МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
Факультет інформаційних технологій
Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

Г. Е. Копча-Горячкіна

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Електронний посібник

Ужгород-2019

Копча-Горячкіна Галина Ернестівна

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ Електронний посібник для студентів факультету інформаційних технологій напряму „Комп'ютерні науки" спеціальності „Інформаційні управляючі системи та технології". – Ужгород, 2019 р.

Електронний посібник містить деякі теоретичні відомості, опис предмета навчальної дисципліни у відповідності до болонського процесу, навчально-тематичний план дисципліни «Чисельні методи», зміст лекційних тем курсу, тем лабораторних занять та тем самостійної роботи студентів, перелік питань для модульних контролів та на залік, літературу.

Друкується за рішенням кафедри інформаційних управляючих систем та технологій факультету інформаційних технологій ДВНЗ «УжНУ»
від 28.08.2019р., протокол № 1.

ЗМІСТ

Вступ

В посібнику розглядаються основні поняття чисельних методів, їх класифікації, характеристики, базові типи математичних задач та реалізація чисельних методів на сучасному етапі розвитку ЕОМ.

Дано опис предмета навчальної дисципліни у відповідності до болонського процесу, навчально-тематичний план дисципліни «Чисельні методи в інформатиці», зміст лекційних тем курсу, тем лабораторних занять та тем самостійної роботи студентів, а також перелік питань на модуль I та модуль II і на залік.

Мета та завдання навчальної дисципліни

Метою дисципліни є ознайомлення студентів з основними чисельними методами розв'язування задач алгебри, аналізу, інтегральних рівнянь та ін.

Завданням дисципліни є вироблення вмінь реалізовувати дані методи на ЕОМ.

В результаті вивчення даного курсу студент повинен

знати: основні чисельні методи розв'язування СЛАР, нелінійних рівнянь, інтегральних рівнянь, чисельного інтегрування та диференціювання.

вміти: реалізовувати дані методи на ЕОМ.

Опис предмета навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Кількість кредитів – 4 (денна форма), 3 (заочна)</td><td>Галузь знань
<u>0501 Інформатика та обчислювальна техніка</u></td><td colspan="2" rowspan="2">Нормативна</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Напрям підготовки:
<u>6.050101 «Комп’ютерні науки»</u></td></tr>
<tr><td>Модулів – 1</td><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 2</td><td>2-й</td><td>3-й</td></tr>
<tr><td>Загальна кількість годин – 120 (денна), 90 (заочна)</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 4
самостійної роботи студента – 4</td><td>4-й</td><td>5-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td rowspan="6">Освітньо-кваліфікаційний рівень:
бакалавр</td><td>32 год.</td><td>6 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>28 год.</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>60 год.</td><td>84 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю: залік</td></tr>
</table>

Примітка.

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить:

для денної форми навчання – 60/60.

для заочної форми навчання – 6/84.

Навчально-тематичний план дисципліни «Чисельні методи»

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин									
	денна форма					заочна форма				
	усього	у тому числі				усього	у тому числі			
		л	п	лаб	с.р.		л	п	лаб	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Змістовий модуль 1. Чисельні методи розв'язування СЛАР.										
Тема 1. Вступ. Математичні моделі та чисельні методи. Коректність поставленої задачі. Структура похибки.	6	2		2	2	8	2			6
Тема 2. Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Метод виключення Гаусса, розв'язування за формулами Крамера та ін. методи. Визначник та обернена матриця.	26	4		8	14	16				16
Тема 3. Обчислення значень елементарних функцій. Обчислення значень многочлена за схемою Горнера.	8	2		2	4	8				8
Тема 4. Обчислення значень функції методом ітерацій.	12	2		2	8	8				8
Разом за змістовим модулем 1	**52**	**10**		**14**	**28**	**40**	**2**			**38**
Змістовий модуль 2. Чисельне диференціювання та інтегрування, розв'язування рівнянь.										
Тема 1. Методи розв'язування нелінійних рівнянь. Графічне та аналітичне відокремлення коренів нелінійного рівняння.	6	2		2	2	8	1			7
Тема 2. Уточнення коренів методом дихотомії (методом поділу відрізка навпіл).	4	2			2	3				3
Тема 3. Уточнення коренів методом хорд, методом дотичних та комбінованим	12	4		6	2	7	1			6

методом.										
Тема 4. Інтерполяція та екстраполяція функцій. Знаходження значень функцій за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа та Ньютона.	6	4			2	6				6
Тема 5. Чисельне диференціювання. Знаходження першої і другої похідної функції за допомогою формул, побудованих на інтерполяційних формулах Ньютона, Лагранжа, Гаусса, Стірлінга, Бесселя.	8	4			4	6				6
Тема 6. Чисельне інтегрування. Обчислення визначених інтегралів за формулами прямокутників (лівих, правих, середніх).	6	2		2	2	6	1			5
Тема 7. Обчислення визначених інтегралів за формулами трапецій і Сімпсона. Вибір кроку інтегрування. Квадратура Гаусса.	14	4		4	6	8	1			7
Тема 8. Наближене розв’язування диф.рівнянь.	12				12	6				6
Разом за змістовим модулем 2	**68**	**22**		**14**	**32**	**50**	**4**			**46**
Усього годин	**120**	**32**		**28**	**60**	**90**	**6**			**84**

Зміст лекційних тем курсу

1. Вступ. Математичні моделі та чисельні методи. Коректність поставленої задачі. Структура похибки. [1], с.11-19.
2. Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Метод виключення Гаусса, розв'язування за формулами Крамера та ін. методи. Визначник та обернена матриця. [1], с.19-23, 26-41.
3. Обчислення значень елементарних функцій. Обчислення значень многочлена за схемою Горнера. [3], с.54-56.
4. Обчислення значень функції методом ітерацій. [3], с.56-58.
5. Методи розв'язування нелінійних рівнянь. Графічне та аналітичне відокремлення коренів нелінійного рівняння. [2], с.76-103, [1], с.169-170.
6. Уточнення коренів методом дихотомії (методом поділу відрізка навпіл). [1], с.170-172.
7. Уточнення коренів методом хорд, методом дотичних та комбінованим методом. [1], с.178-192.
8. Інтерполяція та екстраполяція функцій. Знаходження значень функцій за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа та Ньютона. [1], с.130-145.
9. Чисельне диференціювання. Знаходження першої і другої похідної функції за допомогою формул, побудованих на інтерполяційних формулах Ньютона, Лагранжа, Гаусса, Стірлінга, Бесселя. [1], с.211-221, [3], с.124-127.
10. Чисельне інтегрування. Обчислення визначених інтегралів за формулами прямокутників (лівих, правих, середніх). [1], с.221-227.
11. Обчислення визначених інтегралів за формулами трапецій і Сімпсона. Вибір кроку інтегрування. Квадратура Гауса. [1], с.227-240.
12. Наближене розв'язування диф.рівнянь. [3], с.143-159.

Теми лабораторних занять

№ п/п	Назва теми	К-сть годин
	Змістовий модуль 1	
1.	Знаходження абсолютної та відносної похибок обчислень	2
2.	Дії над матрицями	2
3.	Знаходження визначника матриці	2
4.	Знаходження оберненої матриці	2
5.	Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом виключення Гаусса	2
6.	Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера	2
7.	Обчислення елементарних функцій за схемою Горнера	2
8.	Обчислення елементарних функцій методом ітерацій	2
	Змістовий модуль 2	
9.	Графічне та аналітичне відокремлення коренів нелінійного рівняня	2
10.	Уточнення коренів нелінійного рівняння методом хорд	2
11.	Уточнення коренів нелінійного рівняння методом дотичних	2

12.	Уточнення коренів нелінійного рівняння комбінованим методом хорд і дотичних	2
13.	Обчислення визначених інтегралів за формулами лівих, правих та середніх прямокутників	2
14.	Обчислення визначених інтегралів за формулою трапецій	2
15.	Обчислення визначених інтегралів за формулою Сімпсона	2

Теми самостійної роботи студентів

№ п/п	Назва теми	К-сть годин
Змістовий модуль1		
1.	Оцінка похибок результату	2
2.	Обернення матриць методом розбиття її в добуток двох трикутних матриць	2
3.	Обернення матриць методом розбиття її на клітки	2
4.	Обернення матриці і обчислення визначника за схемою Гаусса	2
5.	Розв'язування СЛАР методом головних елементів	4
6.	Розв'язування СЛАР методом квадратних коренів	4
7.	Розв'язування СЛАР методом ітерацій	2
8.	Розв'язування СЛАР за схемою Халецького	4
9.	Обчислення значень функції методом розкладу в ряд	4
10.	Обчислення значень функції методом ітерацій	2
Всього за змістовий модуль 1		**28**
Змістовий модуль 2		
11.	Уточнення коренів рівняння методом поділу відрізку навпіл	2
12.	Розв'язування алгебраїчних рівнянь методом Горнера	2
13.	Розв'язування алгебраїчних рівнянь методом Лобачевського	4

14.	Розв'язування алгебраїчних рівнянь методом виділення квадратного множника	4
15.	Наближене розв’язування диф.рівняння методом Ейлера-Коші	4
16.	Наближене розв’язування диф.рівняння методом Ейлера з уточненням	4
17.	Наближене розв’язування диф.рівняння методом Рунге-Кутта і Адамса	4
18.	Наближене розв’язування диф.рівняння методом Мілна	4
19.	Обчислення визначених інтегралів за формулами Гаусса	4
Всього за змістовий модуль 2		**32**

Перелік питань на модуль І

1. Математична модель системи (процесу).
2. Базові типи математичних задач.
3. Чисельні методи. Рекурсивність алгоритму чисельних методів.
4. Критерії, за якими розрізняють чисельні методи.
5. Параметри, які характеризують чисельні методи.
6. Похибки обчислень. Джерела їх виникнення.
7. Абсолютна та відносна похибки. Похибки різних типів операцій.
8. Частини процедур чисельних методів.
9. Стійкість та коректність задачі.
10. Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Точні методи та методи послідовних наближень.
11. Точні методи. Два етапи їх здіснення.
12. Метод виключення Гаусса. Модифікований метод Гаусса.
13. Формули Крамера.
14. Обчислення значень елементарних функцій (за схемою Горнера).
15. Чисельні методи розв'язування нелінійних (алгебраїчни та трансцендентних) рівнянь. Два етапи розв'язування.
16. Відокремлення коренів. Способи відокремлення.
17. Уточнення коренів. Метод поділу відрізка навпіл.
18. Метод хорд, дотичних, комбінований метод.

Перелік питань на модуль II

1. Чисельні методи розв’язування нелінійних (алгебраїчних та трансцендентних) рівнянь. Два етапи розв’язування.
2. Відокремлення коренів. Способи відокремлення.
3. Уточнення коренів. Метод дихотомії.
4. Метод хорд, дотичних, комбінований метод.
5. Задача наближення.Вузли інтерполяції.
6. Визначник Вандермонда .
7. Чисельне диференціювання.
8. Інтерполяційний многочлен Лагранжа.
9. Похибка інтерполяції. Похибка у вузлах інтерполяції.
10. Типи формул диференціювання. Точність формул.
11. Чисельне інтегрування.
12. Формули прямокутників (лівих, правих, середніх).
13. Формули трапецій.
14. Формула Сімпсона для обчислення визначеного інтегралу.
15. Вибір кроку інтегрування.
16. Похибка інтегрування. Точність методів інтегрування.
17. Залишкові члени формул чисельного інтегрування.
18. Метод квадратури Гаусса.
19. Звичайне диференціальне рівняння (ЗДР), порядок, загальний розв’язок.
20. Задача Коші для ЗДР, початкові умови задачі Коші.

Перелік питань на залік

1. Математична модель системи (процесу).
2. Базові типи математичних задач.
3. Чисельні методи. Рекурсивність алгоритму чисельних методів.
4. Критерії, за якими розрізняють чисельні методи.
5. Параметри, які характеризують чисельні методи.
6. Похибки обчислень. Джерела їх виникнення.
7. Абсолютна та відносна похибки. Похибки різних типів операцій.
8. Частини процедур чисельних методів.
9. Стійкість та коректність задачі.
10. Методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Точні методи та методи послідовних наближень.
11. Точні методи. Два етапи їх здійснення.
12. Метод виключення Гаусса. Модифікований метод Гаусса.
13. Формули Крамера.
14. Обчислення значень елементарних функцій (за схемою Горнера).
15. Чисельні методи розв’язування нелінійних (алгебраїчних та трансцендентних) рівнянь. Два етапи розв’язування.
16. Відокремлення коренів. Способи відокремлення.
17. Уточнення коренів. Метод дихотомії.
18. Метод хорд, дотичних, комбінований метод.
19. Задача наближення.Вузли інтерполяції.
20. Визначник Вандермонда .
21. Чисельне диференціювання.
22. Інтерполяційний многочлен Лагранжа.
23. Похибка інтерполяції. Похибка у вузлах інтерполяції.
24. Типи формул диференціювання. Точність формул.
25. Чисельне інтегрування.
26. Формули прямокутників (лівих, правих, середніх).

