УДК 517.9

Ігор І. Король*

Чисельно-аналітичний метод інтегрування імпульсних багатоточкових крайових задач

За допомогою чисельно-аналітичного методу послідовних наближень досліджуються питання існування та наближеного знаходження розв'язків імпульсних систем підпорядкованих багатоточковим крайовим умовам.

Ключові слова: імпульсні системи, крайові умови, наближений розв'язок

Ihor I. Korol*

Numerical-Analytic Method for Integrating of the Impulsive Multi-point Boundary Value Problems

By using the numerical-analytic method of successive approximations the questions of existence and finding the approximate solutions of impulsive systems under multi-point boundary conditions are investigated.

Key Words: impulsive systems, boundary conditions, approximate solution

*E-mail: math1@univ.uzhgorod.ua

Чисельно-аналітичний метод А.М.Самойленка [1] знайшов своє застосування при дослідженні широкого класу задач, зокрема багатоточкових крайових задач [2], задач з імпульсною дією тощо. Так періодичні імпульсні системи досліджувалися в [3]-[7], а в [8] вивчалася імпульсна задача при двоточкових крайових умовах. Детальний огляд результатів з даної проблематики можна знайти в [9], [10].

Метою даної роботи є поширення чисельно-аналітичного методу на багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in [0,T]/\{\tau_i\}, \tag{1}$$

з імпульсною дією вигляду

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(x), \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_p < T, \tag{2}$$

яка підпорядкована лінійним багатоточковим умовам

$$\sum_{k=0}^{q+1} A_k x(t_k) = d, \tag{3}$$

де $\det\left(\sum_{k=0}^{q+1} A_k t_k\right) \neq 0$, x, f, B_i – n-вимірні вектор-функції, d - сталий n-вимірний вектор, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{q+1} = T$. При цьому порядок чергування точок τ_i та t_k може бути довільним.

Припустимо, що в області $(t,x) \in \Omega = [0,T] \times D$, де D - замкнена,

* ©І.І.Король, 2003

обмежена область в R^n, задача (1)-(3) задовольняє наступним умовам:

A1) функція $f(t,x)$ визначена і неперервна (кусково-неперервна з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$) в області Ω і

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in D}|f(t,x)| \le m(t), \quad m(t) \ge 0, \quad m(t) \in L_1[0,T], \\ &\sup_{x\in D}|B_i(x)| \le N_i, \quad N_i \ge 0, \quad i = 1,\ldots,p; \end{aligned} \tag{4}$$

A2) існують матриці K, K_i, $i = 1,\ldots,p$ з невід'ємними компонентами такі, що $\forall x, y \in D$, $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} &|f(t,x) - f(t,y)| \le K|x-y|, \\ &|B_i(x) - B_i(y)| \le K_i|x-y|; \end{aligned} \tag{5}$$

При цьому $x = (|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|)$ і всі оцінки розуміємо покомпонентно.

A3) множина D_β точок $\zeta \in R^n$, $\beta(\zeta)$- окіл яких міститься в D непорожня, де

$$\beta = \beta(\zeta) = M + N + T|Gd(\zeta)| + T\sum_{k=1}^{q}|GA_k|\left(\widetilde{M}^{(k)} + \widetilde{N}^{(k)}\right),$$

$$M = \sup_{t\in[0,T]}\left\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t m(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T m(s)ds\right\}, \quad N = \sup_{t\in[0,T]}\left\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i<t} N_i + \frac{t}{T}\sum_{t\le\tau_i<T} N_i\right\},$$

$$G = \left(\sum_{k=0}^{q+1} A_k t_k\right)^{-1}, \quad d(\zeta) = d - \sum_{k=0}^{q+1} A_k \zeta,$$

$$\widetilde{M}^{(k)} = \left(1-\frac{t_k}{T}\right)\int_0^{t_k} m(s)ds + \frac{t_k}{T}\int_{t_k}^T m(s)ds, \quad \widetilde{N}^{(k)} = \left(1-\frac{t_k}{T}\right)\sum_{\tau_i<t_k} N_i + \frac{t_k}{T}\sum_{t_k\le\tau_i<T} N_i, \quad k = 1,\ldots,q;$$

