УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).94-104

С. А. Щоголев[1], В. В. Карапетров[2]

[1] Одеський національний університет імені І.І.Мечникова,
завідувач кафедри вищої математики,
доктор фізико-математичних наук, професор
sergas1959@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8025-143X

[2] Одеський національний університет імені І.І.Мечникова,
аспірант кафедри вищої математики
valentyn.karapetrov@stud.onu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1315-4968

БЛОЧНЕ РОЗЩЕПЛЕННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

При математичному описанні різноманітних явищ і процесів, що виникають в математичній фізиці, електротехніці, економіці, доводиться мати справу з матричними диференціальними рівняннями. Тому такі рівняння є актуальними як для математиків, так і для фахівців в інших галузях природознавства. В даній статті розглядається система M лінійних матричних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, зображуваними у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними в певному сенсі коефіцієнтами та частотою (клас F), причому ця система близька до блочно-діагональної системи з повільно змінними коефіцієнтами. Шукається перетворення з коефіцієнтами аналогічного типу, що приводить цю систему до суто блочно-діагонального вигляду. Відносно коефіцієнтів цього перетворення одержується квазілінійна система матричних диференціальних рівнянь, яка розпадається на M незалежних підсистем, кожна з яких має вигляд деякої допоміжної нелінійної системи. Для цієї допоміжної системи методом послідовних наближень отримано умови існування у неї розв'язків класу F, а потім на підставі цього результату отримано умови існування шуканого перетворення.

Ключові слова: Матричні диференціальні рівняння, ряди Фур'є, повільно змінні параметри.

1. Вступ. Одним з актуальних розділів теорії звичайних диференціальних рівнянь є теорія матричних диференціальних рівнянь. Такі рівняння виникають при дослідженні різноманітних процесів в математичній фізиці, електротехніці та інших галузей, і їм присвячено багато праць, в яких досліджувалась розв'язність матричних рівнянь у різних функціональних просторах, крайові задачі для матричних диференціальних рівнянь та інші проблеми [1–4]. В даній статті досліджується питання про блочне розщеплення лінійної системи матричних диференціальних рівнянь.

2. Основні позначення та означення. Нехай

$$G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : \ t \in \mathbb{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}$$

Означення 1. *Скажемо, що функція $p(t,\varepsilon)$ належить до класу $S(m;\varepsilon_0)$ ($m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), якщо виконано наступні умови*
1) $p : G(\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$; 2) $p(t,\varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ за t;
3) $d^k p(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k(t,\varepsilon)$ $(0 \le k \le m)$, причому

$$\|p\|_{S(m,\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |p_k(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Означення 2. *Скажемо, що функція $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ належить до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(m\in\mathbb{N}\cup\{0\})$, якщо ця функція зображувана у вигляді:*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

причому
1) $f_n(t,\varepsilon)\in S(m,\varepsilon_0)$ $(n\in\mathbb{Z})$;
2)

$$\|f\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)}\overset{def}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f_n\|_{S(m;\varepsilon_0)}<+\infty;$$

3) $\theta(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t\varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi\in\mathbb{R}^+$, $\varphi\in S(m,\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}\varphi(t,\varepsilon)=\varphi_0>0$.

Множина функцій класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ утворює лінійний простір, який перетворюється на повний нормований простір введенням норми $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Має місце ланцюжок включень: $F(0;\varepsilon_0;\theta)\supset F(1;\varepsilon_0;\theta)\supset\ldots\supset F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Нехай задано дві функції класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$:

$$u(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),\ v(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right).$$

Добуток цих функцій визначимо формулою [5]:

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty}u_{n-s}(t,\varepsilon)v_s(t,\varepsilon)\right)\exp(in\theta(t,\varepsilon)).\tag{1}$$

Очевидно, що $uv\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Сформулюємо деякі властивості норми $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Нехай $u,v\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $k=\text{const}$. Тоді:
1) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}=|k|\cdot\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;
2) $\|u+v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\le\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}+\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;
3)

$$\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}=\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)};$$

4)

$$\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\le 2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Дійсно, при $m=0$ згідно з формулою (1) маємо: $\|uv\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\le\|u\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}$. Далі, на підставі властивостей 1) – 3):

$$\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}=\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{\partial^k(uv)}{\partial t^k}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\le\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\left\|\frac{\partial^{k-j}u}{\partial t^{k-j}}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\le$$

$$\le 2^m\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^j}\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^j}\left\|\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\right)=2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

На підставі властивості 4) можна стверджувати, що простір $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ утворює банахову алгебру [6].

