення від джерела проникають в нелінійне середовище з об'ємним поглинанням лише на скінченну глибину навіть за нескінченний проміжок часу. Теплові збурення виявляються локалізованими в обмеженій просторовій області. Як бачимо з рис. 5.4, на фазовій площині  $(x, t)$  заштрихована область збурень, де  $u(t, x) > 0$ , міститься в півсмузі, ширина якої  $2L_m$ . При цьому величина  $L_m$ , яка визначає розмір області локалізації теплових збурень, залежить від визначальних параметрів задачі відповідно до виразу (5.80). Зокрема, розмір області просторової локалізації збільшується з ростом потужності теплового джерела  $Q$  і зменшується зі збільшенням коефіцієнту поглинання  $p$ .

Ефект просторової локалізації теплових збурень в розглянутій задачі обумовлений об'ємним поглинанням теплової енергії. Дійсно, якщо  $p \rightarrow 0$ , то  $\frac{1}{p\sigma} \rightarrow \infty$  і, як випливає із виразу (5.80),  $L_m \rightarrow \infty$ , тобто в середовище без об'ємного поглинання теплові збурення проникають необмежено далеко. Можливість створення умов, коли утримання нагрітого середовища в обмеженій області простору можна здійснити за рахунок внутрішніх механізмів нелінійного процесу теплопровідності, є принципово новим висновком, який витікає із аналізу математичної моделі (5.72) нелінійного процесу теплопровідності. Реалізація таких умов є, зокрема, однією із практично важливих задач в проблемі керованого термоядерного синтезу.

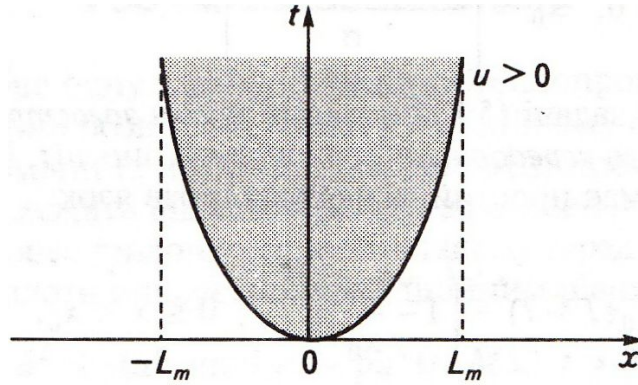


Рис. 5.4:

Відзначимо, що своєрідний режим метастабільної локалізації теплових збурень може спостерігатися і при відсутності в середовищі об'ємних поглинань тепла. У цьому режимі локалізації фронт теплової хвилі залишається нерухомим на протязі деякого скінченного проміжку часу. Така локалізація теплових збурень спостерігається при нагріванні нелінійного середовища в режимі з «загостренням», коли температура граничної (межової) поверхні зростає необмежено за скінченний проміжок часу. Таку локалізацію теплової дії в режимі із загостренням ілюструє наступна крайова задача нелінійної теплопровідності в півпросторі:

$$u_t(t, x) = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma u_x), \quad 0 < t < T, \quad x > 0,$$

$$u(0, x) = A_0 T^{-\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{\sigma}}, \quad x > 0, \quad (5.81)$$

$$u(t, 0) = A_0 (T - t)^{-\frac{1}{\sigma}}, \quad 0 < t < T.$$

Тут  $A_0 = \text{const} > 0$ ;  $x_0 = \left[\frac{2A_0 a^2 (\sigma + 2)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{2}}$ .

Параметр  $T$  в задачі (5.81) назвемо часом загострення процесу нагрівання нелінійного середовища, враховуючи, що  $u(t, 0) \xrightarrow{t \rightarrow T} \infty$ .

Задача (5.81) має простий за формою розв'язок:

$$u(t, x) = \begin{cases} A_0 (T - t)^{-\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{\sigma}}, & 0 \leq x < x_0, \quad 0 \leq t < T, \\ 0, & x \geq x_0, \quad 0 \leq t < T. \end{cases} \quad (5.82)$$

Тому що  $u(t, x) = 0$  для всіх  $t \in [0, T)$  і для довільних  $x \geq x_0$ , то фронт теплового збурення  $x = x_0$ , на якому рівні нулеві температура і тепловий потік, відокремлює нагріте середовище від холодного. Фронт нерухомий, незважаючи на необмежений ріст температури в області теплових збурень при

$t \rightarrow T$ . На протязі проміжку часу  $[0, T)$  теплові збурення від нагрітої стінки локалізовані в просторовій області  $0 < x < x_0$  скінченних розмірів.

Розв'язок (5.82) можна назвати тепловою хвилею, яка зупинилась на скінченний час. Якісний вигляд локалізованих температурних профілів такої теплової структури в різні моменти часу з проміжку  $[0, T)$  для середовища з показником нелінійності  $\sigma = 2$  подано на рис. 5.5.

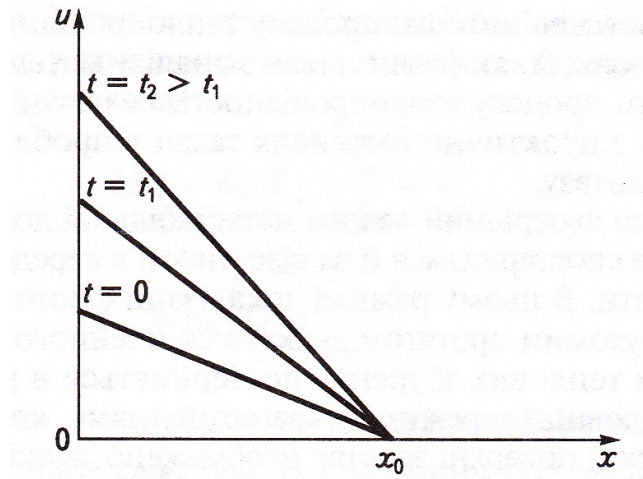


Рис. 5.5:

## 5.8 Задача нелінійної теплопровідності з об'ємним поглинанням

Розглянемо ще одну задачу нелінійної теплопровідності, яка має точний аналітичний розв'язок. Нехай в нелінійному середовищі проходять ендотермічні (з поглинанням тепла) процеси, питома потужність яких залежить від температури степеневим чином. Нестационарний процес теплопровідності в такому середовищі з об'ємним поглинанням тепла описується квазілінійним рівнянням

$$u_t(t, M) = a^2 \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) - pu^\nu(t, M), \quad t > 0, \quad M \in E_n. \quad (5.83)$$

Тут  $u(t, M)$  — температура середовища в точці  $M$  в момент часу  $t$ ,  $p = \operatorname{const} > 0$  — параметр поглинання, а значення  $n = 1, 2, 3$  визначає розмірність простору, в якому проходить досліджуваний процес.

Запишемо модель задачі про вплив миттєвого зосередженого теплового джерела в середовищі з поглинанням, якщо  $\sigma < 1$ , а показник степеня  $\nu = 1 - \sigma$ . Враховуючи симетрію такої задачі (плоску для  $n = 1$ , осьову для  $n = 2$  і центральну для  $n = 3$ ), сформулюємо відповідну задачу

Коші для квазілінійного рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} u_t(t, r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} u^\sigma u_r(t, r)) - p u^{1-\sigma}, & t > 0, \quad r \geq 0, \\ u(0, r) = Q \delta_n(M), \end{cases} \quad (5.84)$$

де радіальна просторова координата  $r \geq 0$  для випадків  $n = 2$  і  $n = 3$ , а за  $n = 1$   $r = |x|$ .

Параметр  $a^2$  в рівнянні ми поклали рівним одиниці, що завжди можна зробити відповідним вибором масштабів часу або просторових змінних.

З урахуванням скінченної швидкості поширення теплових збурень в нелінійному середовищі розв'язок задачі (5.84) будемо шукати у вигляді фронтового розв'язку

$$u(t, r) = \begin{cases} A(t) [\ell(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}}, & r^2 < \ell(t), \\ 0, & r^2 \geq \ell(t), \end{cases} \quad (5.85)$$

де  $A(t)$  і  $\ell(t)$  — функції, які потрібно визначати.

Підставивши (5.85) в рівняння (5.84), одержимо

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dA(t)}{dt} + 2n\sigma^{-1} A^{1+\sigma} \right) [\ell(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}} + \\ & + \left( \sigma^{-1} A \frac{d\ell(t)}{dt} + pA^{1-\sigma} - 4\sigma^{-2} A^{1+\sigma} r^2 \right) [\ell(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}-1} = 0. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Якщо вважати, що

$$\sigma^{-1} A \frac{d\ell(t)}{dt} + pA^{1-\sigma} - 4\sigma^{-2} A^{1+\sigma} r^2 = 4\sigma^{-2} A^{1+\sigma} \{ \ell(t) - r^2 \},$$

тобто

$$\sigma^{-1} A \frac{d\ell(t)}{dt} + pA^{1-\sigma} = 4\sigma^{-2} A^{1+\sigma} \ell(t), \quad (5.87)$$

то співвідношення (5.86) можна подати у вигляді

$$S(t) [\ell(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}} = 0, \quad (5.88)$$

де

$$S(t) = \frac{dA(t)}{dt} + 2\sigma^{-2} (n\sigma + 2) A^{1+\sigma}. \quad (5.89)$$

Оскільки умова (5.88) повинна виконуватись для довільних  $t$  і  $r$ , то це можливо лише за  $S(t) = 0$ . З урахуванням формули (5.89) ця умова приводить до диференціального рівняння для визначення функції  $A(t)$ :

$$\frac{dA(t)}{dt} + 2\sigma^{-2} (n\sigma + 2) A^{1+\sigma} = 0. \quad (5.90)$$

Для забезпечення слабкої збіжності розв'язку (5.85) при  $t \rightarrow 0$  до початкового розподілу температури  $Q\delta_n(M)$  необхідно, щоб  $\ell(t) \rightarrow 0$ , а  $A(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow 0$ .

Відокремлюючи змінні в рівнянні (5.90) та інтегруючи, одержуємо (ставимо сталу інтегрування рівну нулеві)

$$A(t) = \left[ \frac{\sigma}{2(n\sigma + 2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} t^{-\frac{1}{\sigma}}. \quad (5.91)$$

Бачимо, що  $A(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \infty$

Тепер, використовуючи співвідношення (5.87) для функції  $\ell(t)$ , приходимо до наступного диференціального рівняння:

$$\frac{d\ell(t)}{dt} - 2(n\sigma + 2)^{-1}t^{-1}\ell(t) = -2p(n\sigma + 2)t. \quad (5.92)$$

Зінтегрувавши його, маємо:

$$\ell(t) = ct^{\frac{2}{n\sigma+2}} - \frac{(n\sigma + 2)^2}{n\sigma + 1}pt^2, \quad c = const. \quad (5.93)$$

Таким чином, з урахуванням рівнянь (5.85), (5.91) і (5.93), розв'язок вихідної задачі (5.84) можна записати у вигляді фронтового розв'язку

$$u(t, r) = \begin{cases} u(t) \left[ 1 - \left( \frac{r}{\bar{r}(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \leq r \leq \bar{r}(t), \\ 0, & r \geq \bar{r}(t), \end{cases} \quad (5.94)$$

де

$$u(t) = \left[ \frac{\sigma}{2(n\sigma + 2)t} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \bar{r}^{\frac{2}{\sigma}}(t); \quad (5.95)$$

$$\bar{r}^2(t) = ct^{\frac{2}{n\sigma+2}} - \frac{(n\sigma + 2)^2}{n\sigma + 1}pt^2. \quad (5.96)$$

Значення сталої  $C$  у формулі (5.96) можна знайти зі співвідношення

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\bar{r}(t)} u(t, r) K(n) r^{n-1} dr = Q, \\ K(n) = \begin{cases} 2, & \text{при } n = 1, \\ 2\pi, & \text{при } n = 2, \\ 4\pi, & \text{при } n = 3, \end{cases} \end{cases} \quad (5.97)$$

яке є наслідком початкової умови задачі Коші (5.84). З урахуванням (5.94) – (5.96) співвідношення (5.97) запишеться у вигляді

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\frac{1}{\sigma}} \bar{r}^{\frac{n\sigma+2}{\sigma}}(t) \left[ \frac{\sigma}{2(n\sigma + 2)} \right]^{1/\sigma} K(n) \int_0^1 (1 - \xi^2)^{1/\sigma} \xi^{n-1} d\xi = Q. \quad (5.98)$$



Ураховуючи, що

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\frac{1}{\sigma}} \bar{r}^{\frac{n\sigma+2}{\sigma}}(t) = C^{\frac{n\sigma+2}{2\sigma}},$$

а значення інтегралу

$$\int_0^1 (1 - \xi^2)^{1/\sigma} \xi^{n-1} d\xi = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{\sigma+1}{\sigma}\right)$$

виражається через бета-функцію

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

де  $\Gamma(x)$  — гамма-функція, із виразу (5.98) знаходимо значення сталої

$$C = Q^{\frac{2\sigma}{n\sigma+2}} \left\{ \left[ \frac{\sigma}{2(n\sigma+2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \frac{K(n)}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{\sigma+1}{\sigma}\right) \right\}^{-\frac{2\sigma}{n\sigma+2}}. \quad (5.99)$$

Таким чином, точний розв'язок задачі (5.84) має вигляд (5.94), де  $u(t)$  і  $\bar{r}(t)$  визначені співвідношенням (5.95) і (5.96) зі сталою  $C$ , яка знаходиться за формулою (5.99). Знайдений розв'язок допускає граничний перехід при  $p \rightarrow 0$ . Поклавши в рівнянні (5.96)  $p = 0$ , дістаємо розв'язок задачі про вплив миттєвого зосередженого теплового джерела в нелінійному середовищі без об'ємного поглинання. Для  $n = 1$  цей розв'язок був побудований в п. 5.6 [див. формули (5.65), (5.66)].

Дамо фізичну інтерпретацію розв'язку (5.94). Він описує еволюцію теплової структури скінченних просторових розмірів, яку будемо називати тепловим імпульсом. В довільний момент часу  $t > 0$  існує фронт теплового імпульсу  $r = \bar{r}(t)$ , який відокремлює область теплових збурень від незбуреної області, куди теплові збурення ще не дійшли, і де  $u(t, r) = 0$ .

Проаналізуємо характер руху фронту теплового імпульсу. Для цього запишемо рівняння (5.96) у вигляді

$$\bar{r}(t) = \sqrt{C} t^{\frac{1}{n\sigma+2}} [1 - [t/t_m]^\delta]^{1/2}, \quad t \in [0, t_m], \quad (5.100)$$

де  $\delta = \frac{2n\sigma+1}{n\sigma+2}$ ,  $t_m = \left[ \frac{C\delta}{2p(n\sigma+2)} \right]^{1/\delta}$ . Залежність (5.100) ілюструє рис. 5.6.

На початковій стадії еволюції теплового імпульсу механізм теплової дифузії є визначальним і просторовий розмір теплового імпульсу збільшується з плином часу. В середовищі поширюється хвиля розігріву. Після швидкість руху фронту теплового імпульсу зменшується і при  $t = t_*$ , де

$$t_* = \left[ \frac{C\delta}{2p(n\sigma+2)^2} \right]^{1/\delta} = \frac{t_m}{(n\sigma+2)^{1/\delta}},$$

фронт зупиняється, проникнувши в нелінійне середовище з об'ємним поглинанням лише на скінченну глибину.

При  $t > t_*$  об'ємне поглинання теплової енергії стає домінуючим фактором в балансі енергії, і хвиля розігріву змінюється хвилею охолодження, коли ширина теплового імпульсу зменшується.

Фронт теплового імпульсу змінює напрямок руху, і в момент часу  $t = t_m$  тепловий імпульс стягується в точку, зупинивши своє існування. Тепловий імпульс в середовищі з об'ємним поглинанням теплової енергії існує скінченний час, тобто для  $t > t_m$  в довільній точці простору  $u = 0$ . Тому локалізацію теплових збурень зі скінченним часом їх існування в нелінійному середовищі з поглинанням природно назвати просторово-часовою локалізацією.

При  $p = 0$ , тобто за відсутності об'ємного поглинання тепла, із рівняння (5.96) випливає монотонний степеневий ріст ширини теплового імпульсу (штрихова лінія на рис. 5.6.). Теплові збурення в цьому випадку проникають (просякають) в середовище необмежено далеко.

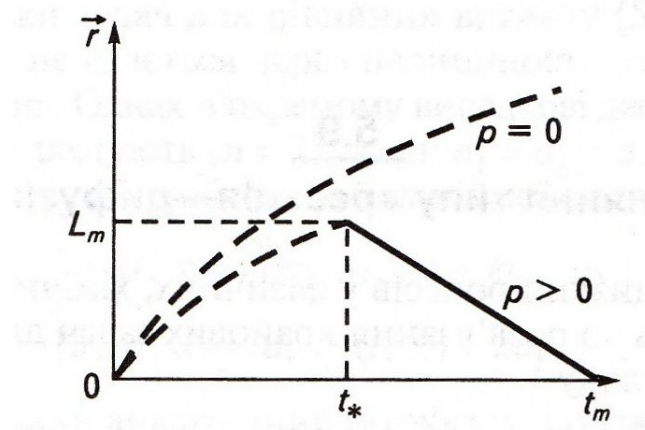


Рис. 5.6:

Добуте співвідношення можна розглянути й при  $p < 0$ , коли в об'ємі середовища проходять екзотермічні (з виділенням тепла) процеси, які приводять до виділення теплової енергії. В такому нелінійному середовищі з об'ємними тепловими джерелами фронт теплового імпульсу поширюється зі скінченною швидкістю, однак ширина теплового імпульсу у відповідності зі співвідношенням (5.96) при  $p > 0$  збільшується.

## 5.9 Рівняння типу "реакція–дифузія"

Моделювання ряду процесів в фізичних, хімічних та біологічних системах приводять до розв'язування крайових задач для систем квазілінійних рівнянь

вигляду

$$u_{it}(t, M) = \operatorname{div} \left( \sum_{j=1}^n d_{ij} \operatorname{grad} u_j(t, M) \right) + f_i(t, M, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad t > 0, \quad M \in E_m, \quad (5.101)$$

де  $i = \overline{1, n}$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

Рівняння такого типу описують нестационарні дифузійно-кінетичні процеси в багатокомпонентних розподільних системах, тобто еволюцію широкого класу нелінійних активних систем з дифузією. Математичні моделі, в основі яких лежить рівняння вигляду (5.101), широко використовуються в біології, екології, економіці. Такими рівняннями описують поширення нервових імпульсів, хвиль епідемій, поширення популяцій рослин і тварин, а також інші еволюційні процеси.

Особливо широко системи рівнянь вигляду (5.101) використовують в хімічній кінетиці при описанні процесів типу "реакція-дифузія". Тому коефіцієнти  $d_{ij}$  в рівняннях (5.101) називають коефіцієнтами власної ( $i = j$ ) та взаємної ( $i \neq j$ ) дифузії. Молодші члени рівнянь при цьому описують кінетичні процеси в системі, тобто взаємодію (реакції) всіх  $n$  компонентів такої системи із швидкістю, яка залежить від концентрації компонентів. Найпростішим прикладом функцій  $f_i$ , які описують кінетику процесів, є функції вигляду

$$f_i = k_i u_1^{\alpha_{i1}} u_2^{\alpha_{i2}} \dots u_n^{\alpha_{in}}, \quad \alpha_{ij} = \operatorname{const} > 0.$$

Саме таким чином виражаються швидкості хімічних реакцій через концентрації реагуючих речовин та законом діючих мас. При цьому коефіцієнти  $k_i$  є константами швидкостей реакцій, а  $\alpha_{ij}$  — стехіометричними коефіцієнтами. (Стехіометрія — галузь хімії, пов'язана з вивченням вагових та об'ємних співвідношень між реагуючими речовинами й продуктами реакції, з визначенням хімічних формул і рівнянь хімічних реакцій.)

