МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ДЕЯКІ ГРАФІЧНІ ТА АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

методичні рекомендації для студентів спеціальностей
«Початкова освіта» та «Середня освіта»

УЖГОРОД – 2021

Деякі графічні та аналітичні методи розв’язування задач з параметрами: методичні рекомендації для студентів спеціальностей «Початкова освіта» та «Середня освіта» / М.М. Повідайчик, А.М. Тегза, М.П. Шулла, Е.О. Карбованець – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2021. – 31 с.

Рецензенти:

Козубовська І.В., д.п.н., професор, завідувач кафедри загальної педагогіки та педагогіки вищої школи;

Сігетій І.П., к.п.н., старший викладач кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій Закарпатського інституту післядипломної педагогічної освіти

Розглянуто і схвалено науково-методичною комісією ФМЦТ УжНУ.
Протокол №7 від 24.05.2021 р.

Рекомендовано до друку Вченою радою ФМЦТ УжНУ.
Протокол №10 від 30.06.2021 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Особливістю задач із параметрами є те, що вони охоплюють усі теми шкільної математики, тому є унікальним засобом для систематизації й узагальнення навчальних досягнень учнів. Для розв'язування задач з параметрами передбачається наявність досить високого рівня абстрагування та алгоритмізації, що у свою чергу, розвиває навички евристичних, дослідницьких прийомів роботи, культуру мислення, ініціативу, творчість, інтелектуальний розвиток особистості [1, 3, 13, 16].

В основі розв'язання задач із параметрами покладено такий принцип: значення параметра (або параметрів) вважається довільне фіксоване число. Проте наявність параметрів у задачі передбачає обов'язкове дослідження існування розв'язку залежно від конкретних числових значень параметрів із області їхніх допустимих значень, а також знаходження всіх таких розв'язків. Задача з параметром, таким чином, розглядаються як множина рівнянь, нерівностей або їх систем, які отримуються, коли параметри набувають конкретних значень. Форма запису відповідей у задачах з параметрами має спеціальний вигляд: розв'язки вказуються для кожного допустимого значення параметра.

Для розв'язання задачі з параметрами необхідні ґрунтовні знання властивостей елементарних функцій, рівносильних перетворень рівнянь та нерівностей. До задач з параметрами, можна віднести, наприклад, пошук розв'язків лінійних і квадратних рівнянь в загальному вигляді, дослідження кількості їх коренів в залежності від значення коефіцієнтів та ін.

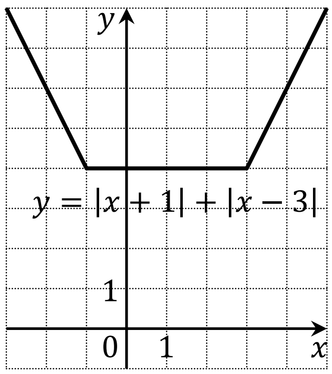
Серед методів розв'язування задач з параметрами можна виокремити аналітичний, графічний та методи, які базуються на деяких особливостях функцій, які наведені у завданні [3].

1. ГРАФІЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

У цьому розділі розглянуто розв'язування рівнянь, нерівностей та їхніх систем з використанням графіків. Серед переваг графічного методу є наочність та цілісне уявлення при дослідженні задачі на наявність та кількість розв'язків у залежності від значень параметра. До недоліків можна віднести часові затрати, необхідні для побудови графіків, а також обмеженість класу задач, які розглядаються, що пов'язане із застосуванням найпростіших функцій та їх графіків [4].

1.1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БАЗОВИХ ЗАДАЧ.

1.1.1. Користуючись рисунком, розв'яжіть параметричне рівняння $|x+1|+|x-3|=a$.



Розв'язання.

На рисунку зображено графік функції $y=|x+1|+|x-3|$. На основі рисунка бачимо, що при $a<4$ графіки функцій $y=a$ та $y=|x+1|+|x-3|$ не перетинаються.

Якщо $a=4$, то рівняння має множину розв'язків $x\in[-1;3]$.

Якщо $a>4$, то рівняння має 2 розв'язки, які належать інтервалам $(-\infty;-1)$ та $(3;+\infty)$.

$x\in(-\infty;-1)$:

$$-(x+1)-(x-3)=a;$$

$$x_1=\frac{2-a}{2};$$

$x\in(3;+\infty)$:

$$x+1+x-3=a;$$

$$x_2=\frac{a+2}{2}.$$

Відповідь:

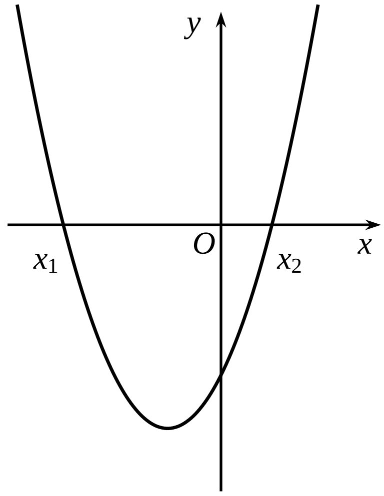
якщо $a<4$, то рівняння не має розв'язків;

якщо $a=4$, то $x\in[-1;3]$;

якщо $a>4$, то $x_1=\frac{2-a}{2}$, $x_2=\frac{a+2}{2}$.

1.1.2. Знайдіть значення параметра a, при якому розв'язками нерівності $x^2 + 2x + a \leq 0$ є проміжок довжиною 8.

Розв'язання. Розглянемо схематичний графік параболи $y = x^2 + 2x + a$ (див. рис.) та розв'язки нерівності на його основі.



Оскільки вітки параболи напрямлені вверх, то розв'язками нерівності буде проміжок $x \in [x_1; x_2]$, де x_1, x_2 – нулі параболи.

Виходячи з теореми Вієта та умови задачі, отримуємо систему рівнянь:

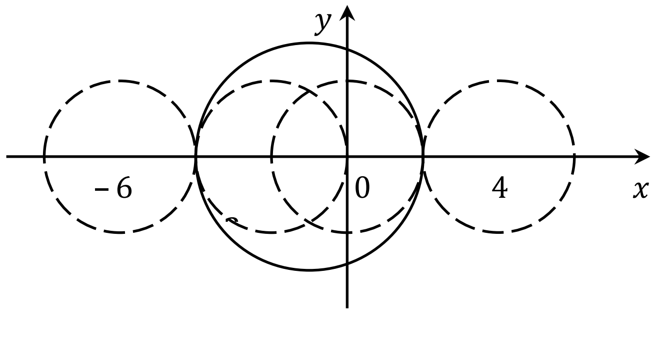
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2, \\ x_2 - x_1 = 8, \\ x_1 x_2 = a. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь отримуємо нулі параболи: $x_1 = -5, x_2 = 3$, а з третього – значення параметра $a = -15$.