A4) спектральний радіус матриці

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{T}{3}K & K \\ S_1 + G_2K + G_4 & S + G_1K + G_3 \end{bmatrix}$$

менший за одиницю:

$$r(Q) < 1, \tag{6}$$

де

$$S = \sup_{t\in[0,T]}\left\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i<t} K_i + \frac{t}{T}\sum_{t\le\tau_i<T} K_i\right\}, \quad S_1 = \sup_{t\in[0,T]}\left\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i<t} K_i\alpha_1(\tau_i) + \frac{t}{T}\sum_{t\le\tau_i<T} K_i\alpha_1(\tau_i)\right\},$$

$$G_1 = T\sum_{k=1}^{q}|GA_k|\alpha_1(t_k), \quad G_2 = T\sum_{k=1}^{q}|GA_k|\alpha_2(t_k),$$

$$G_3 = T\sum_{k=1}^{q}|GA_k|\left\{\left(1-\frac{t_k}{T}\right)\sum_{\tau_i<t_k} K_i + \frac{t_k}{T}\sum_{t_k\le\tau_i<T} K_i\right\},$$

$$G_4 = T\sum_{k=1}^{q}|GA_k|\left\{\left(1-\frac{t_k}{T}\right)\sum_{\tau_i<t_k} K_i\alpha_1(\tau_i) + \frac{t_k}{T}\sum_{t_k\le\tau_i<T} K_i\alpha_1(\tau_i)\right\},$$

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad \alpha_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_1(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_1(s)ds.$$

Розглянемо оператори $(L_\zeta x)(t)$ і $(H_\zeta x)(t)$:

$$(L_\zeta x)(t) = \int_0^t \left[f(s, x(s,\zeta)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(\sigma, x(\sigma,\zeta))d\sigma \right] ds, \tag{7}$$

$$(H_\zeta x)(t) = \sum_{\tau_i < t} B_i(x(\tau_i)) - \frac{t}{T}\sum_{i=1}^{p} B_i(x(\tau_i)), \tag{8}$$

а також рекурентну послідовність функцій $x_m(t,\zeta)$, кусково-неперервних по t з розривами першого роду при $t = \tau_i$:

$$x_{m+1}(t,\zeta) = \zeta + (L_\zeta x_m)(t) + (H_\zeta x_m)(t) + tG\left\{ d(\zeta) - \sum_{k=1}^{q} A_k \left[(L_\zeta x_m)(t_k) + (H_\zeta x_m)(t_k) \right] \right\}, \tag{9}$$

$$x_0(t,\zeta) = \zeta, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

Підставимо (9) у крайові умови (3):

$$\sum_{k=0}^{q+1} A_k \{\zeta + (L_\zeta x_m)(t_k) + (H_\zeta x_m)(t_k)\} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{q+1} A_k t_k G\left\{ d(\zeta) - \sum_{k=1}^{q} A_k \left[(L_\zeta x_m)(t_k) + (H_\zeta x_m)(t_k) \right] \right\} =$$
$$- \sum_{k=0}^{q+1} A_k \zeta + \sum_{k=0}^{q+1} A_k \{(L_\zeta x_m)(t_k) + (H_\zeta x_m)(t_k)\} +$$
$$+ d(\zeta) - \sum_{k=1}^{q} A_k \left[(L_\zeta x_m)(t_k) + (H_\zeta x_m)(t_k) \right] =$$
$$= d + A_{q+1}\left[(L_\zeta x_m)(T) + (H_\zeta x_m)(T) \right] = d.$$

Отже, всі члени послідовності (9) задовольняють крайовим умовам (3).

- **Теорема 1.** Нехай для імпульсної крайової задачі (1)-(3) виконані умови A1)-A4).