Точні розв'язки задач для рівняння вигляду (5.101) в загальному випадку знайти не вдається із-за нелінійностей, обумовлених молодшими членами рівнянь. Однак в частинному випадку двоконпонентної системи реагуючих речовин ( $n = 2$ ), коли  $d_1 = d_2 = d > 0$ ,  $k_1 = -k_2 = k > 0$  і  $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 1$ , тобто для нелінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} u_{1t}(t, x) = du_{1xx}(t, x) + ku_1 \cdot u_2, \\ u_{2t}(t, x) = du_{2xx}(t, x) + ku_1 \cdot u_2 \end{cases} \quad (5.102)$$

можна знайти точний аналітичний розв'язок в області

$$D = \{(t, x) \mid t > 0, x \in (-\infty, +\infty)\}.$$

Цей розв'язок відповідає хвилям концентрацій з стаціонарними профілями, які поширюються з однаковою швидкістю.

Справді, шукатимемо розв'язок системи (5.102) у вигляді  $u_1 = u_1(\xi)$ , де  $\xi = x + vt$  а  $v = \text{const} > 0$ . Тоді система (5.102) набирає вигляду

$$\begin{cases} v \frac{du_1(\xi)}{d\xi} - d \frac{d^2 u_1(\xi)}{d\xi^2} = ku_1 \cdot u_2, \\ v \frac{du_2(\xi)}{d\xi} - d \frac{d^2 u_2(\xi)}{d\xi^2} = -ku_1 \cdot u_2. \end{cases} \quad (5.103)$$

В області  $-\infty < \xi < +\infty$  розглянемо функцію

$$\gamma(\xi) = \left( \frac{e^{\alpha\xi}}{1 + e^{\alpha\xi}} \right)^2 \equiv \left( \frac{1 + th \frac{\alpha\xi}{2}}{2} \right)^2,$$

яка залежить від параметру  $\alpha = \text{const} > 0$ . Диференціюючи цю функцію, знаходимо, що

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = -2\alpha\gamma \left( \gamma^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

і

$$\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2\gamma \left( \gamma^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \left( \gamma^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \right).$$

Таким чином,

$$v \frac{d\gamma}{d\xi} - d \frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2 d\gamma \left( 1 - \gamma^{\frac{1}{2}} \right) \left( A + \gamma^{\frac{1}{2}} \right),$$

де  $A = \frac{v}{3\alpha d} - \frac{2}{3}$ .

Якщо тепер параметр, який визначає швидкість, вибрати рівним  $v = 5\alpha d$ , то при цьому одержимо  $A = 1$  і

$$v \frac{d\gamma}{d\xi} - d \frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2 d\gamma (1 - \gamma).$$

Із останнього співвідношення випливає: якщо параметр  $\alpha$  вибрати із умови  $6\alpha^2 d = k$ , тобто вважати, що  $\alpha = \sqrt{k/(6d)}$  і  $v = 5\sqrt{kd}/6$ , то система (5.103) має розв'язок  $u_1(\xi) = \gamma(\xi)$  і  $u_2 = 1 - \gamma(\xi)$ .

Повертаючись до змінних  $t$  і  $x$ , запишемо знайдений розв'язок системи рівнянь «реакція-дифузія» (5.102) у вигляді

$$u_1(t, x) = \frac{1}{4} \left[ 1 + th \sqrt{\frac{k}{24d}} \left( x + 5\sqrt{\frac{kd}{6}} t \right) \right]^2, \quad u_2(t, x) = 1 - u_1(t, x). \quad (5.104)$$

Цей розв'язок описує стаціонарні хвилі концентрацій компонентів, які поширюються зі сталою швидкістю  $v = 5\sqrt{\frac{1}{6}kd}$ . При цьому просторова область,

яка зайнята першою речовиною, збільшується, а область, зайнята другою речовиною, зменшується. Це узгоджується з фізичною моделлю процесу (5.102), оскільки кінетика процесу така, що відбувається нарощення першої компоненти і знищується друга при їх взаємодії.

Нарешті зауважимо, що при математичному описанні процесу еволюції біологічного виду в рамках запропонованої Р. Фішером теорії генотипів (задача витіснення одного біологічного виду іншим домінантним видом на деякій території) приходять до інтегрування параболічного рівняння з нелінійним молодшим членом

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + ku(1 - u), \quad t > 0, \quad x \in E_1. \quad (5.105)$$

Тут  $u(t, x) = \frac{N(t, x)}{Nm}$  — безрозмірна концентрація (густина) особин популяції, причому  $0 \leq u \leq 1$ ,  $k = \text{const} > 0$  — деякий параметр задачі, який в біологічній моделі є мальтузіанським параметром популяції.

Рівняння (5.105) називають *рівнянням Колмогорова–Петровського–Піскунова (КПП)*. Це рівняння є частинним випадком квазілінійного рівняння вигляду

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + F(u(t, x)) \quad (5.106)$$

У рівнянні (5.106) функція  $F(u)$  описує об'ємні процеси генерації ( $F > 0$ ) і поглинання ( $F < 0$ ) в розглядуваній системі. Якщо  $F(u) > 0$  при  $0 < u < 1$ ,  $F(0) = F(1) = 0$ ,  $F'(0) > 0$ , а  $F'(1) < 0$ , рівняння (5.106) називають рівнянням типу КПП, оскільки частинним випадком такої залежності, коли  $F'(0) = k > 0$ , є логістичний закон генерації  $F(u) = ku(1 - u)$ , який відповідає (5.105).

У біологічній моделі логістичний закон можна пояснити наступним чином. У простій моделі Мальтуса рахувалося, що темп росту чисельності популяції пропорційний числу особин в популяції в деякий момент часу, тобто

$$\frac{dN}{dt} = bN(t), \quad b = \text{const} > 0.$$

Такий закон приводить до необмеженого експоненціального росту чисельності:  $N(t) = N_0 \exp(bt)$ .

У звичайних умовах обмеження природних ресурсів (харчів, води) приводить до того, що існує деяке критичне значення чисельності  $N_m$ , яке може забезпечити навколишнє середовище. Наявність такого механізму регуляції, який залежить від густини, можна врахувати, вважаючи

$$\frac{dN(t)}{dt} = b \left( 1 - \frac{N}{N_m} \right) N.$$

У цьому випадку при наближенні до критичного значення настає насиченість, і ріст чисельності популяції призупиняється. У безрозмірній формі

для  $u = \frac{N}{N_m}$  такий закон відповідає логістичному закону генерації в рівнянні (5.105). Дифузійний доданок в рівнянні (5.105) враховує можливість міграції біологічних особин у просторі.

Напівлінійне рівняння (5.106) називають *рівнянням Зельдовича*, якщо  $F(u) > 0$  при  $0 < u < 1$ ,  $F(0) = F(1) = 0$ ,  $F'(1) < 0$ , але  $F'(0) = 0$ . Окремим випадком такого рівняння є рівняння вигляду

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + u^2(1 - u).$$

Якщо ж функція  $F(u)$  має три нулі на відрізку  $[0, 1]$ , тобто  $F(0) = F(\alpha) = F(1) = 0$ , де  $\alpha \in (0, 1)$ , причому  $F'(0) < 0$ ,  $F'(\alpha) > 0$ , а  $F'(1) < 0$ , то рівняння (5.106) називають *рівнянням Семенова*. Таке рівняння широко використовується в математичних моделях при описанні автокаталітичних ланцюгових реакцій.

На завершення наведемо деякі квазілінійні рівняння, які мають прикладний характер:

1. Рівняння мінімальних поверхонь

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y);$$

2. Рівняння поверхні із заданою середньою кривиною  $k(x, y)$

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 2k(x, y) (1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2};$$

3. Рівняння великих поперечних коливань струни

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} (1 + u_x^2)^{3/2} u_{tt} = -\frac{1}{\mu} f(t, x) (1 + u_x^2)^{3/2}, \quad u = u(t, x);$$

4. Рівняння великих прогинів мембрани

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = -\frac{1}{\mu} f(x, y) (1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2},$$

$$u = u(x, y);$$

5. Рівняння для потенціалу швидкості усталеного двовимірного безвихрового і ізентропічного потоку політропного газу

$$\left( \bar{a}_0^2 - \frac{\gamma + 1}{2} \varphi_x^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \varphi_y^2 \right) \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} +$$

$$+ \left( \bar{a}_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \varphi_x^2 - \frac{\gamma + 1}{2} \varphi_y^2 \right) \varphi_{yy} = 0, \quad \gamma = const, \quad \varphi = \varphi(x, y);$$

6. Рівняння для потенціалу швидкості одновимірного безвихрового ізентропічного потоку політропного газу

$$\left( a_0^2 - (\gamma - 1) \varphi_t - \frac{\gamma + 1}{2} \varphi_x^2 \right) \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_{xt} - \varphi_{tt} = 0, \quad \varphi = \varphi(t, x);$$

7. Рівняння вертикального поширення теплових хвиль в товщі води океану

$$\beta u_{xx} - u_x^2 u_t = 0, \quad u = u(t, x);$$

8. Рівняння поширення плоских електромагнітних хвиль в феромагнітному середовищі

$$u_{xx} - f(u) u_t = 0, \quad u = u(t, x);$$

9. Рівняння вигляду

$$\lambda u_{xx} - u_t = f(t, x, u, u_x), \quad u = u(t, x),$$

де  $f = 0, 5u_x^2 - d(t, x)$  у випадку математичної моделі процесу горіння газу в соплах ракет і  $f = uu_x$  у випадку математичної моделі для описання одновимірного турбулентного потоку рідини;

10. Рівняння поширення теплових хвиль при променевій теплопровідності

$$a(u^n u_x)_x - u_t = 0, \quad u = u(t, x);$$

11. Рівняння осесиметричного потоку нестисливої в'язкої рідини

$$\frac{1}{x} (u_y u_{xy} - u_x u_{yy}) - \left( \frac{1}{x} u_y \right)^2 = \nu u_{yyy}, \quad u = u(x, y),$$

де  $\nu$  — кінематична в'язкість  $\nu = \mu/\rho$ , ( $\mu$  — в'язкість,  $\rho$  — густина);

12. Рівняння Кортевича-де Фріза

$$u_t(t, x) + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad \beta - const,$$

є універсальним рівнянням при моделюванні хвильових процесів різної фізичної природи з урахуванням дисперсії і слабкої нелінійності;

13. Рівняння синус-Гордона

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) + \sin u(t, x) = 0,$$

яке описує протікання струму Джозефсона через проміжок між двома надпровідниками, поширення хвиль намагнічення в феромагнетиках;

## 14. Рівняння Бюргерса

$$u_t(t, x) + uu_x = \nu u_{xx}(t, x), \quad \nu - \text{const}$$

описує ударні хвилі, які поширюються в суцільному середовищі, з урахуванням в'язкості при русі середовища.

**Вправа.** Показати, що підстановкою  $u(t, x) = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} (\ln \varphi(t, x))$  рівняння Бюргерса зводиться до лінійного рівняння теплопровідності  $\varphi_t = \nu \varphi_{xx}$ .

### Тема 3

#### Деякі аналітичні наближені методи розв'язування задач для квазілінійних рівнянь

#### 5.10 Метод Роте (метод прямих)

Розглянемо мішану задачу: в області  $\Omega = \{(t, x) | t \geq 0, x \in [0, l]\}$  знайти розв'язок системи  $n$  одновимірних квазілінійних рівнянь

$$u_{i_t}(t, x) = d_i u_{i_{xx}}(t, x) + f_i(t, x, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (5.107)$$

який задовольняє початкові умови

$$u_i(0, x) = U_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = \overline{1, m} \quad (5.108)$$

і крайові умови

$$u_{i_x}(t, 0) = u_{i_x}(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.109)$$

Задачу (5.107)–(5.109) можна інтерпретувати як задачу, що моделює нестационарний процес в хімічному реакторі з непроникливими стінками. Її наближений розв'язок знайдемо, проводячи дискретизацію рівнянь (5.107) за змінною  $t$ . Такий метод з переходом до скінченних різниць у рівнянні лише за однією змінною називають *методом Роте* або *методом прямих*. Збіжність цього методу доведена в різних просторах гладких і узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей в рівняннях системи (5.107).

Опускаючи доведення збіжності і оцінки похибки методу, викладемо саму схему побудови досить простого алгоритму наближеного аналітичного розв'язання задачі (5.107) – (5.109). Основна ідея методу Роте полягає в заміні оператора диференціювання за змінною  $t$  різницеvim відношенням, вважаючи

$$u_{i_t}(t, x) |_{t=t_k} = \frac{u(t_k, x) - u(t_{k-1}, x)}{h} + O(h), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.110)$$



Підставляючи (5.110) у систему (5.107) і нехтуючи членами більш високого порядку малості, одержуємо напівдискретний аналог задачі (5.107) – (5.109) у вигляді диференціально-різницевих рівнянь для  $i = 1, m$ :

$$d_i \frac{d^2 u_i^{(k)}(x)}{dx^2} - h^{-1} u_i^{(k)}(x) = -h^{-1} u_i^{(k-1)}(x) - F_i^{(k)}(x) \quad (5.111)$$

з крайовими умовами

$$\left. \frac{du_i^{(k)}(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du_i^{(k)}(x)}{dx} \right|_{x=l} = 0, \quad u_i^{(k)}(x) = u_i(t_k, x). \quad (5.112)$$

При цьому на кожному часовому шарі в молодших членах  $f_i$  рівняння (5.107) значення функцій  $u_1, u_2, \dots, u_m$  взяті з попереднього часового шару, тобто

$$F_i^{(k)}(x) = f_i \left( t_k, x, u_1^{(k-1)}(x), u_2^{(k-1)}(x), \dots, u_m^{(k-1)}(x) \right).$$

Таким чином, за допомогою рівнянь (5.111) з урахуванням умов (5.112) можна послідовно знаходити функції  $u_i^{(k)}(x)$  для  $k = 1, 2, \dots$ , які є наближеннями шуканих розв'язків  $u_i(t, x)$  задачі (5.107)–(5.109) на часових шарах  $t = t_k$ . При цьому для кожного значення індексу  $i$  задачу (5.111), (5.112) можна розв'язувати незалежно. На першому кроці при обчисленні  $F_i^{(1)}(x)$  за  $u_i^{(0)}(x)$  потрібно взяти початкові розподіли  $U_i(x)$ .

Для кожного значення  $i$  розв'язок диференціального рівняння (5.111), який задовольняє крайові умови (5.112), будемо шукати у вигляді розкладу в тригонометричний ряд Фур'є за системою ортогональних на проміжку  $(0, l)$  функцій

$$z_n(x) = \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Записавши цей розклад у вигляді

$$u_i^{(k)}(x) = \frac{a_{i_0}^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,n}^{(k)} \cos \frac{\pi n}{l} x, \quad (5.113)$$

дамо спосіб знаходження коефіцієнтів  $a_{i,n}^{(k)}$ .

Для цього функцію  $F_i^{(k)}(x)$ , яка фігурує в рівнянні (5.111), розкладемо в тригонометричний ряд Фур'є (вважаємо, що таке розвинення можливе)

$$F_i^{(k)}(x) = \frac{\varphi_{i_0}^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{i,n}^{(k)} \cos \frac{\pi n x}{l} \quad (5.114)$$

з коефіцієнтами, які визначаються за формулою Ейлера–Фур'є

$$\varphi_{i,n}^{(k)} = \frac{2}{l} \int_0^l F_i^{(k)}(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Підставляючи розклади (5.114) і (5.113) в рівняння (5.111) та прирівнюючи відповідні коефіцієнти, одержимо

$$d_i \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 a_{i,n}^{(k)} + \frac{1}{h} a_{i,n}^{(k)} = \frac{1}{h} a_{i,n}^{(k-1)} + \varphi_{i,n}^{(k)},$$

звідки знаходимо шукані коефіцієнти

$$a_{i,n}^{(k)} = \frac{a_{i,n}^{(k-1)}}{hd_i \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 + 1} + \frac{h\varphi_{i,n}^{(k)}}{hd_i \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 + 1}. \quad (5.115)$$

Таким чином, наближений розв'язок задачі (5.107)–(5.109) на часових шарах  $t = t_k = kh$ ,  $k = 1, 2, \dots$  знайдений у формі розкладу функції  $u_i^{(k)}(x) \sim -u_i(t_k, x)$  в тригонометричні ряди Фур'є (5.113) з коефіцієнтами  $a_{i,n}^{(k)}$ , які визначаються згідно з (5.115).

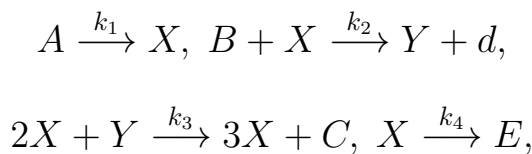
Реалізація алгоритму (5.113)–(5.115) пов'язана з знаходженням коефіцієнтів Фур'є функцій  $F_i^{(k)}(x)$ , які підраховуються на кожному кроці по  $k$ .

За допомогою запропонованого алгоритму проведемо розрахунок і проаналізуємо деякі властивості розв'язку задачі (5.107)–(5.109) для  $m = 2$ , якщо

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(u_1, u_2) = A - (B + 1)u_1 + u_1^2 u_2, \\ f_2 &= f_2(u_1, u_2) = Bu_1 - u_1^2 u_2, \end{aligned} \quad (5.116)$$

де  $A$  і  $B$  — деякі додатні сталі.

Така дифузійно-кінетична модель описує перетворення двох компонентів  $X$  і  $Y$  в деякому хімічному реакторі з непроникливими стінками, якщо народження і знищення компонентів в реакторі проходить за наступною схемою:



де значення констант швидкостей реакцій вказані над стрілками процесів. При цьому вважається, що концентрації речовин  $A$  і  $B$  в реакторі підтримуються сталими, а речовини  $d$ ,  $C$  і  $E$  деяким чином виводяться. Окрім того, припускаємо, що швидкості обернених реакцій значно менші за швидкості прямих. За таких припущень кінетичні процеси в системі описуються рівняннями (5.116), де  $u_1$  і  $u_2$  концентрації речовин  $X$  і  $Y$  відповідно.

Наведемо деякі результати розрахунків нестационарних процесів з використанням вказаної моделі. Якщо значення сталої  $B$ , пропорційне концентрації цієї речовини, не дуже велике, то після деякого часу установлена система виходить на просторово однорідні, тобто незалежні від просторової координати, стаціонарні розв'язки  $u_1 = \bar{u}_1 = A$  і  $u_2 = \bar{u}_2 = B/A$ , для яких  $f_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = f_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$ .

Але, розпочинаючи з деякого критичного значення  $B = B_k$  просторово однорідні розв'язки  $\bar{u}_1$  і  $\bar{u}_2$  стають нестійкими. Тому при  $B > B_k$  після певного часу релаксації система виходить на немонотонні просторово-періодичні стаціонарні структури, які називаються дисипативними структурами.

Приклад дисипативних структур наведений на рис. 5.7, де подані результати розрахунків за алгоритмом (5.113)–(5.115) за наступних значень визначальних параметрів:  $d_1 = 4,4 \cdot 10^{-3}$ ;  $d_2 = 2,2 \cdot 10^{-3}$ ;  $l = 1$ ;  $A = 2,1$ ;  $B = 5,2$ .

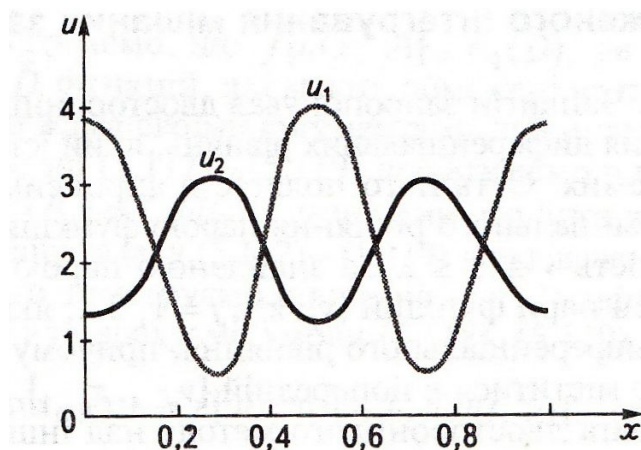


Рис. 5.7:

За початкові розподіли були вибрані просторові однорідні розв'язки  $U_1 = 2$  і  $U_2 = 2,3$ . У розрахунках брався до уваги 21 член ряду (5.113).