Відповідь: $a = -15$.

1.1.3. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 9, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ має єдиний розв'язок. У відповідь запишіть їхню суму.

Розв'язання.



Розглянемо графіки ліній, які задаються рівняннями системи. Перша – це рівняння кола із центром у точці $(-1; 0)$ та радіусом 3, а друга – коло з центром у точці $(a; 0)$ та радіусом 2.

Отже, система буде мати єдиний розв'язок, якщо кола будуть дотикатися. Таких випадків 4 (див. рис.) при $a_1 = -6$, $a_2 = -2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 4$. У сумі маємо -4.

Відповідь: -4.

1.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОГО РІВНЯ СКЛАДНОСТІ.

1.2.1. (ЗНО-08) Задано функцію $f(x) = 3x^4 – 4x^3 – 12x^2$.

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції, екстремуми функції.

2. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$.

3. Знайдіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$, де $a \in \mathbb{R}$, залежно від значення параметра a.

Розв'язання.

1) Знайдемо критичні точки:

$$f'(x) = 12x^3 – 12x^2 – 24x;$$

$$12x^3 – 12x^2 – 24x = 0;$$

$$12(x + 1)x\big(x – 2\big) = 0;$$

$$x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 2;$$

Дослідимо функцію на проміжки зростання/спадання та точки екстремумів:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$x_{\min}$	↗	$x_{\max}$	↘	$x_{\min}$	↗

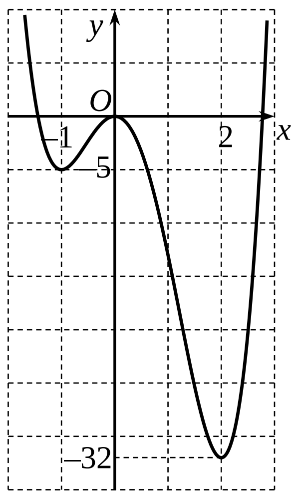
Отже, функція має три екстремуми:

$$f_{\min} = f(-1) = -5 \text{ – мінімум;}$$

$$f_{\max} = f(0) = 0 \text{ – максимум;}$$

$$f_{\min} = f(2) = -32 \text{ – мінімум.}$$

2) Будуємо ескіз графіка функції.



3) Кількість коренів рівняння $f(x) = a$, де $a \in \mathbb{R}$, залежно від значення параметра a, шукаємо на основі ескізу графіка функції:

якщо $a \in (-\infty; -32)$, то рівняння не має коренів;

якщо $a = -32$, то рівняння має 1 корінь;

якщо $a \in (-32; -5)$, то рівняння має 2 корені;

якщо $a = -5$, то рівняння має 3 корені;

якщо $a \in (-5; 0)$, то рівняння має 4 корені;

якщо $a = 0$, то рівняння має 3 корені;

якщо $a \in (0; +\infty)$, то рівняння має 2 корені.

1.2.2. (ЗНО-12) При якому *найменшому цілому* значенні параметра a рівняння $\sqrt{2x+13} \cdot \left(\sqrt{x^2+16x+64} - \sqrt{x^2-10x+25}\right) = a\sqrt{2x+13}$ має лише два різні корені?

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$2x + 13 \geq 0;$$

$$x \geq -6{,}5.$$

Отже, ОДЗ: $x \in [-6{,}5; +\infty)$.

Спростимо рівняння:

$$\sqrt{2x+13} \cdot \left(\sqrt{(x+8)^2} - \sqrt{(x-5)^2}\right) = a\sqrt{2x+13};$$

$$\sqrt{2x+13} \cdot (|x+8| - |x-5|) = a\sqrt{2x+13};$$

$$\sqrt{2x+13} \cdot (|x+8| - |x-5| - a) = 0;$$

1) $\sqrt{2x+13} = 0;$

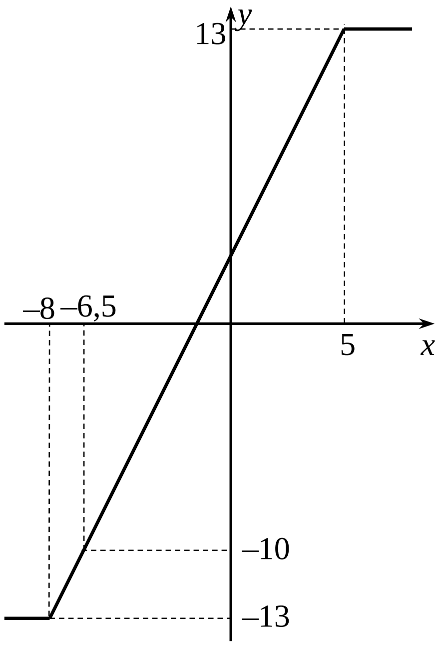
$x_1 = -6{,}5.$

2) $|x+8| - |x-5| - a = 0;$

$|x+8| - |x-5| = a.$

Отже, враховуючи ОДЗ та корінь $x_1 = -6{,}5$, задача зводиться до знаходження найменшого цілого значення параметра a, при якому рівняння (2) має 1 розв'язок, більший за $-6{,}5$. Для аналізу розв'язків рівняння (2) побудуємо графік функції $y = |x+8| - |x-5|$. Для цього розкриємо модулі:

$\begin{cases} x < -8, \\ y = -13; \end{cases}$ $\begin{cases} -8 \le x \le 5, \\ y = 2x + 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 5, \\ y = 13. \end{cases}$



На основі графіка робимо висновки, що рівняння $|x + 8| - |x - 5| = a$ має таку кількість розв'язків:

якщо $a \in (-\infty; -13)$, то рівняння не має коренів;

якщо $a = -13$, то рівняння має безліч коренів $x \in (-\infty; -8]$, але вони не належать ОДЗ;

якщо $a \in (-13; -10)$, то рівняння має 1 корінь, який не належить ОДЗ;

якщо $a = -10$, то рівняння (2) має розв'язок $x_2 = -6{,}5$, який співпадає з коренем рівняння (1);

якщо $a \in (-10; 13)$, то рівняння має 1 розв'язок, який більший за корінь рівняння (1);

якщо $a = 13$, то рівняння має безліч коренів $x \in [5; +\infty)$;

якщо $a \in (13; +\infty)$, то рівняння не має коренів.