Означення 3. *Скажемо, що матриця* $A(t,\varepsilon)=(a_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}$ *належить до класу* $S_2(m;\varepsilon_0)$, $(m\in\mathbb{N}\cup\{0\})$, *якщо* $a_{jk}\in S(m;\varepsilon_0)$ $(j,k=\overline{1,N})$.

Визначимо норму:

$$\|A(t,\varepsilon)\|_{S_2(m;\varepsilon_0)}=\max_{1\le j\le N}\sum_{k=1}^{N}\|a_{jk}(t,\varepsilon)\|_{S(m;\varepsilon_0)}.$$

Означення 4. *Скажемо, що матриця* $B(t,\varepsilon,\theta)=(b_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=\overline{1,N}}$ *належить до класу* $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(m\in\mathbb{N}\cup\{0\})$, *якщо* $b_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j,k=\overline{1,N})$.

Визначимо норму

$$\|B(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)}=\max_{1\le j\le N}\sum_{k=1}^{N}\|b_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Очевидно, що якщо $B_1\in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $B_2\in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, то $B_1+B_2, B_1B_2\in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, і виконано: $\|B_1+B_2\|\le\|B_1\|+\|B_2\|$, $\|B_1B_2\|\le 2^m\|B_1\|\cdot\|B_2\|$.

3. Постановка задачі. Розглядається наступна система лінійних матричних рівнянь:

$$\frac{dX_j}{dt}=A_j(t,\varepsilon)X_j+\mu\sum_{k=1}^{M}B_{jk}(t,\varepsilon,\theta)X_k,\quad j=\overline{1,M},\tag{2}$$

де X_j – невідомі квадратні матриці порядку N, $A_j(t,\varepsilon)\in S_2(m;\varepsilon_0)$, $B_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $\mu\in[0,\mu_0)$ – дійсний параметр.

Шукається перетворення

$$X_j=Y_j+\sum_{\substack{k=1\\(k\ne j)}}^{M}Q_{jk}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),\mu)Y_k,\quad j=\overline{1,M},\tag{3}$$

де $Q_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j,k=\overline{1,M})$ – $(N\times N)$-матриці класів $F_2(m_1;\varepsilon_1;\theta)$ $(m_1\le m;\varepsilon_1\le\varepsilon_0)$, що приводить систему (2) до вигляду

$$\frac{dY_j}{dt}=V_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)Y_j,\quad j=\overline{1,M},\tag{4}$$

де $V_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)\in F_2(m_1;\varepsilon_1;\theta)$.

Для скалярного випадку аналогічну задачу розглянуто у праці [7].

4. Допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай задано скалярне лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку*

$$\frac{dx}{dt}=\lambda(t,\varepsilon)x+u(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)),\tag{5}$$

де $\lambda(t,\varepsilon)\in S(m;\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}|\mathrm{Re}\,\lambda(t,\varepsilon)|=\gamma>0$, $u(t,\varepsilon,\theta)\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. *Тоді рівняння (5) має єдиний частинний розв'язок* $x(t,\varepsilon,\theta)\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. *Цей розв'язок* *дається формулою:*

$$x(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \int\limits_{T}^{t} u(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon)) \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} \lambda(s,\varepsilon)ds\right) d\tau, \tag{6}$$

де

$$T = \begin{cases} -\infty, \ \mathrm{Re}\lambda(t,\varepsilon) \le -\gamma < 0, \\ +\infty, \ \mathrm{Re}\lambda(t,\varepsilon) \ge \gamma > 0, \end{cases}$$

і, крім того, існує $K_0 \in (0,+\infty)$ таке, що

$$\|x(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le K_0 \|u(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}. \tag{7}$$

Доведення. Припустимо для визначенності, що $\mathrm{Re}\lambda(t,\varepsilon) \le -\gamma < 0$. Тоді

$$x(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \int\limits_{-\infty}^{t} u(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon)) \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} \lambda(s,\varepsilon)ds\right) d\tau. \tag{8}$$