Тоді послідовність функцій $x_m(t,\zeta)$ вигляду (9) рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t,\zeta) \in [0,T] \times D_\beta$ до деякої граничної функції $x^*(t,\zeta)$, яка задовольняє крайовим умовам (3), при $t = 0$ приймає початкове значення $x^*(0,\zeta) = \zeta$ і є розв'язком збуреної крайової задачі

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) + \Delta(\zeta), \quad t \in [0,T]/\{\tau_i\}, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(x), \quad i = 1,\ldots p, \\ \sum\limits_{k=0}^{q+1} A_k x(t_k) = d, \end{cases} \tag{10}$$

де

$$\Delta(\zeta) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s,\zeta))ds - \sum_{i=1}^{p} B_i(x^*(\tau_i,\zeta)) +$$
$$+ G\left\{ d(\zeta) - \sum_{k=1}^{q} A_k \left[(L_\zeta x^*)(t_k) + (H_\zeta x^*)(t_k) \right] \right\}. \tag{11}$$

Для збіжності справедливі наступні оцінки:

$$|x_m(t,\zeta) - x^*(t,\zeta)| \le (E - Q)^{-1} Q^{m-1} \begin{bmatrix} \alpha_1(t)K\beta(\zeta) \\ (S + G_1 K + G_3)\beta(\zeta) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

- *Доведення.* Насамперед, встановимо деякі оцінки, які знадобляться при подальших обчисленнях. Враховуючи, що для довільних векторів I_i, $i = 1,\ldots p$ вірна оцінка

$$\left| \sum_{\tau_i < t} I_i - \frac{t}{T}\sum_{i=1}^{p} I_i \right| = \left| \left(1 - \frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i < t} I_i - \frac{t}{T}\sum_{t \le \tau_i < T} I_i \right| \le \left(1 - \frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i < t} |I_i| + \frac{t}{T}\sum_{t \le \tau_i < T} |I_i| \le \sum_{i=1}^{p} |I_i|. \tag{13}$$

одержимо:

$$|(H_\zeta x)(t)| = \left| \left(1 - \frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i < t} B_i(x(\tau_i)) - \frac{t}{T}\sum_{t \le \tau_i < T} B_i(x(\tau_i)) \right| \le \left(1 - \frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i < t} N_i + \frac{t}{T}\sum_{t \le \tau_i < T} N_i \le N,$$

$$|(H_\zeta x)(t) - (H_\zeta y)(t)| = \left| \left(1 - \frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i < t} [B_i(x(\tau_i)) - B_i(y(\tau_i))] - \right.$$
$$\left. - \frac{t}{T}\sum_{t \le \tau_i < T} [B_i(x(\tau_i)) - B_i(y(\tau_i))] \right| \le \tag{14}$$
$$\le \left(1 - \frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i < t} |B_i(x(\tau_i)) - B_i(y(\tau_i))| + \frac{t}{T}\sum_{t \le \tau_i < T} |B_i(x(\tau_i)) - B_i(y(\tau_i))| \le$$
$$\le \left(1 - \frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i < t} K_i |x(\tau_i) - y(\tau_i)| + \frac{t}{T}\sum_{t \le \tau_i < T} K_i |x(\tau_i) - y(\tau_i)|.$$

Крім того,

$$|(L_\zeta x)(t)| \le \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t |f(s, x(s))| ds + \frac{t}{T}\int_t^T |f(s, x(s))| ds \le$$
$$\le \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t m(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T m(s)ds \le M, \tag{15}$$
$$|(L_\zeta x)(t) - (L_\zeta y)(t)| \le K\left\{ \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t |x(s) - y(s)| ds + \frac{t}{T}\int_t^T |x(s) - y(s)| ds \right\}.$$

При цьому з (9) одержимо:

$$|x_1(t,\zeta) - \zeta| \le |(L_\zeta x_0)(t)| + |(H_\zeta x_0)(t)| + T|Gd(\zeta)| +$$
$$+ T\sum_{k=1}^{q} |GA_k| \cdot \left[|(L_\zeta x_0)(t_k)| + |(H_\zeta x_0)(t_k)| \right] \le \beta(\zeta). \tag{16}$$

Отже, при $(t,\zeta) \in [0,T] \times D_\beta$ маємо, що $x_1(t) \in D$. За індукцією можна показати, що при $(t,\zeta)\in[0,T]\times D_\beta$, $m=1,2,K$ функції $x_m(t)$ вигляду (9) лежать в області D.