Відповідь: -9.

1.2.3. (ЗНО-14) Знайдіть усі *від'ємні* значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} 2\sqrt{y^2 - 4y + 4} + 3|x| = 11 - y, \\ 25x^2 - 20ax = y^2 - 4a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок. Якщо таке значення одне, то запишіть його у відповіді. Якщо таких значень кілька, то у відповіді запишіть їхню *суму*.

Розв'язання. Оскільки $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2 \geq 0$, то ОДЗ системи рівнянь є $\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$ Спростимо систему:

$$\begin{cases} 2\sqrt{(y-2)^2} + 3|x| = 11 - y, \\ 25x^2 - 20ax + 4a^2 = y^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2|y-2| + 3|x| = 11 - y, \\ (5x - 2a)^2 = y^2. \end{cases}$$

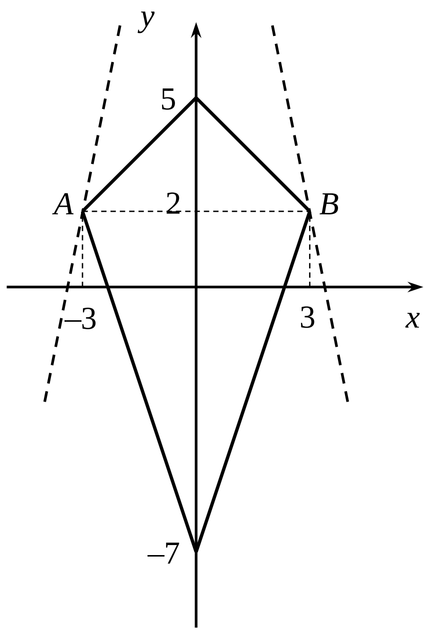
Зобразимо графік першого рівняння. Для цього розглянемо 4 випадки:

якщо $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 2, \end{cases}$ то $y = 5 - x$;

якщо $\begin{cases} x \geq 0, \\ y < 2, \end{cases}$ то $y = 3x - 7$;

якщо $\begin{cases} x < 0, \\ y \geq 2, \end{cases}$ то $y = 5 + x$;

якщо $\begin{cases} x < 0, \\ y < 2, \end{cases}$ то $y = -3x - 7$.



З другого рівняння системи отримуємо 2 випадки:

а) $y = 5x - 2a$; б) $y = 2a - 5x$.

В обох випадках графіками будуть прямі, які за умовою задачі, повинні перетинати графік першого рівняння в одній точці. Тому можна зробити такі висновки:

а) $A(-3; 2)$ – точка перетину;

$$2 = 5 \cdot (-3) - 2a;$$

$$a = -8{,}5;$$

б) $B(3; 2)$ – точка перетину;

$$2 = 2a - 5 \cdot 3;$$

$$a = 8{,}5.$$

Відповідь: $-8{,}5$.

2. АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСНОВНИХ ТИПІВ ЗАДАЧ

У цьому розділі розглянуто аналітичні методи розв'язування рівнянь, нерівностей та їхніх систем з параметром. У більшості такі методи використовують базові підходи розв'язування відповідних типів завдань. Проте, задачі з параметром вимагають аналізу випадків, коли рівняння чи нерівність втрачає зміст (наприклад, основою логарифма є 1), має порожню область визначення, змінює тип (наприклад, квадратне рівняння перетворюється у лінійне) та ін. [3].

2.1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БАЗОВИХ ЗАДАЧ.

2.1.1. Дано рівняння $-3x + 7 = ax$ з параметром a.

1) Розв'яжіть рівняння, якщо $a = \frac{1}{2}$.

2) Знайдіть розв'язки рівняння, в залежності від значення параметра a.

Розв'язання. 1) Якщо $a = \frac{1}{2}$, то

$$-3x + 7 = \frac{1}{2}x;$$

$$-3\frac{1}{2}x = -7;$$

$$x = 2.$$

2) Розв'яжемо рівняння, в залежності від значення параметра a.

$$-3x + 7 = ax;$$

$$(a + 3)x = 7.$$

Якщо $a = -3$, то рівняння розв'язків не має;

якщо $a \neq -3$, то рівняння має один розв'язок $x = \frac{7}{a+3}$.

Відповідь:

1) 2.

2) Якщо $a = -3$, то рівняння розв'язків не має;

якщо $a \neq -3$, то $x = \frac{7}{a+3}$.

2.1.2. Знайти найменше значення параметра a, при якому один із коренів рівняння $x^2 + ax + 32 = 0$ у два рази більший за другий.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2 – корені заданого рівняння. Тоді $x_1 = 2x_2$ та $x_1 \cdot x_2 = 32$ (за теоремою Вієта). Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ x_1 \cdot x_2 = 32. \end{cases}$$

Система має 2 розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = -4. \end{cases}$$

Знаходимо значення параметра a (за теоремою Вієта) для кожного розв'язку системи:

$$a_1 = -(x_1 + x_2) = -12 \qquad a_1 = -(x_1 + x_2) = 12$$

Отже, найменше значення параметра $a_1 = -12$.

Відповідь: -12.

2.1.3. Знайдіть значення параметра a, при якому рівняння $\frac{(x-2)(x+3)}{x-a} = 2$ має один розв'язок. У відповідь запишіть суму таких значень.

Розв'язання. Розглянемо такі випадки:

1) $a = 2$, тоді ОДЗ $x \neq 2$; $x = -1$ – рівняння має 1 розв'язок;

2) $a = -3$, тоді ОДЗ $x \neq -3$; $x = 4$ – рівняння має 1 розв'язок;

3) $a \neq -2, a \neq 3$, тоді ОДЗ $x \neq a$;

$$(x-2)(x+3) = 2(x-a);$$

$$x^2 - x + 2(a-3) = 0.$$

Дане рівняння може мати 1 розв'язок, якщо його дискримінант рівний 0:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2(a-3) = -8a + 25;$$

$$-8a + 25 = 0;\ a = 3{,}125.$$

Перевірка:

$$x^2 - x + 2(3{,}125 - 3) = 0;$$

$$x^2 - x + 0{,}25 = 0;$$

$x = 0{,}5 \in$ ОДЗ – рівняння має 1 розв’язок.

Отже, сумою значень a, при яких рівняння має 1 розв’язок є:

$$2 + (-3) + 3{,}125 = 2{,}125.$$

Відповідь: 2,125.