27. Формули трапецій.
28. Формула Сімпсона для обчислення визначеного інтегралу.
29. Вибір кроку інтегрування.
30. Похибка інтегрування. Точність методів інтегрування.
31. Залишкові члени формул чисельного інтегрування.
32. Метод квадратури Гаусса.
33. Звичайне диференціальне рівняння (ЗДР), порядок, загальний розв’язок.
34. Задача Коші для ЗДР, початкові умови задачі Коші.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

Як відомо, для розв’язання прикладної задачі потрібно використовувати математичну модель.

Під математичною моделлю фізичної системи, об’єкта або процесу розуміють сукупність математичних співвідношень (формул, рівнянь, логічних виразів), які визначають характеристики стану і властивості системи, об’єкта і процесу та їх функціонування залежно від параметрів їх компонентів, початкових умов, вхідних збуджень і часу.

Тобто, математична модель описує функціональну залежність між вихідними залежними змінними, через які відображається функціонування системи, незалежними (такими, як час) і змінюваними змінними (такими, як параметри компонентів, геометричні розміри), а також вхідними збудженнями, прикладеними до системи.

Ця функціональна залежність, що відображається математичною моделлю, може бути явною, чи неявною, тобто може бути зображена або як просте алгебраїчне співвідношення, або як велика за розміром сумісна система диференціально-алгебраїчних рівнянь.

Сучасні комп’ютери дозволяють у багатьох випадках відмовитися від макетування проектованих виробів, замінивши його математичним моделюванням (обчислювальним експериментом), що дуже важливо, коли натурне макетування або дуже складне, або взагалі неможливе (наприклад: макетування прориву дамби або дії смерчу).

Але при цьому має бути підвищена точність математичної моделі об’єктів та систем. В результаті розмірність і складність математичної моделі істотно зростають, а їх розв’язання в аналітичному вигляді стає неможливим.

Таким чином, одержується нова якість одного параметру (велика точність обчислювального експерименту і відмова від натурного макетування) за рахунок зменшення чи ускладнення іншого параметра (відмова від звичних для вищої математики аналітичних рішень).

Для кожної математичної моделі формулюється математична задача.

У загальному випадку, коли функціональні залежності для множини вхідних даних (значення незалежних та змінюваних змінних і вхідних збуджень), що виступають як множина аргументів, задано неявно, за допомогою математичної моделі необхідно визначити множину вихідних залежних змінних, що виступають як множина значень функції.

При цьому відповідно до виду математичної моделі розрізняють такі базові типи математичних задач:

- розв'язання системи лінійних рівнянь;
- розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь;
- апроксимація масиву даних або складної функції набором стандартних, більш простих функцій;
- чисельне інтегрування і диференціювання;
- розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь;
- розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних;
- розв'язання інтегральних рівнянь.

Прості математичні задачі малої розмірності, що вивчаються в курсі вищої математики допускають можливість отримання аналітичних рішень. Складні математичні моделі великої розмірності вимагають застосування чисельних методів.

Чисельні методи – це математичний інструментарій, за допомогою якого математична задача формулюється у вигляді, зручному для розв'язання на комп'ютері.

В цьому випадку кажуть про перетворення математичної задачі в обчислювальну.

При цьому послідовність виконання необхідних арифметичних і логічних операцій визначається алгоритмом її розв'язання.

Алгоритм повинен бути рекурсивним і складатися з відносно невеликих блоків, які багаторазово виконуються для різних даних.

Чисельні методи є надзвичайно потужним інструментарієм для розв'язання проблемних задач, що описуються довільними нелінійними диференціально-алгебраїчними рівняннями великої розмірності, для яких на даний час не існує аналітичних рішень.

Освоївши такі методи, можна набути здібностей до системного аналізу через математичне моделювання найскладніших задач сучасної науки і техніки.

Деякі задачі можна розв'язувати за допомогою програмних пакетів, але деякі – ні.

Але знаючи чисельні методи і володіючи елементарними навичками програмування, можна самостійно провести розробку необхідного алгоритму і програмно його реалізувати.

Вивчення чисельних методів сприяє переосмисленню і більш глибокому розумінню математики в цілому, оскільки однією з задач чисельних методів є зведення методів вищої математики до виконання простих арифметичних операцій.

Хоч існує безліч чисельних методів, усі вони (як і алгоритми, що їм відповідають) мають багато спільних властивостей і характеристик.

Чисельні методи:

- передбачають проведення великої кількості рутинних арифметичних обчислень за допомогою рекурсивних співвідношень, що використовуються для організації ітерацій, тобто повторюваних циклів обчислень зі зміненими початковими умовами для покращення результату;
- направлені на локальне спрощення задачі, коли, наприклад, деякі нелінійні залежності лінеаризуються за допомогою своїх обчислених похідних або похідні замінюються різницевими апроксимаціями;
- значно залежать від близькості початкового наближення (або декількох наближень), необхідного для початку обчислень до

розв’язку від властивостей нелінійних функцій, які використовуються в математичних моделях, що накладає обмеження (для забезпечення єдиного розв’язку) на їх диференційованість, на швидкість зміни функцій та інше.

Чисельні методи характеризуються:

- різною швидкістю збіжності, тобто числом ітерацій, виконання яких необхідне для отримання заданої точності розв’язку;
- різною стійкістю, тобто збереженням достовірності розв’язку під час подальших ітерацій;
- різною точністю отримуваного розв’язку в разі виконання однакового числа ітерацій або циклів обчислень.

Чисельні методи розрізняються:

- за широтою і легкістю застосування, тобто за ступенем своєї універсальності та інваріантності для розв’язання різних математичних задач;
- за складністю їх програмування;
- за можливостями використання у разі їх реалізації наявних бібліотек, функцій і процедур, створених для підтримки різних алгоритмічних мов;
- за ступенем чутливості до погано обумовлених (або некоректних) математичних задач, коли малим змінам вхідних даних можуть відповідати великі зміни розв’язку.

ПОХИБКИ ОБЧИСЛЕНЬ

Є декілька джерел похибок обчислень:

- похибки вхідних даних і спрощення моделей компонентів;
- округлення під час обчислень, локальні відсікання;
- похибки зображень чисел у комп'ютері.

Розрізняють також <u>глобальну похибку</u>, як різницю точного і обчисленого значень, і локальну похибку, як похибку методу в основному обумовлену відсіканням частини ряду Тейлора, тому обмежену значенням першого неврахованого члену цього ряду.

Нехай a – точне значення величини, $\tilde{a}$ – наближене значення цієї величини, тоді:

$\varepsilon = |a - \tilde{a}|$ – абсолютна похибка; $\Delta(\tilde{a})$ – абсолютна похибка наближеного значення.

$\delta(\tilde{a}) = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ – відносна похибка.

Під час виконання арифметичних операцій похибки обчислень тільки накопичуються, незалежно від типу операції, що виконується:

$$\Delta(a_1 + a_2) = \Delta a_1 + \Delta a_2,$$

$$\Delta(a_1 - a_2) = \Delta a_1 + \Delta a_2,$$

$$\delta(a_1 a_2) = \delta(a_1) + \delta(a_2),$$

$$\delta(a_1 \mid a_2) = \delta(a_1) + \delta(a_2).$$

Похибки в разі обчислення функції *y=f(x)* залежно від похибки аргументу $\Delta x = x - x_0$ оцінюються відсіканням частини ряду Тейлора. В результаті одержуємо оцінку <u>абсолютної похибки</u>, як

$$\Delta(f(x)) \cong |f'(x_0)|\Delta x$$

і <u>відносної похибки</u>, як

$$\delta[f(x_0)] \cong |f'(x)/f(x_0)|\Delta x.$$

Для функції багатьох аргументів *y=f(x₁,x₂,…, xₙ)* формула максимальної абсолютної похибки така:

$$|\Delta y| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial y(\overline{x})}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i| \quad (*)$$

Наприклад, потрібно обчислити і визначити похибки результату.

Дано $x = \frac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}$, де $m = 28{,}3(\pm 0{,}02), n = 7{,}45(\pm 0{,}01), k = 0{,}678(\pm 0{,}003)$.

Знаходимо $m^2 = 28{,}3^2 = 800{,}89 = 800{,}9$,

$$n^3 = 7{,}45^3 = 413{,}49362 = 413{,}5,$$

$$\sqrt{k} = \sqrt{0{,}678} = 0{,}8234075 = 0{,}8234.$$

Підставляємо у формулу для *x*:

$$x = \frac{800{,}9 * 413{,}5}{0{,}8234} = \frac{331172{,}15}{0{,}8234} = 4{,}0220081 * 10^5 = 4{,}02 * 10^5.$$

Знаходимо відносну похибку:

$$\delta_m = \frac{0{,}02}{28{,}3} = 0{,}0007067 = 0{,}00071$$

$$\delta_n = \frac{0{,}01}{7{,}45} = 0{,}0013422 = 0{,}00134$$

$$\delta_k = \frac{0{,}003}{0{,}678} = 0{,}0044247 = 0{,}00442$$

$$\delta_x = 2\delta_m + 3\delta_n + 0{,}5\delta_k = 2 * 0{,}0071 + 3 * 0{,}00134 + 0{,}5 * 0{,}00442 =$$
$$= 0{,}00142 + 0{,}00402 + 0{,}00221 = 0{,}00765 = 0{,}0077 \quad .$$

$$\alpha_x = |x| * \delta_x = 4{,}02 * 10^5 * 0{,}0076 = 0{,}030954 * 10^5 = 3{,}1 * 10^3$$

Відповідь: $\begin{array}{l} x = 4{,}02*10^5(\pm 3{,}1*10^3) \\ \delta_x = 0{,}0077 \end{array}$.

Завдання 2.

Обчислити і визначити похибки результату.

$$N = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}, \text{ де } \begin{array}{l} n = 3{,}0567(\pm 0{,}0004) \\ m = 5{,}72(\pm 0{,}02) \end{array}.$$

Маємо:

$$\begin{array}{l} n-1 = 3{,}0567(\pm 0{,}0004) - 1 = 2{,}0567(\pm 0{,}0004) \\ m+n = 5{,}72(\pm 0{,}02) + 3{,}0567(\pm 0{,}0004) = 8{,}777(\pm 0{,}0204) \\ m-n = 5{,}72(\pm 0{,}02) - 3{,}057(\pm 0{,}0004) = 2{,}663(\pm 0{,}0204) \end{array}.$$

Знаходимо N:

$$\begin{array}{l} N = \dfrac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2} = \dfrac{2{,}0567*8{,}777}{2{,}663^2} = 2{,}545 \approx 2{,}55 \\ \delta_N = \dfrac{0{,}0004}{2{,}0567} + \dfrac{0{,}0204}{8{,}777} + 2*\dfrac{0{,}0204}{2{,}663} = 0{,}000019 + 0{,}00232 + 0{,}01532 \\ L_N = 2{,}55*0{,}0177 = 0{,}045 \end{array}$$

Відповідь: $N \approx 2{,}55(\pm 0{,}045), \delta_n = 0{,}0177$

Обумовленість конкретного алгоритму C_A (тобто залежність максимально можливого відхилення результату від похибок вхідних даних) характеризує процес накопичення похибок під час обчислень.

Існують задачі прямого аналізу похибок, коли відомі збурені вхідні дані та вихідні дані, оброблені за деяким точним алгоритмом, і задача оберненого аналізу похибок.

Наприклад, оцінити похибку обчислення функції $y=x^2_1-x_2$ за збурених аргументів. $\begin{array}{l} x_1 = 1{,}03 \pm 0{,}01 \\ x_2 = 0{,}45 \pm 0{,}01 \end{array}$

За формулою (*):

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| = |2x_1| \le 2{,}1$$
$$\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right| = |-1| = 1$$
$$\Delta y \le 2{,}1 * 0{,}01 + 1 * 0{,}01 = 0{,}031$$
$$y = 0{,}611 \pm 0{,}032$$

Для зменшення похибок можна використовувати більшу кількість значущих розрядів або змінювати послідовність обчислень.

Для зменшення обумовленості задачі необхідно змінювати форму зображення вхідних і вихідних величин математичної задачі.

Під час реалізації практичних обчислень зазвичай загально задана похибка розподіляється по кроках обчислень, а потім на кожному кроці здійснюється контроль похибки за локальною оцінкою, оскільки точні значення глобальної похибки невідомі.

Тому в <u>процедурах чисельних методів</u> виділяють три рівноправні частини:

1) обчислення наближення розв'язку за рекурсивною формулою вибраного алгоритму;
2) оцінювання похибки;
3) управління продовженням розв'язування задачі.

Це управління може зводитися до зміни кроку приросту аргументів наявної задачі функціональної залежності (зокрема часового кроку), заміни формули обчислення наближення розв'язку, зміни значень загальної заданої похибки розв'язку і допустимої кількості ітерацій.

За всіх інших умов найкращим буде розв'язок, отриманий у результаті виконання меншої кількості ітерацій.

Похибки у вхідних даних задачі – неусувні. Обчислювач не може їх змінити, але повинен знати, як вони впливають на точність кінцевого результату. Чутливість задачі до неточностей у вхідних даних характеризується поняттям стійкості. Задача називається стійкою за вхідними даними, якщо її розв'язок неперервно залежить від вхідних даних, тобто малі похибки вхідних даних спричиняють малі похибки розв'язку задачі. Якщо ця умова не виконується, то задача вважається нестійкою за вхідними даними.