З урахуванням (5), (14)-(16), леми 2.2 [11] та міркувань, наведених при доведенні леми 2 [12], одержимо наступні оцінки відхилень:

$$|x_2(t,\zeta)-x_1(t,\zeta)|\le|(L_\zeta x_1)(t)-(L_\zeta x_0)(t)|+|(H_\zeta x_1)(t)-(H_\zeta x_0)(t)|+$$

$$+t\sum_{k=1}^{q}|GA_k|\cdot\big[|(L_\zeta x_1)(t_k)-(L_\zeta x_0)(t_k)|+|(H_\zeta x_1)(t_k)-(H_\zeta x_0)(t_k)|\big]\le$$

$$\le\alpha_1(t)K\beta(\zeta)+\left\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i<t}K_i+\frac{t}{T}\sum_{t\le\tau_i<T}K_i\right\}\beta(\zeta)+$$

$$+T\sum_{k=1}^{q}|GA_k|\alpha_1(t_k)K\beta(\zeta)+T\sum_{k=1}^{q}|GA_k|\left\{\left(1-\frac{t_k}{T}\right)\sum_{\tau_i<t_k}K_i+\frac{t_k}{T}\sum_{t_k\le\tau_i<T}K_i\right\}\beta(\zeta)=$$

$$=\alpha_1(t)K\beta(\zeta)+(S+G_1K+G_3)\beta(\zeta)=\alpha_1(t)a_1+b_1,$$

$$|x_3(t,\zeta)-x_2(t,\zeta)|\le|(L_\zeta x_2)(t)-(L_\zeta x_1)(t)|+|(H_\zeta x_2)(t)-(H_\zeta x_1)(t)|+$$

$$+t\sum_{k=1}^{q}|GA_k|\cdot\big[|(L_\zeta x_2)(t_k)-(L_\zeta x_1)(t_k)|+|(H_\zeta x_2)(t_k)-(H_\zeta x_1)(t_k)|\big]\le$$

$$\le\alpha_2(t)Ka_1+\alpha_1(t)Kb_1+\left\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i<t}K_i(\alpha_1(\tau_i)a_1+b_1)+\frac{t}{T}\sum_{t\le\tau_i<T}K_i(\alpha_1(\tau_i)a_1+b_1)\right\}+$$

$$+T\sum_{k=1}^{q}|GA_k|(\alpha_2(t_k)Ka_1+\alpha_1(t_k)Kb_1)+$$

$$+T\sum_{k=1}^{q}|GA_k|\left\{\left(1-\frac{t_k}{T}\right)\sum_{\tau_i<t_k}K_i(\alpha_1(\tau_i)a_1+b_1)+\frac{t_k}{T}\sum_{t_k\le\tau_i<T}K_i(\alpha_1(\tau_i)a_1+b_1)\right\}\le$$

$$=\alpha_1(t)\left(\frac{T}{3}Ka_1+Kb_1\right)+(S_1+G_2K+G_4)a_1+(S+G_1K+G_3)b_1=\alpha_1(t)a_2+b_2.$$

Отже, виконується нерівність

$$\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}\le Q\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}.$$

За індукцією можна показати, що для всіх $m=1,2,K$ виконуються оцінки

$$|x_{m+1}(t,\zeta)-x_m(t,\zeta)|\le\alpha_1(t)a_m+b_m,\tag{17}$$

$$\begin{bmatrix}a_{m+1}\\b_{m+1}\end{bmatrix}\le Q\begin{bmatrix}a_m\\b_m\end{bmatrix},\tag{18}$$