2.1.4. Дано систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + ay = 1, \\ -x + 3y = -5. \end{cases}$$

1) Вкажіть значення параметра a, при якому система не має розв’язку.

2) Розв’яжіть систему рівнянь при $a = 3$.

Розв’язання. 1) Задана система рівнянь не має розв’язку, якщо виконується співвідношення

$$\frac{2}{-1} = \frac{a}{3} \neq \frac{1}{-5}.$$

Отже, $a = -6$.

2) Якщо $a = 3$, то система рівнянь буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ -x + 3y = -5. \end{cases}$$

Додамо до першого рівняння друге, помножене на -1:

$$3x = 6;$$

$$x = 2.$$

Підставимо знайдене значення x у перше рівняння:

$$4 + 3y = 1;\ y = -1.$$

Відповідь:

1) -6.

2) $(2; -1)$.

2.1.5. Дано рівняння $ax^2 + 2ax + 2021 = 0$ з параметром a. Знайдіть значення параметра a, при якому рівняння

1) має рівно 1 розв’язок;

2) не має розв’язків.

Розв’язання.

1) Розглянемо 2 випадки:

а) $a = 0$;

$0x^2 + 0x + 2021 \neq 0$, отже, рівняння розв'язків не має.

б) $a \neq 0$;

$$D = 4 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot 2021;$$

рівняння має 1 розв'язок, якщо $D = 0$:

$$4a(a - 2021) = 0;$$

$$a_1 = 0 \notin (б); \qquad a_2 = 2021.$$

2) Аналогічно до (1) розглянемо 2 випадки:

а) $a = 0$ – рівняння розв'язків не має.

б) $a \neq 0$. У цьому випадку рівняння не має розв'язку, якщо $D < 0$:

$$4a(a - 2021) < 0;$$

$$a \in (0; 2021).$$

У відповідь записуємо об'єднання отриманих значень: $a \in [0; 2021)$.

Відповідь:

1) 2021.

2) $a \in [0; 2021)$.

2.2. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОГО РІВНЯ СКЛАДНОСТІ.

2.2.1. (ЗНО-12) При якому *найменшому* значенні *a* рівняння $\sqrt{x - 2 + 2\sqrt{x-3}} + (15 - 2a)\sqrt[4]{x-3} + 25 = 4a$ має хоча б один корінь?

Розв’язання. Зробимо спрощення:

$$\sqrt{x - 3 + 2\sqrt{x-3} + 1} - (2a - 15)\sqrt[4]{x-3} + 25 - 4a = 0;$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2}-(2a-15)\sqrt[4]{x-3}+25-4a=0;$$

$$\left|\left(\sqrt{x-3}+1\right)\right|-(2a-15)\sqrt[4]{x-3}+25-4a=0;$$

$$\sqrt{x-3}+1-(2a-15)\sqrt[4]{x-3}+25-4a=0;$$

$$\sqrt{x-3}-(2a-15)\sqrt[4]{x-3}+26-4a=0.$$

Отже, ОДЗ $x \geq 3$. Зробимо заміну $y=\sqrt[4]{x-3}$:

$$y^2-(2a-15)y+2(13-2a)=0.$$

За теоремою, оберненою до т. Вієта:

$$y_1=-2;$$

$$\sqrt[4]{x-3}=-2;$$

$$y \in \emptyset.$$

$$y_2=2a-13;$$

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x-3}=2a-13,\\ 2a-13 \geq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=(2a-13)^4+3,\\ a \geq 6{,}5.\end{cases}$$

Отже, a=6,5 – найменше значення, при якому рівняння має розв’язки.

Відповідь: 6,5.

2.2.2. (ЗНО-17) Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}|x-y|=|x-a|,\\ \lg(y-a)=\lg(4a^2+x-x^2)\end{cases}$$

залежно від значень параметра a.

Розв’язання.

Розглянемо два випадки:

а) $x-y=x-a$;

$y=a$ – не задовольняє область допустимих значень другого рівняння системи;

б) $x-y=-(x-a)$;

$y=2x-a$.

Підставимо у друге рівняння системи:

$$\lg(2x-a-a)=\lg(4a^2+x-x^2);$$

$$\begin{cases}2x-2a=4a^2+x-x^2,\\ 2x-2a>0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+x-2a\cdot(1+2a)=0,\\ x-a>0.\end{cases}$$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$$x_1 = 2a;\ x_2 = -1 - 2a.$$

б$_1$) $\begin{cases} x = 2a, \\ x - a > 0; \end{cases}$ $a > 0$.

Отже, при $a > 0$ початкова система рівнянь має розв'язок $\begin{cases} x = 2a, \\ y = 3a. \end{cases}$

б$_2$) $\begin{cases} x = -1 - 2a, \\ x - a > 0; \end{cases}$ $a < -\frac{1}{3}$.

Отже, при $a < -\frac{1}{3}$ початкова система рівнянь має розв'язок $\begin{cases} x = -1 - 2a, \\ y = -2 - 5a. \end{cases}$

Відповідь:

$(-1 - 2a; -2 - 5a)$, якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$;

нема розв'язків, якщо $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$;

$(2a; 3a)$, якщо $a \in (0; +\infty)$.

2.2.3. (ЗНО-21) Задано систему рівнянь $\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1, \end{cases}$ де x, y – змінні, a – довільна стала.

1. Розв'яжіть систему, якщо $a = 0$.

2. Визначте всі розв'язки заданої системи залежно від значень a.

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y \in [0; +\infty). \end{cases}$

1. Якщо $a = 0$, то

$$\begin{cases} 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1. \end{cases}$$

З першого рівняння

$$4^{1+\sqrt{y}} = 8;\ 2^{2+2\sqrt{y}} = 2^3;\ 2 + 2\sqrt{y} = 3;\ \sqrt{y} = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{4}.$$

Підставимо у друге рівняння

$$x + 2 \cdot 4^{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1;\ x + 2 \cdot 2^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1;\ x = -3.$$

Отже, система має розв’язок $\left(-3; \frac{1}{4}\right)$.

2. Віднімемо від першого рівняння системи друге, помножене на 2:

$$ax^2 + 3ax + 4^{1+\sqrt{y}} - 2x - 4 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 8 - 2;$$

$$ax^2 - (2 - 3a)x - 6 = 0.$$

Якщо $a = 0$, то система має розв’язок $\left(-3; \frac{1}{4}\right)$ – див. вище.