Задача називається коректно поставленою, якщо для будь-яких вхідних даних існує єдиний і стійкий за вхідними даними її розв'язок. Для розв'язання некоректно поставлених задач застосовувати класичні чисельні методи не варто, оскільки похибки округлень при розрахунках можуть катастрофічно зростати і призвести до результату, далекого від шуканого розв'язку. Для розв'язання некоректно поставлених задач використовують так звані методи регуляризації, які замінюють дану задачу коректно поставленою.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (СЛАР).

СЛАР (системи лінійних алгебраїчних рівнянь) найбільш прості, але в той же час до них зводиться багато задач чисельного аналізу.

Є багато різних способів розв’язку СЛАР.

Методи розв’язування СЛАР, які використовуються на практиці, можна розділити на дві великі групи:

Точні методи характеризуються тим, що з їх допомогою можливо, провівши скінчене число операцій, одержати точні значення невідомих.

При цьому припускається, що коефіцієнти і праві частини системи відомі точно, а всі обчислення здійснюються без заокруглень.

Частіше вони здійснюються в два етапи:

на першому етапі перетворюють систему до того чи іншого простого виду;

на другому – розв'язують спрощену систему і отримують значення невідомих.

<u>Методи послідовних наближень</u> характеризуються тим, що з самого початку задаються деякими наближеними значеннями невідомих.

Із цих наближених значень тим чи іншим способом отримують нові покращені наближені значення.

З новими наближеними значеннями поступають аналогічно.

При виконанні певних умов можна прийти, після великої кількості кроків, до точного розв'язку.

Метод виключення Гаусса

Найпростішим з точних методів являється метод виключення.

З цим методом ми вже зустрічалися в звичайному шкільному курсі алгебри.

Комбінуючи яким-небудь способом рівняння системи, домагаються того, що у всіх рівняннях, крім одного, буде виключено одне з невідомих. Потім виключають друге невідоме, третє і так далі.

В результаті отримуємо систему з трикутною чи діагональною матрицею, розв'язання якої не викликає труднощів.

Але точність результату і час, затрачений на його отримання, залежать від організації обчислень.

Нехай дана довільна СЛАР (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + ax_{2n} = в_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots\ldots + a_{sn}x_n = в_s \end{cases} \qquad (1)$$

Нехай $a_{11} \neq 0$.

Перетворимо систему (1), виключаючи невідоме x_1 із всіх рівнянь, крім першого. Для цього обидві частини першого рівняння помножимо на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ і від другого рівняння віднімемо це рівняння (від усіх його відповідних частин). Потім обидві частини першого рівняння, помножені на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, віднімаються від відповідних частини третього рівняння і так далі.

Ми дійдемо цим шляхом до нової системи з s лінійних рівнянь з n невідомими: (2)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots. + a_{1n}x_n = в_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = в'_2 \\ \qquad a'_{32}x_2 + a_{33}x_{33} + \ldots + a'_{3n}x_n = в'_3 \\ \quad . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{s2}x_2 + a_{s3}x_3 + \ldots + a'_{sn}x_n = в'_s \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) еквівалентна системі (1).

Будемо перетворювати систему (2).

Перше рівняння залишаємо без змін. Будемо перетворювати всю систему, крім першого рівняння.

При цьому вважаємо, що серед цих рівнянь немає таких, всі коефіцієнти лівих частин яких дорівнюють нулю. Такі рівняння ми би відкинули, якби їх вільні члени дорівнювали нулю. В протилежному випадку ми би вже довели несумісність нашої системи.

Таким чином, серед коефіцієнтів a'_{ij} є відмінні від нуля, нехай $a'_{22} \neq 0$.

Перетворимо тепер систему (2), віднімаючи від обох частин третього і кожного з наступних рівнянь обидві частини другого рівняння, попередньо помноживши відповідно на числа:

$$\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, \frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \ldots\ldots, \frac{a'_{s2}}{a'_{22}}$$

Таким чином, буде виключено невідоме x_2 із всіх рівнянь, крім першого і другого. Одержимо наступну систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots\ldots + a'_{2n}x_n = в'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots\ldots + a''_{3n}x_n = в''_3 \\ \qquad\qquad a''_{t3}x_3 + \ldots\ldots + a''_{tn}x_n = в''_t \end{cases} \qquad (2^*)$$

Наша система містить тепер t рівнянь, $t \leq s$, бо деякі могли бути відкинуті.

Тепер будемо перетворювати частину системи, яка містить всі рівняння, крім перших двох. Аналогічними діями послідовно виключаємо невідомі.

Якщо ми прийдемо до такої системи, одне з рівнянь якої має відмінний від нуля вільний член, а всі коефіцієнти лівої частини дорівнюють нулю, то наша вихідна система буде несумісною.

В противному випадку ми отримаємо наступну систему рівнянь, еквівалентну системі (1).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a_{2,k-1}x_{k-1} + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = в'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a^{(k-2)}_{k-1,k-1}x_{k-1} + a^{(k-2)}_{k-1,k}x_k + \ldots + a^{(k-2)}_{k-1,n}x_n = в^{(k-2)}_{k-1} \\ \qquad\qquad\qquad a^{(k-1)}{}_{kk}x_k + \ldots + a^{(k-1)}{}_{kn}x_n = в_k{}^{(k-1)} \end{cases} \tag{3}$$

Тут

і $k \le s$ і $k \le n$. $a_{11} \ne 0, a'_{22} \ne 0, \ldots, a^{(k-2)}{}_{k-1,k-1} \ne 0, a_{kk}{}^{(k-1)} \ne 0$

В цьому випадку система (1) сумісна. Вона є визначеною при $k = n$ і невизначеною при $k < n$.

Дійсно, якщо $k = n$, то система (3) має вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = в'_2 \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}{}^{(n-1)}x_n = в_n{}^{(n-1)} \end{cases} \tag{4}$$

З останнього рівняння одержимо цілком певне значення для невідомого x_n.

Підставляючи його в передостаннє рівняння, ми знайдемо однозначно визначене x_{n-1}. Продовжуючи аналогічно, знайдемо, що система (4), а отже, і система (1), мають єдиний розв'язок, тобто сумісні і визначені.

Якщо $k < n$, то для вільних невідомих $x_{k+1}, \ldots, x_n$ візьмемо довільні числові значення, після чого, рухаючись по системі (3) знизу вверх, знайдемо для невідомих $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1$ цілком певні значення.

Так як значення для вільних невідомих можна вибрати нескінченним числом способів, то наша система (3), а, отже, і система (1) будуть сумісними, але невизначеними.

Даним методом (при різноманітних виборах значень для вільних невідомих) будуть знайдені всі розв'язки системи (1).

«Трикутна» форма системи рівнянь (4) або «трапецієдальна» форма системи рівнянь (3) (при $k < n$), була одержана з припущення, що коефіцієнти $a_{11}, a'_{22}, \ldots$ відмінні від нуля.

В загальному випадку та система рівнянь, до якої прийдемо після доведення до кінця процесу виключення невідомих, буде мати трикутну або трапецієдальну форму лише після необхідної зміни нумерації.

Таким чином, метод Гаусса застосовний до будь-якої системи лінійних рівнянь. При цьому система буде несумісна, якщо в процесі перетворень ми отримаємо рівняння, в якому коефіцієнти при всіх невідомих рівні нулю, а вільний член відмінний від нуля; якщо ж такого рівняння не існує, то система буде сумісною. Сумісна система рівнянь буде визначеною, якщо вона зводиться до трикутного виду (4), і невизначеною, якщо зводиться до трапецієдального виду (3) при $k < n$.

Цей метод застосовний і до СЛОР, тобто рівнянь, вільні члени яких рівні нулю. Така система завжди сумісна, бо має нульовий розв'язок $(0,0,\ldots,0)$.

Нехай в розглядуваній системі число рівнянь менше числа невідомих. Тоді наша система не може зводитися до трикутного виду, бо в процесі перетворень по методу Гаусса число рівнянь може зменшуватися, але не може збільшуватися; отже, вона зводиться до трапецієдального вигляду, тобто невизначена.

Якщо в СЛОР число рівнянь менше числа невідомих, то ця система має, крім нульового розв'язку, також і ненульові розв'язки, тобто розв'язки, в яких значення деяких (або навіть всіх) невідомих відмінні від нуля; таких розв'язків буде нескінченно багато.

Будемо виписувати матрицю з коефіцієнтів системи, приєднавши до неї стовпчик із вільних членів, відділених вертикальною рискою, і всі перетворення здійснювати над рядками цієї розширеної матриці.

Приклад. Розв'язати систему: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

Переходимо до системи:

$$\left.\begin{array}{l} x1 + 2x2 + 5x3 = -9 \\ -32 - 2x3 = 11 \\ -8x3 = 8 \end{array}\right\}$$

Отже, наша система має єдиний розв'язок:

x_1=2, x_2=-3, x_3=-1, і значить є сумісною.

Але іноді в чисельних методах використовують <u>модифікований метод Гаусса.</u> Суть його полягає в тому, щоб аналогічними перетвореннями перетворити всі діагональні елементи на одиниці.

Цей спосіб є зручним при складанні алгоритмів та написанні програм для обчислень СЛАР.

Продемонструємо його на цьому ж прикладі:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{52}{12} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ & & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ & & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\frac{x_3 = -1}{x_2 = -\frac{11}{3}} - \frac{2}{3}x_3$$

$$x_2 = -\frac{11}{3} + \frac{2}{3}$$

$$x_2 = -3$$

$$x_1 = -9 - 5x_3 - 2x_2$$

$$x_1 = -9 - 5*(-1) - 2*(-3)$$

$$x_1 = -9 + 5 + 6$$

$$x_1 = 2$$

Одержимо розв’язок: x_1=2, x_2=-3, x_3=-1.

Метод Крамера

Якщо визначник системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ ax_{2n} = в_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...+ a_{nn}x_n = в_n \end{cases}$$

$$\Delta = \mathrm{detA} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

то вона має єдиний розв'язок. Цей розв'язок можна обчислити за формулами Крамера

x_k =det A_k / det A, (k=1,2,…,n),

де матрицю A_k одержують з матриці A, замінивши її k-вий стовпець стовпцем вільних членів.

ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Обчислення значень многочлена за схемою Горнера.

Нехай дано рівняння $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$

а) якщо корінь має вигляд : $x = c_0 * 10^m + c_1 * 10^{m-1} + \ldots$, то потрібно попередньо зробити підстановку $x = 10^m z$ при $x > 0$ або $x = -10^m z$ при $x < 0$. В результаті одержуємо рівняння, відповідний корінь якого належить відрізку $[0,10]$

б) якщо шуканий корінь даного рівняння належить відрізку $[0,10]$, то для визначення цифри c_0 користуються безпосереднім підрахунком значень $f(x)$ при x=0,1,2,…,10 за схемою Горнера.

Потім виконують дві підстановки $y=x-c_0$ і $z=10y$, використовують для першої із них схему Горнера. За допомогою одержаного рівняння визначають цифру c_1.

Всі наступні цифри кореня визначаються аналогічно.

<u>Завдання</u>. Використовуючи схему Горнера, скласти таблицю значень многочлена на відрізку $[0{,}5;2{,}0]$, крок h=0,25.

Обчислення виконати з точністю до 0,0001, відповідь закруглити до тисячних.

$$P(x) = 0{,}883x^5 - 1{,}217x^4 + 1{,}452x^3 + 0{,}572x^2 - 2{,}343x + 1{,}158 .$$

Потрібно скласти таблицю, яка містить всі проміжкові результати і значення шуканого многочлена:

x_i	0,883	-1,217	1,452	0,572	-2,343	1,158
0,50	0,883	-0,7755	1,06425	1,1041	-1,7909	0,2625

0,75	0,883	-0,5547	1,0359	1,3490	-1,3313	0,1595
1,00	0,883	-0,3340	1,1180	1,6900	-0,6530	0,5050
1,25	0,883	-0,1132	1,3104	2,2100	0,9721	2,3731
1,50	0,883	0,1075	1,6132	2,9919	2,1448	4,3752
1,75	0,883	0,3282	2,0264	4,1183	4,8640	9,6699
2,00	0,883	0,5490	2,550	5,6720	9,0010	19,1600

У верхньому рядку таблиці записуються коефіцієнти a_i даного многочлена, у першому стовпці – значення аргумента *x*.

Інші рядки містять значення b_i , які за схемою Горнера знаходяться за єдиною формулою: $b_i = b_{i-1}x + a_i, (i = 1,2,3,4,5); b_0 = a_0$.

В останньому стовпці таблиці одержуються значення многочлена *P(x)*. Заокруглюючи їх до тисячних, одержуємо відповідь.

x_i	$P(x_i)$
0,50	0,263
0,75	0,160
1,00	0,505
1,25	2,373
1,50	4,375
1,75	9,670
2,00	19,160

Обчислення значень функцій методом ітерацій

Завдання. Обчислити значення функцій за заданими значеннями аргументу методом ітерацій з шістьма вірними значущими цифрами. Для визначення початкових значень використати метод прикидки. Виконати перевірку результатів.