Для часового кроку  $h = 0,1$  вихід на стаціонарний розв'язок у вигляді дисипативних структур спостерігався при  $k > 120$ .

Другою цікавою особливістю моделі (5.107)–(5.109) є можливість виникнення періодичних коливань концентрацій речовин. Такі автоколивання в хімічних системах спостерігаються і експериментально. Зокрема, одну із перших описаних у літературі автоколивних хімічних реакцій називають реакцією Белоусова–Жаботинського, які пояснили періодичну зміну кольору розчину протіканням хімічної реакції в ньому.

Таким чином, дослідження математичних моделей дифузійно-кінетичних процесів показують, що через нелінійність в багатокомпонентних системах речовин, які реагують, можуть з'явитися впорядковані, структурно організовані стани, а також стани, які змінюються з певною закономірністю і періодичністю. Ці стани є нерівноважними і лежать зовні термодинамічної вітки, для якої характерні лише стаціонарні безструктурні стани "теплової смерті" що відповідають максимуму ентропії системи. Утворення дисипативних структур відноситься до процесів упорядкованості і самоорганізації в нерівноважних відкритих фізико-хімічних системах, які являють собою предмет вивчення теорії самоорганізації, або синергетики.

## 5.11 Двосторонній метод наближеного інтегрування мішаних задач

У 1919 році академік С.О. Чаплигін опублікував двосторонній метод наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, який значно відрізнявся від раніше відомих. С.О. Чаплигін апроксимує шуканий розв'язок  $u$  диференціального рівняння парою функцій  $z$  і  $v$ , які задовольняють нерівність  $v \leq u \leq z$ . За знайденою парою функцій  $\{v, z\}$  будуються наступні пари функцій  $\{v_j, z_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , які тісніше охоплюють розв'язок диференціального рівняння, причому кожна наступна пара  $\{v_n, z_n\}$  повинна міститися в попередній парі  $\{v_{n-1}, z_{n-1}\}$ .

Основна перевага двостороннього методу над іншими полягає в тому, що різниця  $z_n - v_n$  строго визначає оцінку похибки побудованого наближеного розв'язку на  $n$ -му кроці, а питання оцінки похибки є одним із центральних в теорії наближених методів. Академік М.В. Келдиш і Д.Ю. Панов відзначили, що метод С.О. Чаплигіна являє собою для випадку функціональних рівнянь аналог самого сильного методу розв'язування алгебраїчних рівнянь, методу Ньютона.

Для ілюстрації двостороннього методу розглянемо мішану задачу з нелокальною крайовою умовою А. М. Нахушева: в області

$$B_0 = \{(x, y) \mid x \in (0, a), y \in (0, b)\}$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$D^{(2,1)}u(x, y) = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}), \quad (5.117)$$

який задовольняє умови

$$u(x, 0) = T(x), \quad x \in [0, a], \quad u_x(a, y) = \psi(y), \quad (5.118)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^a u(\xi, y) d\xi = \omega(y), \quad y \in [0, b], \quad 0 \leq x_0 \leq x \leq a,$$

де

$$D^{(k_1, k_2)}u : B_0 \rightarrow B_{(k_1, k_2)}, \quad k_1 = 0, 1, 2; \quad k_2 = 0, 1; \quad |k| \leq 2,$$

$$f : D \rightarrow E_1, \quad D = B_0 \times B_{(1,0)} \times B_{(0,1)} \times B_{(1,1)} \times B_{(2,0)} \subset E_7,$$

а задані функції  $T(x)$ ,  $\psi(y)$ ,  $\omega(y)$  задовольняють умови:  $T(x) \in C^2[0, a]$ ,  $\psi(y) \in C^1[0, b]$ ,  $\omega(y) \in C[0, b]$ , причому

$$T'(a) = \psi(0). \quad (5.119)$$

До мішаних задач вигляду (5.117)–(5.119) приводять процеси фільтрації рідини в середовищах з подвійною пористістю, передачі тепла в гетерогенному середовищі, переносу вологи в ґрунтах тощо.

Надалі будемо вважати, що  $f[u(x, y)] \in C_1(\bar{D})$ , де  $C_1(\bar{D})$  — простір неперервних в  $\bar{D}$  функцій, які мають обмежені частинні похідні першого порядку за всіма своїми аргументами, розпочинаючи з третього.

Розв'язок задачі (5.117)–(5.119) шукатимемо в просторі функцій  $C^{(2,1)}(B_0) \cap C^{(1,1)}(\bar{B}_0) = C_1(\bar{B}_0)$  і називатимемо його регулярним.

Подамо мішану задачу (5.117)–(5.119) в еквівалентній інтегральній формі. Для цього зінтегруємо рівняння (5.117) двічі за  $x$  від  $x_0$  до  $a$  й за  $y$  від нуля до  $y$  та врахуємо умови (5.118), (5.119). Матимемо:

$$u(x, y) = s(x, y) + T_1 f[u(t, \eta)] - T_2 f[u(t, \eta)], \quad (x, y) \in \bar{B}_0, \quad (5.120)$$

де

$$s(x, y) = T(x) + \frac{1}{a - x_0} \int_0^y \omega(\eta) d\eta + \left( \frac{a - x_0}{2} - a + x \right) (\psi(y) - \psi(0)),$$

$$T_1 f[u(t, \eta)] = \int_0^y \int_x^a (t - x) f[u(t, \eta)] dt d\eta,$$

$$T_2 f[u(t, \eta)] = \frac{1}{a - x_0} \int_0^y \int_{x_0}^a \int_{\xi}^a (t - \xi) f[u(t, \eta)] dt d\xi d\eta.$$

Оскільки  $f[u(x, y)] \in C_1(\bar{D})$ , то праву частину рівняння (5.117) завжди можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} f[u(x, y)] &\equiv \\ &\equiv f(x, y, u^+, u_x^+, u_y^+, u_{xx}^+, u_{xy}^+; u^-, u_x^-, u_y^-, u_{xx}^-, u_{xy}^-) \equiv f[u^+; u^-], \\ & f: \bar{D}_1 \rightarrow E_1, \bar{D} \subset \bar{D}_1 \subset E_{12}, \end{aligned}$$

де

$$\frac{\partial f}{\partial D^k u^+(x, y)} \equiv a_k^+(x, y) \geq (\leq) 0, \quad k = (k_1, k_2), \quad (5.121)$$

$$k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1, \quad \frac{\partial f}{\partial D^k u^-(x, y)} \equiv a_k^-(x, y) \leq (\geq) 0.$$

Зазначимо, що підстановкою  $u^*(x, y) = u(x, y) - s(x, y)$  умови (5.118), (5.119) зводяться до однорідних. У зв'язку із цим, не зменшуючи загальності майбутніх міркувань, будемо вважати, що  $T(x) = \psi(y) = \omega(y) = 0$ .

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} f^p(x, y) &= f[z_p(x, y); v_p(x, y)], \\ f_p(x, y) &= f[v_p(x, y); z_p(x, y)], \\ \alpha_p(x, y) &= D^{(2,1)} z_p(x, y) - f^p, \quad \beta_p(x, y) = D^{(2,1)} v_p(x, y) - f_p, \end{aligned} \quad (5.122)$$

$$\begin{aligned}\sigma_p(x, y) &= z_p(x, y) - T_1 f^p(t, \eta) + T_2 f_p(t, \eta), \\ \omega_p(x, y) &= v_p(x, y) - T_1 f_p(t, \eta) + T_2 f^p(t, \eta).\end{aligned}\quad (5.123)$$

► **Означення 5.1.** Дві довільні з простору  $C_1(\bar{B}_0)$  функції  $z_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ , які в області  $\bar{D}$  задовольняють нерівності

$$\begin{aligned}D^k \sigma_0(x, y) &\geq (\leq) 0, \quad D^k \omega_0(x, y) \leq (\geq) 0, \\ D^k W_0(x, y) &\equiv D^k [z_0(x, y) - v_0(x, y)] \geq (\leq) 0, \\ k_1 &= 0, 2 (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1,\end{aligned}\quad (5.124)$$

називаються функціями порівняння мішаної задачі (5.117)–(5.119).

Легко переконатись: якщо функції

$$\begin{aligned}z_0(x, y) &= 0, 5y \left[ M(a-x)^2 - m \frac{(a-x_0)^2}{3} \right], \\ v_0(x, y) &= 0, 5y \left[ m(a-x)^2 - M \frac{(a-x_0)^2}{3} \right],\end{aligned}\quad (5.125)$$

де  $M = \sup_{\bar{D}_1} f[u^+(x, y); u^-(x, y)]$ ,  $m = \inf_{\bar{D}_1} f[u^+(x, y); u^-(x, y)]$ , належать області  $\bar{D}_1$ , то вони є функціями порівняння задачі (5.117)–(5.119).

Побудуємо послідовності функцій  $\{z_p(x, y)\}$  і  $\{v_p(x, y)\}$  за формулами

$$\begin{aligned}z_{p+1}(x, y) &= T_1 f^p(t, \eta) - T_2 f_p(t, \eta), \\ v_{p+1}(x, y) &= T_1 f_p(t, \eta) - T_2 f^p(t, \eta),\end{aligned}\quad (5.126)$$

де за нульове наближення беремо функції порівняння мішаної задачі (5.117)–(5.119).

Із формул (5.122), (5.123), (5.126) дістаємо

$$W_{p+1}(x, y) = (T_1 + T_2) (f^p(t, \eta) - f_p(t, \eta)), \quad (5.127)$$

$$\begin{aligned}z_p(x, y) - z_{p+1}(x, y) &= \sigma_p(x, y), \\ v_p(x, y) - v_{p+1}(x, y) &= \omega_p(x, y),\end{aligned}\quad (5.128)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{p+1}(x, y) &= T_1 \alpha_{p+1}(t, \eta) - T_2 \beta_{p+1}(t, \eta), \\ \omega_{p+1}(x, y) &= T_1 \beta_{p+1}(t, \eta) - T_2 \alpha_{p+1}(t, \eta),\end{aligned}\quad (5.129)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{p+1}(x, y) &= f^p(x, y) - f^{p+1}(x, y), \\ \beta_{p+1}(x, y) &= f_p(x, y) - f_{p+1}(x, y).\end{aligned}\quad (5.130)$$

Зауважимо: якщо  $z_0(x, y)$  і  $v_0(x, y)$  є функціями порівняння задачі (5.117)–(5.119), то

$$f^0(x, y) - f_0(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in \bar{B}_0,$$

а отже, враховуючи (5.124), із (5.127), (5.128) при  $p \equiv 0$  і  $(x, y) \in B_0$  маємо

$$D^k W_1(x, y) \geq (\leq) 0, \quad D^k (z_0(x, y) - z_1(x, y)) \geq (\leq) 0,$$

$$D^k (v_0(x, y) - v_1(x, y)) \leq (\geq) 0,$$

а отже, в області  $\bar{D}_1$  справедливі нерівності

$$D^k v_0(x, y) \leq (\geq) D^k v_1(x, y) \leq (\geq) D^k z_1(x, y) \leq D^k z_0(x, y),$$

$$k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1,$$

тобто функції  $z_1(x, y)$  і  $v_1(x, y)$  також належать області  $\bar{D}_1$ , причому  $f^0 - f^1 \geq 0$ ,  $f_0 - f_1 \leq 0$ . Але тоді з (5.129), (5.130) при  $p = 0$  дістаємо

$$\alpha_1(x, y) \geq 0, \quad \beta_1(x, y) \leq 0, \quad D^k \sigma_1(x, y) \geq (\leq) 0, \quad D^k \omega_1(x, y) \leq (\geq) 0,$$

$$k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1.$$

Беручи функції  $z_1(x, y)$  та  $v_1(x, y)$  за вихідні і повторюючи попередні міркування, методом математичної індукції переконуємося в справедливості в області  $\bar{D}_1$  нерівностей

$$\begin{aligned} D^k v_p(x, y) &\leq (\geq) D^k v_{p+1}(x, y) \leq (\geq) \\ &\leq (\geq) D^k z_{p+1}(x, y) \leq (\geq) D^k z_p(x, y), \end{aligned} \tag{5.131}$$

$$D^k \sigma_p(x, y) \geq (\leq) 0, \quad D^k \omega_p(x, y) \leq (\geq) 0,$$

$$\alpha_p(x, y) \geq 0, \quad \beta_p(x, y) \leq 0, \quad k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1$$

для довільних  $p \in N$ .

Покажемо, що послідовності функцій  $\{z_p(x, y)\}$  та  $\{v_p(x, y)\}$ , побудовані згідно з законом (5.126), (5.124), рівномірно в області  $\bar{B}_0$  збігаються до єдиного регулярного розв'язку задачі (5.117)–(5.119).

Нехай

$$\sum_{k_1, k_2} \sup_{\bar{B}_0} |D^k W_0(x, y)| \leq d, \quad \max_k \left( \sup_{\bar{D}_1} |a_k^+(x, y) - a_k^-(x, y)| \right) \leq P,$$

$$R = \sup \left\{ a, b, \frac{2}{3}a^2, ab, \frac{2}{3}a^2b \right\}.$$

Тоді із (5.127), використовуючи теорему Лагранжа про скінченні прирости, методом математичної індукції легко отримати оцінки

$$|D^k W_p(x, y)| \leq (PR)^p d, \quad k_1 = 0, 1, 2; \quad k_2 = 0, 1, \quad |k| \leq 2. \tag{5.132}$$

Із нерівностей (5.131) і оцінок (5.132) випливає: якщо  $PR < 1$ , то послідовності функцій  $\{z_p(x, y)\}$ ,  $\{v_p(x, y)\}$  рівномірно збігаються до єдиного регулярного розв'язку задачі (5.117)–(5.119) (для цього достатньо у (5.126) перейти до границі, коли  $p \rightarrow \infty$ ).

Отже, справедлива така теорема.

**Теорема 5.1.** Нехай права частина рівняння (5.117)  $f[u(x, y)] \in C_1(\bar{D})$ , а функції  $z_0(x, y)$  та  $v_0(x, y)$  є функціями порівняння мішаної задачі (5.117)–(5.119). Тоді послідовності  $\{z_p(x, y)\}$ ,  $\{v_p(x, y)\}$ , побудовані за формулами (5.127), при  $PR < 1$  збігаються абсолютно й рівномірно в області  $\bar{B}_0$  до єдиного регулярного розв'язку задачі (5.117)–(5.119), а в області  $\bar{D}$  справедливі нерівності

$$D^k v_p(x, y) \leq (\geq) D^k u(x, y) \leq (\geq) D^k z_p(x, y), \quad (5.133)$$

$k_1 = 0, 2$ , ( $k_1 = 1$ ),  $k_2 = 0, 1$  для всіх  $p \in N$ .

Доведення справедливості нерівностей (5.133) проводиться методом від супротивного.

◇ **Зауваження 5.1.** Функції  $z_0(x, y)$  та  $v_0(x, y)$  задовольняють перші дві умови з (5.118), а

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^a z_p(\xi, y) d\xi &= \int_{x_0}^a \int_{\xi}^a (t - \xi) (f^{p-1}(t, y) - f_{p-1}(t, y)) dt d\xi, \\ \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^a v_p(\xi, y) d\xi &= - \int_{x_0}^a \int_{\xi}^a (t - \xi) (f^{p-1}(t, y) - f_{p-1}(t, y)) dt d\xi, \end{aligned}$$

тобто функція  $u_p(x, y) = \frac{1}{2} (z_p(x, y) + v_p(x, y))$  задовольняє всі умови (5.118), і її приймаємо за  $p$ -те наближення.

Із наведеної теореми легко отримати достатні умови існування знакосталих розв'язків мішаної задачі (5.117)–(5.119).

**Наслідок.** Нехай в області  $\bar{D}$  права частина рівняння (5.117)  $f[u(x, y)] \in C_1(\bar{D})$  і в просторі  $C^{(2,1)}(\bar{B}_0)$  існує така функція  $v_0(x, y)$  ( $z_0(x, y)$ ), що

$$D^k (T_2 f[v_0(t, \eta); 0] - T_1 f[0; v_0(t, \eta)]) \geq (\leq) 0,$$

$$D^k v_0(x, y) \leq (\geq) 0,$$

$$D^k (v_0(x, y) - T_1[v_0(t, \eta); 0] + T_2 f[0; v_0(t, \eta)]) \leq (\geq) 0,$$

$$k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1,$$

$$\left( \begin{array}{l} D^k (z_0(x, y) - T_1[z_0(t, \eta); 0] + T_2 f[0; z_0(t, \eta)]) \geq (\leq) 0, \\ D^k z_0(x, y) \geq (\leq) 0, \\ D^k (T_2 f[z_0(t, \eta); 0] - T_1 f[0; z_0(t, \eta)]) \leq (\geq) 0, \\ k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1. \end{array} \right)$$

Тоді розв'язок рівняння (5.117) з однорідними умовами (5.118) задовольняє в області  $\bar{B}_0$  нерівності

$$D^k u(x, y) \leq (\geq) 0 \quad (D^k u(x, y) \geq (\leq) 0), \quad k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1.$$



Відзначимо, що двосторонній метод є досить універсальним і його можна застосувати до широкого класу задач теорії ДРЧП. Більше того, його можна назвати і конструктивним, оскільки крім алгоритму побудови наближеного розв'язку розглядуваної задачі, він дає можливість відповісти і на ряд питань якісної теорії ДРЧП (існування та єдиність розв'язку досліджуваної задачі, його якісна оцінка тощо).

## 5.12 Асимптотичні методи дослідження нелінійних ДРЧП

Асимптотичні методи з успіхом застосовуються для побудови наближених розв'язків нелінійних рівнянь з частинними похідними, які близькі до лінійних. Це дає можливість розв'язати багато задач про коливання в системах з розподіленими параметрами (коливання стержнів, балок, пластин, валів тощо), та інших задач теорії теплопровідності.

Тут викладено асимптотичний метод Крилова–Боголюбова–Митропольського (КБМ) на прикладі відомого класу рівнянь, які описують процеси коливань обмежених об'ємів:

$$\operatorname{div} [k(t, \vec{r}) \operatorname{grad} u(t, \vec{r})] - q(t, \vec{r}) u(t, \vec{r}) = \rho(t, \vec{r}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.134)$$

У випадку змінних коефіцієнтів  $k, q, \rho$ , які залежать від просторових координат  $\vec{r}$  і часу  $t$ , така система описує процеси коливань в неоднорідних середовищах.

Перш ніж перейти до викладу методу КБМ, введемо деякі допоміжні поняття.

Нехай сім'я операторів  $L_\varepsilon$  визначає деяку задачу,

$$L_\varepsilon u = h, \quad (5.135)$$

розв'язок якої необхідно вивчити при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При  $\varepsilon = 0$  гранична задача

$$L_0 v = h \quad (5.136)$$

коректна в тому чи іншому розумінні.

Під дослідженням задачі (5.135) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  найчастіше розуміють подання розв'язку у вигляді ряду за степенями  $\varepsilon$ :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (5.137)$$

► **Означення 5.2.** Частинну суму ряду (5.137)

$$u_{\varepsilon n} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots + \varepsilon^n u_n$$

називають **формальним асимптотичним розв'язком задачі** (5.135), якщо вона задовольняє такі дві умови:

1.  $u_{\varepsilon n} \in D(L_\varepsilon) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$  ( $u_{\varepsilon n}$  належить області визначення оператора  $L_\varepsilon$ ),
2.  $L_\varepsilon u_{\varepsilon n} = h + O(\varepsilon^{n+1}\alpha)$ , де  $\alpha$  — деяка характеристика зростання або спадання коефіцієнтів  $u_i$ .