Подамо $u(t,\varepsilon,\theta)$ у вигляді

$$u(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t,\varepsilon) \exp(in\theta),$$

де $u_n(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$ та

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|u_n(t,\varepsilon)\|_{S(m;\varepsilon)} < +\infty.$$

Тоді одержимо:

$$x(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(t,\varepsilon) \exp(in\theta),$$

де

$$\frac{dx_n}{dt} = \sigma_n(t,\varepsilon)x_n + u_n(t,\varepsilon), \ n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

$\sigma_n(t,\varepsilon) = \lambda(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon)$, де $\varphi(t,\varepsilon)$ – функція, що фігурує в означенні класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Очевидно, що $\mathrm{Re}\sigma_n(t,\varepsilon) \le -\gamma < 0$.

Функція

$$x_n(t,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{t} u_n(\tau,\varepsilon) \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} \sigma_n(s,\varepsilon)ds\right) d\tau \tag{10}$$

є єдиним, обмеженим на $\mathbb{R}$, розв'язком рівняння (9), причому

$$\sup_{G(\varepsilon_0)} |x_n(t,\varepsilon)| \le \frac{1}{\gamma} \sup_{G(\varepsilon_0)} |u_n(t,\varepsilon)|.$$

Здійснимо в рівнянні (9) підстановку:

$$x_n = x_{n1} - \frac{u_n(t,\varepsilon)}{\sigma_n(t,\varepsilon)}, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

де $x_{n1} = x_{n1}(t,\varepsilon)$ – нова невідома функція. Одержимо:

$$\frac{dx_{n1}}{dt} = \sigma_n(t,\varepsilon)x_{n1} + \frac{d}{dt}\left(\frac{u_n(t,\varepsilon)}{\sigma_n(t,\varepsilon)}\right),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

І крім того

$$\frac{dx_n}{dt} = \sigma_n(t,\varepsilon)x_{n1}(t,\varepsilon). \tag{13}$$

Очевидно, що

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u_n(t,\varepsilon)}{\sigma_n(t,\varepsilon)}\right) = \varepsilon z_n(t,\varepsilon),$$

де $z_n(t,\varepsilon)$ – обмежена в $G(\varepsilon_0)$. Тоді

$$\sup_{G(\varepsilon_0)} |x_{n1}(t,\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon}{\gamma} \sup_{G(\varepsilon_0)} |z_n(t,\varepsilon)|.$$

Отже

$$\frac{dx_n}{dt} = \varepsilon y_{n1}(t,\varepsilon),\ n \in \mathbb{Z},$$

причому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{G(\varepsilon_0)} |y_{n1}(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Припустимо за індукцією, що

$$\frac{d^\nu x_n}{dt^\nu} = \varepsilon^\nu y_{n\nu}(t,\varepsilon),\ \nu = \overline{0,l},$$

причому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{G(\varepsilon_0)} |y_{n\nu}(t,\varepsilon)| < +\infty,\ \nu = \overline{0,l},$$

і покажемо, що

$$\frac{d^{l+1}x_n}{dt^{l+1}} = \varepsilon^{l+1} y_{n,l+1}(t,\varepsilon),\ n \in \mathbb{Z},$$

де

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{G(\varepsilon_0)} |y_{n,l+1}(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Дійсно, диференцюючи $l+1$ разів тотожність (9), дістанемо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{l+1}x_n}{dt^{l+1}}\right) = \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^k \frac{d^k\sigma_n(t,\varepsilon)}{dt^k} \cdot \frac{d^{l+1-k}x_n(t,\varepsilon)}{dt^{l+1-k}} + \frac{d^{l+1}u_n(t,\varepsilon)}{dt^{l+1}} =$$

$$= \sigma_n(t,\varepsilon)\frac{d^{l+1}x_n(t,\varepsilon)}{dt^{l+1}} + \sum_{k+1}^{l+1} C_{l+1}^k \frac{d^k\sigma_n(t,\varepsilon)}{dt^k} \cdot \frac{d^{l+1-k}x_n(t,\varepsilon)}{dt^{l+1-k}} + \frac{d^{l+1}u_n(t,\varepsilon)}{dt^{l+1}} =$$

$$= \sigma_n(t,\varepsilon)\frac{d^{l+1}x_n(t,\varepsilon)}{dt^{l+1}} + \varepsilon^{l+1} g_{nl}(t,\varepsilon),$$