$y = \sqrt{x};$ при а) $x_1 = 14{,}76;$, б) $x_2 = 0{,}142$

Для розв'язання задачі методом ітерацій складаємо послідовність наближених значень шуканої функції $y_0, y_1, y_2, ..., y_i, \ldots,$ яка збігається до точного значень *y(x).* Обчислення продовжуємо до збіжності з заданою точністю.

1) При обчисленні значень функцій $y(x) = \sqrt{x}$ члени послідовності визначаємо за формулою: $y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_i + \frac{x}{y_i}); (i = 0,1,2,3,...)$,

де y_0 підбираємо прикидкою з однією або двома вірними цифрами.

а) При $x = 14{,}76$ маємо $y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_i + \frac{14{,}76}{y_i})$.

Нехай $y_0 = 3{,}8$.

Складаємо таблицю значень членів послідовності:

i	y_i
0	3,8
1	3,842105
2	3,841874
3	3,841874

Шуканим значенням являється $\sqrt{14{,}76} \approx y_3 \approx 3{,}84187$. Для перевірки знаходять квадрат знайденого числа.

б) При $x = 0{,}142$ маємо $y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_i + \frac{0{,}142}{y_i})$.

Нехай $y_0 = 0{,}4$. Значення y_i записуємо у таблицю:

i	y_i
0	0,40
1	0,3775
2	0,3768295
3	0,3768289
4	0,3768289

Шукане значення: $\sqrt{0{,}142} \approx 0{,}376829$

Перевірка: $0{,}376829^2 = 0{,}1420001 \approx 0{,}142$.

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЇ

Під час розв'язування багатьох обчислювальних задач на практиці часто доводиться замінювати одну функцію $f(x)$ (відому, невідому або частково відому) близькою до неї деякою функцією $\varphi(x)$, яка має визначені властивості.

Наприклад, якщо $f(x)$ задана таблицею значень $f(x_0), f(x_1),...f(x_n)$ для деякої кінцевої множини аргументів x_i і в процесі розв'язування задачі необхідно використовувати значення $f(x)$ для проміжкових значень аргументу, функцію $\varphi(x)$ будують таким чином, щоб у заданих точках $x_0, x_1,..., x_n$ вона приймала значення, що збігаються зі значеннями $f(x_0), f(x_1),...f(x_n)$, а в інших точках відрізка $[a,b]$, що належить області визначення $f(x)$, наближено зображала функцію $f(x)$ з тим чи іншим ступенем точності.

Тоді під час розв'язування задачі замість функції $f(x)$ використовують функцію $\varphi(x)$.

Задача побудови функції $\varphi(x)$ називається задачею наближення.

Найчастіше функцію $\varphi(x)$, якою оперують під час наближення, будують у вигляді многочлена.

Такий спосіб наближення базується на теоремі Вейєрштрасса про наближення неперервної функції $f(x)$ на заданому відрізку за допомогою поліномів (функція $f(x)$ може бути досить добре наближена за допомогою полінома деякого порядку m на множині точок $x_0, x_1,..., x_n$).

У цьому випадку функції виду

$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + ... + c_m\varphi_m(x)$ називають узагальненими поліномами (узагальненими многочленами) порядку m, де $c_0, c_1, ... c_m$ – деякі постійні коефіцієнти.

Функцію $f(x)$ і поліном $\varphi(x)$ вважають наближеними, якщо вони збігаються на заданій системі точок $x_0, x_1, ..., x_n$. Ці точки називаються вузлами інтерполяції.

Якщо $\varphi(x)$ і $f(x)$ – диференційовні функції, то іноді у постановці задачі наближення вимагають і збігу у вузлах інтерполяції похідних $f(x)$ і $\varphi(x)$ деяких порядків.

На практиці за базисні функції $\{\varphi_i(x)\}$ часто беруть послідовність степеневих функцій відносно x:

$1, x^1, x^2, ..., x^m$, тобто:

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, ..., \varphi_m(x) = x^m.$$

Тоді маємо звичайний поліном степеня m:

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_m x^m. \qquad (1)$$

Для знаходження коефіцієнтів c_i, $i = 0,1,...,m$ використовують умову:

$$\varphi(x_j) = f(x_j) \quad j = 0,1,...,n$$

Сформуємо систему з $(n+1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь на множині точок $x_0, x_1, ..., x_n$:

$$\varphi_0(x_0)c_0 + \varphi_1(x_0)c_1 + ... + \varphi_m(x_0)c_m = f(x_0)$$

$$\varphi_0(x_1)c_0 + \varphi_1(x_1)c_1 + ... + \varphi_m(x_1)c_m = f(x_1) \qquad (2)$$

……………………………………

$$\varphi(x_n)c_0 + \varphi_1(x_n)c_1 + ... + \varphi_m(x_n)c_m = f(x_n)$$

Якщо $n = m,$ то система рівнянь (2) має єдиний розв'язок у випадку, коли вектори $\varphi_i(x_j),\ i, j = 0,1,...,n$ лінійно незалежні.

Така задача наближена називається <u>задачею інтерполяції</u>.

Якщо $m < n,$ то система рівнянь може бути розв'язана методом найменших квадратів.

Якщо $m = n,$ і базисні функції $\{\varphi_i(x)\}$ мають вигляд поліномів (1), коефіцієнти c_i можуть обчислюватися за допомогою такої системи рівнянь:

$$(3)\quad \begin{cases} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0{}^2 + ... + c_nx_0{}^n = f(x_0) \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1{}^2 + ... + c_nx_1{}^n = f(x_1) \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n{}^2 + ... + c_nx_n{}^n = f(x_n) \end{cases}$$

Визначник цієї системи називається визначником Вандермонда.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1x_0x_0{}^2...x_0{}^n \\ 1x_1x_1{}^2...x_1{}^n \\ 1x_1x_n{}^2...x_n{}^n \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Визначник (4) відмінний від нуля, якщо серед сукупності вузлів немає таких, що збігаються, отже, матриця системи (3) є невиродженою і система має єдиний розв'язок.

Іноді в якості $\{\varphi_i(x)\}$ береться нерівність показникових функцій:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \ \varphi_1(x) = e^{\alpha_1 x},\ \varphi_2(x) = e^{\alpha_2 x},...,\ \varphi_m(x) = e^{\alpha_m x},$$

де $\{\alpha_i\}$ – деяка числова нерівність попарно різних дійсних чисел.

Тоді:

$$\varphi(x) = c_0 + c_1e^{\alpha_1 x} + c_2e^{\alpha_2 x} + ... + c_me^{\alpha_m x}. \quad (5)$$

<u>Інтерполяційний многочлен Лагранжа.</u>

Виходячи з однозначності інтерполяційного многочленна $\varphi(x)$, можна побудувати поліном, коефіцієнти якого визначаються з системи (3).

Позначимо задані значення $f(x_i) = y_i$.

Оскільки шуканий поліном $\varphi(x)$ повинен приймати в заданих вузлах $x_0, x_1, ..., x_n$ значення, що збігаються зі значеннями $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$, можна записати $\varphi(x)$ у вигляді:

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} y_i \phi_j(x) \qquad (6)$$

де $\phi_i(x)$ – многочлен степеня n, який у вузлах інтерполяції задовольняє такі умови:

$$\phi_j(x_i) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ 0 \text{ в інших випадках} \end{cases}$$

Даний варіант запису многочленна $\varphi(\mathrm{x})$ називається <u>інтерполяційним поліномом Лагранжа.</u>

Для пошуку $\phi_j(x)$ знаходять многочлен степеня n, що перетворюється на нуль у вузлах інтерполяції $x_i = (i = 0,1,..., j-1, j+1, n)$ і дорівнює 1 у точці x_j.

Многочлен, що задовольняє ці умови, може бути записаний у вигляді:

$$\phi_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$$

Якщо у виразі (6) $\phi_j(x)$ знайдені за вказаним вище способом, то інтерполяційний многочлен (6) називається інтерполяційним многочленом Лагранжа.

Позначається $L_n(x)$. Явно записується так:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$$

Задача інтерполяції значно спрощується, якщо значення x_i є рівновіддаленими, тобто $x_i = x_0 + ih$ $(i=1,2,...,n),$ тоді можна ввести позначення:

$\frac{x-x_0}{h}=t$ і інтерполяційний поліном буде мати вигляд:

$$L_n(x)=(-1)^n \frac{t(t-1)...(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{c_n^{\,i} y_i}{t-i}.$$

Тут коефіцієнти перед знаком суми $(-1)^n \frac{t(t-1)...(t-n)}{n!}$ не залежать ні від значень функції $f(x)$, ні від відстані між вузлами інтерполяції h. Їх називають <u>коефіцієнтами Лагранжа.</u>

Різницю між функцією $f(x)$ та її інтерполяційним наближенням $L_n(x)$ називають <u>залишковим членом інтерполяційної формули</u> або <u>похибкою інтерполяції</u> $r_n(x) = f(x) - L_n(x).$

<u>Схема знаходження інтерполяційної формули Лагранжа.</u>

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$$

При обчислені коефіцієнтів Лагранжа різниці зручно розмістити таким чином:

$\boldsymbol{x - x_0}$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	…	$x_0 - x_n$
$x_1 - x_0$	$\boldsymbol{x - x_1}$	$x_1 - x_2$	…	$x_1 - x_n$
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$\boldsymbol{x - x_2}$	…	$x_2 - x_n$
…	…	…	…	…
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	…	$\boldsymbol{x - x_n}$

Якщо позначити добуток елементів рядків через D_j $(j=0,1…, n)$, а добуток елементів головної діагоналі через $П_{n+1}(x)$, то одержимо формулу:

$$L_n(x) = \Pi_{\mathrm{n+1}}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{y_j}{D_j}$$

У випадку рівновіддалених вузлів формула Лагранжа приймає вид:

$$L_n(x) = \Pi_{\mathrm{n+1}}(t)\sum_{j=0}^{n}\frac{y_j}{(t-j)\,j!(n-j)!(-1)^{n-j}},$$

де $t=(x-x_0)/h$, $h=x_{j+1}-x_j$ $(j=0,1,2,\ldots,n)$.

Для оцінки похибки інтерполяційної формули Лагранжа використовується співвідношення:

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}|\Pi_{\mathrm{n+1}}(x)|}{(n+1)!}, \quad \text{де} \quad M_{n+1} = \max_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.

Це обчислення похідних функцій заданих порядків.

Якщо аналітичне зображення вихідної функції невідоме або досить складне, похідні будь-якого порядку можуть бути обчислені на основі наведених нижче формул диференціювання.

Більшість формул чисельного диференціювання можуть бути отримані на основі інтерполяційних поліномів.

Для цього достатньо замінити початкову функцію її інтерполяційним поліномом, а потім обчислити похідні від нього.

Якщо поліном із достатньою точністю наближає вихідну функцію, то і похідні будь-якого порядку від полінома мало відрізняються від похідних функції.

Задача чисельного диференціювання полягає у знаходженні значень похідних функції $y = f(x)$ у заданих точках у випадку, коли аналітичний запис функції $f(x)$ невідомий або дуже складний чи функція задана таблично.

Привабливість чисельного підходу пояснюється наявністю простих залежностей, за допомогою яких похідні в заданих точках можна апроксимувати декількома значеннями функції в цих і близьких до них точках.

Конструювання формул наближеного диференціювання полягає в тому, що функцію $f(x)$ на заданому відрізку $[a,b]$ замінюють відповідною апроксимуючою функцією $\varphi(x)$, а потім вважають, що похідні від функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ збігаються, наприклад:

$$f'(x) \approx \varphi'(x), \text{ де } a \le x \le b.$$

Аналогічно знаходять похідні вищих порядків від функції $f(x)$.

При цьому апроксимуюча функція $\varphi(x)$ найчастіше задається у вигляді полінома.

Тоді похідні обчислюються з деякою похибкою.

Якщо $R(x) = f(x) - \varphi(x) -$ залишковий член, то похибка $R'(x)$ записується як:

$$R'(x) = f'(x) - \varphi'(x).$$

Такі ж формули диференціювання можна побудувати і для знаходження похідних вищих порядків:

$$\varphi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - R^{k}(x).$$

Малість залишкового члена $R(x)$ не свідчить про малість залишкових членів похідних, бо похідні від малих функцій можуть бути досить великими. Тобто для як завгодно близьких функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ різниця між їх похідними може бути як завгодно великою.

Наявність великої похибки під час обчислення значень похідної пояснюються ще й тим, що значення функцій, які входять до формул диференціювання в більшості мають деяку похибку.

Але, застосовуючи виважений підхід до вибору інтерполяційної формули та її порядку, можна отримати результат з необхідною точністю.

Формули чисельного диференціювання на основі інтерполяційного полінома Лагранжа.

Іноді у формулах чисельного диференціювання зручніше застосовувати не скінчені різниці функції, а її значення.

Для отримання таких формул використовують поліном Лагранжа.

Розглянемо випадок, коли функція задана таблично в рівновіддалених точках $x_0, x_1, ..., x_n$, тобто відомі $x_i = x_0 + ih \ (i = 0,1,...,n)$ і значення $f(x), i = 0,1...,n.$

Для заданої системи вузлів x_i будуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Формули диференціювання для практичних обчислень.