а тому маємо, що

$$|x_{m+j}(t,\zeta)-x_m(t,\zeta)|\le\sum_{i=0}^{j-1}|x_{m+i+1}(t,\zeta)-x_{m+i}(t,\zeta)|\le\left(\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\right)\begin{bmatrix}\alpha_1(t)a_m\\b_m\end{bmatrix}\le$$

$$<\left(\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\right)Q^{m-1}\begin{bmatrix}\alpha_1(t)a_1\\b_1\end{bmatrix}\le\left(\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\right)Q^{m-1}\begin{bmatrix}\alpha_1(t)K\beta(\zeta)\\(S+G_1K+G_3)\beta(\zeta)\end{bmatrix}$$

Переходячи до границі при $j\to\infty$ і беручи до уваги (6), одержуємо, що послідовність (9) є фундаментальною, а отже існує її рівномірна границя:

$$\lim_{m\to\infty}x_m(t,\zeta)=x^*(t,\zeta),$$

і виконуються оцінки збіжності (12).

Перейшовши в (9) до границі при $m\to\infty$ одержимо, що гранична функція $x^*(t,\zeta)$ задовольняє рівнянню

$$x(t,\zeta)=\zeta+(L_\zeta x)(t)+(H_\zeta x)(t)+tG\left\{d(\zeta)-\sum_{k=1}^{q}A_k\big[(L_\zeta x)(t_k)+(H_\zeta x)(t_k)\big]\right\},$$

з чого слідує, що $x^*(0,\zeta)=\zeta$ і $x^*(t,\zeta)$ є розв'язком крайової задачі (10),(11).

- **Зауваження 1.** Умова А4) виконується, якщо

$$r(Q_1)<1,\tag{19}$$

де $Q_1=\dfrac{T}{2}K+S+G_1K+G_3$.

Справді, оскільки

$$r(Q_1)\le r\left(\begin{bmatrix}\frac{T}{3}K & K\\ \frac{T}{2}S_1+\frac{T}{3}G_1K+\frac{T}{2}G_3 & S+G_1K+G_3\end{bmatrix}\right)\le$$

$$\le r\left(\begin{bmatrix}\frac{T}{2}K & K\\ \frac{T}{2}(S+G_1K+G_3) & S+G_1K+G_3\end{bmatrix}\right),$$

то застосовуючи лему 2 [12] до транспонованої матриці, отримуємо:

$$r(Q)\le r\left(\begin{bmatrix}\frac{T}{2}K & \frac{T}{2}(S+G_1K+G_3)\\ K & S+G_1K+G_3\end{bmatrix}\right)\le r\left(\frac{T}{2}K+S+G_1K+G_3\right).$$

При цьому з (17), (18) маємо:

$$\frac{T}{2}a_{m+1}+b_{m+1}\le\frac{T}{2}\left(\frac{T}{3}Ka_m+Kb_m\right)+(S_1+G_2K+G_4)a_m+(S+G_1K+G_3)b_m<$$

$$\le\left(\frac{T}{6}K+\frac{T}{2}S+\frac{T}{2}G_1K+\frac{T}{2}G_3\right)a_m+\left(\frac{T}{2}K+S+G_1K+G_1\right)b_m\le$$

$$\le\frac{T}{2}\left(\frac{T}{2}K+S+G_1K+G_3\right)a_m+\left(\frac{T}{2}K+S+G_1K+G_3\right)b_m\le Q_1\left(\frac{T}{2}a_m+b_m\right),$$

$$|x_{m+j}(t,\zeta)-x_m(t,\zeta)|\le\sum_{i=0}^{j-1}|x_{m+i+1}(t,\zeta)-x_{m+i}(t,\zeta)|\le\sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{T}{2}a_{m+i}+b_{m+i}\right)\le$$

$$\le\left(\sum_{i=0}^{j-1}Q_1^i\right)\left(\frac{T}{2}a_m+b_m\right)\le\left(\sum_{i=0}^{j-1}Q_1^i\right)Q_1^m\beta(\zeta).$$