де $g_{nl}(t,\varepsilon) \in S_{m-l-1}$, причому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{G(\varepsilon_0)} |g_{nl}(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Таким чином $\frac{d^{l+1}x_n}{dt^{l+1}}$ – єдиний, обмежений на $G(\varepsilon_0)$, розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \sigma_n(t,\varepsilon)x + \varepsilon^{l+1} g_{nl}(t,\varepsilon).$$

А тоді

$$\frac{d^{l+1}x_n}{dt^{l+1}} = \varepsilon^{l+1} \int_{-\infty}^{t} g_{nl}(\tau,\varepsilon) \exp\left(\int_{\tau}^{t} \sigma_n(s,\varepsilon)ds\right) d\tau,$$

звідки й випливає потрібне.

Випадок $\mathrm{Re}\lambda(t,\varepsilon) \geq \gamma > 0$ розглядається аналогічно.

Лема 2. *Нехай задано систему матричних диференціальних рівнянь*

$$\frac{dY_j}{dt} = D_{j1}(t,\varepsilon)Y_j - Y_j D_{j2}(t,\varepsilon) + \mu F_j(t,\varepsilon,\theta) + \mu \sum_{s=1}^{M} P_{js1}(t,\varepsilon,\theta) Y_s P_{js2}(t,\varepsilon,\theta) -$$

$$-\mu Y_j \sum_{s=1}^{M} R_{js1}(t,\varepsilon,\theta) Y_s R_{js2}(t,\varepsilon,\theta) - \varepsilon H_{j1}(t,\varepsilon) Y_j - \varepsilon Y_j H_{j2}(t,\varepsilon),\ j = \overline{1,M}, \quad (14)$$

де $D_{j1}(t,\varepsilon) = (d^{j1}_{\alpha\beta}(t,\varepsilon))_{\alpha,\beta=\overline{1,N}}$, $D_{j2}(t,\varepsilon) = (d^{j2}_{\alpha\beta}(t,\varepsilon))_{\alpha,\beta=\overline{1,N}}$ *– нижні трикутні матриці, що належать до класу* $S_2(m;\varepsilon_0)$, $F_j(t,\varepsilon,\theta)$, $P_{js1}(t,\varepsilon,\theta)$, $P_{js2}(t,\varepsilon,\theta)$, $R_{js1}(t,\varepsilon,\theta)$, $R_{js2}(t,\varepsilon,\theta)$ *належать до класу* $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $H_{j1}(t,\varepsilon)$, $H_{j2}(t,\varepsilon)$ *належать до класу* $S_2(m-1;\varepsilon_0)$, $\mu \in (0,\mu_0)$ *– дійсний параметр. І нехай виконано наступну умову:*

$$\left|\mathrm{Re}\left(d^{j1}_{jj}(t,\varepsilon) - d^{j2}_{kk}(t,\varepsilon)\right)\right| \geq \gamma > 0,\ j = \overline{1,M},\ k = \overline{1,N}. \quad (15)$$

Тоді існують $\mu_2 \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_0)$ *такі, що для будь-якого* $\mu \in [0,\mu_2)$ *і для будь-якого* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ *система (14) має єдиний частинний розв'язок* $Y_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j = \overline{1,M})$, *що належить до класу* $F_2(m-1;\varepsilon_2;\theta)$.

Доведення. Розглянемо спочатку лінійну неоднорідну систему матричних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dY^0_j}{dt} = D_{j1}(t,\varepsilon)Y^0_j - Y^0_j D_{j2}(t,\varepsilon) + \mu F_j(t,\varepsilon,\theta),\ j = \overline{1,M}. \quad (16)$$