Співвідношення, які на практиці застосовуються для апроксимації похідних перших трьох порядків від функцій, заданих таблично:

Таблиця1. Формули перших похідних.

Тип формули	Формула
Несиметричні обернені або формули диференціювання назад	$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$
	$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$
Несиметричні прямі або формули диференціювання вперед	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$
	$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$

Симетричні	$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$
	$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1})}{12h}$

Таблиця 2. Формули для других похідних.

Тип формули	Формула
Несиметричні обернені	$f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$
	$f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$
Несиметричні прямі	$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^2}$
	$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$
Симетричні	$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$
	$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$

Таблиця 3. Формули для третіх похідних.

Тип формули	Формула
	$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_i)}{h^3}$

Несиметричні обернені	$$f'''(x_i)=\frac{5f(x_i)-18f(x_{i-1})+24f(x_{i-2})-14f(x_{i-3})+3f(x_{i-4})}{2h^3}$$
Несиметричні прямі	$$f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+3})-3f(x_{i+2})+3f(x_{i+1})-f(x_i)}{h^2}$$
	$$f'''(x_i)=\frac{-3f(x_{i+4})+14f(x_{i+3})+24f(x_{i+2})+18f(x_{i+1})-5f(x_i)}{2h^2}$$
Симетричні	$$f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+2f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{2h^3}$$
	$$f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+3})+8f(x_{i+2})-13f(x_{i+1})+13f(x_{i-1})-8f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{8h^3}$$

Висновки

1. Методи апроксимації похідних застосовуються у випадках, коли неперервна функція настільки складна, що безпосереднє використання аналітичних методів ускладнене чи навіть неможливе.

Чисельний підхід використовують і в тому випадку, коли сама функція задана в дискретній формі масивом своїх значень для деяких значень аргументів.

2. Похідні зазвичай апроксимуються розділеними різницями і відповідні формули, залежно від числа врахованих членів розкладу в ряд Тейлора, відрізняється похибкою апроксимації.

3. Розрізняють прямі несиметричні формули диференціювання вперед і обернені несиметричні формули диференціювання назад у залежності від розташування точки відліку – ліворуч чи праворуч у ряді значень аргументів $x_i, x_{i-1}, x_{i-2},...,$ чи $x_i, x_{i+1}, x_{i+2},...,$ для яких обчислюються значення функції, що беруть участь у апроксимації похідних.

4. Найбільшу точність забезпечують симетричні формули диференціювання з вибором точки відліку в середині діапазону значень аргументів на інтервалі $[a,b]$, що використовується для обчислення відповідних значень функції.

ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ.

Розв'язати задачу інтегрування означає обчислити визначений інтеграл для деякої функції $f(x)$ на заданому інтервалі $[a,b]$:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a,b]$ і відома її первісна функція $F(x)$, то можна аналітично знайти інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$I = F(b) - F(a)$$

Але у багатьох випадках первісну функцію $F(x)$ не можна знайти аналітично або $f(x)$ є занадто складною, що ускладнює обчислення інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца або воно взагалі стає неможливим.

Часто на практиці підінтегральна функція $f(x)$ задається таблично, що також унеможливлює використання аналітичних методів.

У всіх перерахованих випадках для обчислення інтеграла використовують чисельні методи.

Традиційний підхід полягає в тому, що функцію $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ замінюють інтерполяційною функцією $\varphi(x)$, наприклад, поліномом Лагранжа або Ньютона, а потім приймають:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + R(x), \text{ де}$$

$R(x)$ – деяка похибка формули інтегрування.

У цьому випадку функція $\varphi(x)$ має бути такою, щоб інтеграл можна було обчислити безпосередньо.

Якщо функція $f(x)$ задано аналітично, то наближено обчислити визначений інтеграл можна заміною інтеграла скінченою сумою.

При цьому відрізок інтегрування $[a,b]$ розбивається на n однакових частин з кроком $h = \frac{b-a}{n}$.

У вузлах $x_i = a + ih, i = 0,1,...,n$ знаходяться значення підінтегральної функції $f(x), i = 0,1,...,n$ і шукана площа (значення інтеграла) обчислюється як:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i), \text{ де}$$

c_i – задані числові коефіцієнти.

Наближена рівність:

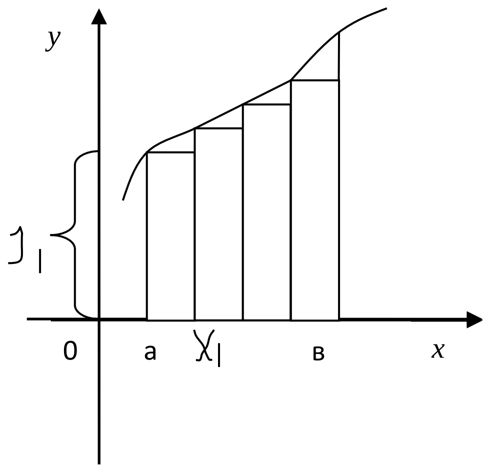
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + R(x) \qquad (*)$$

називається <u>квадратурною формулою</u>, а c_i – коефіцієнтами квадратурної формули.

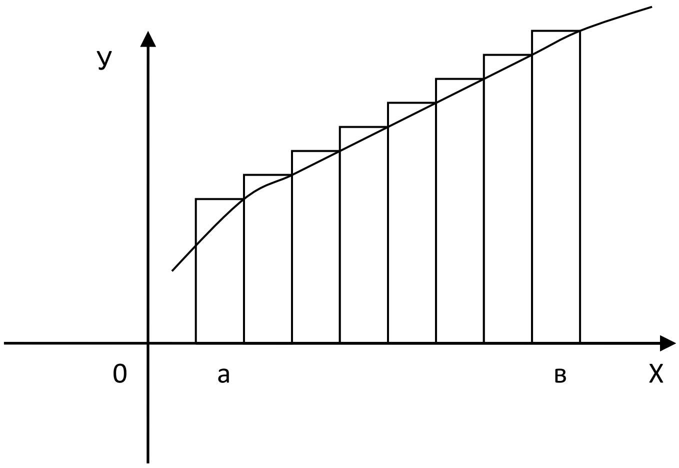
Обчислення визначених інтегралів за формулами прямокутників та трапецій

Розглянемо обчислення інтегралів за формулами лівих та правих прямокутників; за формулою середніх прямокутників та за формулою трапецій.

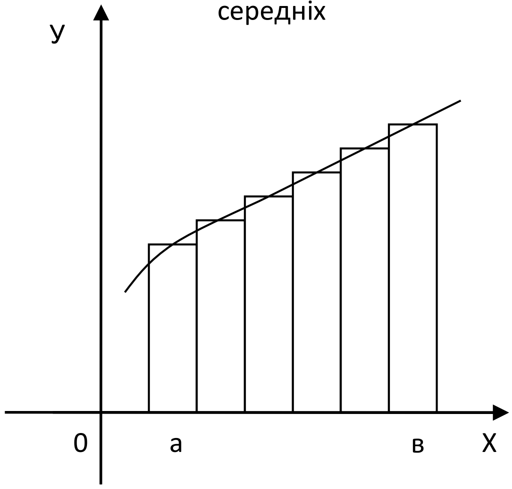
лівих прямокутників



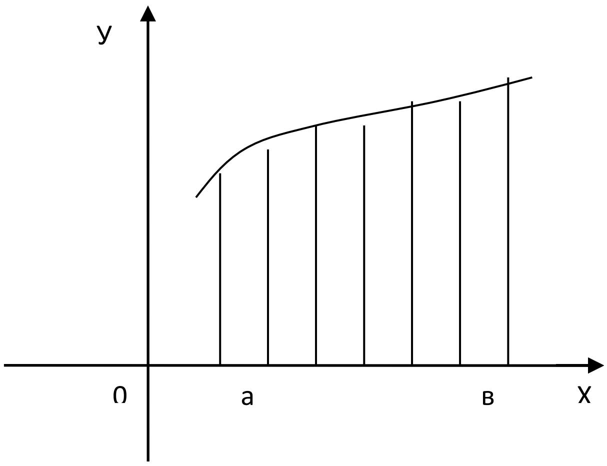
правих



середніх



трапецій



Розглянемо приклад на перші два способи (формулу лівих і формулу правих прямокутників паралельно).

$$I = \int_{1,5}^{2,3} \frac{\sqrt{0,3x + 12}dx}{1,6x\sqrt{x^2 + 0,5}}$$

Для обчислення за формулами лівих і правих прямокутників при n =10 (на скільки відрізків розбиваємо *[а;в]*) ділимо відрізок інтегрування на 10 частин з кроком $h = \frac{в - a}{n} = \frac{2,3 - 1,5}{10} = 0,08$

Складаємо таблицю значень підінтегральної функції в точках поділу відрізку:

i	x_i	y_i
0	1,5	0,3165
1	1,58	0,3037
2	1,66	0,2922
3	1,74	0,2815
4	1,82	0,2716
5	1,90	0,2626
6	1,98	0,2541
7	2,06	0,2463
8	2,14	0,2390
9	2,22	0,2322
10	2,30	0,2259

Шуканий визначений інтеграл – це сума площ лівих прямокутників. Площа одного прямокутника дорівнює $h*y_i$. Отже,

$$\int = \sum_{i=0}^{9} h*y_i = h\sum_{i=0}^{9} y_i$$

За значеннями таблиці

$$\sum_{0}^{9} y_i = 2{,}6997 \;\Rightarrow I_1 = \int = 0{,}08 \;*2{,}6997 \;=\; 0{,}2158$$

Для правих прямокутників:

$$I_2 = h\sum_{i=1}^{10} y_i = h*2{,}6091 \;=\; 0{,}08*2{,}6091 \;=\; 0{,}2087$$

За кінцевий остаточний результат беруть середнє значення цих інтегралів:

$$I = \frac{I_1 + I_2}{2} = 0{,}212$$

Розглянемо приклад на середні прямокутники:

Обчислити: $I = \int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\sin(0{,}6x + 0{,}3)dx}{1{,}7 + \cos(x^2 + 1{,}2)}$

Для розв’язку використовують формулу середніх прямокутників:

$$\int\limits_{a}^{в} f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

n=10, h=(1,2-0,4)/10=0,08

i	x_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$
0	0,4	0,44	0,28491
1	0,48	0,52	0,31913
2	0,56	0,60	0,35838
3	0,64	0,68	0,40430
4	0,72	0,76	0,45898
5	0,80	0,84	0,52511
6	0,88	0,92	0,60590
7	0,96	1	0,70475
8	1,04	1,08	0,82403
9	1,12	1,16	0,96205

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = 5{,}44754$$

$$I = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = 0{,}08 * 5{,}44754 = 0{,}4358$$

<u>Метод трапецій</u>

Нехай $I = \int\limits_{0,7}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0{,}3}}$

Візьмемо $n = 20$.

$$h = \frac{в - a}{n} = \frac{1{,}3 - 0{,}7}{20} = 0{,}03$$

Виведемо формулу для трапецій.

Площа трапеції дорівнює півсумі основ помноженій на *h*.

В нашому випадку основами є y_i. Тоді:

$$h\left(\frac{y_0}{2}+\frac{y_1}{2}+\frac{y_1}{2}+\frac{y_2}{2}+\frac{y_2}{2}+.....+\frac{y_{n-1}}{2}+\frac{y_n}{2}\right)=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right)$$

Отже,

$$I\approx h\left(\frac{y_0+y_{20}}{2}+y_1+y_2+...+y_{19}\right)$$

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,7	0,88386	15	1,15	0,58272
1	0,73	0,85572	16	1,18	56935
2	0,76	0,82898	17	1,21	55658
3	0,79	0,80366	18	1,24	54431
4	0,82	0,77973	19	1,27	53253
5	0,85	0,757	20	1,3	52129
6	0,88	0,73546			
7	0,91	0,71501			
8	0,94	0,69551			
9	0,97	0,677			
10	1	0,65937			
11	1,03	0,64259			

12	1,06	0,62657			
13	1,09	0,6114			
14	1,12	0,59669			

$$y_0 + y_{20} = 1{,}40515$$

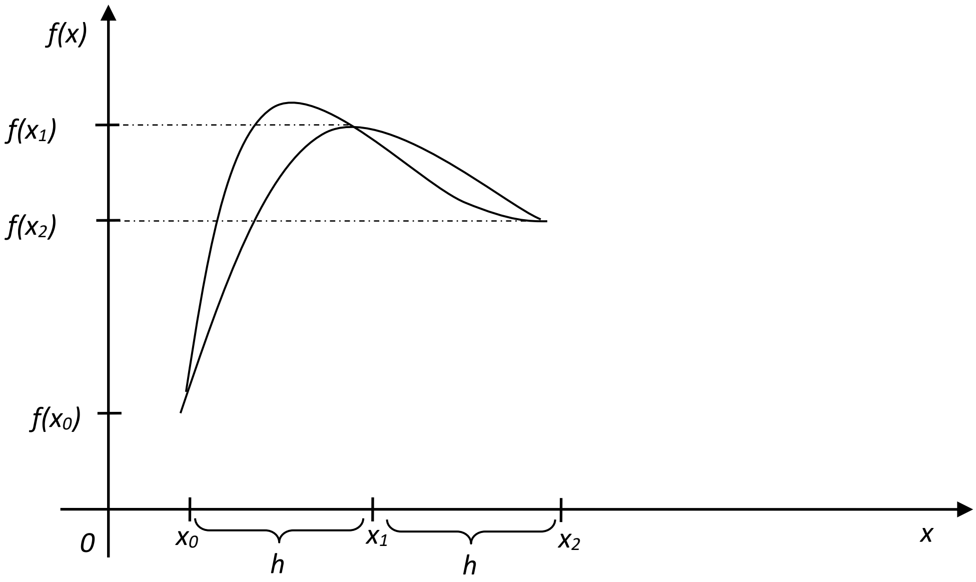
$$\sum_{1}^{19} y_i = 12{,}77022$$

Таким чином: $I = 0{,}03\left(\frac{1{,}40515}{2} + 12{,}77022\right) = 0{,}40418$.