Наприклад, якщо в деякій задачі всі  $u_i$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  мають вигляд

$$u_i = \varphi(x) \exp(x/\varepsilon),$$

де функції  $\varphi(x)$  обмежені на досліджуваній множині, скажімо, на відрізку  $[0, 1]$ , то зрозуміло, що  $\alpha = \exp(x/\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \infty, \quad \forall x \in (0, 1]$ , тобто в даному випадку  $\varphi_i(x) \exp(x/\varepsilon) = O(e^{x/\varepsilon})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ .

Якщо, крім умов 1) і 2) означення (5.2), для досить малих значень  $\varepsilon$  виконується нерівність

$$\|u - u_{\varepsilon n}\| \leq (c_0 + c_1\alpha) \varepsilon^{n+1}, \quad (5.138)$$

де  $u$  — точний розв'язок задачі (5.135),  $c_k$  ( $k = 0, 1$ ) не залежать від  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  — деяка характеристика коефіцієнтів  $u_i$ , то функцію  $u_{\varepsilon n}$  називають *асимптотичним розв'язком порядку  $n$  задачі* (5.135).

Якщо нерівність (5.138) виконується для  $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ , то говорять, що ряд (5.137) збігається асимптотично до розв'язку  $u$  задачі (5.135) в деякому просторі  $U$ , де визначена норма, що фігурує в нерівності (5.138).

► **Означення 5.3.** Функцію  $u_{\varepsilon 0} = u_0$ , яка задовольняє умови 1), 2) означення (5.2) і (5.138) (при  $n = 0$ ), називають **головним членом асимптотики** або **нульовим наближенням**.

Повертаючись до викладу методу КБМ, розглянемо частинний випадок рівняння типу (5.134), а саме вивчимо поширення нелінійних хвиль в системах зі слабкими неоднорідностями геометричного і часового типу для одновимірного випадку, тобто будемо досліджувати наступне нелінійне рівняння з повільно змінними коефіцієнтами

$$u_{tt}(t, x) - \alpha^2(\xi, \tau) u_{xx} + \beta^2(\xi, \tau) u(t, x) = \varepsilon f(\xi, \tau, u, u_t, u_x), \quad (5.139)$$

де  $0 < \varepsilon \ll 1$  — малий параметр,  $\xi = \varepsilon x$ ,  $\tau = \varepsilon t$ ,  $f(\xi, \tau, u, u_t, u_x)$  — досить гладка функція, яка задовольняє всі необхідні умови для побудови асимптотичного розв'язку.

При  $\varepsilon = 0$  і  $\xi, \tau$ , які розглядаються як параметри, рівняння (5.119) є відомим класичним рівнянням Клейна–Гордона

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u(t, x) = 0, \quad (5.140)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  — сталі величини.

Рівняння (5.140) надалі будемо розглядати як незбурене рівняння, яке відповідає збуреному рівнянню (5.139).

Як відомо, рівняння (5.140) має розв'язок

$$u(a, \psi) = a \cos \psi, \quad (5.141)$$

де  $\psi = kx - \omega t + \varphi$ ,  $a$  і  $\varphi$  — сталі,  $\psi_x = k$ ,  $\psi_t = -\omega$ ,

$$\omega^2 = \alpha^2 k^2 + \beta^2 \quad (5.142)$$

— дисперсійне співвідношення.

При  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\xi = \varepsilon x$ ,  $\tau = \varepsilon t$  асимптотичний наближений розв'язок рівняння (5.139) шукатимемо у вигляді ряду

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau, a, \psi) &= \\ &= u_0(a, \psi) + \varepsilon u_1(\xi, \tau, a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \tau, a, \psi) + \dots, \end{aligned} \quad (5.143)$$

в якому  $u_0(a, \psi) = a \cos \psi$ ; шукані функції  $u_i(\xi, \tau, a, \psi)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  є періодичними за  $t$  з періодом  $2\pi$ ,  $\psi = kx - \omega t + \varphi$ ,  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\xi = \varepsilon x$ ,  $\tau = \varepsilon t$ , а  $a$  і  $\varphi$  як функції часу  $t$  і просторової координати  $x$  мають визначатися з такої системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial t} = \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a) + \varepsilon^3 A_3(\tau, a) + \dots, \\ \frac{\partial a}{\partial x} = \varepsilon B_1(\xi, a) + \varepsilon^2 B_2(\xi, a) + \varepsilon^3 B_3(\xi, a) + \dots, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon C_1(\tau, a) + \varepsilon^2 C_2(\tau, a) + \varepsilon^3 C_3(\tau, a) + \dots, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varepsilon D_1(\xi, a) + \varepsilon^2 D_2(\xi, a) + \varepsilon^3 D_3(\xi, a) + \dots, \end{array} \right. \quad (5.144)$$

де  $A_i, B_i, C_i, D_i$  — функції, які надалі потрібно визначити.

Очевидно, що останні два рівняння системи (5.144) можна записати (враховуючи, що  $\psi = kx - \omega t + \varphi$ ) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\omega + \varepsilon C_1(\tau, a) + \varepsilon^2 C_2(\tau, a) + \varepsilon^3 C_3(\tau, a) + \dots, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= k + \varepsilon D_1(\xi, a) + \varepsilon^2 D_2(\xi, a) + \varepsilon^3 D_3(\xi, a) + \dots \end{aligned} \quad (5.145)$$

Підставимо праву частину ряду (5.143) в рівняння (5.139). Диференціюючи доданки ряду (5.143) за  $t$  і  $x$ , враховуємо при цьому рівняння (5.144), а також те, що  $k$  і  $\omega$  повинні бути повільно-змінними функціями  $x$  і  $t$  ( $k_x = \varepsilon k_\xi$ ,  $\omega_t = \varepsilon \omega_\tau$ , тому що у виразі (5.142)  $\beta^2 = \beta^2(\xi, \tau)$ ).

Після ряду викладок, розміщуючи результат за зростаючими степенями малого параметру  $\varepsilon$ , одержуємо для лівої частини рівняння (5.139) наступний вираз:

$$u_{tt} - \alpha^2(\xi, \tau) u_{xx} + \beta^2 u(\xi, \tau) u(t, x) =$$

$$\begin{aligned}
&= -a\omega^2 \cos \psi + \alpha^2 (\xi, \tau) ak^2 \cos \psi + \beta^2 (\xi, \tau) a \cos \psi + \\
&+ \varepsilon \left\{ [2 (A_1 (\tau, a) \omega + B_1 (\xi, a) \alpha^2 (\xi, \tau) k) + a\omega_\tau + \alpha^2 (\xi, \tau) k_\xi a] \sin \psi + \right. \\
&\quad + 2 (C_1 (\tau, a) \omega + D_1 (\xi, a) \alpha^2 (\xi, \tau) k) a \cos \psi + \omega^2 u_{1\psi\psi} - \\
&\quad - \alpha^2 (\xi, \tau) k^2 u_{1\psi\psi} + \beta^2 (\xi, \tau) u_1 \left. \right\} + \varepsilon^2 \left\{ [2 (A_2 (\tau, a) \omega + \right. \\
&\quad + B_2 (\xi, a) \alpha^2 (\xi, \tau) k) - ({}_{1_a} (\tau, a) A_1 (\tau, a) + {}_{1_\tau} (\tau, a)) a - \\
&\quad - 2A_1 (\tau, a) {}_{1_\tau} (\tau, a) - \alpha^2 (\xi, \tau) (D_{1_a} (\xi, a) B_1 (\xi, a) + D_{1_\xi} (\xi, a)) a - \\
&\quad - 2B_1 (\xi, a) D_1 (\xi, a) \alpha^2 (\xi, \tau)] \sin \psi + \\
&\quad + [2 ({}_2 (\tau, a) \omega + D_2 (\xi, a) \alpha^2 (\xi, \tau) k) a + (A_{1_a} (\tau, a) A_1 (\tau, a) + \\
&\quad + A_{1_\tau} (\tau, a)) - {}_1^2 (\tau, a) a + \alpha^2 (\xi, \tau) (B_{1_a} (\xi, a) B_1 (\xi, a) + B_{1_\xi} (\xi, a)) - \\
&\quad - \alpha^2 (\xi, \tau) D_1^2 (\xi, a) a] \cos \psi - 2 [u_{1_a\psi} \omega A_1 (\tau, a) + \\
&\quad + u_{1\psi\psi} \omega_1 (\tau, a) + u_{1\psi\psi} \omega] - u_{1\psi} \omega_\tau - 2\alpha^2 (\xi, \tau) [u_{1_\psi a} k B_1 (\xi, a) + \\
&\quad + u_{1\psi\psi} k D_1 (\xi, a) + u_{1\psi\xi} k] - u_{1\psi} \alpha^2 (\xi, \tau) k_\xi + \\
&\quad \left. + \omega^2 u_{2\psi\psi} - \alpha^2 (\xi, \tau) k^2 u_{2\psi\psi} + \beta^2 (\xi, \tau) u_2 \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (5.146)
\end{aligned}$$

Праву частину рівняння (5.139) після підстановки в неї значень  $u$ ,  $u_t$  і  $u_x$ , знайдених після диференціювання ряду (5.143) за  $t$  і за  $x$  з урахуванням системи рівнянь (5.144), розкладемо в ряд Тейлора за зростаючими степенями малого параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
\varepsilon f (\xi, \tau, u, u_t, u_x) &= \varepsilon f_0 (\xi, \tau, a, \psi) + \varepsilon^2 \left\{ f'_u (\xi, \tau, a, \psi) u_1 + \right. \\
&+ f'_{u_1} (\xi, \tau, a, \psi) [A_1 (\tau, a) \cos \psi - c_1 (\tau, a) a \sin \psi - \omega u_{1\psi}] + \\
&\left. + f'_{u_x} (\xi, \tau, a, \psi) [B_1 (\xi, a) \cos \psi - D_1 (\xi, a) a \sin \psi + k u_{1\psi}] \right\} + \varepsilon^2 \dots \quad (5.147)
\end{aligned}$$

де введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
f (\xi, \tau, a \cos \psi, a\omega \sin \psi, -ak \sin t) &= f_0 (\xi, \tau, a, \psi), \\
f'_u (\xi, \tau, a \cos \psi, a\omega \sin \psi, -ak \sin t) &= f'_u (\xi, \tau, a, \psi), \\
f'_{u_t} (\xi, \tau, a \cos \psi, a\omega \sin \psi, -ak \sin t) &= f'_{u_t} (\xi, \tau, a, \psi), \\
f'_{u_x} (\xi, \tau, a \cos \psi, a\omega \sin \psi, -ak \sin t) &= f'_{u_x} (\xi, \tau, a, \psi).
\end{aligned} \quad (5.148)$$

Припускаючи тепер, що при повільній зміні параметрів дисперсійне співвідношення

$$\omega^2 = \alpha^2 (\xi, \tau) k^2 + \beta^2 (\xi, \tau) \quad (5.149)$$

зберігається і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$  в правих частинах виразів (5.146), (5.147), дістаємо:

$$[-\omega^2 + \alpha^2(\xi, \tau)k^2 + \beta^2(\xi, \tau)]a \cos \psi = 0, \quad (5.150)$$

$$\begin{aligned} & \beta^2(\xi, \tau) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 \right) = \\ & = - \{ 2 [A_1(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)B_1(\xi, a)k] + (\omega_t + \alpha^2(\xi, \tau)k\xi)a \} \sin \psi - \\ & - 2 [C_1(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)D_1(\xi, a)k] a \cos \psi + f_0(\xi, \tau, a, \psi), \quad (5.151) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta^2(\xi, \tau) \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2 \right) = - \{ 2 [A_2(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)B_2(\xi, a)k] - \\ & - [C_{1a}(\tau, a)A_1(\tau, a) + c_{1\tau}(\tau, a)]a + \\ & + \alpha^2(\xi, \tau) [D_{1a}(\xi, a)B_1(\xi, a) + D_{1\xi}(\xi, a)]a - \\ & - 2 [A_1(\tau, a)C_1(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau)B_1(\xi, a)D_1(\xi, a)] \} \sin \psi - \\ & - \{ 2 [C_2(\tau, a)\omega + D_2(\xi, a)\alpha^2(\xi, \tau)k]a + [A_{1a}(\tau, a)A_1(\tau, a) + \\ & + A_{1\tau}(\tau, a)] - \alpha^2(\xi, \tau) [B_{1a}(\xi, a)B_1(\xi, a) + B_{1\xi}(\xi, a)] - \\ & - C^2(\tau, a)a + \alpha^2(\xi, \tau)D_1^2(\xi, a)a \} \cos \psi + f_1(\xi, \tau, a, \psi), \quad (5.152) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \tau, a, \psi) = & f'_u(\xi, \tau, a, \psi)u_1 + f'_{u_t}(\xi, \tau, a, \psi) [A_1(\tau, a)\cos \psi - \\ & - C_1(\tau, a)a \sin \psi - \omega u_{1\psi}] + f'_{u_x}(\xi, \tau, a, \psi) [B_1(\xi, a)\cos \psi - \\ & - D_1(\xi, a)a \sin \psi + k u_{1\psi}] + 2 [u_{1a\psi}\omega A_1(\tau, a) + u_{1\psi\psi}\omega C_1(\tau, a) + \\ & + u_{1\tau\psi}\omega] + \alpha^2(\xi, \tau) 2 [u_{1\psi a}k B_1(\xi, a) + u_{1\psi\psi}k D_1(\xi, a) + k u_{1\psi\xi}] + \\ & + u_{1\psi}\omega_\tau + \alpha^2(\xi, \tau)u_{1\psi}k\xi. \quad (5.153) \end{aligned}$$

Рівняння (5.150)–(5.152) дають можливість (за деяких обмежень, які накладаються на досліджувану систему) побудувати асимптотичні наближення в нульовому, першому і другому наближеннях.

Для визначення нульового і першого наближень, розкладаємо періодичну за  $\psi$  функцію  $f_0(\xi, \tau, a, \psi)$  у ряд Фур'є:

$$\begin{aligned} & f_0(\xi, \tau, a, \psi) = \\ & = f_{00}^{-1}(\xi, \tau, a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_{0n}^{(1)}(\xi, \tau, a) \cos n\psi + f_{0n}^{(2)}(\xi, \tau, a) \sin n\psi \right], \quad (5.154) \end{aligned}$$

де

$$f_{0n}^{(1)}(\xi, \tau, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\xi, \tau, a, \psi) \cos n\psi d\psi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.155)$$

$$f_{0n}^{(2)}(\xi, \tau, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\xi, \tau, a, \psi) \sin n\psi d\psi,$$

Після цього підставляємо (5.154) у співвідношення (5.151) і шукаємо вираз для функції  $u_1(\xi, \tau, a, \psi)$  також у вигляді ряду Фур'є. При цьому одночасне накладання умови відсутності знаменників, які перетворюються в нуль, дає можливість одержати рівняння, яке виражає амплітуду  $a$  і фазу  $\varphi$ . Після елементарних викладок знаходимо

$$u_1(\xi, \tau, a, \psi) = \frac{f_{00}(\xi, \tau, a)}{\beta^2(\xi, \tau)} - \frac{1}{\beta^2(\xi, \tau)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2} \left[ f_{0n}^{(1)}(\xi, \tau, a) \cos n\psi + f_{0n}^{(2)}(\xi, \tau, a) \sin n\psi \right], \quad (5.156)$$

а також такі рівняння для визначення  $A_1(\tau, a)$ ,  $B_1(\xi, a)$ ,  $C_1(\tau, a)$  і  $D_1(\xi, a)$ , які забезпечують відсутність секулярних членів у функції  $u_1(\xi, \tau, a, \psi)$  (5.156):

$$\begin{aligned} [2A_1(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)B_1(\xi, a)k] + (\omega_\tau + \alpha^2(\xi, \tau)k_\xi)a = \\ = f_{01}^{(2)}(\xi, \tau, a), \end{aligned} \quad (5.157)$$

$$2[C_1(\tau, a)\omega + \alpha^2(\xi, \tau)D_1(\xi, a)k]a = f_{01}^{(1)}(\xi, \tau, a). \quad (5.158)$$

Таким чином, у нульовому наближенні розв'язок рівняння (5.139) має вигляд

$$u(\xi, \tau, a, \psi) = u_0(a, \psi) = a \cos \psi, \quad \psi = kx - \omega t + \varphi, \quad (5.159)$$

де  $a$  і  $\varphi$  повинні бути визначені як функції  $x$  і  $t$  з системи:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega' \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2\omega} \left[ f_{01}^{(2)}(\xi, \tau, a) - (\omega_t + \alpha^2(\xi, \tau)k_x)a \right], \quad (5.160)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega' \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2a\omega} f_{01}^{(1)}(\xi, \tau, a), \quad (5.161)$$

де  $\omega' = \frac{\alpha^2(\xi, \tau)k}{\omega}$  — групова швидкість.

При розгляді нульового наближення (рівнянь (5.159)–(5.161)) має виконуватись дисперсійне співвідношення

$$\bar{\omega}^2 - \alpha^2(\xi, \tau)\bar{k}^2 - \beta^2(\xi, \tau) = 0 \quad (5.162)$$

та умови сумісності

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} = 0, \quad (5.163)$$

де  $\bar{\omega} = \omega - \varphi_t$ ,  $\bar{k} = k + \varphi_x$ , взяті в нульовому наближенні.

У першому наближенні асимптотичний розв'язок рівняння (5.139) записується у вигляді

$$u(\xi, \tau, a\psi) = a \cos \psi + \varepsilon u_1(\xi, \tau, a, \psi), \quad (5.164)$$

де  $u_1(\xi, \tau, a, \psi)$  визначається згідно з формулою (5.156), а  $a$  і  $\varphi$  мають задовольняти рівняння (5.160), (5.161).

Побудуємо асимптотичний розв'язок у другому наближенні. Для цього, як і в попередньому випадку, перш за все розкладаємо в ряд Фур'є функцію  $f_1(\xi, \tau, a\psi)$  задану рівністю (5.153), яка після визначення  $u_1(\xi, \tau, a, \psi)$  згідно з формулою (5.156) і функцій  $A_1(\tau, a)$ ,  $B_1(\xi, a)$ ,  $C_1(\tau, a)$ ,  $D_1(\xi, a)$  з рівнянь (5.157), (5.158), є періодичною функцією за  $\psi$  з періодом  $2\pi$ :

$$f_1(\xi, \tau, a, \psi) = f_{10}^{(1)}(\xi, \tau, a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_{1n}^{(1)}(\xi, \tau, a) \cos n\psi + f_{1n}^{(2)}(\xi, \tau, a) \sin n\psi \right], \quad (5.165)$$

де  $f_{1n}^{(1)}(\xi, \tau, a)$  і  $f_{1n}^{(2)}(\xi, \tau, a)$  — коефіцієнти Фур'є.