Нехай $Y^0_j = (y^0_{j\alpha\beta})_{\alpha,\beta=\overline{1,N}}$, $F_j(t,\varepsilon,\theta) = (f_{j\alpha\beta})_{\alpha,\beta=\overline{1,N}}$ $(j = \overline{1,M})$. Тоді, розписуючи рівняння (16) у компонентній формі, прийдемо до наступної скалярної лінійної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy^0_{j1N}}{dt} = \left(d^{j1}_{11}(t,\varepsilon) - d^{j2}_{NN}(t,\varepsilon)\right) y^0_{j1N} + \mu f_{j1N}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\dots$$

$$\frac{dy^0_{j11}}{dt} = \left(d^{j1}_{11}(t,\varepsilon) - d^{j2}_{11}(t,\varepsilon)\right) y^0_{j11} - \sum_{s=2}^{N} d^{j2}_{s1}(t,\varepsilon) y^0_{j1s} + \mu f_{j11}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{dy^0_{j2N}}{dt} = \left(d^{j1}_{22}(t,\varepsilon) - d^{j2}_{NN}(t,\varepsilon)\right) y^0_{j2N} + d^{j1}_{21}(t,\varepsilon) y^0_{j1N} + \mu f_{j2N}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\dots$$

$$\frac{dy^0_{j21}}{dt} = \left(d^{j1}_{22}(t,\varepsilon) - d^{j2}_{11}(t,\varepsilon)\right) y^0_{j21} + d^{j1}_{21}(t,\varepsilon) y^0_{j11} - \sum_{s=2}^{N} d^{j2}_{s1}(t,\varepsilon) y^0_{j2s} + \mu f_{j21}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\dots$$

$$\frac{dy^0_{jNN}}{dt} = \left(d^{j1}_{NN}(t,\varepsilon) - d^{j2}_{NN}(t,\varepsilon)\right) y^0_{jNN} + \sum_{s=1}^{N-1} d^{j1}_{Ns}(t,\varepsilon) y^0_{jsN} + \mu f_{jNN}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\dots$$

$$\frac{dy^0_{jN1}}{dt} = \left(d^{j1}_{NN}(t,\varepsilon) - d^{j2}_{11}(t,\varepsilon)\right) y^0_{jN1} + \sum_{s=1}^{N-1} d^{j1}_{Ns}(t,\varepsilon) y^0_{js1} -$$

$$- \sum_{s=2}^{N} d^{j2}_{s1}(t,\varepsilon) y^0_{jNs} + \mu f_{jN1}(t,\varepsilon,\theta),\ j = \overline{1,M}. \tag{17}$$

На підставі леми 1 з використанням умови (15) переконуємось в тому, що кожне з рівнянь системи (17) має єдиний частинний розв'язок, що належить до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Отже, рівняння (16) має єдиний частинний розв'язок, що належить до класу $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, та існує таке $K_1 \in (0,+\infty)$, що виконується нерівність:

$$\|Y^0_j(t,\varepsilon,\theta\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \le \mu K_1 \|F_j(t,\varepsilon,\theta\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)},\ j = \overline{1,M}. \tag{18}$$

Розв'язок класу $F_2(m-1;\varepsilon_2;\theta)$ будемо шукати методом послідовних наближень, обираючи в якості початкового наближення $\|Y^0_j(t,\varepsilon,\theta\|$ $(j = \overline{1,M})$, а наступні наближення визначаючи як розв'язки класу $F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ лінійних систем:

$$\frac{dY^{\nu+1}_j}{dt} = D_{j1}(t,\varepsilon)Y^{\nu+1}_j - Y^{\nu+1}_j D_{j2}(t,\varepsilon) + \mu F_j(t,\varepsilon,\theta) + \mu \sum_{s=1}^{M} P_{js1}(t,\varepsilon,\theta) Y^{\nu}_s P_{js2}(t,\varepsilon,\theta) -$$

$$-\mu Y^{\nu}_j \sum_{s=1}^{M} R_{js1}(t,\varepsilon,\theta) Y^{\nu}_s R_{js2}(t,\varepsilon,\theta) - \varepsilon H_{j1}(t,\varepsilon) Y^{\nu}_j - \varepsilon Y^{\nu}_j H_{j2}(t,\varepsilon),$$

$$j = \overline{1,M};\ \nu = 0,1,2,\dots. \tag{19}$$

Визначимо область:

$$\Omega = \left\{ \ Y_j \in F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta);\ \|Y_j(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \le d;\ j = \overline{1,M} \ \right\}.$$

Покажемо, що для достатньо малих значень параметрів μ і ε всі наближення Y_j^{ν} $(j = \overline{1,M};\ \nu = 0,1,2,\ldots)$ залишаються всередині області Ω. Початкове наближення за умови

$$\mu K_1 \|F_j(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} < d_0 \le d,$$

очевидно, належить Ω.