Метод Сімпсона

Для обчислення інтеграла $J_i = \int\limits_{x_i - h}^{x_i + h} f(x)dx$ на частковому відрізку [x_i - h; $x_i + h$] замінимо функцію $f(x)$ параболою, що проходить через точки ($x_i + jh$; $f(x_i + jh)$), $j = -1, 0, 1$.

На частковому відрізку [x_0, x_2] метод Сімпсона зображається так:



Зобразимо функцію *f(x)* наближено за допомогою інтерполяційного многочлена

$$f(x) \approx L_{2,i}(x),\ x \in [x_{i-1}, x_{i-1}],$$

де $L_{2,i}(x)$ – інтерполяційний поліном 2-степеня.

Тоді $$\int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x)dx \approx \int_{x_i-h}^{x_i+h} L_{2,i}(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_i-h)+4f(x_i)+f(x_i+h))$$

Ця формула називається формулою Сімпсона або формулою парабол.

Узагальнена формула Сімпсона має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0+4(f_1+f_3+\ldots+f_{2n-1})+2(f_2+f_4+\ldots+f_{2n-2})+f_{2n}) =$$

$$\frac{h}{3}(f_0+f_{2n}+4\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1} f_{2i}), \qquad h=\frac{b-a}{n}.$$

Похибка узагальненої формули Сімпсона на всьому інтервалі має таку оцінку:

$$|R| \le \frac{h^4(b-a)}{180} M_4$$

$M_4 = sup\ |f^4(x)|,\ x \in [a,b]$

Формула Сімпсона значно точніша за формули прямокутників та трапецій. Вона може бути застосована для рівномірно розташованих вузлів у випадку парної кількості підінтервалів n і непарної кількості вузлів.

Для непарної кількості підінтервалів і парної кількості вузлів застосовується модифікація формули Сімпсона, відома як друга формула Сімпсона:

$$\int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x)dx \approx \int_{x_i-h}^{x_i+h} L_{3,i}(x)dx = \frac{3h}{8}(f(x_i) + 3f(x_i+h) + 3f(x_i+2h) + f(x_i+3h))$$

яку отримують за аналогією з попередньою, використовуючи інтерполяційний поліном Лагранжа третього порядку.

Вона характеризується похибкою:

$$|R| \le \frac{3h^4(b-a)}{80} M_4$$

$M_4 = sup\ |f^4(x)|,\ x \in [a,b]$

Розглянемо приклад на метод Сімпсона.

Нехай потрібно обчислити інтеграл за формулою Сімпсона при n=8, оцінити похибку результату, склавши таблицю скінчених різниць

$$I = \int_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2,1)dx}{x^2+1}$$

Знаходимо h: $h = \frac{в-a}{n} = \frac{1,6-1,2}{8} = 0,05$

Обчислення значень функції, а також жожавання значень функції, які мають однакові коефіцієнти у формулі, робимо в такій таблиці:

i	x_i	$2x_i - 2_i1$	$\sin(2x_i - 2_i1)$	$x_i^2 + 1$	y_0, y_8	y_1, y_3, y_5, y_7	y_2, y_4, y_6
0	1,20	0,30	0,29552	2,44	0,1211		
1	1,25	0,40	0,38942	2,5625		0,1520	
2	1,30	0,50	0,4794	2,69			0,1782
3	1,35	0,60	0,5646	2,8225		0,2000	
4	1,40	0,70	0,6442	2,96			0,2176
5	1,45	0,80	0,7174	3,1024		0,2312	
6	1,50	0,90	0,7833	3,25			0,2410
7	1,55	1,00	0,8415	3,4025		0,2473	
8	1,60	1,10	0,8912	3,56	0,2503		
$\sum$					0,3713	0,8305	0,6368

Отже, $I \approx \frac{0{,}05}{3}(0{,}3714 + 4 \cdot 0{,}8305 + 2 \cdot 0{,}6368) = \frac{0{,}05}{3} \cdot 4{,}9670 \approx 0{,}88278$

Для оцінки точності одержаного результату складаємо таблицю скінчених різниць функцій до четвертого порядку.

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1211	0,0309	-0,0047	0,0003	-0,0001

1	0,1520	0,0262	-0,0044	0,0002	0,0000
2	0,1782	0,0218	-0,0042	0,0002	0,0000
3	0,2000	0,0176	-0,0040	0,0002	0,0001
4	0,2176	0,0136	-0,0038	0,0003	-0,0001
5	0,2312	0,0098	-0,0035	0,0002	
6	0,2410	0,0063	-0,0033		
7	0,2473	0,0030			
8	0,2503				

Оскільки $\max\left|\Delta^4 y_i\right| = 0{,}0001$, то залишковий член формули:

$$R_{залишк} < \frac{(b-a)\cdot\max\left|\Delta^4 y_i\right|}{180} \approx \frac{0{,}4\cdot 0{,}0001}{180} \approx 0{,}0000003$$

Оскільки обчислення проводилося з чотирма значущими цифрами, то величина залишкового члена на похибку не впливає.

Похибку обчислень оцінюємо із співвідношенням:

$$\Delta I = (b-a)\Delta y \le 0{,}4\cdot 0{,}0001 < 0{,}00005.$$

Отже, одержані чотири десяткові знаки вірні.

Практичні способи оцінювання похибки інтегрування.

Оцінювати значення похибки можна різними способами, наприклад:

1.<u>За залишковим членом</u>

Якщо під час обчислення залишкового члена виникають труднощі з визначенням максимуму похідної (підінтегральна функція складна чи задана таблично), доцільно застосовувати наближенні формули для похибок, виражені через скінчені різниці:

$R_1 \approx \pm \frac{x_n - x_0}{2} \Delta \bar{y}$ – для лівих і правих прямокутників

$R_2 \approx \frac{x_n - x_0}{12} \Delta^2 \bar{y}$ – для формули трапецій

$R_3 \approx \frac{x_n - x_0}{180} \Delta^4 \bar{y}$ – для формули Сімпсона

Для цього за табличними значеннями складається таблиця скінчених різниць певного порядку, з якої отримують максимальне за модулем значення відповідної різниці: $\Delta\bar{y}, \Delta^2\bar{y}, \Delta^4\bar{y}$.

2.<u>За правилом Рунге</u>. Нехай J_h і $J_{h/2}$ наближенні значення інтеграла за однією з формул з кроками h і $h/2$ відповідно. Тоді абсолютна похибка інтегрування наближено обчислюється за таким правилом:

$\Delta \approx \frac{J_{h/2} - J_h}{2^k - 1} = \Theta(J_{h/2} - J_h)$, де $\Theta = \frac{1}{2^k - 1}$, k – порядок залишкового члена формули інтегрування (для формули трапецій $k = 2$, для формули Сімпсона $k = 4$).

3.Екстраполяцією за Річардсоном.

Можна знайти уточнене за Річардсоном значення інтеграла із похибкою $0\,(h^{2k})$.

$J =_{h/2} +\Theta(J_{h/2} - J_h)$.

Вибір кроку інтегрування.

Завдання полягає у визначенні кроку h, що забезпечує задану точність ε обчислення інтеграла за обраною формулою.

Існують два основні способи задавання допустимого значення кроку.

1. За залишковим членом.

Використовуючи формулу відповідного залишкового члена $R(x)$ вибирають h таким, щоб виконувалася нерівність $|R(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Потім з отриманим кроком обчислюють інтеграл за квадратурною формулою.

Обчислення треба робити з таким числом цифр, щоб похибка заокруглення не перевищувала ε.

2. Послідовним подвоєнням числа кроків.

Обчислюють інтеграл за обраною квадратурною формулою двічі: спочатку з деяким кроком h, потім з кроком $h/2$, тобто подвоюють кількість n.

Якщо $\Theta|J_h - J_{h/2}| < \varepsilon$, то приймають $J_h \approx J_{h/2}$.

Якщо виявляється, що ця умова не виконується, то розрахунок повторюють з кроком $h/4$. Як початковий крок іноді доцільно брати число, близьке до $\sqrt[k]{\varepsilon}$.

Квадратура Гаусса або метод невизначених коефіцієнтів.

У розглянутих методах обчислення інтеграла проводилося за значенням функції $f(x_i)$ у попередньо заданих вузлах.

І побудова методів полягала у знаходженні коефіцієнтів c_i квадратурної формули. У методі квадратури Гаусса передбачається вибір таких коефіцієнтів c_i квадратурної формули c_i і значень x_i на інтервалі $[a,b]$, які забезпечують оцінювання інтеграла з найвищою точністю.

Ці величини визначаються за умови, що квадратурна формула (*) повинна бути точною для всіх $f(x) = x^k, k = 0,1,2,...,n.$

Почнемо з найпростішого випадку оптимального вибору двох значень x_0 і x_1 на інтервалі $[-1;1]$ так, щоб на цьому інтервалі точно оцінювалися інтеграли від постійної, лінійної, параболічної та кубічної функцій.

Запишемо відповідні рівняння:

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0$$

Звідси $c_0 = c_1 = 1$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}577350629, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577350629.$$

Отже, оцінка інтеграла обчислюється за формулою:

$$I = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Аналогічно виводяться співвідношення для більшої кількості точок на інтервалі $[-1;1]$.

Кількість точок	Вагові коефіцієнти	Аргументи функції
3	$c_0 = 0{,}555555556$ $c_1 = 0{,}888888889$ $c_2 = 0{,}555555556$	$x_0 = -0{,}774596669$ $x_1 = 0{,}0$ $x_2 = 0{,}774596669$
4	$c_0 = 0{,}347854845$ $c_1 = 0{,}652145155$ $c_2 = 0{,}652145155$ $c_3 = 0{,}347854845$	$x_0 = -0{,}861136312$ $x_1 = -0{,}339981044$ $x_2 = 0{,}339981044$ $x_3 = 0{,}861136312$

Висновки

1. Методи апроксимації інтегралів застосовуються у випадках, коли неперервна функція настільки складна, що безпосереднє використання аналітичних методів ускладнене чи навіть неможливе.

2. Чисельний підхід використовують і в тому випадку, коли сама функція задана в дискретній формі масивом своїх значень для обраних значень аргументів.

3. Використовують різні методи інтегрування. Кожен з них має різний порядок точності.

4. Найбільшу точність оцінки інтеграла забезпечує метод квадратури Гаусса, але він передбачає вибір спеціально нерівномірно розташованих точок відліку.

5. Підвищення точності чисельного інтегрування можна досягти або багаторазовим застосуванням формул інтегрування і розбиттям інтервалу інтегрування на підінтервали з використанням великого масиву значень функції або застосуванням екстраполяції Річардсона.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.

Розглянемо деякі методи чисельного розв'язку рівнянь виду: $f(z)=0$, де $f(z)$ – задана функція дійсного або комплексного аргументу z; $f(z)$ може бути многочленом степені n від z, тобто чисельні методи розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих порядків і трансцендентних рівнянь.

Розв'язати рівняння означає знайти множину його коренів, тобто таких значень з деякого проміжку, при яких дане рівняння перетвориться в тотожність.

Універсальних методів для знаходження точних значень коренів алгебраїчних рівнянь степеня $n \geq 5$ і трансцендентних рівнянь не існує. Крім того, розв'язуючи практичні задачі, часто одержують рівняння з коефіцієнтами, які є наближеними числами. Тоді постановка задачі знаходження точних коренів не має змісту. Тому важливого значення набувають наближені методи знаходження коренів рівняння з достатньою для практики точністю.

Нехай x^* – точний корінь, а $\underline{x}$ – його наближене значення. Кажуть, що корінь x обчислено з наперед заданою точністю ε, якщо $/x^*-\underline{x}/<\varepsilon$.

При знаходженні наближених значень коренів цього рівняння треба розв'язувати дві задачі:

1) відокремлення коренів, тобто відшукання достатньо малих областей, в кожній з яких міститься один і тільки один корінь рівняння (вказати межі, де знаходяться корені.

2) обчислення коренів з заданою точністю (уточнити їх).

Відокремлення коренів

Корінь x^* рівняння $f(x)=0$ вважається відокремленим на відрізку $[a,b]$, якщо $x^* \in [a,b]$ і на цьому відрізку дане рівняння не має більше коренів.