Функцію  $u_2(\xi, \tau, a, \psi)$  шукаємо у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти якого визначаємо із рівняння (5.152). В результаті дістаємо

$$u_2(\xi, \tau, a, \psi) = \frac{f_{10}^{(1)}(\xi, \tau, a)}{\beta^2(\xi, \tau)} - \frac{1}{\beta^2(\xi, \tau)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left[ f_{1n}^{(1)}(\xi, \tau, a) \cos n\psi + f_{1n}^{(2)}(\xi, \tau, a) \sin n\psi \right], \quad (5.166)$$

а також наступні рівняння для визначення  $A_2(\tau, a)$ ,  $B_2(\xi, a)$ ,  $C_2(\tau, a)$ ,  $D_2(\xi, a)$ , які забезпечують відсутність секулярних членів у функції  $u_2(\xi, \tau, a, \psi)$ , заданої рівністю (5.166):

$$\begin{aligned} & 2 [A_2(\tau, a) \omega + \alpha^2(\xi, \tau) B_2(\xi, a) k] = \\ & = f_{11}^{(2)}(\xi, \tau, a) - [C_{1a}(\tau, a) A_1(\tau, a) + C_{1\tau}(\tau, a)] a + \\ & \quad + \alpha^2(\xi, \tau) [D_{1a}(\xi, a) B_1(\xi, a) + D_{1\xi}(\xi, a)] a - \\ & - 2 [A_1(\tau, a) C_1(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau) B_1(\xi, a) D_1(\xi, a)], \end{aligned} \quad (5.167)$$

$$\begin{aligned} & 2 [C_2(\tau, a) a\omega + \alpha^2(\xi, \tau) D_2(\xi, a) ak] = \\ & = f_{11}^{(1)}(\xi, \tau, a) - [A_{1a}(\tau, a) A_1(\tau, a) + A_{1\tau}(\tau, a)] + \\ & \quad + \alpha^2(\xi, \tau) [B_{1a}(\xi, a) B_1(\xi, a) + B_{1\xi}(\xi, a)] - \end{aligned}$$

$$- [C_1^2(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau) D_1^2(\xi, a)] a. \quad (5.168)$$

Отже, в другому наближенні маємо

$$u(\xi, \tau, a, \psi) = a \cos \psi + \varepsilon u_1(\xi, \tau, a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \tau, a, \psi), \quad (5.169)$$

де  $a$  і  $\varphi$  повинні задовольняти наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \omega' \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{2\omega} \left[ f_{01}^{(2)}(\xi, \tau, a) - (\omega_t + \alpha^2(\xi, \tau) k_x) a \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2\omega} \left\{ f_{11}^{(2)}(\xi, \tau, a) - [C_{1_a}(\tau, a) A_1(\tau, a) + C_{1_\tau}(\tau, a) a] + \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2(\xi, \tau) [D_{1_a}(\xi, a) B_1(\xi, a) + D_{1_\xi}(\xi, a)] a - \right. \\ &\quad \left. - 2 [A_1(\tau, a) C_1(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau) B_1(\xi, a) D_1(\xi, a)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.170)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega' \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{2a\omega} f_{01}^{(1)}(\xi, \tau, a) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2a\omega} \left\{ f_{11}^{(1)}(\xi, \tau, a) - [A_{1_a}(\tau, a) A_1(\tau, a) A_{1_\tau}(\tau, a)] + \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2(\xi, \tau) [B_{1_a}(\xi, a) B_1(\xi, a) + B_{1_\xi}(\xi, a)] + \right. \\ &\quad \left. + [C_1^2(\tau, a) - \alpha^2(\xi, \tau) D_1^2(\xi, a)] a \right\}. \end{aligned} \quad (5.171)$$

■ **Приклад 5.1.** Для ілюстрації викладеного вище методу розглянемо рівняння Клейна-Гордона у випадку неоднорідного середовища, записане у самоспряженому вигляді

$$u_{tt}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha^2(x, t) u_x(x, t)) + \beta^2(x, t) u(x, t) = 0. \quad (5.172)$$

Вважаючи, що  $t$  і  $x$  уже нормовані на характерні довжину хвилі і період, будемо вважати, що

$$\alpha = \tilde{\alpha}(\varepsilon x, \varepsilon t), \quad \beta = \tilde{\beta}(\varepsilon x, \varepsilon t). \quad (5.173)$$

Тоді замість рівняння (5.172) розглядатимемо рівняння з повільно змінними коефіцієнтами

$$u_{tt}(x, \psi) - \tilde{\alpha}^2(\xi, \tau) u_{xx} + \tilde{\beta}^2(\xi, \tau) u(x, t) = 2\varepsilon \tilde{\alpha}(\xi, \tau) \tilde{\alpha}_\xi(\xi, \tau) u_x(x, t), \quad (5.174)$$

в якому  $\xi = \varepsilon x$ ,  $\tau = \varepsilon t$ .

При  $\varepsilon = 0$ ,  $\xi = const$ ,  $\tau = const$ , а отже  $\tilde{\alpha}(\xi, \tau) = \alpha = const$ ,  $\tilde{\beta}(\xi, \tau) = \beta = const$ , приходимо до рівняння (5.140), яке має розв'язок (5.141). Диференціюючи (5.142) за  $k$ , одержимо так звану групову швидкість

$$\omega'_k = \frac{\alpha^2 k}{\omega}.$$

Перейдемо тепер до побудови асимптотичного розв'язку рівняння (5.174) в нульовому наближенні при  $\varepsilon \neq 0$ . У цьому випадку будемо шукати розв'язок у вигляді

$$u(a, \psi) = a \cos \psi, \quad \psi = kx - \omega t + \varphi,$$



де  $a$  і  $\varphi$  мають визначатися з рівнянь (5.160), (5.161), в яких слід покласти

$$\varepsilon f_{01}^{(2)}(\xi, \tau, a) = -2\varepsilon\alpha(\xi, \tau)\alpha_\xi(\xi, \tau)ak, \quad \varepsilon f_{01}^{(1)}(\xi, \tau, a) = 0,$$

після чого для  $a$  і  $\varphi$  дістаємо такі рівняння:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\frac{\partial a}{\partial t}\omega + 2\alpha^2\frac{\partial a}{\partial x}k + (\omega_t + \alpha^2k_x - 2\alpha\alpha_xk)a = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}\omega + \alpha^2\frac{\partial \varphi}{\partial x}k = 0, \\ \omega^2 + \alpha^2k^2 - \beta^2 = 0, \\ \bar{k}_t + \bar{\omega}_x = (k + \varphi_x)_t + (\omega - \varphi_t)_x = \\ = k_t + \omega_x + \varepsilon^2 [D_{1a}(\xi, a)A_1(\tau, a) - C_{1a}(\xi, a)B_1(\xi, a)] = 0. \end{array} \right.$$

Зауважимо, що майже кожна задача, яка є математичною моделлю деякого фізичного процесу, вимагає оригінального підходу і модифікації існуючих методів. Для роботи над такими задачами необхідно мати загальне уявлення про теоретичні основи і застосування відомих методів. Це уявлення ми й намагалися дати в цій темі.

## Додатки

### Д. 1 КОЛИВАННЯ КРУГЛОЇ МЕМБРАНИ. МЕТОД ФУР'Є

У п. 2.21 методом відокремлення змінних була розв'язана задача про коливання прямокутної мембрани. Покажемо, що цим же методом може бути розв'язана і задача про коливання круглої мембрани. З цією метою дослідимо задачу: вивчити процес вільних коливань круглої однорідної мембрани радіуса  $R$ , якщо в початковий момент часу положення та швидкість її точок були рівні відповідно  $\omega_1(x, y)$  та  $\psi_1(x, y)$ , а край мембрани нерухомо закріплений.

Взявши центр мембрани за початок координат і перейшовши в рівнянні коливань мембрани до полярних координат, прийдемо до задачі: в області

$$B = \{(t, \rho, \varphi) \mid t > 0, \quad 0 \leq \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

знайти розв'язок диференціального рівняння

$$U_{tt}(t, \rho, \varphi) = a^2 (U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi}), \quad (\text{Д.1})$$

який задовольняє початкові

$$\begin{aligned} U(0, \rho, \varphi) &= \omega(\rho, \varphi), \quad U_t(0, \rho, \varphi) = \psi(\rho, \varphi), \\ 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{aligned} \quad (\text{Д.2})$$

та крайову

$$U(t, R, \varphi) = 0, \quad t \geq 0 \quad (\text{Д.3})$$

умови. Очевидно,  $U(t, \rho, \varphi) = U(t, \rho, \varphi + 2\pi)$ .

Як і у випадку прямокутної мембрани, шукаємо спочатку нетривіальні розв'язки рівняння (Д.1), які задовольняють умові (Д.3), у вигляді

$$U(t, \rho, \varphi) = T(t)V(\rho, \varphi) \neq 0. \quad (\text{Д.4})$$

Підставивши (Д.4) в (Д.1) та відокремивши змінні, одержимо

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \quad (\text{Д.5})$$

$$V_{\rho\rho} + \rho^{-1}V_{\rho} + \rho^{-2}V_{\varphi\varphi} + \lambda V = 0. \quad (\text{Д.6})$$

На підставі крайової умови (Д.3) та враховуючи періодичність функції  $V(\rho, \varphi)$  за  $\varphi$  і її обмеженість в центрі круга, маємо:

$$V(R, \varphi) = 0, \quad V(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi + 2\pi), \quad |V(0, \varphi)| < \infty. \quad (\text{Д.7})$$

Задачу Штурма-Ліувіля (Д.6), (Д.7) також розв'язуємо методом відокремлення змінних. Покладемо

$$V(\rho, \varphi) = Z(\rho)\Phi(\varphi) \neq 0. \quad (\text{Д.8})$$

Тоді із (Д.6), (Д.7) одержимо

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(\varphi) = (\varphi + 2\pi), \quad (\text{Д.9})$$

$$\begin{aligned} Z''(\rho) + \rho^{-1}Z'(\rho) + (\lambda - \mu^2\rho^{-2})Z(\rho) &= 0, \\ Z(R) = 0, \quad |Z(0)| &< \infty. \end{aligned} \quad (Д.10)$$

Нетривіальний розв'язок задачі (Д.9) існує тільки при  $\mu^2 = n^2$ , де  $n$  — ціле число (див. 2 тема 2, розд IV).

Таким чином

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad A_n, B_n - \text{const.} \quad (Д.11)$$

Для розв'язання задачі (Д.10) введемо нову незалежну змінну  $\xi = \sqrt{\lambda}\rho$  і позначимо  $z(\rho) = z\left(\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}\right) = W(\xi)$ . Тоді маємо

$$W''(\xi) + \xi^{-1}W'(\xi) + (1 - n^2\xi^{-2})W(\xi) = 0 \quad (Д.12)$$

$$W(\sqrt{\lambda}R) = 0, \quad |W(0)| < \infty. \quad (Д.13)$$

Рівняння (Д.12) є рівнянням Бесселя порядку  $n$ . Розв'язуючи його методом степеневих рядів (див. [16], с. 622-627) переконуємось, що будь-який його розв'язок  $W_n(\xi)$  може бути поданий у вигляді

$$W_n(\xi) = C_1 J_n(\xi) + C_2 N_n(\xi), \quad (Д.14)$$

де

$$\begin{aligned} J_n(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+n)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k+n}, \\ N_n(\xi) &= \frac{2}{\pi} J_n(\xi) \left(\ln \frac{\xi}{2} + c\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-n+2s} - \\ &- \frac{1}{\pi} \left(\frac{\xi}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k+n} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \dots + 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \dots + 1\right) \right], \end{aligned}$$

$c = 0, 577215\dots$  — ейлерова стала.

Функція  $J_n(\xi)$  називається функцією Бесселя першого роду, а  $N_n(\xi)$  — функцією Неймана. При  $\xi \rightarrow 0$  функція  $N_n(\xi)$  перетворюється в нескінченність, а отже в силу другої умови із (Д.13) випливає, що  $C_2 = 0$ . Перша ж умова дає:

$$J_n(\sqrt{\lambda}R) = 0. \quad (Д.15)$$

Таким чином, задача відшукування власних функцій задачі (Д.6), (Д.7) звелася до знаходження нулів функції Бесселя. Відносно коренів трансцендентного рівняння справедливі наступні твердження:

1) *Всі корені рівняння (Д.15) є простими.*

2) *Трансцендентне рівняння (Д.15) має нескінченну множину коренів і всі вони є дійсними.*

Для доведення першого твердження припустимо супротивне: нехай  $\sqrt{\lambda_1}R = \nu_1$  є нулем рівняння (Д.15) кратності  $p \geq 2$ . Тоді  $J_n(\nu_1) = J'_n(\nu_1) = 0$ , тобто

$$W_n(\nu_1) = W'_n(\nu_1) = 0. \quad (Д.16)$$

На підставі теореми про єдиність розв'язку задачі Коші (Д.12), (Д.16) маємо  $W_n(\xi) \equiv 0$ , що суперечить умові. Нехай корені рівняння (Д.15) знайдені; позначимо їх через  $\nu_k = \sqrt{\lambda_k}R$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Тоді їм будуть відповідати власні функції

$$W_k(\xi) = Z_k(\rho) = c_1 J_n\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (Д.17)$$

крайової задачі (Д.10).

**Теорема.** *Власні функції крайової задачі (Д.10), які відповідають різним власним значенням  $\lambda_k$ , ортогональні з вагою  $\rho$  на відрізку  $[0, R]$ , тобто*

$$\int_0^R \rho J_n\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right) J_n\left(\frac{\nu_m}{R}\rho\right) ds = 0, \quad k \neq m. \quad (\text{Д.18})$$

**Доведення.** Із (Д.10) маємо:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{d\rho} (\rho Z'_k(\rho)) &= \left[ n^2 - \left(\frac{\nu_k}{R}\right)^2 \rho^2 \right] Z_k(\rho), \\ \rho \frac{d}{d\rho} (\rho Z'_m(\rho)) &= \left[ n^2 - \left(\frac{\nu_m}{R}\right)^2 \rho^2 \right] Z_m(\rho). \end{aligned}$$

Домножимо першу рівність на  $Z_m(\rho)$ , а другу — на  $Z_k(\rho)$ , а потім віднімемо почленно одну від другої і результат зінтегруємо в межах від 0 до  $R$ . Одержимо

$$\begin{aligned} \int_0^R \left[ Z_m(\rho) \frac{d}{d\rho} (\rho Z'_k(\rho)) - Z_k(\rho) \frac{d}{d\rho} (\rho Z'_m(\rho)) \right] d\rho &= \frac{1}{R^2} (\nu_m^2 - \nu_k^2) \times \\ &\times \int_0^R \rho Z_m(\rho) Z_k(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

або, взявши інтеграл зліва частинами і врахувавши, що  $Z_k(R) = Z_m(R) = 0$ , матимемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} (\nu_m^2 - \nu_k^2) \int_0^R \rho Z_m(\rho) Z_k(\rho) d\rho &= \rho [Z_m(\rho) Z'_k(\rho) - \\ &- Z_k(\rho) Z'_m(\rho)]_0^R = 0, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Підставивши (Д.7), (Д.9) в (Д.8) одержимо:

$$V_{n,k}(\rho, \varphi) = (a_{n,k} \cos n\varphi + b_{n,k} \sin n\varphi) J_n\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right), \quad (\text{Д.19})$$

де  $a_{n,k} = C_1 A_n$ ,  $b_{n,k} = C_2 B_n$ .

Очевидно, власні функції (Д.9) задачі (Д.6), (Д.7) є ортогональними з вагою  $\rho$ . Підставивши знайдені власні значення в рівняння (Д.5) і зінтегрувавши його, маємо

$$T_{n,k}(t) = c_3 \cos \frac{a\nu_k}{R} t + c_4 \sin \frac{a\nu_k}{R} t,$$

а отже, згідно з (Д.4) одержуємо

$$\begin{aligned} U_{n,k}(t, \rho, \varphi) &= \left( \bar{a}_{n,k} \cos \frac{a\nu_k t}{R} + \bar{b}_{n,k} \sin \frac{a\nu_k t}{R} \right) J_n\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right) \cos n\varphi + \\ &+ \left( \bar{\bar{a}}_{n,k} \cos \frac{a\nu_k t}{R} + \bar{\bar{b}}_{n,k} \sin \frac{a\nu_k t}{R} \right) J_n\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right) \sin n\varphi, \end{aligned}$$

де  $\bar{a}_{n,k} = c_3 a_{n,k}$ ,  $\bar{b}_{n,k} = c_4 a_{n,k}$ ,  $\bar{\bar{a}}_{n,k} = c_3 b_{n,k}$ ,  $\bar{\bar{b}}_{n,k} = c_4 b_{n,k}$ .

Розглянемо ряд

$$\begin{aligned}
U(t, \rho, \varphi) = & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \bar{a}_{n,k} \cos \frac{a\nu_k t}{R} + \bar{b}_{n,k} \sin \frac{a\nu_k t}{R} \right) J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \cos n\varphi + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \bar{\bar{a}}_{n,k} \cos \frac{a\nu_k t}{R} + \bar{\bar{b}}_{n,k} \sin \frac{a\nu_k t}{R} \right) J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \sin n\varphi
\end{aligned} \quad (\text{Д.20})$$

і припустимо, що в області  $\bar{B}$  він збігається рівномірно та в області  $B$  його можна почленно диференціювати двічі за  $t$ ,  $\rho$  і  $\varphi$ . Тоді він буде розв'язком рівняння (Д.1) і задовольнятиме крайову умову (Д.3). Виберемо коефіцієнти ряду (Д.20) таким чином, щоб його сума задовольняла і початкові умови (Д.2). Маємо:

$$\omega(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{a}_{n,k} \cos n\varphi + \bar{\bar{a}}_{n,k} \sin n\varphi] J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right), \quad (\text{Д.21})$$

$$\psi(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{b}_{n,k} \cos n\varphi + \bar{\bar{b}}_{n,k} \sin n\varphi] \frac{a\nu_k}{R} J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right).$$

Як відомо, довільна функція  $\Omega(\rho, \varphi)$ , неперервна разом з похідними до другого порядку включно, яка задовольняє крайову умову (Д.7), може бути розкладена в рівномірно збіжний ряд вигляду

$$\Omega(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_{n,k} \cos n\varphi + \beta_{n,k} \sin n\varphi] J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right), \quad (\text{Д.22})$$

де

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,k} = & \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \Omega(\rho, \varphi) \rho J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \cos n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho J_n^2 \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \cos^2 n\varphi \, d\rho \, d\varphi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\
\beta_{n,k} = & \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \Omega(\rho, \varphi) \rho J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \sin n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{\pi \int_0^R \rho J_n^2 \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \, d\rho}, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Отже, якщо  $\omega(\rho, \varphi)$  та  $\psi(\rho, \varphi)$  належать простору  $C^2(0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi < 2\pi)$ , то, порівнюючи ряди (Д.21) та (Д.22), матимемо:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{n,k} = & \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \omega(\rho, \varphi) \rho J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \cos n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho J_n^2 \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \cos^2 n\varphi \, d\rho \, d\varphi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\
\bar{\bar{a}}_{n,k} = & \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \omega(\rho, \varphi) \rho J_n \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \sin n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{\pi \int_0^R \rho J_n^2 \left( \frac{\nu_k}{R} \rho \right) \, d\rho}, \quad n = 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

$$\bar{b}_{n,k} = \frac{R \int_0^{2\pi} \int_0^R \psi(\rho, \varphi) \rho J_n\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right) \cos n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{a\nu_k \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho J_n^2\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right) \cos^2 n\varphi \, d\rho \, d\varphi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\bar{\bar{b}}_{n,k} = \frac{R \int_0^{2\pi} \int_0^R \psi(\rho, \varphi) \rho J_n\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right) \sin n\varphi \, d\rho \, d\varphi}{a\nu_k \pi \int_0^R \rho J_n^2\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right) \, d\rho}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (Д.20), одержимо шуканий розв'язок задачі (Д.1)–(Д.3).

## Д. 2 ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОТИ В НЕСКІНЧЕННОМУ ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРІ

Вивчимо процес розподілу тепла в нескінченному однорідному циліндрі радіусом  $R$ , якщо в початковий момент часу температура в кожній його точці залежить тільки від її віддалі  $\rho$  до осі циліндра, а температура на бічній його поверхні є сталою і рівною  $U_0$ .

Оскільки в початковий момент часу і на краю температура циліндра не залежить від  $z$  (вісь  $Oz$  напрямлена вздовж осі циліндра), то очевидно, що і в майбутньому температура  $U$  залежатиме тільки від часу  $t$  і  $\rho$ , тобто  $U = U(t, \rho)$ . Тоді, перейшовши у рівнянні теплопровідності до циліндричних координат і врахувавши, що функція не залежить від  $\varphi$  і  $z$ , одержимо

$$U_t(t, \rho) = a^2 (U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_\rho), \quad t > 0, \quad 0 \leq \rho < R. \quad (\text{Д.23})$$

Рівняння (Д.23) є рівнянням радіального розподілу тепла в циліндрі. Початкова умова запишеться у вигляді

$$U(0, \rho) = \varphi(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad (\text{Д.24})$$

де  $\varphi(\rho)$  — задана функція, а згідно з умовою на поверхні циліндра маємо

$$U(t, R) = U_0, \quad t \geq 0. \quad (\text{Д.25})$$

Введенням нової функції  $V(t, \rho) = U(t, \rho) - U_0$  мішана задача (Д.23)–(Д.25) зводиться до задачі з однорідною крайовою умовою, тому не зменшуючи загальності майбутніх міркувань будемо вважати, що  $U_0 = 0$ .