Переходячи до границі при $j\to\infty$ і враховуючи (19), одержуємо такі оцінки відхилень:

$$\left|x^{*}(t,\zeta)-x_{m}(t,\zeta)\right|\le(E-Q_{1})^{-1}Q_{1}^{m}\beta(\zeta). \tag{20}$$

- Зауваження 2. Оскільки

$$r(Q)\le r\left(\left\|\begin{matrix}\frac{T}{3}K & K\\ \frac{T}{2}\left(\frac{3}{2}S+G_{1}K+\frac{3}{2}G_{3}\right) & \frac{3}{2}S+G_{1}K+\frac{3}{2}G_{3}\end{matrix}\right\|\right)\le r\left(\frac{T}{3}K+\frac{3}{2}S+G_{1}K+\frac{3}{2}G_{3}\right),$$

то отримуємо оцінку, яка доповнює (19):

$$r(Q_{2})=r\left(\frac{T}{3}K+\frac{3}{2}S+G_{1}K+\frac{3}{2}G_{3}\right)<1.$$

Вкажемо необхідні та достатні умови того, щоб гранична функція послідовності (9) була розв'язком задачі (1)-(3).

- **Теорема 2.** Нехай для імпульсної крайової задачі (1)-(3) виконані умови A1)-A4).

Тоді для того, щоб функція $x^{*}(t,\zeta)$ була розв'язком задачі (1)-(3), необхідно і досить, щоб у точці $\zeta=\zeta^{*}$ визначальна функція $\Delta(\zeta)$ вигляду (11) перетворювалася в нуль:

$$\Delta(\zeta)=0. \tag{21}$$

При цьому $x^{*}(t)=x^{*}(t,\zeta^{*})$, $x^{*}(0)=\zeta^{*}$.

- *Доведення* аналогічне до доведення теореми 2.3 [11].

Оскільки знайти точну визначальну функцію $\Delta(\zeta)$ практично неможливо, то побудуємо її наближення

$$\Delta_{m}(\zeta)=-\frac{1}{T}\int_{0}^{T}f(s,x_{m}(s,\zeta))ds-\sum_{i=1}^{p}B_{i}(x_{m}(\tau_{i},\zeta))+$$
$$+G\left\{d(\zeta)-\sum_{k=1}^{q}A_{k}\left[(L_{\zeta}x_{m})(t_{k})+(H_{\zeta}x_{m})(t_{k})\right]\right\}. \tag{22}$$

Наступна теорема дозволяє зробити висновки про існування нулів точної визначальної функції (11) на підставі властивостей наближеної визначальної функції $\Delta_{m}(\zeta)$.

- **Теорема 3.** Нехай для імпульсної крайової задачі (1)-(3)
  a) виконані умови A1)-A4);
  b) існує випукла замкнена область $D_{1}\subset D_{\beta}$ така, що для деякого фіксованого $m\ge 1$ рівняння $\Delta_{m}(\zeta)=0$ має в D_{1} єдиний розв'язок ненульового індекса;
  c) на межі ∂D_{1} області D_{1} виконується нерівність

$$\inf_{\zeta\in\partial D_{1}}\left|\Delta_{m}(\zeta)\right|>\left\{\left(E+\frac{1}{T}G_{1}\right)K+\sum_{i=1}^{p}K_{i}+\frac{1}{T}G_{3}\right\}(E-Q_{1})^{-1}Q_{1}^{m}\beta(\zeta).$$

Тоді задача (1)-(3) має єдиний розв'язок $x^{*}(t)$ з початковим значенням $x^{*}(0)=\zeta^{*}$, $\zeta^{*}\in D_{1}$.