При розв'язуванні рівняння $f(z)=0$ перш за все потрібно попередньо вивчити розташування коренів в комплексній площині z і заключити кожен корінь в достатньо малу область, в середині якої не було б інших коренів. Для цього іноді вигідно застосувати графічні методи.

Графічний метод відокремлення коренів

Якщо потрібно знайти тільки дійсні корені рівняння, то для відшукання грубих значень коренів можна побудувати графік функції $y=f(x)$ і знайти абсциси точок перетину графіка з віссю x.

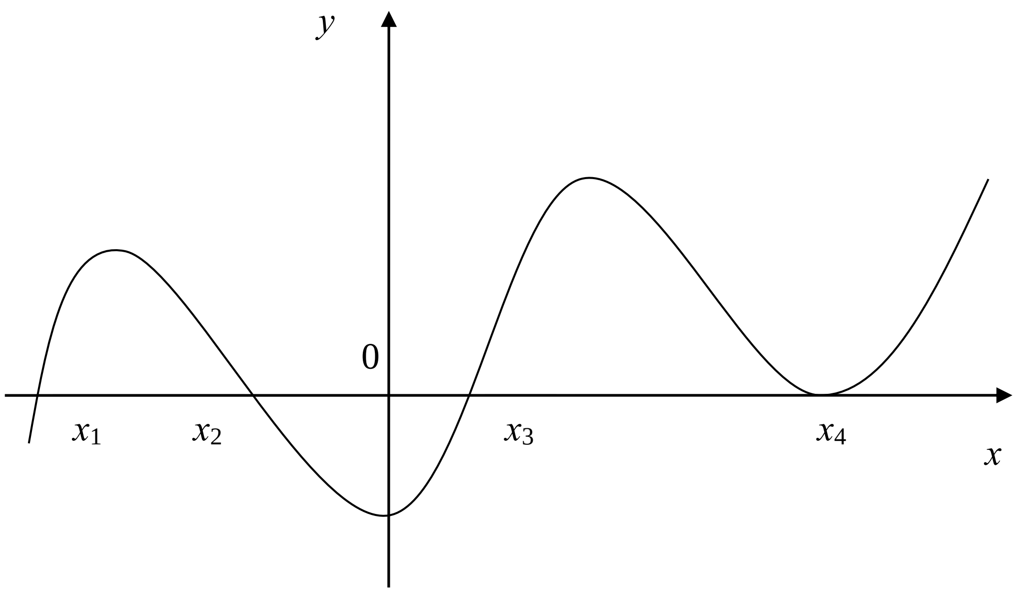


Рис. 1

Іноді зручніше представити спочатку рівняння у вигляді:

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

Потім, побудувавши графіки функцій $y = \varphi(x)$ і $y = \psi(x)$, знайти абсциси їх точок перетину, які і будуть наближеними значеннями коренів.

Наприклад, якщо потрібно знайти корені рівняння

$$x\ \sin x = 1,$$

то зручніше представити його у вигляді:

$$\sin x = \frac{1}{x}$$

і застосувати вказаний спосіб.

Будуємо графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{x}$

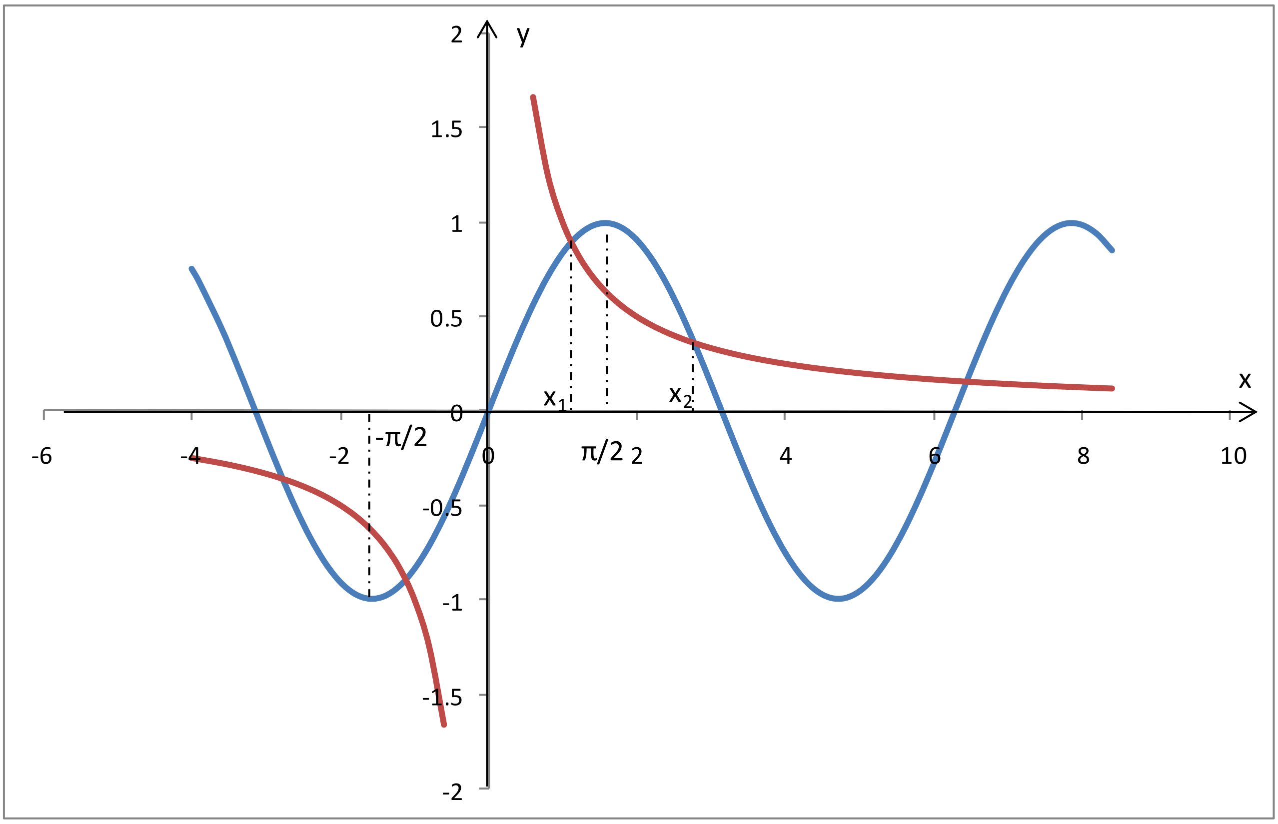


Рис. 2

Корені рівняння симетричні відносно $x = 0$.. Тому ми можемо розглядати лише додатні корені.

Значення x_1, x_2 і можливо, ще декілька коренів можна досить точно визначити графічно.

Але на графіку не буде x_n для великих значень *n*.

Але, дивлячись на графік можемо сказати, що значення x_n при великих *n* будуть наближатися до πn .

Ці значення можна уточнити.

Покладаємо $x_n = \pi_n + \varepsilon_n$, де ε_n – деякі невеликі величини.

Тоді $\frac{1}{\pi n + \varepsilon_n} - \sin(\pi n + \varepsilon_n) = \frac{1}{\pi n + \varepsilon_n} - (-1)^n \sin \varepsilon_n = 0$.

Оскільки ε_n є дуже малим, то можна покладати $\sin \varepsilon_n \approx \varepsilon_n$; , $\frac{1}{\pi n + \varepsilon_n} \approx \frac{1}{\pi n}$.

Це дає

$$\varepsilon_n \approx \frac{(-1)^n}{\pi n}$$
$$x_n \approx \pi n + \frac{(-1)^n}{\pi n}$$
і ми одержуємо покращення значень коренів.

Якщо потрібно, то можна продовжити уточнення коренів, покладаючи $x_n = \pi n + \frac{(-1)^n}{\pi n} + \varepsilon_n'$.

Це дає рівняння для визначення ε_n':

$$\frac{1}{\pi n+\frac{(-1)^n}{\pi n}+\varepsilon_n{}'}-(-1)^n\sin\left[\frac{(-1)^n}{\pi n}+\varepsilon_n{}'\right]=0.$$ Звідки знайдемо $\varepsilon_n{}'$.

Цей процес можна продовжити.

Для відшукання комплексних коренів рівняння *f(z)=0* можна, покладаючи *z=x+iy*; представити рівняння у вигляді $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=0$, де $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ – дійсні функції дійсних змінних *x* і *y*.

Це рівняння еквівалентно системі двох рівнянь $\varphi(x,y)=0, \psi(x,y)=0$.

Побудувавши криві $\varphi(x,y)=0,\ \psi(x,y)=0$, одержимо дійсні і уявні частини коренів рівняння *f(z)=0* як відповідно абсциси і ординати їх точок перетину.

Є багато спеціально розроблених способів графічного розв'язку рівнянь, які застосовуються до окремих типів рівнянь.

<u>**Аналітичний метод відокремлення коренів**</u>

Для відокремлення інтервалів, в яких знаходяться дійсні корені рівняння *f(x)=0*, якщо *f(x)* – неперервна функція, користуються наступними положеннями.

Якщо на кінцях деякого відрізку неперервна функція приймає значення різних знаків, то на цьому відрізку рівняння f(x)=0 має хоча б один корінь.

Якщо при цьому f(x) має першу похідну, що не змінює знак, то корінь єдиний.

Нехай *f(x)* є аналітичною функцією змінної *x* на відрізку $[a,b]$. Якщо на кінцях відрізку $[a,b]$ вона приймає значення різних знаків, то між *a* і *b* є непарна кількість коренів рівняння *f(x)=0*.

Якщо ж на кінцях відрізка $[a,b]$ вона приймає значення однакових знаків, то між a і b або немає коренів цього рівняння або їх є парна кількість (враховуючи і кратність коренів).

На практиці використовують наступні теореми з курсу математичного аналізу:

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і набуває на кінцях цього відрізка значень протилежних знаків, тобто $f(a)* f(b)<0,$ то всередині відрізка $[a,b]$ існує хоча б один корінь рівняння $f(x)=0$.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна і диференційована на $[a,b]$, набуває на кінцях цього відрізка значень протилежних знаків, а похідна $f'(x)$ зберігає сталий знак всередині відрізка $[a,b]$, то рівняння $f(x)=0$ на цьому відрізку має корінь, причому єдиний.

У відповідності з даними теоремами алгоритм відокремлення коренів рівняння $f(x)=0$ можна сформулювати так:

1. Знайти область визначення рівняння.
2. Знайти критичні точки функції $f(x)$.
3. Записати інтервал монотонності функції $f(x)$.
4. Визначити знак функції $f(x)$ на кінцях інтервалів монотонності.
5. Визначити відрізки, на кінцях яких функція $f(x)$ набуває значень протилежних знаків.
6. Знайдені відрізки ізоляції коренів при необхідності звузити.

Уточнення коренів.

Для уточнення коренів використовують такі основні методи:

- метод дихотомії (або метод поділу відрізку навпіл);
- метод дотичних (або метод Ньютона)
- метод хорд
- комбінований метод дотичних і хорд.

Метод дихотомії (метод поділу відрізка навпіл)

Метод поділу відрізка навпіл застосовується для уточнення коренів рівняння $f(x)=0$ з наперед заданою точністю, якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 2.

Нехай x^*– точне значення кореня рівняння $f(x)=0$ на відрізку $[a,b]$, а ε – гранична абсолютна похибка. Суть методу полягає в тому, що відрізок $[a,b]$ ділять навпіл точкою $c=0{,}5(a+b)$ і обчислюють $f(c)$. Якщо $f(c)=0$, то $x=c$ є точним значенням кореня. Якщо $f(c)\neq 0$, але $b-a\leq 2\varepsilon$, то $|x^*-c|\leq\varepsilon$ і значення $x=c$ буде шуканим наближеним коренем. Якщо $f(c)\neq 0$ і $b-a>2\varepsilon$, тоді розглядають той з двох відрізків $[a,c]$ і $[b,c]$, на кінцях якого функція набуває значень протилежних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_1,b_1]$. На цьому відрізку функція задовольняє умови теореми 2. Далі відрізок $[a_1,b_1]$ точкою $c_1=0{,}5(a+b)$ ділять навпіл і міркують так само, як і для відрізка $[a,b]$. В результаті процесу ділення відрізка $[a,b]$ навпіл одержують послідовність вкладених відрізків $[a,b]$, $[a_1,b_1]$, …, $[a_n,b_n]$, кожен з яких містить точне значення кореня x^*. Для деякого n справедлива нерівність

$$b_n-a_n\leq 2\varepsilon.$$

Тоді $c_n=(a_n+b_n)/2$ буде наближеним значенням кореня з точністю ε.

Метод дихотомії досить легко реалізовується на ЕОМ, але потребує значного обсягу обчислень.

Метод дотичних

Нехай рівняння $f(x)=0$ на відрізку [a,b] має ізольований корінь x^*, тобто $f(a)*f(b)<0$, а функції $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні і $f'(x)$ зберігає знак на [a,b].