Нехай $a \neq 0$. Тоді

$$D = (2 - 3a)^2 - 4 \cdot a \cdot (-6) = 9a^2 - 12a + 4 + 24a = (3a + 2)^2 \geq 0.$$

Якщо $a = -\frac{2}{3}$, то

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{4}{-\frac{4}{3}} = -3.$$

Підставимо у друге рівняння

$$-3 + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1; \ y = \frac{1}{4}.$$

Якщо $a \neq 0, a \neq -\frac{2}{3}$, то

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - 3a \pm (3a + 2)}{2a};$$

$$x_1 = -3; x_2 = \frac{2}{a}.$$

Підставимо у друге рівняння кожне знайдене значення x:

якщо $x_1 = -3$, то $y_1 = \frac{1}{4}$;

якщо $x_2 = \frac{2}{a}$, то

$$\frac{2}{a} + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1;$$

$$4^{\sqrt{y}} = \frac{a - 2}{2a}.$$

Оскільки у рівняння ліва частина більша нуля, то рівність можлива, якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup (2; +\infty)$. Тоді

$$\sqrt{y} = \log_4 \frac{a - 2}{2a}.$$

Остання рівність можлива, якщо

$$\log_4 \frac{a - 2}{2a} \geq 0; \frac{a - 2}{2a} \geq 1;$$

$$\frac{-2-a}{2a} \geq 0; \frac{a+2}{2a} \leq 0;$$

$$a \in \left[-2; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; 0\right).$$

Тоді $y_2 = \log_4^2 \frac{a-2}{2a}$.

Відповідь:

1. $\left(-3; \frac{1}{4}\right)$;

2. $\left(-3; \frac{1}{4}\right)$, якщо $a \in (-\infty; -2) \cup \left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup [0; +\infty)$;

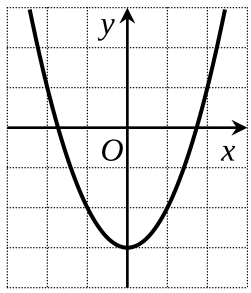
$\left(-3; \frac{1}{4}\right)$ та $\left(\frac{2}{a}; \log_4^2 \frac{a-2}{2a}\right)$, якщо $a \in \left[-2; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.

3. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ У ЗАДАЧАХ З ПАРАМЕТРАМИ.

У цьому розділі розглянуто задачі з параметрами, які базуються на певних властивостях функцій: знаходження найбільшого чи найменшого значення, визначення особливих точок, перетворення графіків, співвідношення між графіками функцій та ін. Розв'язування подібних задач розвиває в учнів цілісне уявлення про функції та їхні властивості [5].

3.1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БАЗОВИХ ЗАДАЧ.

3.1.1. На рисунку зображено графік функції $y = x^2 + c$. Вкажіть значення параметра c.



Розв'язання. На рисунку зображено графік параболи. Для знаходження параметра c використаємо точку перетину графіка з віссю ординат $(0; -3)$:

$$-3 = 0^2 + c;$$

$$c = -3.$$

Відповідь: -3.

3.1.2. Вкажіть значення параметра k, при якому прямі $y = kx + 3$ та $y = 2x + 5$ перпендикулярні.

Розв'язання.

Для перпендикулярних прямих $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ справджується рівність $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Отже, дані прямі перпендикулярні, якщо

$$k = -\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

3.1.3. Знайдіть $f(1)$, якщо функція $f(x)$

1) лінійна ($f(x) = kx + b$), $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$;

2) квадратична ($f(x) = ax^2 + bx + c$), $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$, $f''(0) = 1$.

Розв'язання.

1) Для лінійної функції $f(x) = kx + b$: $f'(x) = k$. Тоді

$$\begin{cases} f(0) = 3, \\ f'(0) = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3, \\ k = 5. \end{cases}$$

Отже, $f(x) = 5x + 3$, $f(1) = 8$.

2) Для квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$: $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$. Тоді

$$\begin{cases} f(0) = 3, \\ f'(0) = 5 \\ f''(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3, \\ b = 5, \\ a = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 3$, $f(1) = 8{,}5$.

Відповідь:

1) 8.

2) 5,5.

3.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОГО РІВНЯ СКЛАДНОСТІ.

3.2.1. (ПЗНО-12) Знайдіть усі значення параметра a, при яких добуток коренів рівняння $\log_2^2 x - (2a^2 - a)\log_2 x + 1 - 2a = 0$ дорівнює 8. Якщо таке значення a *єдине*, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень більше одного, то у відповідь запишіть *найменше* з них.

Розв'язання. Нехай $y = \log_2 x$. Тоді

$$y^2 - (2a^2 - a)y + 1 - 2a = 0.$$

За теоремою Вієта:

$$y_1 + y_2 = 2a^2 - a;$$

$$y_1 \cdot y_2 = 1 - 2a.$$

Отже,

$$\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 2a^2 - a;$$

$$\log_2 x_1 x_2 = 2a^2 - a.$$

Оскільки $x_1 x_2 = 8$, $\log_2 x_1 x_2 = 3$, то

$$2a^2 - a - 3 = 0;$$

$$a_1 = -1; \qquad a_2 = 1{,}5;$$

$$y^2 - 3y + 3 = 0; \qquad y^2 - 3y - 2 = 0;$$

$$D = -3 < 0. \qquad D = 17 > 0.$$

Отже, $a = 1{,}5$ – єдине шукане значення параметра.

Відповідь: 1,5.

3.2.2. **(ЗНО-13)** Знайдіть значення параметра a, при якому корінь рівняння $\lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{16 + a - x}$ належить проміжку $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Розв'язання. Оскільки

$$0 < \sin 5\pi x \le 1; \qquad \sqrt{16 + a - x} \ge 0,$$

$$\lg(\sin 5\pi x) \le 0;$$

то рівність можлива, якщо ліва і права частина одночасно рівні 0. Отримуємо:

$$\lg(\sin 5\pi x) = 0;$$

$$\sin 5\pi x = 1;$$

$$5\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{1}{10} + \frac{2n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

Проміжку $\left(1;\frac{3}{2}\right)$ належить $x=\frac{1}{10}+\frac{2\cdot4}{5}=1{,}7$ при $n=4$. Отже, при $x=1{,}7$ з рівності

$$\sqrt{16+a-x}=0$$

отримуємо

$$a=1{,}7-16=14{,}3.$$

Відповідь: 14,3.

3.2.3. (ПЗНО-14) Знайдіть *найменше* значення параметра a, при якому рівняння $2^{\sin^2\left(2\pi x+\frac{5\pi}{4}\right)}=\frac{4}{(x-a)^2-6(x-a)+13}$ має додатний корінь.