Припустимо за індукцією, що $Y_j^{\nu}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in \Omega$, тобто

$$\|Y_j^{\nu}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\|_{F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)} < d_0 \le d \ (j = \overline{1,M}).$$

Позначимо:

$$F = \max_{1\le j\le M} \|F_j(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)},$$

$$P = \max\left(\max_{1\le j\le M}\max_{1\le s\le M}\|P_{js1}(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon)0;\theta)}, \max_{1\le j\le M}\max_{1\le s\le M}\|P_{js2}(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon)0;\theta)}\right),$$

$$R = \max\left(\max_{1\le j\le M}\max_{1\le s\le M}\|R_{js1}(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon)0;\theta)}, \max_{1\le j\le M}\max_{1\le s\le M}\|R_{js2}(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon)0;\theta)}\right),$$

$$H = \max\left(\max_{1\le j\le M}\|H_{j1}(t,\varepsilon)\|_{S_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)},\ \max_{1\le j\le M}\|H_{j2}(t,\varepsilon)\|_{S_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right).$$

Тоді

$$\|Y_j^{\nu+1}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\|_{F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \le \mu K_1\left(F + 2^{2m}H^2Md + 2^{3m}R^2Md^2\right) + \varepsilon 2^m Hd. \quad (20)$$

Очевидно, що існують $\mu_1 \le \mu_0$, $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, що для будь-яких $\mu \in [0,\mu_1)$ і для будь-яких $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ права частина нерівності (20) буде менше, ніж $d_0 \le d$. Тоді для цих значень μ і ε наближення $Y_j^{\nu+1}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j = \overline{1,M})$ належить області Ω. Таким чином, методом математичної індукції встановлено, що всі наближення $Y_j^{\nu}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j = \overline{1,M};\ \nu = 0,1,2,\ldots)$ залишаються всередині області Ω.

Доведемо тепер збіжність процесу (19) за нормою $\|\ \cdot\ \|_{F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)}$. Маємо:

$$\frac{d(Y_j^{\nu+1} - Y_j^{\nu})}{dt} = D_{j1}(t,\varepsilon)(Y_j^{\nu+1} - Y_j^{\nu}) - (Y_j^{\nu+1} - Y_j^{\nu})D_{j2}(t,\varepsilon) +$$

$$+\mu\sum_{s=1}^{M} P_{js1}(t,\varepsilon,\theta)(Y_s^{\nu} - Y_s^{\nu-1})P_{js2}(t,\varepsilon,\theta) - \mu Y_j^{\nu}\sum_{s=1}^{M} R_{js1}(t,\varepsilon,\theta)(Y_s^{\nu} - Y_s^{\nu-1})R_{js2}(t,\varepsilon,\theta) -$$

$$-\mu(Y_j^{\nu} - Y_j^{\nu-1})\sum_{s=1}^{M} R_{js1}(t,\varepsilon,\theta)Y_s^{\nu-1}R_{js2}(t,\varepsilon,\theta) -$$

$$-\varepsilon H_{j1}(t,\varepsilon)(Y_j^{\nu} - Y_j^{\nu-1}) - \varepsilon(Y_j^{\nu} - Y_j^{\nu-1})H_{j2}(t,\varepsilon),\ j = \overline{1,M},\ \nu = 1,2,\ldots. \quad (21)$$

Позначимо

$$\delta_{\nu} = \max_{1\le j\le M}\|Y_j^{\nu+1} - Y_j^{\nu}\|_{F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Тоді отримуємо:

$$\delta_{\nu} \le \mu K_1\left(2^{2m}P^2M\delta_{\nu-1} + 2^{3m+1}MR^2d\delta_{\nu-1}\right) + \varepsilon H 2^{m+1}\delta_{\nu-1}. \quad (22)$$

Очевидно, що існують такі $\mu_2 \leq \mu_1$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, що для будь-яких $\mu \in [0, \mu_2)$ і для будь-яких $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ права частина нарівності (22) буде менше, ніж $q_0\delta_{\nu-1}$, де $0 < q_0 < 1$. Отже:

$$\delta_\nu \leq q_0\delta_{\nu-1},\ 0 < q_0 < 1. \tag{23}$$

Тим самим доведено збіжність процесу (19). Очевидно, що граничні функції $Y_j(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ $(j = \overline{1, M})$ належать до класу $F_2(m-1; \varepsilon_2; \theta)$.