- *Доведення.* Оцінимо різницю точної та наближеної визначальних функцій:

$$\left|\Delta(\zeta)-\Delta_{m}(\zeta)\right|\le\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left|f(s,x^{*}(s,\zeta))-f(s,x_{m}(s,\zeta))\right|ds+\sum_{i=1}^{p}\left|B_{i}(x^{*}(\tau_{i},\zeta))-B_{i}(x_{m}(\tau_{i},\zeta))\right|+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\left|GA_{k}\right|\cdot\left[\left|(L_{\zeta}x^{*})(t_{k})-(L_{\zeta}x_{m})(t_{k})\right|+\left|(H_{\zeta}x^{*})(t_{k})-(H_{\zeta}x_{m})(t_{k})\right|\right]\le$$
$$\le\left\{\left(E+\frac{1}{T}G_{1}\right)K+\sum_{i=1}^{p}K_{i}+\frac{1}{T}G_{3}\right\}(E-Q_{1})^{-1}Q_{1}^{m}\beta(\zeta).$$

Враховуючи останню оцінку, можна показати гомотопність векторних полів $\Delta(\zeta)$ і $\Delta_{m}(\zeta)$, з чого безпосередньо слідує твердження теореми.

Неважко пересвідчитись, що

$$\left|x_{m}(t,\zeta')-x_{m}(t,\zeta'')\right|\le\left(\sum_{i=0}^{m}Q_{1}^{i}+\sum_{i=0}^{m-1}Q_{1}^{i}G_{5}\right)\left|\zeta'-\zeta''\right|,$$

$$\left|x^{*}(t,\zeta')-x^{*}(t,\zeta'')\right|\le(E-Q_{1})^{-1}(E+G_{5})\left|\zeta'-\zeta''\right|,$$

$$\left|\Delta(\zeta')-\Delta(\zeta'')\right|\le\left[\frac{1}{T}G_{5}+\left(K+\sum_{i=1}^{p}K_{i}+\frac{1}{T}G_{1}K+\frac{1}{T}G_{3}\right)(E-Q_{1})^{-1}(E+G_{5})\right]\left|\zeta'-\zeta''\right|,$$

$$\left|\Delta(\zeta)\right|\le\frac{1}{T}\int_{0}^{T}m(s)ds+\sum_{i=1}^{p}N_{i}+\left|Gd(\zeta)\right|+\sum_{k=1}^{q}\left|GA_{k}\right|\left(\tilde{M}^{(k)}+\tilde{N}^{(k)}\right),$$

де $\zeta',\zeta''\in D_{\beta}$, $G_{5}=T\left|G\sum_{k=1}^{q}A_{k}\right|$, а тому можна встановити наступне твердження, яке містить необхідні умови розв'язності задачі (1)-(3).

- **Теорема 4.** Нехай для імпульсної крайової задачі (1)-(3) виконані умови A1)-A4).

Тоді для того, щоб деяка область $D_{2}\subset D_{\beta}$ містила точку ζ^{*}, яка задає початкове значення розв'язку $x^{*}(t)$ імпульсної крайової задачі (1)-(3) необхідно, щоб при всіх $\bar{\zeta}\in D_{2}$, $m=1,2,\ldots$ виконувалася нерівність

$$\left|\Delta_{m}(\bar{\zeta})\right|\le\frac{1}{T}\int_{0}^{T}m(s)ds+\sum_{i=1}^{p}N_{i}+\left|Gd(\zeta)\right|+\sum_{k=1}^{q}\left|GA_{k}\right|\left(\tilde{M}^{(k)}+\tilde{N}^{(k)}\right)+$$
$$+\sup_{\zeta\in D_{2}}\left[\frac{1}{T}G_{5}+\left(K+\sum_{i=1}^{p}K_{i}+\frac{1}{T}G_{1}K+\frac{1}{T}G_{3}\right)(E-Q_{1})^{-1}(E+G_{5})\right]\left|\zeta-\bar{\zeta}\right|.$$

Таким чином, доведено, що до систем з імпульсною дією (1), (2), підпорядкованих багатоточковим крайовим умовам (3), може бути застосована ідея методу академіка А.М.Самойленка. Розроблено модифікацію методу, яка дозволяє знаходити розв'язки таких задач, встановлено необхідні та достатні оцінки існування розв'язків, знайдено оцінки похибки послідовних наближень.