Для побудови розв'язку задачі (Д.23)–(Д.25) застосуємо метод Фур'є. Поклавши

$$U(t, \rho) = T(t) \cdot V(\rho)$$

і відокремивши змінні в рівнянні (Д.23) та крайовій умові (Д.25), одержимо:

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (\text{Д.26})$$

$$\begin{cases} V''(\rho) + \rho^{-1}V'(\rho) + \lambda V(\rho) = 0, \\ V(R) = 0, \quad |V(0)| < \infty. \end{cases} \quad (\text{Д.27})$$

Рівняння (Д.27) є частинним випадком рівняння (Д.12). Отже, враховуючи вимогу обмеженості розв'язку рівняння (Д.27), всякий його розв'язок можна подати у вигляді

$$V(\rho) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}\rho), \quad (\text{Д.29})$$

де  $c_1$  — довільна стала, а

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

— функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Унаслідок крайової умови (Д.28) маємо

$$J_0(\sqrt{\lambda}R) = 0. \quad (\text{Д.30})$$

Таким чином, власними значеннями задачі (Д.27), (Д.28) є величини  $\lambda_k = \left(\frac{\nu_k}{R}\right)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , де  $\nu_k$  — нулі функції Бесселя нульового порядку. Підставивши знайдені власні значення в рівняння (Д.26) і зінтегрувавши його, одержимо

$$T(t) = c_2 e^{-\left(\frac{\nu_k a}{R}\right)^2 t}.$$

Отже, кожному власному числу  $\lambda_k$  відповідає нетривіальний розв'язок рівняння (Д.23), який задовольняє крайову умову (Д.25):

$$U_k(t, \rho) = A_k e^{-\left(\frac{\nu_k a}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\nu_k}{R} \rho\right), \quad A_k = c_1 \cdot c_2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Розглянемо ряд

$$U(t, \rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\nu_k a}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\nu_k}{R} \rho\right) \quad (\text{Д.31})$$

і припустимо, що він збігається рівномірно в області  $\bar{B} = \{(t, \rho) \mid t \geq 0, 0 \leq \rho \leq R\}$  і його можна почленно диференціювати один раз за  $t$  і двічі за  $\rho$  в  $B$ .

Виберемо довільні сталі  $A_k$  таким чином, щоб ряд (Д.31), задовольняв і початкову умову (Д.24). Маємо

$$\varphi(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\nu_k}{R} \rho\right).$$

Беручи до уваги ортогональність функцій  $J_0\left(\frac{\nu_k}{R} \rho\right)$  на відрізку  $[0, R]$ , із попередньої рівності знаходимо коефіцієнти  $A_k$ :

$$A_k = \frac{\int_0^R \rho \varphi(\rho) J_0\left(\frac{\nu_k}{R} \rho\right) d\rho}{\int_0^R \rho J_0^2\left(\frac{\nu_k}{R} \rho\right) d\rho}. \quad (\text{Д.32})$$

Підставивши (Д.32) в ряд (Д.31), одержимо за наших припущень розв'язок задачі (Д.23)–(Д.25).

**Вправа.** Розв'язати сформульовану задачу при умові, що бічна поверхня циліндра теплоізолювана.

### Д. 3 ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОТИ В ОДНОРІДНІЙ КУЛІ

Ще одним прикладом просторової задачі для рівняння теплопровідності може бути процес розподілу тепла в однорідній кулі. Будемо вважати, що початкова температура точок кулі залежить тільки від їх віддалі  $\rho$  від центру кулі, а бічна її поверхня теплоізолювана. Очевидно, що в цьому випадку температура кулі в довільний момент часу в

довільній її точці залежатиме тільки від часу  $t$  і віддалі  $\rho$ . Тому, переходячи в однорідному рівнянні теплопровідності до сферичних координат з початком в центрі кулі, одержимо:

$$U_t(t, \rho) = a^2 (U_{\rho\rho} + 2\rho^{-1}U_\rho), \quad t > 0, \quad 0 < \rho < R. \quad (\text{Д.33})$$

Початкова та крайові умови запишуться у вигляді:

$$U(0, R) = \varphi(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad (\text{Д.34})$$

$$U_\rho(t, R) = 0, \quad |U(t, 0)| < \infty, \quad t \geq 0. \quad (\text{Д.35})$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (Д.33)–(Д.35) вводимо нову невідому функцію

$$V(t, \rho) = \rho U(t, \rho). \quad (\text{Д.36})$$

Маємо:

$$V_t = \rho U_t, \quad V_\rho = U(t, \rho) + \rho U_\rho(t, \rho), \quad V_{\rho\rho} = \rho U_{\rho\rho} + 2U_\rho.$$

Підставивши знайдені похідні в (Д.33)–(Д.35), одержимо:

$$V_t(t, \rho) = a^2 V_{\rho\rho}(t, \rho), \quad t > 0, \quad 0 < \rho < R, \quad (\text{Д.37})$$

$$V(0, \rho) = \rho \varphi(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad (\text{Д.38})$$

$$V(t, 0) = 0, \quad V_\rho(t, R) - \frac{1}{R}V(t, R) = 0, \quad t \geq 0. \quad (\text{Д.39})$$

Задача (Д.37)–(Д.39) є задачею розподілу тепла в однорідному стержні довжини  $R$  з теплоізолюваною бічною поверхнею. Застосувавши до неї метод Фур'є, матимемо:

$$V(t, \rho) = a_0 \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} \sin \frac{\mu_n}{R} \rho, \quad (\text{Д.40})$$

де  $\mu_n$  — додатні корені трансцендентного рівняння

$$\mu_n = tg \mu_n. \quad (\text{Д.41})$$

Якщо ряд (Д.40) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати один раз за  $t$  і двічі за  $\rho$  в розглядуваній області, то згідно з доведеною в п. 2.17 лемою 2.1 сума його також буде розв'язком рівняння (Д.37) і задовольнятиме крайові умови (Д.39).

Виходячи з початкової умови (Д.38), маємо:

$$\rho \varphi(\rho) = a_0 \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\mu_n}{R} \rho. \quad (\text{Д.42})$$

Із (Д.42), беручи до уваги ортогональність унаслідок (Д.41) системи функцій  $\{\rho, \sin \frac{\mu_n}{R} \rho\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , на відрізку  $[0, R]$ , знаходимо:

$$a_0 = \frac{3}{R^3} \int_0^R \rho^2 \varphi(\rho) d\rho, \quad a_n = \frac{4\mu_n}{R(2\mu_n - \sin 2\mu_n)} \int_0^R \rho \varphi(\rho) \sin \frac{\mu_n}{R} \rho d\rho.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (Д.40) та врахувавши підстановку (Д.36), остаточно матимемо

$$U(t, \rho) = \frac{3}{R^3} \int_0^R \rho^2 \varphi(\rho) d\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\mu_n \rho^{-1}}{R(2\mu_n - \sin 2\mu_n)} \times \\ \times \int_0^R \rho \varphi(\rho) \sin \frac{\mu_n}{R} \rho d\rho e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} \sin \frac{\mu_n}{R} \rho.$$



## Д. 4 ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ КАМЕРТОНА

Раніше було розглянуто ряд методів побудови розв'язків різних задач для диференціальних рівнянь другого порядку. Покажемо, що метод відокремлення змінних може бути з успіхом використаний і для дослідження фізичних процесів, які приводять до рівнянь четвертого порядку. Для прикладу розглянемо вільні поперечні коливання тонкого однорідного прямокутного стержня довжини  $l$ , нерухомо закріпленого на одному кінці й вільного на другому, якщо в початковий момент часу відхилення і швидкість точок стержня відповідно були рівними  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$ .

Як уже відзначалося, рівняння вільних поперечних коливань стержня має вигляд:

$$u_{tt}(t, x) + a^2 u_{xxxx}(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0, l). \quad (\text{Д.43})$$

У початковий момент часу маємо

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (\text{Д.44})$$

Будемо вважати, що лівий кінець нерухомо закріплений. Це означає, що відхилення лівого кінця і дотична до профілю стержня в точці  $x = 0$  рівні нулеві, тобто

$$u(t, 0) = 0, \quad u_x(t, 0) = 0, \quad t \geq 0. \quad (\text{Д.45})$$

На вільному кінці будуть рівні нулеві повний згинний момент  $M$  і тангенціальна сила  $F(t, x)$  тобто

$$M = -EYU_{xx}(t, l) = 0, \quad F(t, l) = -EYU_{xxx}(t, l) = 0, \quad t \geq 0 \quad (\text{Д.46})$$

де  $E$  — модуль пружності матеріалу стержня,  $Y = \frac{bh^3}{12}$ ,  $b$  — ширина,  $h$  — висота стержня.

Зауважимо, що сформульована задача про коливання тонкого прямокутного стержня еквівалентна задачі про власні коливання камертона.

Розв'язуємо мішану задачу (Д.43)–(Д.46) методом Фур'є, покладаючи

$$u(t, x) = T(t) \cdot X(x) \neq 0 \quad (\text{Д.47})$$

Відокремивши змінні в рівнянні (Д.49) та крайових умовах (Д.45), (Д.46), дістанемо

$$X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X'(0) = 0, \quad X''(l) = X'''(l) = 0, \quad (\text{Д.48})$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (\text{Д.49})$$

Як і у випадку задачі Штурма–Ліувіля для рівняння коливання струни (див. п. 2.17), легко переконатись, що власні значення задачі (Д.48) є дійсними додатними числами, а власні функції, які відповідають різним власним значенням, є ортогональними на відрізку  $[0, l]$ . Отже, загальний розв'язок рівняння задачі (Д.48) запишеться у вигляді

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt[4]{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt[4]{\lambda} x + c_3 ch \sqrt[4]{\lambda} x + c_4 sh \sqrt[4]{\lambda} x.$$

На підставі крайових умов тієї ж самої задачі маємо

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0, \\ c_2 + c_4 = 0, \\ c_1 \cos \sqrt[4]{\lambda} l + c_2 \sin \sqrt[4]{\lambda} l - c_3 ch \sqrt[4]{\lambda} l - c_4 sh \sqrt[4]{\lambda} l = 0, \\ c_1 \sin \sqrt[4]{\lambda} l - c_2 \cos \sqrt[4]{\lambda} l + c_3 sh \sqrt[4]{\lambda} l + c_4 ch \sqrt[4]{\lambda} l = 0. \end{cases} \quad (\text{Д.50})$$

Побудована система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $c_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) має ненульові розв'язки, якщо її детермінант рівний нулеві, тобто

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos \mu & \sin \mu & -ch\mu & -sh\mu \\ \sin \mu & -\cos \mu & sh\mu & ch\mu \end{vmatrix} =$$

$$= sh^2\mu - \sin^2\mu - ch^2\mu - \cos^2\mu - 2ch\mu \cos\mu = 0, \quad \mu = \sqrt[4]{\lambda}l.$$

Оскільки  $ch^2x - sh^2x = 1$ , то попереднє рівняння запишеться у вигляді

$$ch\mu \cos\mu = -1. \quad (Д.51)$$

Отже, власними значеннями задачі (Д.48) будуть числа  $\lambda_n = l^{-4}\mu_n^4$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , де  $\mu_n$  — додатні розв'язки трансцендентного рівняння (Д.51). Із системи (Д.50) маємо:

$$c_1 = -c_3, \quad c_2 = -c_4, \quad c_2 = \frac{\sin\mu_n - sh\mu_n}{\cos\mu_n + ch\mu_n}c_1.$$

Таким чином, відповідні власні функції мають вигляд:

$$\begin{aligned} X_n(x) = c_1 & \left[ \cos \frac{\mu_n}{l}x - ch \frac{\mu_n}{l}x + \frac{\sin\mu_n - sh\mu_n}{\cos\mu_n + ch\mu_n} \times \right. \\ & \left. \times \left( \sin \frac{\mu_n}{l}x - sh \frac{\mu_n}{l}x \right) \right] \end{aligned} \quad (Д.52)$$

Із рівняння (Д.49) одержуємо:

$$T_n(t) = c_5 \cos \frac{\mu_n^2 a}{l^2}t + c_6 \sin \frac{\mu_n^2}{l^2}t. \quad (Д.53)$$

Підставляючи (Д.52), (Д.53) у (Д.49) та просумувавши всі одержані ненульові розв'язки рівняння (Д.43), матимемо

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\mu_n^2 a}{l^2}t + b_n \sin \frac{\mu_n^2 a}{l^2}t \right) \bar{X}_n(x), \quad (Д.54)$$

де  $a_n = c_1 \cdot c_5$ ,  $b_n = c_1 \cdot c_6$ ,  $X_n = c_1 \bar{X}_n(x)$ .

Із початкових умов

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{X}_n(x), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \mu_n^2 a}{l} \bar{X}_n(x),$$

звідки, на підставі ортогональності власних функцій (Д.52), знаходимо коефіцієнти  $a_n$  і  $b_n$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\int_0^l \varphi(\xi) \bar{X}_n(\xi) d\xi}{\int_0^l \bar{X}_n^2(\xi) d\xi}, \\ b_n &= \frac{l \int_0^l \psi(\xi) \bar{X}_n(\xi) d\xi}{a \mu_n^2 \int_0^l \bar{X}_n^2(\xi) d\xi}. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (Д.54), одержимо шуканий розв'язок мішаної задачі (Д.43)–(Д.46). Неважко показати: якщо функції  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  є досить гладкими і задовольняють умовам узгодженості з крайовими умовами (Д.45), (Д.46), то одержаний ряд буде збігатися рівномірно при  $t \geq 0$  і  $x \in [0, l]$ , причому його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і чотири рази за  $x$ .

Відмітимо одну характерну властивість для процесу вільних коливань камертона. З ряду (Д.54) випливає, що частоти власних коливань камертона дорівнюють  $\omega_n = \frac{\mu_n^2 a}{l^2} = \frac{\mu_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EY}{\rho S}}$ , де  $S$  — площа поперечного перерізу, а отже

$$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{\mu_{n+1}^2}{\mu_n^2}.$$

Графічним методом легко знайти корені рівняння (Д.52):

$$\mu_1 = 1,875, \quad \mu_2 = 4,694, \quad \mu_3 = 7,854, \quad \mu_4 = 10,997.$$

Отже,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 6,267, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = 17,548, \quad \frac{\omega_4}{\omega_1} \approx 34.$$

Бачимо, що другий власний тон вищий за основний більш ніж на дві з половиною октави, тобто вищий за шосту гармоніку струни при однаковому основному тоні, а третя власна частота вища за основний тон більш ніж на чотири октави і т. д. Якщо, наприклад, камертон має основну частоту, рівну 440 коливанням за секунду (нота «ля» першої октави), то наступна власна частота камертона буде рівна 2757,5 коливань за секунду (ноти «мі» та «фа» четвертої октави мають частоти відповідно 2637,3 і 2794 коливань за секунду), третя ж власна частота рівна 7721,1 коливань за секунду, і вона виходить за межі шкали музичальних звуків. Все це і пояснює той факт, що з часом після збурення камертона шляхом удару він видає чистий звук основного тону, оскільки вищі гармоніки швидко загасають.

## Д. 5 МАЛІ ПРОГИНИ ПОПЕРЕЧНО НАВАНТАЖЕНОЇ ПЛАСТИНКИ

Для ілюстрації застосування методу відокремлення змінних до побудови розв'язків крайових задач у випадку рівнянь еліптичного типу вищого порядку, дослідимо малі прогини однорідної прямокутної пластинки зі сторонами  $b$  і  $c$ , яка знаходиться під дією нормального до її поверхні навантаження інтенсивності  $q = \text{const}$ . Будемо вважати, що на краях пластинка вільно оперта.

Малий в порівнянні з товщиною пластинки прогин  $U(x, y)$ , як відомо, повинен бути розв'язком крайової задачі

$$\Delta\Delta U \equiv U_{xxxx} + 2U_{xxyy} + U_{yyyy} = \frac{q}{D}, \quad x \in (0, b), \quad y \in (0, c), \quad (\text{Д.55})$$

$$U(0, y) = U(b, y) = U_{xx}(0, y) = U_{xx}(b, y) = 0, \quad y \in [0, c], \quad (\text{Д.56})$$

$$U(x, 0) = U(x, c) = U_{yy}(x, 0) = U_{yy}(x, c) = 0, \quad x \in [0, b], \quad (\text{Д.57})$$

де  $D$  — жорсткість пластинки при згині.

Шукаємо розв'язок крайової задачі (Д.55)–(Д.57) у вигляді

$$U(x, y) = Z(x, y) + V(y), \quad (\text{Д.58})$$

де  $V(y)$  — деякий частинний розв'язок рівняння (Д.55), який задовольняє крайові умови (Д.57).

За  $V(y)$  візьмемо поліном 4-го степеня

$$V(y) = c_0 y^4 + c_1 y^3 + c_2 y^2 + c_3 y + c_4, \quad (\text{Д.59})$$

де коефіцієнти  $c_i$  ( $i = \overline{0,4}$ ) вибираємо таким чином, щоб функція (Д.59) задовольняла вищевказані умови. Маємо:

$$\begin{cases} 24c_0 = \frac{q}{D}, \\ c_4 = 0, \quad c_0 c^4 + c_1 c^3 + c_2 c^2 + c_3 c + c_4 = 0, \\ 2c_2 = 0, \quad 12c_0 c^2 + 6c_1 c + 2c_2 = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо

$$c_0 = \frac{q}{24D}, \quad c_2 = c_4 = 0, \quad c_1 = -\frac{qc}{12D}, \quad c_3 = \frac{qc^3}{24D},$$

тобто

$$V(y) = \frac{q}{24D}(y^4 - 2cy^3 + c^3y). \quad (\text{Д.60})$$

Підставивши (Д.58) в крайову задачу (Д.55)–(Д.57), одержимо:

$$\Delta\Delta Z(x, y) = 0, \quad (\text{Д.61})$$

$$Z(0, y) = Z(b, y) = -V(y), \quad Z_{xx}(0, y) = Z_{xx}(b, y) = 0, \quad y \in [0, c], \quad (\text{Д.62})$$

$$Z(x, 0) = Z(x, c) = Z_{yy}(x, 0) = Z_{yy}(x, c) = 0, \quad x \in [0, b]. \quad (\text{Д.63})$$

Позначимо

$$\Delta Z(x, y) = W(x, y). \quad (\text{Д.64})$$

Тоді на підставі (Д.61)–(Д.63) для визначення функції  $W(x, y)$  потрібно розв'язати задачу:

$$\Delta W(x, y) = 0, \quad x \in (0, b), \quad y \in (0, c), \quad (\text{Д.65})$$

$$W(x, 0) = W(x, c) = 0, \quad W(0, y) = W(b, y) = -V''(y). \quad (\text{Д.65})$$

Застосувавши до задачі (Д.65), (Д.66) метод Фур'є, одержимо

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n ch \frac{\pi n}{c} x + b_n sh \frac{\pi n}{c} x \right] \sin \frac{\pi n}{c} y,$$

де коефіцієнти  $a_n$  та  $b_n$  визначаються за формулами

$$a_n = \frac{2}{c} \left( \frac{\pi n}{c} \right)^2 \int_0^c V(y) \sin \frac{\pi n}{c} y dy = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4q}{cD} \left( \frac{c}{\pi n} \right)^3, & n = 2k - 1, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1 - ch \frac{\pi n}{c} b}{sh \frac{\pi n}{c} b} a_n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а отже,

$$W(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4q}{cD} \left( \frac{c}{\pi(2k-1)} \right)^3 \left[ ch \frac{\pi(2k-1)}{c} x + \right.$$

$$+ \frac{1 - ch \frac{\pi(2k-1)}{c} b}{sh \frac{\pi(2k-1)}{c} b} sh \frac{\pi(2k-1)}{c} x \left] \sin \frac{\pi(2k-1)}{c} y.$$

Позначимо:  $\alpha_k = \frac{\pi(2k-1)}{c}$ ,  $\beta_k = \frac{1 - ch \alpha_k b}{sh \alpha_k b}$ ,  $\omega_k = \frac{4qc^2}{D\pi^3(2k-1)^3}$ .