Розв'язання. Оцінимо ліву та праву частину рівняння.

$$0\leq\sin^2\left(2\pi x+\frac{5\pi}{4}\right)\leq 1;$$

$$1\leq 2^{\sin^2\left(2\pi x+\frac{5\pi}{4}\right)}\leq 2.$$

У знаменнику правої частини – квадратична функція $y=t^2-6t+13$, де $t=x-a$, яка досягає мінімум у вершині:

$$t_0=-\frac{b}{2a}=3;$$

$$y_0=3^2-6\cdot3+13=4.$$

Тобто

$$(x-a)^2-6(x-a)+13\geq 4;$$

$$0<\frac{4}{(x-a)^2-6(x-a)+13}\leq 1.$$

Це означає, що рівність можлива, якщо ліва і права частина одночасно рівні 1. Отримуємо:

$$2^{\sin^2\left(2\pi x+\frac{5\pi}{4}\right)}=1;$$

$$\sin^2\left(2\pi x+\frac{5\pi}{4}\right)=0;$$

$$2\pi x+\frac{5\pi}{4}=\pi n, n\in\mathbb{Z};$$

$$x=-\frac{5}{8}+\frac{n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$$

Найменший додатний корінь рівний $x=-\frac{5}{8}+\frac{2}{2}=\frac{3}{8}=0{,}375$ при $n=2$. Отже:

$$t_0 = 3;$$

$$x - a = 3;$$

$$a = 0{,}375 - 3 = -2{,}625.$$

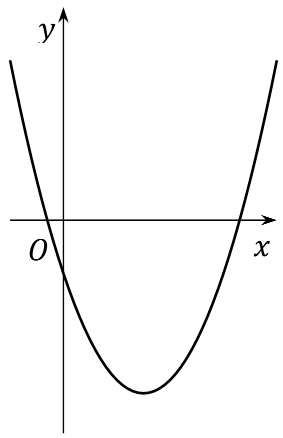
Відповідь: $-2{,}625$.

4. ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ДОТИЧНОЇ ДО КРИВОЇ.

У цьому розділі розглянуто задачі з параметрами, які базуються на властивостях дотичної до функції та геометричному змісті похідної. При вивченні даних задач учні вже мають володіти навичками розв'язування задач з параметрами як графічним, так і аналітичним методами [3].

4.1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БАЗОВИХ ЗАДАЧ.

4.1.1. За видом графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ (див. рисунок) визначте знаки коефіцієнтів a, b, c.



Розв'язання.

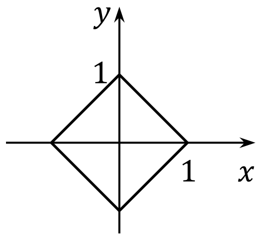
Оскільки графіком функції є парабола, вітки якої розміщені вверх, то $a > 0$. Для знаходження параметра c використаємо точку перетину з віссю ординат – так як $y(0) < 0$ і $y(0) = c$, то $c < 0$. Знак коефіцієнта b можна визначити двома способами.

По перше, абсциса вершини має додатний знак, а з формули $x_0 = \frac{-b}{2a}$ та $a > 0$ можна зробити висновок, що $b < 0$.

По друге, можна використати геометричний зміст похідної. Так, з графіка функції можна зробити висновок, що кутовий коефіцієнт дотичної до графіка у точці з абсцисою $x = 0$ має від'ємний знак. З іншого боку, $y'(0) = b$, отже, $b < 0$.

Відповідь: $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c < 0. \end{cases}$

4.1.2. Знайдіть кількість значень параметра a, при якому система рівнянь $\begin{cases}|x|+|y|=1,\\ x^2+y^2=a^2\end{cases}$ має 4 розв'язки.



Розв'язання.

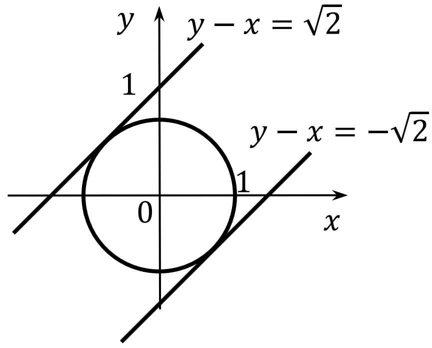
Оскільки графіком лінії $|x|+|y|=1$ є ромб (див. рис.), то коло $x^2+y^2=a^2$ може мати з ромбом 4 спільні точки у двох випадках: якщо коло проходить через вершини ромба та якщо коло дотикається до сторін ромба.

Коло проходить через вершини ромба, якщо його радіус рівний 1, звідси отримуємо можливі значення параметра: $a_1=1$ або $a_2=-1$.

Коло дотикається до сторін ромба, якщо його радіус рівний $\frac{\sqrt{2}}{2}$, звідси отримуємо ще 2 значення параметра: $a_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: 4.

4.1.3. Знайдіть найбільше ціле значення параметра a, при якому система рівнянь $\begin{cases}y-x=a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ має два розв'язки.



Розв'язання. Перше рівняння системи – пряма, друге – коло. Тому кількість розв'язків залежить, від розміщення цих ліній. Вони можуть перетинатися, дотикатися або не мати спільних точок (див. рис.):

якщо $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$, то система має два розв'язки;

якщо $a=\pm\sqrt{2}$, то система має один розв'язок;

якщо $|a|>\sqrt{2}$, то система розв'язків не має.

Отже, найбільше ціле значення параметра, при якому система рівнянь має два розв'язки, рівне $a=1$.

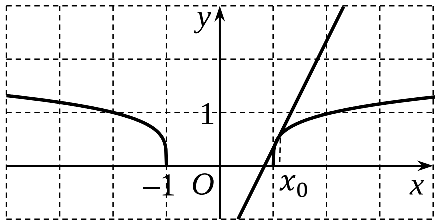
Відповідь: 1.

4.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОГО РІВНЯ СКЛАДНОСТІ.

4.2.1. (ЗНО-13) При якому *найбільшому* від'ємному значенні параметра a рівняння $\sqrt[4]{|x|-1}-2x=a$ має один корінь?

Розв'язання. Розглянемо дві функції $y=\sqrt[4]{|x|-1}$ та $y=2x+a$. На основі їхніх графіків (див. рис.) можна зробити висновок про кількість коренів рівняння. Так, найбільше від'ємне значення параметра, при якому рівняння має один корінь, досягається при дотику прямої та кривої.