За дослідженням першої та другої похідної функції $f(x)$ будують фрагмент графіку на проміжку локалізації [a,b] (зростаюча чи спадна функція; графік опуклий чи вгнутий). Дотичну проводять до того кінця графіку на проміжку, в якому виконується умова збігу знаку функції та знаку її другої похідної (*). Точка перетину дотичної з віссю Оx і визначає наближення до кореня. Розрахунок за формулою

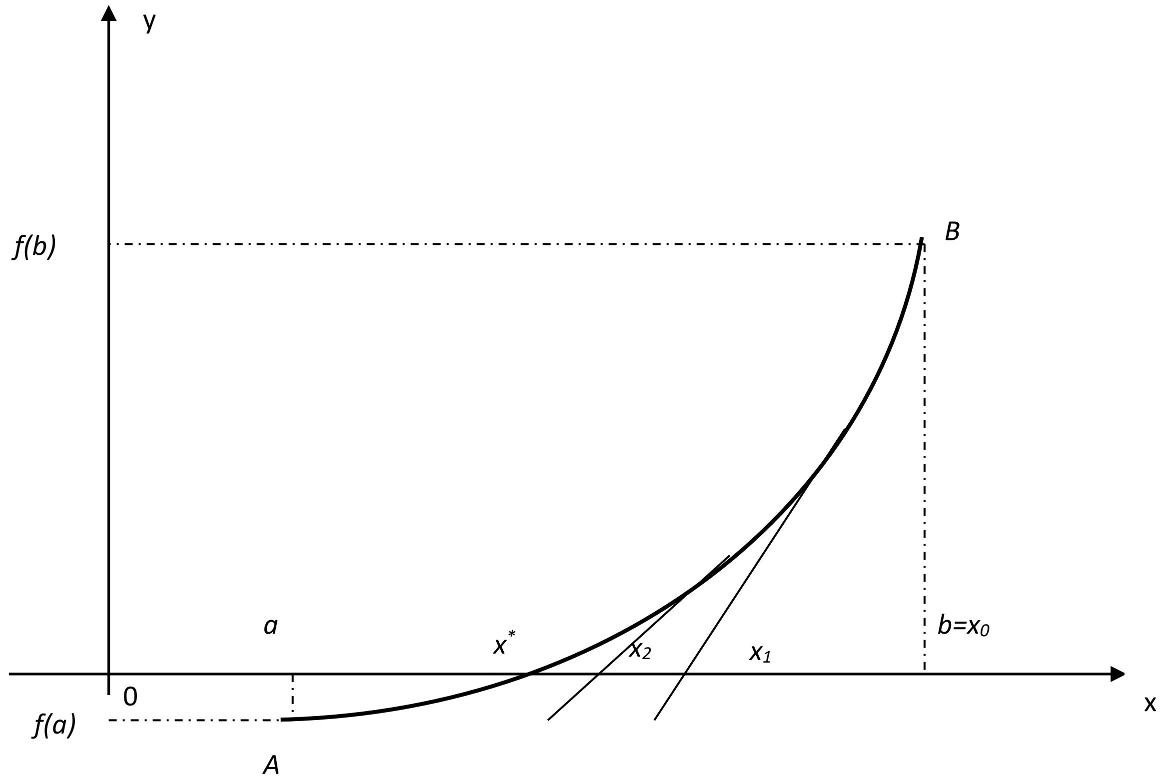
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

дає точку перетину дотичної з віссю Оx. Процес побудови дотичних (знаходження послідовності наближень x_1 , x_2 ,…, x_n) продовжується до тих пір, поки не буде досягнута задана точність ізольованого кореня:

$$|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon.$$

Якщо виконується умова (*) побудови дотичної, процес буде спадним, тоді в якості кореня приймають останнє знайдене наближення.

Він має просту геометричну інтерпретацію.



Формули для практичних обчислень:

Якщо, $f(a)\cdot f''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_0=a$ і $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Якщо, $f(b)\cdot f''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_0=b$ і $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$.

Метод хорд

Метод хорд – один з поширених ітераційних методів. Його ще називають методом лінійного інтерполювання, методом пропорційних частин, або методом хибного положення.

Нехай задано рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ має неперервні похідні першого і другого порядків, які зберігають сталі знаки на цьому відрізку, і $f(a)*f(b)<0$, тобто корінь x^* рівняння відокремлений на $[a,b]$.

Ідея методу хорд полягає в тому, що на досить малому відрізку дуга кривої $y=f(x)$ замінюється хордою і абсциса точки перетину хорди з віссю Оx є наближеним значенням кореня. За формулою:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(b - x_i)}{f(b) - f(x_i)}$$

отримуємо збігаючу послідовність наближень кореня x_1 , x_2 ,…, x_n до заданої точності.

Графічно кінці кривої (a, $f(a)$), (b, $f(b)$) з'єднують прямою. Точка перетину прямої з віссю Оx є наближенням кореня.

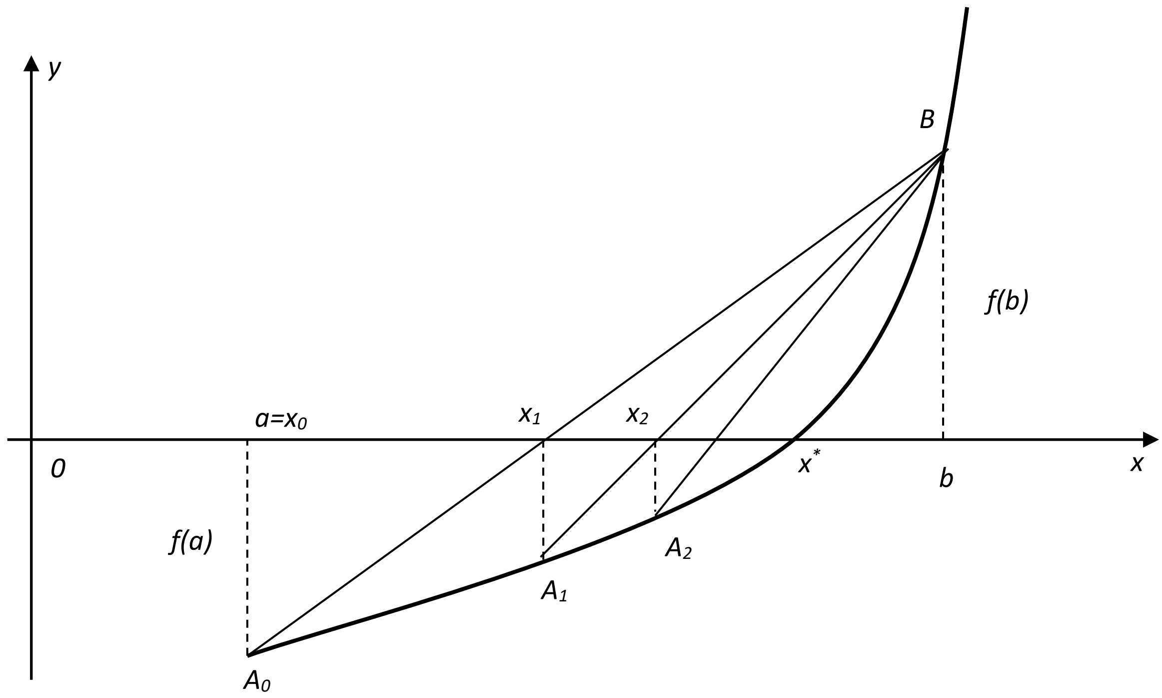


Рис. 4

<u>Формули для практичних обчислень:</u>

Якщо, $f(b) \cdot f''(x) > 0$ на $[a,b]$, то $x_0=a$ і

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}.$$

Якщо, $f(a) \cdot f''(x) > 0$ на $[a,b]$, то $x_0=b$ і

$$x_{n+1} = a - \frac{f(a) \cdot (x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}.$$

Комбінований метод хорд і дотичних

Характерною особливістю методів дотичних і хорд є те, що послідовності їх наближень монотонні. Причому, якщо для даного рівняння послідовність наближень методу хорд монотонно спадна, то послідовність наближень методу дотичних – монотонно зростаюча, і навпаки. Одночасне застосування цих методів дає змогу наближатися до кореня рівняння з двох боків, отримуючи наближення з недостачею і надлишком.

Розглянемо рівняння $f(x)=0$, корінь якого $x^*\in[a,b]$. За початкове наближення в методі хорд вибирають точку $x=a$, а в методі дотичних – точку b. На відрізку $[a,b]$ застосовують спочатку метод дотичних, а потім – метод хорд. У результаті одержують нові наближення a_1,b_1, і початковий відрізок ізоляції кореня звузився. Для знаходження нових наближень застосовують метод дотичних і хорд уже на відрізку $[a_1,b_1]$. Такий процес продовжують до тих пір, поки довжина відрізка $[a_k,b_k]$ не стане меншою або дорівнюватиме величині ε, де ε – наперед задана точність кореня.

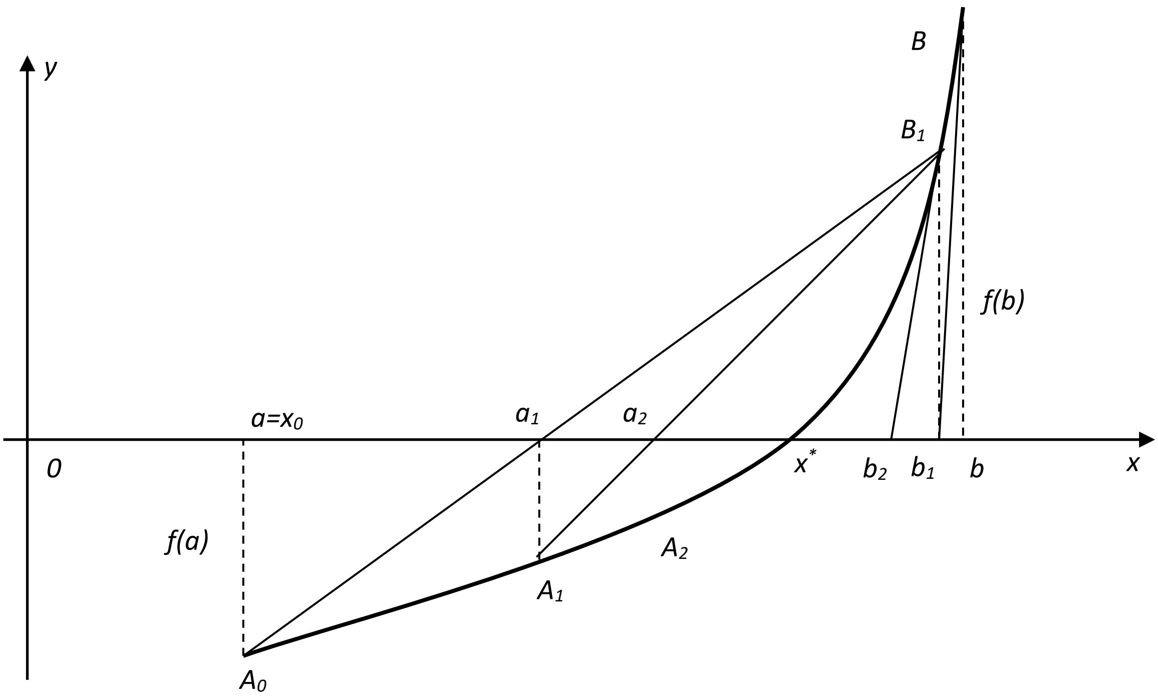


Рис. 5

<u>Формули для практичних обчислень:</u>

Нехай x_{n+1} – наближені значення кореня з нестачею, $\bar{x}_{n+1}$ – наближені значення кореня з надлишком.

Якщо, $f(a)\cdot f''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_0=a$, $\bar{x}_0=b$ і

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \bar{x}_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)\cdot(\bar{x}_n-x_n)}{f(\bar{x}_n)-f(x_n)}.$$

Якщо, $f(b)\cdot f''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_0=a$, $\bar{x}_0=b$ і

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)\cdot(\bar{x}_n-x_n)}{f(\bar{x}_n)-f(x_n)}, \qquad \bar{x}_{n+1}=\bar{x}_n-\frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}.$$

Методичне забезпечення

1. Копча-Горячкіна Г. Е. Чисельні методи в інформатиці. Навчально-методичний посібник, частина І. – Ужгород, 2011.
2. Копча-Горячкіна Г. Е. Чисельні методи в інформатиці. Електронний довідник для проведення лабораторних робіт. – Ужгород, 2011.

Література

1. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці, Київ, видавнича група BHV, 2006.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вичислений, ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1960.
3. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по вычислительной математике, Москва, Высшая школа, 1990.
4. Самарський А. А., Гулин А. В. Численные методы, Москва, Наука, 1989, 430с.
5. Шуп Г. Е. Прикладные численные методы в физике и технике, Москва, Высшая школа, 1990.

Інформаційні ресурси

e-reading-lib.com

Копча-Горячкіна Галина Ернестівна – старший викладач кафедри інформаційних управляючих систем та технологій факультету інформаційних технологій ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ».

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Електронний посібник для студентів факультету інформаційних технологій напряму „Комп'ютерні науки” спеціальності „Інформаційні управляючі системи та технології” ДВНЗ «УжНУ».

Відповідальний за випуск: Міца О.В. – кандидат технічних наук, завідувач кафедри інформаційних управляючих систем та технологій ДВНЗ «УжНУ».