Тоді попередня рівність запишеться у вигляді

$$W(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k [ch \alpha_k x + \beta_k sh \alpha_k x] \sin \alpha_k y. \quad (Д.67)$$

Підставивши (Д.67) у (Д.64) і зінтегрувавши добуте рівняння за умов

$$Z(0, y) = Z(b, y) = -V(y), \quad Z(x, 0) = Z(x, c) = 0,$$

матимемо:

$$Z(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{2\alpha_k^2} \left\{ (2 - \alpha_k \beta_k x) ch \alpha_k x + \left[ th \frac{\alpha_k b}{2} \left( \frac{\alpha_k b}{sh \alpha_k b} - 2 \right) - \alpha_k x \right] sh \alpha_k x \right\} \sin \alpha_k y.$$

Функції  $Z(x, y)$  та  $V(y)$  визначені, а отже на підставі (Д.58) дістаємо розв'язок поставленої крайової задачі (Д.55)–(Д.57).

Зазначимо, що з методу побудови розв'язку крайової задачі (Д.55)–(Д.57) випливає його єдиність.

◇ **Зауваження 5.2.** У випадку, коли край пластинки нерухомо закріплений, тобто коли виконуються умови

$$U|_{\substack{x=0 \\ x=b}} = U|_{\substack{y=0 \\ y=c}} = U_x|_{\substack{x=0 \\ x=b}} = U_y|_{\substack{y=0 \\ y=c}} = 0, \quad (Д.68)$$

застосувати вищенаведений метод до побудови розв'язку крайової задачі (Д.55), (Д.68) не можна.

## Д. 6 ПЛОСКІ ХВИЛІ. ДИСПЕРСІЯ ХВИЛЬ

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами гіперболічного типу

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + cu(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (Д.69)$$

1. Припустимо, що  $c = 0$ . Розв'язки рівняння (Д.69) шукатимемо у вигляді

$$u(t, x) = f(bt + \langle \bar{\xi}, x \rangle), \quad (Д.70)$$

де  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $\langle \bar{\xi}, x \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ .

У зв'язку з тим, що:

а) при фіксованому  $t = t_0$  поверхні рівня  $u(t_0, x) = const$  є площинами  $bt_0 + \langle \bar{\xi}, x \rangle = const$ , перпендикулярними до векторова  $\bar{\xi}$ ;

б) за різних значень  $t = t_0, t_1$  функція  $u(t_1, x)$  відрізняється від  $u(t_0, x)$  зсувом на вектор  $-\left|\bar{\xi}\right|^{-2} \bar{\xi} b(t_1 - t_0)$

$$(u(t_0, x + \bar{\xi} \left|\bar{\xi}\right|^{-2} b(t_1 - t_0))) = f(bt_0 + \langle \bar{\xi}, x + \bar{\xi} \left|\bar{\xi}\right|^{-2} b(t_1 - t_0) \rangle) =$$

$$= f(bt_0 + \langle \xi, x \rangle + \langle \xi, \xi \rangle |\bar{\xi}|^{-2} b(t_1 - t_0)) = f(bt_1 + \langle \xi, x \rangle) = u(t_1, x),$$

то функція (Д.70) називається *плоскою хвилею*, яка рухається вздовж напрямку вектора  $-\bar{\xi}$  зі швидкістю  $v = |\bar{\xi}|^{-1} b$ .

Вираз  $bt + \langle \xi, x \rangle$  називається *фазою хвилі* (Д.70) а  $f$  — *формою хвилі*. Якщо  $b = 0$ , то хвиля (Д.70) називається *стоячою*.

Знайдемо умови, які повинні задовольняти  $b$  і вектор  $\bar{\xi}$ , щоб функція (Д.70) була розв'язком рівняння (Д.69) при  $c = 0$ . Заради цього підставимо (Д.70) у (Д.69). Дістанемо:

$$f''(bt + \langle \xi, x \rangle) b^2 = a^2 f''(bt + \langle \xi, x \rangle) \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Вважаючи, що  $f''(Q) \neq 0$ , маємо

$$b^2 = a^2 |\bar{\xi}|^2. \quad (\text{Д.71})$$

Розв'язками цього рівняння є вектори  $\bar{N} = (\bar{\xi}, b) \in E_{n+1}$ , які лежать на конусі  $K$  в  $E_{n+1}$ , основою якого є сфера  $|\bar{\xi}| = ba^{-1}$ .

► **Означення 5.4.** Вектор  $\bar{N} = (\bar{\xi}, b) \in E_{n+1}$ ,  $\bar{N} \neq 0$ , який задовольняє рівняння (Д.71), називається **характеристичною нормаллю хвильового рівняння** (Д.69).

Гіперплощина  $N^\perp = \{(t, x) \in E_{n+1} | bt + \langle \xi, x \rangle = \text{const}\}$ , перпендикулярна до деякої характеристичної нормалі  $\bar{N}$ , називається *характеристичною гіперплощиною хвильового рівняння* (Д.69).

Гіперповерхня в  $E_{n+1}$  називається *характеристичною*, якщо в кожній точці її дотична гіперплощина є характеристичною.

На підставі характеристичного рівняння (Д.71) швидкість поширення всіх плоских хвиль, які задовольняють рівняння (Д.69), дорівнює  $a$ :

$$v^2 = \frac{b^2}{|\xi|^2} = a^2. \quad (\text{Д.72})$$

Справедливе й обернене твердження. Для довільного  $\bar{N} \in E_{n+1}$ , який задовольняє (Д.71), плоска хвиля (Д.70) є розв'язком рівняння (Д.69) за довільної функції  $f(bt + \langle \xi, x \rangle)$ . В окремому випадку  $f(bt + \langle \xi, x \rangle)$  може бути й розривною (або швидкозмінною) в деякій точці, наприклад при  $bt + \langle \xi, x \rangle = 2$ . Тоді розв'язок (Д.70) буде мати той самий розрив уздовж всієї гіперплощини в  $E_{n+1}$  ( $\xi \neq 0$ ):

$$bt + \langle \xi, x \rangle = 2. \quad (\text{Д.73})$$

За фіксованого  $t$  цей розрив розміщений на площині в  $E_n$  з рівнянням (Д.73). Ця площина рухається із зростанням  $t$  у напрямі перпендикулярного їй вектора  $-\bar{\xi}$ , зі швидкістю  $v = a = b |\bar{\xi}|^{-1}$ .

Звідси можна зробити висновок:

1) довільна характеристична гіперплощина може бути поверхнею розриву розв'язку рівняння (Д.69) при  $c = 0$ ;

2) усі плоскі хвилі й розриви цих хвиль, які задовольняють рівняння (Д.69) при  $c = 0$ , поширюються зі швидкістю  $a$  у напрямі вектора  $-\bar{\xi}$  без спотворення (хвиля без дисперсії).

Зазначимо, що з формулою (Д.72) пов'язане відкриття електромагнітної природи світла і спеціальної теорії відносності. Так, із рівнянь електродинаміки Д. К. Максвел (1831–1879) вивів, що потенціали електромагнітного поля задовольняють хвильове рівняння

$$u_{tt}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z),$$

де  $a^2 = (\varepsilon\mu)^{-1}$ ,  $\varepsilon$  і  $\mu$  — відповідно діелектрична та магнітна проникність вакууму. Останні величини знаходяться експериментально з чисто електромагнітних вимірювань. Після обчислення Максвелом швидкості поширення електромагнітних хвиль виявилось, що вона з великою точністю збігається зі швидкістю світла:  $a = (\varepsilon\mu)^{-1/2} \approx 299976$  км/с. Звідси Максвел зробив висновок, що світло має електромагнітну природу.

Другим відкриттям, пов'язаним із формулою (Д.72), є спеціальна теорія відносності.

Природно виникає запитання, якщо  $(\varepsilon\mu)^{-1/2}$  — швидкість світла, то в якій системі відліку? Відомо, що закони механіки справедливі в будь-якій інерційній системі відліку. Тому можна припустити, що й закони електродинаміки також справедливі в будь-якій інерційній системі. Але тоді швидкість світла також однакова у всіх цих системах. Проте така властивість швидкості суперечить механіці Ньютона. Отже, або рівняння Максвела справедливі тільки в деякій вибраній системі відліку, пов'язаній з так званим "нерухомим ефіром" або закони механіки Ньютона неточні. Саме для з'ясування цього питання А. Майкельсон і Е. Морлі поставили в 1887 р. свій знаменитий експеримент і підтвердили тотожність швидкості світла в різних інерційних системах відліку, а отже, відсутність "нерухомого ефіру" і неточність ньютонівської механіки (при великих швидкостях). Необхідне уточнення законів механіки згодом дав А. Ейнштейн.

2. Розглянемо диференціальне рівняння (Д.69), коли  $c \neq 0$ . Якщо  $u(t, x) = f(bt + \langle \xi, x \rangle)$  — плоска хвиля для рівняння (Д.69), то ми відразу дістаємо для заданих  $\xi$  і  $b$  рівняння

$$f''(bt + \langle \xi, x \rangle)(a^2 |\bar{\xi}|^2 - b^2) + f(bt + \langle \xi, x \rangle) c = 0. \quad (\text{Д.74})$$

Отже, в цьому разі функція  $f(bt + \langle \xi, x \rangle)$  не може бути довільною — вона повинна бути розв'язком рівняння (Д.74). Очевидно, що для швидкості  $v = a$ , тобто для  $a^2 |\bar{\xi}|^2 = b^2$ , уже не існує біжучої плоскої хвилі. Але для інших швидкостей і для довільного напрямку можливі форми хвиль визначаються із рівняння (Д.74) і є показниковими функціями. У зв'язку з цим напрям руху хвилі і її швидкість, яка відповідає рівнянню (Д.69), можуть задаватися довільним чином (за винятком  $v = a$ ), але при цьому можливі тільки спеціальні форми плоских хвиль. З фізичних міркувань виключаються із розгляду розв'язки, які не є рівномірно обмеженими функціями в просторі. На підставі інтегралу Фур'є та беручи до уваги, що

$$\begin{aligned} f(bt - \langle \xi, x \rangle) &= f(v |\bar{\xi}| t - \langle e, x \rangle |\bar{\xi}|) = \\ &= f((vt - \langle e, x \rangle) |\bar{\xi}|) = g(vt - \langle e, x \rangle), \end{aligned}$$

де  $g(Q) = f(Q |\bar{\xi}|)$ ;  $\bar{e} = -\bar{\xi} |\bar{\xi}|^{-1}$ ,  $|\bar{e}| = 1$ ;  $Q = vT - \langle e, x \rangle$ , маємо:

$$g(vt - \langle e, x \rangle) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{ik\tau} d\tau \right) e^{-ki(vt - \langle e, x \rangle)} dk,$$

тобто хвиля довільної форми може бути зображена як суперпозиція гармонічних хвиль вигляду

$$u_k(t, x) = e^{-ik(vt - \langle e, x \rangle)}, \quad (\text{Д.75})$$

де  $\beta = kv$  — частота.

Функції (Д.75) повинні бути розв'язками рівняння (Д.69), отже,

$$-\beta^2 = -a^2 k^2 + c,$$

тобто

$$k = \pm \frac{1}{a} \sqrt{c + \beta^2}$$

і гармонічні коливання (Д.75) матимуть фазову швидкість, яка залежатиме від частоти  $\beta$ , що дорівнює

$$v = \frac{\beta}{k} = \frac{a\beta}{\sqrt{c + \beta^2}}.$$

Отже,

$$u_k(t, x) = e^{-\frac{i}{a}\sqrt{c+\beta^2}} \left( \frac{a\beta}{\sqrt{c+\beta^2}} t - \langle e, x \rangle \right). \quad (\text{Д.76})$$

Оскільки розв'язок рівняння (Д.69) — це суперпозиція хвиль вигляду (Д.76), які поширюються в одному й тому самому напрямі, причому всі ці хвилі мають форму, яка задовольняє рівняння (Д.75), то різні компоненти поширюються з різними швидкостями; отже, форма складової хвилі  $u(t, x)$  змінюватиметься з часом  $t$  і хвильовий процес при своєму поширенні буде спотворюватися (хвилі з дисперсією). Кажуть: якщо фазова швидкість гармонічних хвиль залежить від частоти, то рівняння (Д.69) описує явище дисперсії.

Очевидно, що якщо рівняння (Д.69) не допускає розв'язків у вигляді хвиль довільної форми, то має місце дисперсія хвиль. Доданок  $cu(t, x)$  в рівнянні (Д.69) іноді називають *дисперсійним членом*.

Для прикладу розглянемо телеграфне рівняння, яке описує електричні коливання в провідниках

$$u_{xx}(t, x) - LCu_{tt} - (RC + LG)u_t(t, x) - RGu(t, x) = 0, \quad (\text{Д.77})$$

де  $C$  — ємність,  $R$  — омичний опір;  $L$  — індуктивність;  $G$  — втрата ізоляції. Всі ці величини розраховані на одиницю довжини провідника. Позначимо  $b = RC + LG$ ,  $d = RG$ ,  $a^2 = (LG)^{-1}$  і введемо нову невідому функцію

$$v(t, x) = u(t, x) e^{0,5a^2bt}. \quad (\text{Д.78})$$

Тоді рівняння (Д.77) запишеться у вигляді

$$a^2v_{xx}(t, x) - v_{xx}(t, x) + cv(t, x) = 0, \quad (\text{Д.79})$$

де  $c = \frac{a^2}{4}(a^2b^2 - 4d) = \frac{a^4}{4}(b^2 - 4\frac{d}{a^2}) = \frac{a^4}{4}(RC - LG)^2$ .

Отже, на підставі попередніх міркувань при виконанні умови

$$RC = LG \Rightarrow c = 0 \quad (\text{Д.80})$$

рівняння (Д.79) буде мати хвилі без дисперсії, і внаслідок (Д.78) рівняння (Д.77) має хвилі без дисперсії зі згасанням вигляду

$$u(t, x) = e^{-Kt} f(x - at), \quad u(t, x) = e^{-Kt} f(-x - at),$$

де  $K = 0,5 \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)$ .

Коли коефіцієнти рівняння (Д.77), які характеризують провідник, задовольняють умову (Д.80), то в провіднику хвилі довільної форми поширюються без спотворення і можуть лише затухати. Але це затухання в пункті прийому хвиль-сигналів завжди можна компенсувати за рахунок їх підсилення, тим самим можна точно відновити сигнали, які передаються по провіднику. Ця обставина має дуже важливе значення в галузі телефонного зв'язку і при передаванні сигналів по кабелях на великі відстані.

Зауважимо нарешті, що рівняння (Д.69) при  $c = 0$  можуть мати, крім плоских хвиль, хвилі інших форм. Наприклад, якщо  $n = 3$ , характеристиками для рівняння (Д.69) будуть також поверхні

$$r - at = \text{const}, \quad -r - a = \text{const},$$

де  $r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x_{i,0})^2}$ ,  $(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$  — фіксована точка, а функції

$u = \frac{1}{4\pi r} f(r - at)$ ,  $u = \frac{1}{4\pi r} f(-r - at)$  — хвилі без дисперсії із затуханням для рівняння (Д.69) при  $n = 3$  і  $c = 0$ . Ці хвилі називаються *сферичними*.



## Д. 7 ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Наприкінці XVII ст. потреби практики, пов'язані з розвитком суспільних відносин і обумовлені технічним прогресом у всіх галузях людської діяльності, поставили перед вченими математиками ряд нових задач, розв'язання яких вимагало розробку принципово нових методів.

У таких історичних умовах приблизно з 1700 р. починається бурхливий розвиток диференціального та інтегрального числення (праці І. Ньютона (1643-1727) та Г.В. Лейбніца (1646-1710)).

Вивчення проблем динаміки твердого тіла, а також деяких геометричних задач методами диференціального та інтегрального числення призвело до виділення простіших класів ДРЧП другого порядку.

Однією з таких проблем була задача про коливання струни. Зацікавився нею ще Г. Галілей (1564-1642), але тільки англійський математик Брук Тейлор (1685-1713) зробив перші кроки до її математичного розв'язання (1715). Якщо передати в символах диференціального числення встановлений ним закон оберненої пропорційності прискорення точки струни за малих поперечних коливань і радіуса кривини струни в тій самій точці, то можна сказати, що він прийшов до відомого рівняння

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_{tt} = 0 \quad (a - \text{const}).$$

Припускаючи, що струна коливається як єдине ціле, Тейлор звів задачу до двох звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і для струни, закріпленої на кінцях, показав, що в довільний момент часу вона має форму синусоїди.

Ж.Л. Д'Аламбер (1717-1783), записавши рівняння струни у вигляді

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

у 1749 р. знайшов загальний розв'язок останнього у формі

$$u(t, x) = f_1(x - t) + f_2(x + t),$$

де  $f_1$  і  $f_2$  — довільні функції своїх аргументів.

Аналіз Д'Аламбера не був повним, оскільки для нього не були ясними умови, які повинні бути включені в саме формулювання проблеми. Д'Аламбер враховував тільки так звані крайові умови.

Л. Ейлер (1707-1783) у 1750 р. показав, що коливання струни буде цілком визначене, якщо поряд з крайовими умовами задати положення й швидкість руху точок струни в початковий момент часу. Отже, Ейлер завершив аналітичну розробку методу характеристик Д'Аламбера (методу поширення хвиль), хоча геометрична картина явища коливання струни не була розглянута обома вченими.

У цей же час у 1753 р. новий підхід до розв'язання вказаної проблеми запропонував Даниїл Бернуллі (1700-1782) (з 1725 по 1733 рр. працював в Петербурзькій АН). Спираючись на чисто фізичні міркування й на підставі того, що звучання струни створюється основним тоном і нескінченною множиною обертонів, він прийшов до висновку, що коливання струни складаються ніби із нескінченної множини коливань різних її частин, сполучених між собою у вузлах. Тому форма струни утворюється шляхом накладання синусоїд, що відповідають різним обертонам, періоди яких зменшуються обернено пропорціонально натуральним числам, а розв'язок задачі має вигляд

$$y = c_1 \sin \frac{\pi x}{a} + c_2 \sin \frac{2\pi x}{a} + c_3 \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots \quad (c_i - \text{const}).$$

Отже, Бернуллі прийшов до відкриття в математичній фізиці фундаментального принципу накладання лінійних коливань і методу розв'язання рівнянь з частинними похідними, відомого тепер під назвою методу Ж. Фур'є (1768-1830) або методу відокремлення змінних.

Незадовго до Бернуллі Ейлер також знайшов розв'язок рівняння струни для одного окремого випадку у вигляді тригонометричного ряду.

Праці Ейлера і Бернуллі про подання розв'язку рівняння коливання струни у вигляді тригонометричного ряду мали важливе значення для подальшого розвитку рівнянь математичної фізики і математики взагалі.

Ці дослідження привели до того, що перед математиками XVIII ст. виникло принципове питання про природу інтегралів рівнянь з частинними похідними і про подання довільних функцій у вигляді тригонометричних рядів. З цього питання між Ейлером і Бернуллі розгорнулася дискусія, в якій взяли участь інші великі вчені: Ж.Л. Лагранж (1736-1813), П.С. Лаплас (1749-1827) і Д'Аламбер.

У 1787 р. Петербурзька Академія наук оголосила конкурс з дискусійного питання і в 1793 р. присудила премію Л. Арбогасту (1759-1803) за його працю "Мемуари про природу довільних функцій, які входять в інтеграли рівнянь з частинними диференціалами" (1791).