Знайдемо $x_0>0$ – абсцису точки дотику. З геометричного змісту похідної випливає:



$$\left(\sqrt[4]{x-1}\right)'=2;$$

$$\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}}=2;$$

$$\sqrt[4]{(x-1)^3}=\frac{1}{8};$$

$$x_0=1\frac{1}{16}.$$

Отже, точка дотику $\left(1\frac{1}{16};\frac{1}{2}\right)$. Підставимо знайдену точку у друге рівняння:

$$\frac{1}{2}=2\cdot 1\frac{1}{16}+a;$$

$$a=-\frac{13}{8}=-1{,}625.$$

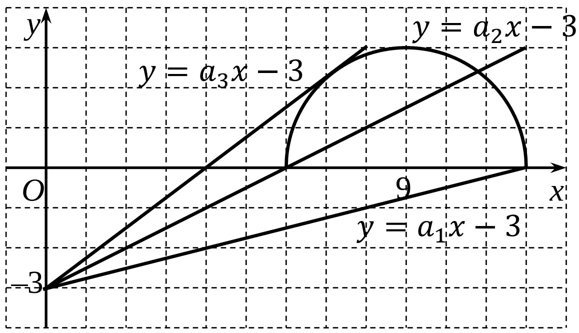
Відповідь: $-1{,}625$.

4.2.2. (ПЗНО-15) Знайдіть усі знамення параметра a, за яких рівняння $ax-3=\sqrt{-x^2+18x-72}$ має *єдиний* корінь.

Розв'язання. Розглянемо функцію:

$$y=\sqrt{-x^2+18x-72}=$$

$$=\sqrt{9-(x^2-18x+81)}=\sqrt{9-(x-9)^2}.$$



Отже, її графіком буде півколо (див. рис.). На основі графіка можна зробити висновки про кількість розв’язків рівняння. Так, знаходимо особливі випадки параметра a:

пряма $y = a_1 x - 3$ проходить через точку $(12; 0)$, отже, $a_1 = \frac{1}{4}$;

пряма $y = a_2 x - 3$ проходить через точку $(6; 0)$, отже, $a_2 = \frac{1}{2}$;

пряма $y = a_3 x - 3$ проходить через точку $(0; -3)$ та є дотичною до кривої. Нехай t – абсциса точки дотику. Сформуємо рівняння дотичної:

$$y = f'(t) \cdot (x - t) + f(t);$$

$$y = \frac{-2t+18}{2\sqrt{-t^2+18t-72}} \cdot (x - t) + \sqrt{-t^2 + 18t - 72}.$$

Підставимо точку $(0; -3)$:

$$-3 = \frac{-2t+18}{2\sqrt{-t^2+18t-72}} \cdot (-t) + \sqrt{-t^2 + 18t - 72};$$

$$-3\sqrt{-t^2 + 18t - 72} = t^2 - 9t - t^2 + 18t - 72;$$

$$\sqrt{-t^2 + 18t - 72} = 24 - 3t;$$

$$\begin{cases} -t^2 + 18t - 72 = (24 - 3t)^2, \\ 24 - 3t \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5t^2 - 81t + 324 = 0, \\ t \leq 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t_1 = 7{,}2, \\ t_2 = 9, \end{array}\right. \\ t \leq 8; \end{cases}$$

$$t_1 = 7{,}2.$$

Оскільки $a_3 = f'(t_1)$, то

$$a_3 = \frac{-2\cdot 7{,}2+18}{2\sqrt{-7{,}2^2+18\cdot 7{,}2-72}} = \frac{3}{4}.$$

Отже, рівняння має єдиний корінь, якщо $a \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

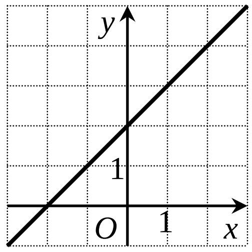
Відповідь: $a \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

5. РОЗРОБКА ЗАВДАНЬ, ЯКІ ВІДПОВІДАЮТЬ СПЕЦИФІКАЦІЇ ЗНО-2021.

У цьому розділі приведено умови задач з параметрами, які можуть бути використані для підготовки учнів до ЗНО. Розглянуто задачі з вибором однієї правильної відповіді, задачі на встановлення відповідностей та задачі з відкритою формою відповіді.

5.1. ЗАДАЧІ З ВИБОРОМ ОДНІЄЇ ПРАВИЛЬНОЇ ВІДПОВІДІ.

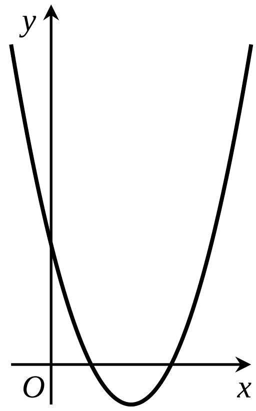
5.1.1. На рисунку зображено графік функції $y = kx + b$. Вкажіть значення кутового коефіцієнта k.



А	Б	В	Г
-2	-1	1	2

Відповідь: В.

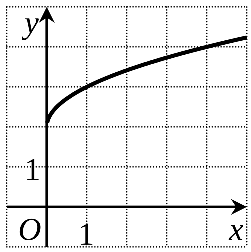
5.1.2. На рисунку зображений схематичний графік квадратичної функції $y = x^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів b і c.



А	Б	В	Г
$\begin{cases} b > 0, \\ c > 0; \end{cases}$	$\begin{cases} b > 0, \\ c < 0; \end{cases}$	$\begin{cases} b < 0, \\ c > 0; \end{cases}$	$\begin{cases} b < 0, \\ c < 0. \end{cases}$

Відповідь: В.

5.1.3. На рисунку зображено графік функції $y = \sqrt{x} + b$. Вкажіть значення параметра b.



А	Б	В	Г
-2	0	1	2

Відповідь: Г.

5.1.4. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{x^2+ax+1}{x+1} = 0$ має один розв’язок?

А	Б	В	Г
2	-2	± 2	$a \in (-2; 2)$

Відповідь: Б.

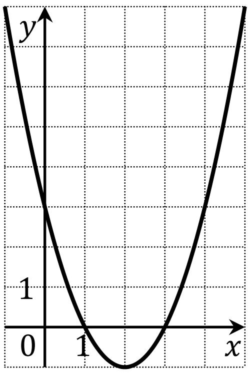
5.1.5. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} ax + 2y = a, \\ 3x + (a+1)y = 3 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
2	-3	$-2; 3$	$2; -3$	-3

Відповідь: Г.

5.2. ЗАДАЧІ НА ВСТАНОВЛЕННЯ ВІДПОВІДНОСТЕЙ.