Литература

1. Самойленко А.М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Укр. матем. журн. –1965. – 17, №4. – с. 82-93.
2. Король І.І. Про інтегрування багатоточкових крайових задач з параметрами// Наук.вісник Ужгородського університету, Сер. Матем. – 1999. – Вип. 4. с. 62-70.
3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. –288 с.
4. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. –14. – 462 p.
5. Перестюк Н.А., Шовкопляс В.Н. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием//Укр. матем. журн. – 1979. – 31, №5. – с. 517-524.
6. Bainov D.D., Simeonov P.S. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications.– Longman Sci. and Techn., Pitman Monographs, 1993. – 228 p.
7. Трофимчук Е.П. Исследование численно-аналитическим методом с улучшенной сходимостью решений краевой задачи для импульсной системы//Асимптотические методы в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – с. 32-37.
8. Hristova S.G., Bainov D.D. Numerical-analytic method for finding the solutions of a boundary value problem for a system of differential equations with impulses// Math.Rep.Toyama Univ. – 1987. – 10. – p. 1-22.
9. Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И. Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития.IV// Укр. мат. журн. –1998. – 50, №12. – с. 1656-1672.
10. Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И. Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития.VI// Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №7. – с. 960-971.
11. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.- Киев: Наук.думка., 1992. – 280 с.
12. Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И. Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития.III// Укр. мат. журн. – 1998. – 50, №1. – с. 93-108.

Надійшла 20.04.2003

УДК 514.77

Віктор С. Лісняк

Змінні многовиди в однорідних просторах

Подано загальну схему побудови математичної теорії змінних многовидів у класичних однорідних просторах. Наведені приклади одержання їхніх диференціальних інваріантів для змінних кривих, поверхонь та ряду лінійчатих многовидів. Побудовано відповідні обчислювальні формули.

Ключові слова: змінний многовид, інваріант, комплекс, конгруенція, торс

Viktor S. Lisnyak

Variable manifolds in homogeneous spaces

General scheme of construction of mathematical theory of variable manifolds in classical homogeneous spaces is presented. Some examples of obtaining their differential invariants of variable curves, surfaces and several lineal manifolds are given.. Corresponding calculating formulas are built.

Key Words: complex, congruence, invariant, lineal surface, variable manifold

Алгоритмічні засоби унаочнення математичних моделей конкретних еволюціонуючих (зокрема рухомих) суцільних середовищ можна відчутно розширити шляхом залучення змінних аналогів класичних многовидів однорідних просторів [1,18]. Тому набуває значення інваріантне вивчення будови нижчих диференціальних околів таких многовидів. Тут з загальних позицій [9] здійснюється спільне дослідження ряду змінних точкових та лінійчатих многовидів евклідового простору E_3 [3,4,6-8,15].

§ 1. Диференціальні рівняння занурених многовидів

Простір W_N зображення r-параметричної групи Лі G_r є однорідний простір з фундаментальною групою G_r його перетворень та з базисними інваріантними лінійними формами ω^A. Це N-вимірне зображення групи G_r визначається цілком інтегровною системою пфафових лінійних диференціальних рівнянь

$$\theta^I \equiv dx^I - \xi^I_A(x)\omega^A = 0, \qquad I,\ldots = 1,\ldots,N, \qquad A,\ldots = 1,\ldots r. \tag{1}$$

Умовою цілковитої інтегровності (1) є виконання тотожностей Лі

$$\frac{\partial \xi^J_A}{\partial x^K}\xi^K_B - \frac{\partial \xi^J_B}{\partial x^K}\xi^K_A = C^H_{AB}\xi^J_H. \tag{2}$$

Форми ω^H задовільняють структурні рівняння Пуанкаре групи G_r:

$$D\omega^H = C^H_{AB}[\omega^A\omega^B]/2. \tag{3}$$

У них структурні сталі C^H_{AB} ті самі, що й у (2), і підпорядковані тотожним співвідношенням $C^H_{(AB)} = 0$, $C^A_{B(F}C^B_{GJ)} = 0$.

Якщо задано многовид Σ у W_N, твірним елементом якого є фігура σ простору W_N, то її стаціонарна підгрупа H_s має базисні форми

© В.С. Лісняк, 2003