Лему 2 доведено.

Повернемось тепер до системи (2) і здійснимо в ній перетворення (3). Відносно невідомих функцій $Q_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ $(j, k = \overline{1, M})$ отримаємо систему:

$$\frac{dQ_{jk}}{dt} = A_j(t,\varepsilon)Q_{jk} - Q_{jk}A_k(t,\varepsilon) + \mu(B_{jj}(t,\varepsilon,\theta)Q_{jk} - Q_{jk}B_{kk}(t,\varepsilon,\theta)) + \mu B_{jk}(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+\mu \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j, s\neq k)}}^{M} B_{js}(t,\varepsilon,\theta)Q_{sk} - \mu Q_{jk} \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq k)}}^{M} B_{ks}(t,\varepsilon,\theta)Q_{sk}, \quad j,k = \overline{1,M}\ (j \neq k). \tag{24}$$

При цьому для матриць $V_j(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ $(j = \overline{1, M})$ дістанемо:

$$V_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \mu B_{jj}(t,\varepsilon,\theta) + A_j(t,\varepsilon) + \mu \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j)}}^{M} B_{js}(t,\varepsilon,\theta)Q_{sj},\ j = \overline{1,M}. \tag{25}$$

Лема 3. *Нехай матриці $A_j(t, \varepsilon)$ $(j = \overline{1, M})$ в системі (24) такі, що існують матриці $L_j(t, \varepsilon)$ $(j = \overline{1, M})$, що задовольняють наступні умови:*

1) $L_j(t, \varepsilon) \in S_2(m; \varepsilon)$ $(j = \overline{1, M})$,

2) $|\det L_j(t, \varepsilon)| \geq a_0 > 0$ $(j = \overline{1, M})$,

3) $L_j^{-1}(t, \varepsilon)A_j(t, \varepsilon)L_j(t, \varepsilon) = \Delta_j(t, \varepsilon)$ $(j = \overline{1, M})$, де $\Delta_j(t, \varepsilon)$ $(j = \overline{1, M})$ – нижні трикутні матриці N-го порядку, що належать до класу $S_2(m; \varepsilon_0)$.

Тоді підстановкою

$$Q_{jk} = L_j(t,\varepsilon)Y_{jk}L_k^{-1}(t,\varepsilon)\ (j,k = \overline{1,M}, j \neq k) \tag{26}$$

система (24) приводиться до вигляду:

$$\frac{dY_{jk}}{dt} = \Delta_j(t,\varepsilon)Y_{jk} - Y_{jk}\Delta_k(t,\varepsilon) - L_j^{-1}(t,\varepsilon)\frac{dL_j(t,\varepsilon)}{dt}Y_{jk} + Y_{jk}L_k^{-1}(t,\varepsilon)\frac{dL_k(t,\varepsilon)}{dt} +$$

$$+\mu\left(L_j^{-1}(t,\varepsilon)B_{jj}(t,\varepsilon,\theta)L_j(t,\varepsilon)Y_{jk} - Y_{jk}L_k^{-1}(t,\varepsilon)B_{kk}(t,\varepsilon,\theta)L_k(t,\varepsilon)\right) +$$

$$+\mu L_j^{-1}(t,\varepsilon)B_{jk}(t,\varepsilon,\theta)L_k(t,\varepsilon) + \mu \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j, s\neq k)}}^{M} L_j^{-1}(t,\varepsilon)B_{js}(t,\varepsilon,\theta)Y_{sk} -$$

$$-\mu Y_{jk} \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq k)}}^{M} L_k^{-1}(t,\varepsilon)B_{ks}(t,\varepsilon,\theta)L_s(t,\varepsilon)Y_{sk},\ j,k = \overline{1,M}\ (j \neq k). \tag{27}$$

Доведення. Щоб переконатися в справедливості леми 3, достатньо в системі (24) здійснити підстановку (26) і використати умови леми.