До ДРЧП вищих порядків приводили й інші задачі природознавства (гідродинамічні дослідження Д'Аламбера та Ейлера, дослідження Лапласа гравітаційного поля в 1782 р., що привело його до рівняння вигляду  $\Delta u = 0$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ , названого його ім'ям, дослідження Ейлера проблеми коливання мембрани і т. д.). Але математики XVIII ст. не досліджували загальні питання теорії таких рівнянь. В цьому напрямі суттєвими були дослідження Ейлера (1770) зі зведення лінійних рівнянь другого порядку до деяких канонічних форм за допомогою заміни змінних. Так, рівняння  $z_{yy} = a^2 z_{xx}$  підстановкою  $\xi = x + ay$ ,  $\eta = x - ay$  він звів до рівняння  $z_{\xi\eta} = 0$ , звідки відразу дістав загальний інтеграл у вигляді

$$z = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x + ay) + f_2(x - ay).$$

Розглядаючи коливання круглої мембрани, Ейлер у 1766 р. отримав рівняння

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \right) u = 0 \quad (\alpha, \beta - const),$$

яке пізніше було назване *рівнянням циліндричних функцій*, а розв'язок його зобразив у вигляді нескінченного ряду, який тільки на сталий множник відрізняється від циліндричної функції  $J_\beta(\alpha r)$ . Окремий випадок цієї функції відомий ще з 1738 р., коли Бернуллі досліджував коливання важких ланцюгів.

Перші спроби побудови методів інтегрування широкого класу ДРЧП зробив Лаплас (1777, 1782). Так, для рівняння  $z_{xy} + az_x + bz_y + cz = 0$ , де  $a, b, c$  — задані функції незалежних змінних, він запропонував так званий метод каскадів, який іноді дає змогу одержати загальний інтеграл за допомогою квадратур.

З погляду застосувань і впливу на подальший розвиток рівнянь математичної фізики надзвичайно важливими були дослідження Ейлера над згином призматичних стержнів: при визначенні критичної сили, під впливом якої стискуваний з обох кінців стержень втрачає стійкість і миттю вигинається. Важливість цієї задачі (з погляду практики) з'ясовано значно пізніше — в другій половині XIX ст., коли аварії при будівництві мостів та інших споруд примусили згадати "незвичайні" дослідження видатного математика. В дослідженнях Лапласа вперше зустрічаємо розв'язання задач для рівнянь, залежних від параметрів, причому значення цього параметру (критичної сили) є шуканою величиною. Власне кажучи, це була перша поява винятково важливої математичної задачі, яка ввійшла в літературу значно пізніше під назвою *задачі Штурма-Ліувеля*. Ця задача й зараз привертає пильну увагу сучасних математиків і фізиків, особливо в задачах квантової механіки.

Взагалі для XVIII ст. характерним є поява великої кількості блискучих результатів у різних розділах математики та її застосувань. Усе нові й нові цікаві задачі змушували математиків розширювати своє поле діяльності. Для того часу характерним був відомий заклик Д'Аламбера: «Ідіть вперед, впевненість прийде до Вас пізніше». І ця впевненість справді прийшла, але вже в XIX ст.

Перша чверть XIX ст. була переломним періодом у розвитку всієї математики. Перш за все докорінно перебудувався сам фундамент математичного аналізу: дано сучасне визначення границі, нескінченно малої, неперервності функції, диференціала, визначеного інтеграла тощо. Поняття функції вперше набуло сучасного характеру. Великий внесок, у розвиток математичного аналізу в цей період зробили О.Л. Коші (1789-1857), К.Ф. Гаус (1777-1855), Б.Больцано (1781-1848), П.Г.Л. Діріхле (1805-1859), М.І.Лобачевський (1792-1856), Г.Ф.Б.Ріман (1826-1866), К.Т.В.Вейерштрасс (1815-1897), М.В.Остроградський (1801-1862) та ін.

Вказана реформа математичного аналізу і нові блискучі відкриття у фізиці та інших областях внесли нові ідеї і в теорію рівнянь математичної фізики.

У 1821 р. К.Л.М.А.Нав'є (1785-1836) виводить диференціальні рівняння руху нестисливої рідини (рівняння Нав'є-Стокса), а також рівняння пружності для тривимірного простору.

У 1822 р. Фур'є вперше розв'язав рівняння теплопровідності

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

при різних крайових умовах у вигляді тригонометричного ряду. При цьому він заново вивів знайдені ще Ейлером в 1798 р. формули коефіцієнтів таких рядів і показав, що функції досить широкого класу, в тому числі визначені на різних проміжках різними аналітичними виразами, тобто за Ейлером "розривні", можуть бути подані на довільному скінченному проміжку тригонометричним рядом, тобто аналітично. Цим самим показана неправомірність Ейлерового розуміння "неперервності" функції дійсного аргументу і значною мірою виправдана точка зору Бернуллі. Перші достатні умови розкладання функції в тригонометричні ряди були строго дані Діріхле в 1829 р. і Лобачевським у 1834 р.

Вагомий внесок у розвиток рівнянь математичної фізики зробив французький математик С.Д.Пуассон (1781-1840) — почесний член Петербурзької АН (1826). Його праці стосувалися майже всіх розділів математичної фізики: так, у "Зауваженнях про рівняння теорії притягання" (1813) він вивів відоме рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -4\pi\rho.$$

Він розв'язав багато задач електростатики та магнетостатики. У 1829 р. Пуассон поклав початок теорії девіації. В його дослідженнях важливе місце займають праці з зовнішньої балістики і гідромеханіки, теорії пружності і т. д.

Одним із центральних розділів математичної фізики XIX ст. була так звана теорія потенціалу. Перші результати з цієї теорії знаходимо у праці Дж.Гріна (1793-1841) "Досвід і застосування математичного аналізу до теорії електрики і магнетизму", яка була опублікована в 1828 р. У цій же маловідомій до перевидання (1845) книзі вперше розглядається окремий випадок функції, пов'язаної з аналітичним зображенням розв'язків крайових задач математичної фізики (функція Гріна).

У тому ж 1828 р. Остроградський опублікував працю "Замітки про теорію теплоти", в якій довів відому формулу, яка пов'язує інтеграл по об'єму з інтегралом по поверхні (формула Остроградського-Гауса). Ця формула широко використовується в різних розділах ДРЧП. Зазначимо, що Остроградському належать вагомні результати щодо знаходження розв'язку задачі Коші та мішаних задач для рівняння теплопровідності; він запропонував метод відшукування інтегралів рівнянь звукових коливань газу, рівнянь коливань пружних пластинок тощо.

Теорія потенціалу набула розвитку у праці Гауса "Загальні теореми, що стосуються сил притягання та відштовхування, які діють обернено пропорційно квадратам відстані"(1840).

Зазначимо, що у XIX ст. в теорії ДРЧП набули важливого значення питання існування та єдиності розв'язку відповідних задач. Ініціатива в цьому питанні належала Коші, який у своїх лекціях (1820-1830) дав доведення існування й єдиності розв'язку звичайного диференціального рівняння  $y' = f(x, y)$ . при початкових умовах  $y(x_0) = y_0$ .

У 1874 р, російський математик С.В. Ковалевська (1850 – 1891) довела теорему про існування аналітичних розв'язків задачі Коші для систем ДРЧП. Ковалевська навела й неочікуваний для її сучасників приклад рівняння, яке не задовольняло умови теореми і яке не мало аналітичного розв'язку. Ця теорема розкриває глибокі внутрішні закономірності, властиві розв'язкам систем ДРЧП: вона дала ключ для введення класифікації систем ДРЧП та поняття характеристики.

Теореми існування мали важливе значення для побудови наближеного розв'язку ДРЧП і були покладені в основу різних методів їх інтегрування, які розроблялись у XIX ст.

Важливі результати щодо розв'язання задачі Коші для конкретних типів рівнянь математичної фізики добули Г.Ф.Б. Ріман (1826 – 1866), В. Вольтерра (1860 – 1940), Г.Р.Кірхгоф (1824 –1887), Ж. Адамар (1865 –1963) та ін.

Дослідження математиків XIX ст. з теорії ДРЧП, в тому числі чудові результати Остроградського, були базою для цілої серії праць російських вчених кінця XIX ст. і початку XX ст. Особливе значення мають результати акад. О. М. Ляпунова (1857 – 1918) з теорії потенціалу та його учня акад. В.А. Стеклова (1864 – 1926) з електростатики та гідродинаміки, а також з теорії теплопровідності, де він застосував метод замкненості, який носить його ім'я. Стеклов досяг значних успіхів і у розв'язанні проблеми Штурма–Ліувіля про власні значення і власні функції (Ляпунов був представником Петербурзької математичної школи, яка була створена П.Л. Чебишовим (1821 –1894)).

Важливою подією в історії розвитку диференціальних рівнянь у розглядуваний період було створення якісної теорії. Основоположниками якісної теорії диференціальних рівнянь були А. Пуанкаре (1854 – 1912) і Ляпунов. Праці Пуанкаре і Ляпунова зі стійкості мали величезне значення для всього наступного розвитку теорії диференціальних рівнянь і її застосувань до вивчення коливань різних фізичних і механічних систем.

Загальна якісна теорія так званих динамічних систем розроблялася багатьма вченими, наприклад з 1912 р. Дж. Біркгофом (1884 – 1944).

Дослідженнями про існування й аналітичність розв'язків широкого класу ДРЧП так званого еліптичного типу з 1904 р. займався вчений–математик С.Н. Бернштейн (1880 – 1968).

Глибокі й важливі за своїми наслідками є дослідження М.В. Келдиша (1911 – 1978) і М.О. Лаврентьєва (1900 – 1980) про стійкість розв'язку задачі Діріхле, з теорії коливань, аеродинаміки, теорії хвиль на поверхні важкої рідини тощо, дослідження С.Л. Соболева (1908–1989) і І.Г. Петровського (1901 – 1973) про залежність розв'язку мішаних задач від початкових і крайових умов. Соболев розробив новий метод інтегрування ДРЧП як лінійних, так і нелінійних, ввів ряд нових понять: узагальнена функція, узагальнена похідна, узагальнений розв'язок ДРЧП, узагальнений диференціальний оператор та ін.

А.М. Тихонов (1906–1993) тісно пов'язав теорію рівнянь теплопровідності з актуальними питаннями фізики та геофізики. Частина його праць присвячена доведенню теорем існування для різних типів ДРЧП за допомогою топологічного принципу нерухокої точки.

Новий метод (метод функціонально інваріантних розв'язків) інтегрування деяких задач теорії поширення хвиль в пружних середовищах з плоскими межами розробили В.І. Смирнов (1887 – 1974) та Соболев.

Праці М.Є. Жуковського (1847 – 1921) і С.О. Чаплигіна (1869 – 1942) з аеродинаміки та авіації, гідрографії і гідравліки (тиск повітряної течії на крило літака) сприяли створенню теорії граничних задач аналітичних функцій і сингулярних інтегральних рівнянь.

Важливі результати в цьому напрямі було отримано математиками І. І. Приваловим (1891 – 1941), М. І. Мусхелішвілі (1891 – 1976), Келдишем, Л. І. Сєдовим (1907–1999), Ф. Д. Гаховим (1906–1980), І. Н. Векуа (1907 – 1977). Зазначимо, що в розробці граничних задач теорії аналітичних функцій і сингулярних рівнянь з самого початку брали участь Д. Гільберт (1862 – 1943), Пуанкаре, А. Е. Негер (1882 – 1935) та ін.

У 1923 р. італійський математик Ф.Д. Трікомі сформулював і частково дослідив зовсім нову крайову задачу для так званого рівняння Трікомі  $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ . Згодом з'ясувалося, що ця задача відіграє важливу роль в газовій динаміці. Значних успіхів у розв'язанні цієї задачі за останні роки досягнуто в працях Лаврентьєва, А.В. Біцадзе (1916–1994), К.І. Бабенко (1919–1987) та ін.

Більшість задач теорії ДРЧП в замкненому вигляді проінтегрувати неможливо, тому розробка наближених методів їх розв'язання відіграє особливу роль.

Не зупиняючись на характеристиці багаточисельних наближених методів теорії ДРЧП та аналізі наукових результатів, одержаних в цьому напрямі, назвемо тільки праці І.Г. Бубнова (1872 – 1919), Б.Г. Гальоркіна (1871 – 1945) (метод Бубнова-Гальоркіна), Келдиша, Г.І. Петрова (1912–1987), О.М. Крилова (1863–1945), Л.В. Канторовича (1912–1986), І.Г. Петровського, Л.А. Люстерника (1899 – 1981), О.О. Ладиженської (1922–2004), Ш.Ю. Мікеладзе (1895–1976), Тихонова, М.М. Боголюбова (1909–1992), О.А. Самарського (1919–2008), Ю.О. Митропольського (1917–2008) та багатьох інших вчених.

Постійний розвиток математичної фізики зумовлений її тісним зв'язком з фундаментальними напрямками досліджень у суміжних областях природничих наук.

Наведений коротенький історичний огляд теорії ДРЧП, зрозуміло, не може дати уявлення про все багатство змісту праць вітчизняних і зарубіжних математиків у різних сферах рівнянь математичної фізики. Але й він показує всю ширину розмаху їх наукової творчості в цій області, оригінальність проблематики та значення їх відкриттів як для науки, так і для її практичних застосувань.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
2. *Вірченко Н. О.* Основні методи розв'язання задач математичної фізики. — К.: КПШ, 1997. — 370 с.
3. *Годунок С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979. — 392 с.
4. *Гончаренко В. М.* Основы теории рівнянь з частинними похідними. — К.: Вища шк., 1995. — 352 с.
5. *Кошляков С. Н., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высш. шк., 1970. — 710 с.
6. *Мартинсон Л. К., Магов Ю. И.* Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГТУ им. Баймана, 2002. — 368 с.
7. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высш. шк., 1977. — 432 с.
8. *Ожунев Л. Я.* Вища алгебра. — К.: Наук. думка, 1950. — 250 с.
9. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961. — 300 с.
10. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. — М.: Высш. шк., 1964. — 560 с.
11. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Дифференціальні рівняння в задачах. — К.: Либідь, 2003. — 504 с.
12. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Дифференціальні рівняння. — К.: Либідь, 2003. — 600 с.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 4 т. — М.: Наука, 1981. — Т. 1. — 656 с.; Т. 4. — 550 с.
14. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975. — 128 с.
15. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 444 с.
16. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. — М.: Наука, 1983. — 432 с.
17. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 468 с.
18. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 724 с.

## Зміст

	Стор.
<b>ВСТУП</b> .....	3
<b>ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ</b> .....	5
<b>Розділ 1 КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ</b>	<b>7</b>
1.1 Основні поняття й означення теорії ДРЧП .....	7
1.2 Класифікація ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними .....	9
1.3 Зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними .....	12
1.4 Класифікація та зведення до канонічного вигляду квазіліній- них ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними	20
1.5 Класифікація ДРЧП вищого порядку .....	23
<b>Розділ 2 РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ</b>	<b>26</b>
2.1 Коливання струни .....	26
2.2 Хвильові процеси в дво- й тривимірному середовищах .....	29
2.3 Вільні коливання нескінченної струни. Метод характеристик (метод поширення хвиль) .....	31
2.4 Вимушені коливання нескінченної струни .....	47
2.5 Задача Коші для хвильового рівняння в просторі. Формула Кірхгофа .....	49
2.6 Задача Коші для рівняння вільних коливань мембрани. Формула Пуассона .....	54
2.7 Теорема про єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння .....	62
2.8 Коректність постановки задачі Коші .....	65
2.9 Загальна постановка задачі Коші .....	67
2.10 Постановка задачі Гурса .....	71
2.11 Метод послідовних наближень для задачі Гурса .....	72
2.12 Метод Рімана .....	76
2.13 Задачі Дарбу для рівняння коливання струни .....	82
2.14 Задача Коші з даними на гіперплощині. Перетворення Лоренца .....	85
2.15 Постановка мішаних задач .....	92
2.16 Метод характеристик .....	95
2.17 Вільні коливання скінченної струни. Метод відокремлення змінних (Метод Фур'є) .....	108
2.18 Вимушені коливання скінченної струни .....	116
2.19 Мішані задачі з стаціонарними неоднорідностями .....	119
2.20 Загальна схема методу відокремлення змінних .....	120

2.21	Вільні коливання прямокутної мембрани. Метод відокремлення змінних . . . . .	138
2.22	Єдиність розв'язку мішаних задач. Інтеграл енергії . . . . .	148
2.23	Неперервна залежність розв'язку мішаних задач від вихідних даних . . . . .	152
<b>Розділ 3 РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ</b>		<b>159</b>
3.1	Рівняння дифузії . . . . .	161
3.2	Принцип максимуму для розв'язків однорідного рівняння теплопроводності . . . . .	164
3.3	Постановка мішаних задач . . . . .	167
3.4	Єдиність розв'язку мішаних задач і його неперервна залежність від початкової та крайових умов . . . . .	169
3.5	Інтегрування першої мішаної задачі для рівняння теплопроводності у випадку одновимірного простору. Метод Фур'є . . . . .	171
3.6	Постановка задачі Коші та єдиність її розв'язку . . . . .	175
3.7	Існування розв'язку задачі Коші . . . . .	176
3.8	Фізична інтерпретація фундаментального розв'язку (3. 56) однорідного рівняння теплопроводності та формули Пуассона (3.55) . . . . .	183
3.9	Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкової температури та інтенсивності внутрішніх джерел тепла . . . . .	185
3.10	Поширення тепла у напівнескінченному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею . . . . .	186
<b>Розділ 4 РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ</b>		<b>196</b>
4.1	Рівняння для потенціалу тяжіння . . . . .	196
4.2	Потенціальний потік нестисливої рідини . . . . .	198
4.3	Стаціонарне теплове поле. Постановка крайових задач для рівнянь еліптичного типу . . . . .	199
4.4	Оператор Лапласа у сферичних і циліндричних координатах . . . . .	202
4.5	Принцип максимуму та його наслідки . . . . .	203
4.6	Існування розв'язку задачі Діріхле для круга. Метод Фур'є . . . . .	209
4.7	Інтеграл Пуассона . . . . .	214
4.8	Формула Гріна . . . . .	218
4.9	Основна формула теорії гармонічних функцій . . . . .	220



4.10	Теорема Гарнака про послідовності гармонічних функцій та теорема Ліувіля . . . . .	225
4.11	Функція Гріна оператора Лапласа . . . . .	228
4.12	Інтегрування задачі Діріхле для кулі. Формула Пуассона . . . . .	232
4.13	Деякі наслідки формул Пуассона . . . . .	240
4.14	Друга крайова задача для рівнянь еліптичного типу . . . . .	243
4.15	Розв'язки внутрішньої та зовнішньої задач Неймана для кулі . . . . .	245
4.16	Потенціал об'єму простого й подвійного шарів. Основні означення . . . . .	248
4.17	Об'ємний потенціал . . . . .	251
4.18	Потенціал подвійного шару . . . . .	258
4.19	Потенціал простого шару . . . . .	268
4.20	Нормальна похідна потенціалу простого шару . . . . .	269
4.21	Логарифмічний потенціал . . . . .	273
4.22	Зведення крайових задач для рівнянь еліптичного типу до інтегральних рівнянь . . . . .	276
<b>Розділ 5 НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ</b>		<b>285</b>
5.1	Структурні властивості розв'язків деяких класів нелінійних ДРЧП . . . . .	286
5.2	Деякі прості приклади . . . . .	288
5.3	Рівняння мішаного типу . . . . .	291
5.4	Теорія нелінійної теплопровідності . . . . .	297
5.5	Задача Стефана про фазовий перехід . . . . .	299
5.6	Поширення теплових збурень в нелінійних середовищах . . . . .	303
5.7	Просторова локалізація теплових збурень . . . . .	308
5.8	Задача нелінійної теплопровідності з об'ємним поглинанням . . . . .	312
5.9	Рівняння типу "реакція–дифузія" . . . . .	316
5.10	Метод Рунге (метод прямих) . . . . .	322
5.11	Двосторонній метод наближеного інтегрування мішаних задач . . . . .	326
5.12	Асимптотичні методи дослідження нелінійних ДРЧП . . . . .	331
<b>Додатки</b> . . . . .		<b>340</b>
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ</b> . . . . .		<b>360</b>