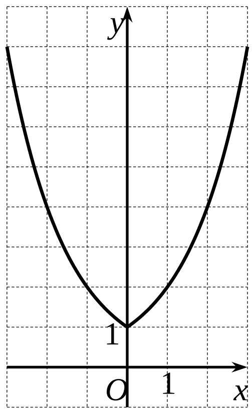
5.2.1. На рисунку зображено графік квадратичної функції $f(x) = x^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами. На основі графіка установіть відповідність між характеристиками функції (1-3) та їхніми значеннями (А-Д).



Характеристика		*Значення*	
1	x_0 – абсциса вершини	**А**	-1
2	параметр b	**Б**	2
3	параметр c	**В**	3
		Г	-4
		Д	5

Відповідь: Б, Г, В.

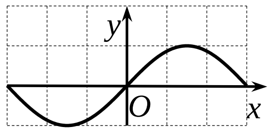
5.2.2. На рисунку зображено графік функції $f(x) = 2^{|x|}$. На основі графіка установіть відповідність між кількістю коренів рівняння $2^{|x|} = a$ (1-3) та значеннями a (А-Д).



Кількість коренів		*Значення* a	
1	0	**А**	$a \in (-\infty; 1)$
2	1	**Б**	$a \in (-\infty; 1]$
3	2	**В**	$a \in \{1\}$
		Г	$a \in [1; +\infty)$
		Д	$a \in (1; +\infty)$

Відповідь: А, В, Д.

5.2.3. На рисунку зображено ескіз графіка функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $x \in [-\pi, \pi]$. На основі графіка установіть відповідність між значеннями параметра a (1-3) та розв’язками рівняння $\sin x = a$ (А-Д).



	Значення a		*Розв’язки рівняння*
1	0	**А**	$x \in \emptyset$
2	1	**Б**	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
3	2	**В**	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
		Г	$x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
		Д	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Відповідь: Б, Д, А.

5.2.4. Установіть відповідність між значеннями параметра a (1-3) та розв’язками нерівності $\log_a x > 2$ (А-Д).

	Значення a		*Розв’язки нерівності*
1	5	**А**	$x \in (5; +\infty)$
2	$\sqrt{5}$	**Б**	$x \in \left(\frac{1}{25}; +\infty\right)$
3	$\frac{1}{5}$	**В**	$x \in (25; +\infty)$
		Г	$x \in (0; 5)$
		Д	$x \in \left(0; \frac{1}{25}\right)$

Відповідь: В, А, Д.

5.2.5. Установіть відповідність між значеннями параметра a (1-3) та властивостями функції $y = \log_a x$ (А-Д).

	Значення a		*Властивості функції*
1	e	**А**	$0 < y(3) < 1$
2	π	**Б**	спадна на всій області визначення
3	$\frac{1}{2}$	**В**	періодична
		Г	має похідну $y' = \frac{1}{x}$
		Д	має похідну $y' = 0$

Відповідь: Г, А, Б.

5.3. ЗАДАЧІ З ВІДКРИТОЮ ФОРМОЮ ВІДПОВІДІ.

5.3.1. Знайдіть значення параметра a, при яких рівняння

$$ax^2 - (a+1)x + 1 = 0$$

має один розв'язок. У відповідь запишіть суму таких значень.

Відповідь: 1.

5.3.2. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $\frac{ax^2+3x+2}{x-1} = 0$ має тільки один розв'язок. У відповідь запишіть кількість таких значень параметра a.

Відповідь: 3.

5.3.3. Знайти найменше значення параметра a, при якому корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 + ax + 3 = 0$ задовольняють умову $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Відповідь: -4.

5.3.4. При якому значенні параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a^2 + a = 0$ є найбільшою?

Відповідь: -1.

5.3.5. Знайти найменше натуральне значення параметра a, при якому квадратне рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ має два додатні корені.

Відповідь: 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Конкурсні задачі з математики. – К.: Вища школа, 2001. – 432 с.
2. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. – Ужгород: SHARK, 2015. – 238 с.
3. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. 3-е издание, дополненное и переработанное. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005, – 328 с.
4. Збірник завдань Всеукраїнських олімпіад з математики Ужгородського національного університету: методичні рекомендації для студентів спеціальностей «Початкова освіта» та «Середня освіта» / М.М. Повідайчик, М.І. Глебена, М.П. Шулла – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – 55 с.
5. Збірник завдань з математики для професійної орієнтації вступників: методичні рекомендації для студентів спеціальності «Середня освіта. Математика (Математика. Інформатика)» математичного факультету УжНУ / М.М. Повідайчик, М.І. Глебена. – Ужгород: Говерла, 2017. – 44 с.
6. Капіносов А. та ін. ЗНО 2018. Математика. Комплексна підготовка. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2018. – 560 с.
7. Конкурсні тестові завдання для випускників. Математика / укл. Ф.Е. Гече. – Ужгород: УжНУ «Говерла», 2007. – 230с.
8. Математичні олімпіади школярів України 1991–2000. – Київ, 2003. – 544 с. 12. Нікулін О.В., Кукуш О.Г. Геометрія. Поглиблений курс 7–9 класи. – Київ, Ірпінь: ВТФ «Перун», 1999. – 332 с.
9. Орос В.М., Петечук В.М., Петечук К.М. Контрольно–практичні роботи з математики. Частина І. – Ужгород: ІВЦ ЗІППО, 2006. – 200 с.
10. Орос В.М., Петечук В.М., Петечук К.М. Параметр. Посібник для абітурієнта та вчителя. – Ужгород: ІВЦ ЗІППО, 2005. – 44 с.
11. Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії. – К.: Магістр–Б, 1998. – 256 с.
12. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2004. – 344 с.
13. Федак І.В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. – 340 с.
14. Шапочка І.В. Збірник конкурсних завдань з математики / І.В. Шапочка, В.І. Шапочка. – Ужгород: Патент, 2004. – Ч.1. – 115 с.

15. Шапочка І.В. Збірник конкурсних завдань з математики / І.В. Шапочка, В.І. Шапочка. – Ужгород: Патент, 2004. – Ч.2. – 126 с.
16. Ясінський В.А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад. – Харків: Основа, 2006. – 126 с.

Підписано до друку 27.08.2021. Формат 60х84/16.
Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 1,5.
Наклад 100 прим. Віддруковано на різографі.

Видавництво УжНУ «Говерла»
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців
виготівників, і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія 3т №32 від 31 травня 2006 року