5. Основний результат. Легко бачити, що система (27) розпадається на M незалежних підсистем $(M-1)$-го порядку, кожна з яких має вигляд (14). Тому справедлива наступна теорема

Теорема 1. *Нехай система (24) задовольняє умови леми 3, а система (27), що отримується з неї за допомогою перетворення (26), при кожному* $k=\overline{1,M}$ *задовольняє всі умови леми 2. Тоді існують* $\mu^*\in(0,\mu_0)$, $\varepsilon^*\in(0,\varepsilon_0)$ *такі, що для будь-яких* $\mu\in[0,\mu^*)$ *і для будь-яких* $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*)$ *існує перетворення вигляду (3), в якому коефіцієнти* $Q_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j,k=\overline{1,M},\ j\neq k)$ *належать до класу* $F_2(m-1;\varepsilon^*;\theta)$, *що приводить систему (2) до вигляду (3), де* $V_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)\in F_2(m-1;\varepsilon^*;\theta)$ $(j=\overline{1,M})$ *визначаються формулами (25).*

Список використаної літератури

1. *Boichuk A. A, Krivosheya S. A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. Differential equations. 2001. V. 37, № 4. P. 464–471.
2. *Чуйко С. М.* Элементы теории линейных матричных уравнений: монография. Славянск, 2017. 163 с.
3. *Чуйко С. М.* О решении обобщённого матричного уравнения Сильвестра. Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. Вып. 1. С. 52–66.
4. *Luis Verde-Star* On linear matrix differential equations. Advances in Applied Mathematics. 2007. 39. P. 329–344.
5. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды: монография. Москва, Физматгиз. 1961. 935 с.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа: монография. Москва, Наука. 1972. 496 с.
7. *Щёголев С.А.* Об одном варианте теоремы полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений. Крайові задачі для дифер. рівнянь. 1999. Чернівецький держ. ун-т ім. Ю. Федьковича. Вип. 4. С. 213-220.

Shchogolev S. A., Karapetrov V. V. Block separation of the system of the linear matrix differential equations.

In the mathematical description of various phenomena and processes that arise in mathematical physics, electrical engineering, economics, one has to deal with matrix differential equations. Therefore, these equations are relevant both for mathematicians and for specialists in other areas of natural science. This article considers a system of M linear matrix differential equations with coefficients representable as Fourier series with coefficients and frequency slowly varying in a certain sense (class F), and this system is close to a block-diagonal system with slowly varying coefficients. A transformation with coefficients of a similar type is sought, which leads this system to a purely block-diagonal form. With respect to the coefficients of this transformation, a quasilinear system of matrix differential equations is obtained, which decomposes into M independent subsystems, each of which has the form of some auxiliary nonlinear system. For this auxiliary system, by the method of successive approximations, conditions are obtained for the existence of class F for its solutions, and then, on the basis of this result, conditions for the existence of the desired transformation are obtained.

Keywords: Matrix differential equations, Fourier series, slowly varying parameters.

References

1. Boichuk, A. A, & Krivosheya, S. A. (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential equations, 37(4)*, 464–471.
2. Chuiko, S. M. (2017). Elementy teorii lineynyih matrichnyh uravneniy [Elements of the theory of linear matrix equations], Slavyansk.
3. Chuiko, S. M. (2015). O reshenii obobshchyonnogo matrichnogo uravneniya Silvestra [On the solutions of the generalized matrix equations of Sylvestr]. *Chebyshevsky sbornik, 16(1)*, 52–66.

4. Luis Verde-Star. (2007). On linear matrix differential equations. *Advances in Applied Mathematics, 39*, 329—344.
5. Bari, N. K. (1961). Triginometrichskye ryady [Trigonometric series], Moskva: Fizmatgiz.
6. Kolmogorov, A. N, & Fomin, S. V. (1972). Functsionalnyi analiz [Functional analysis], Moskva: Nauka.
7. Shchogolev, S. A. (1999). Ob odnom varyante teoremy polnogo razdelenya lineynoy odnorodnoy systemy differentsialnyh uravneniy [On one variant of the theorem of the full separation of the linear homogeneous system of the differential equations]. *Krayovi zadachi dlya diferentsialnyh rivnyany, 4*, 213–220.

Одержано 10.03.2021