декрементом δ.

3. Критична швидкість руху рідини, при якій труба втрачає прямолінійну форму, не залежить від спадкових властивостей матеріалу і визначається через миттєвий модуль пружності.
4. Сили тертя зумовлюють додатковий натяг конструкції і, відповідно, підвищують значення критичної швидкості руху рідини.

Отримані результати можуть бути використані для оцінок стійкості трубопроводів, виготовлених із синтетичних (зі спадковими властивостями) матеріалів.

Література

1. Пановко Я. Г. Исторический очерк развития теории динамического действия подвижной нагрузки // Тр. Ленинград. КВВИА. – 1948. – Вып. 17. – С. 54 – 69.
2. Якушев Н. З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок. Ч.1. Балки, стержни и арки под действием подвижных нагрузок // Исслед. по теории пластин и оболочек. – Изд. Казанского университета, 1972. – №8. – С. 3 – 21
3. Якушев Н. З. Динамика строительных систем под воздействием движущихся нагрузок. Ч.2. Полупространства, пластины и оболочки под действием подвижных нагрузок// Исслед. по теории пластин и оболочек. – Изд. Казанского университета, 1972. – №9. – С. 199 – 220.
4. Горошко О.О., Дем'яненко А.Г., Киба С.П. Двохвильові процеси в механічних системах. – К.: Либідь, 1991. – 188 с.
5. Серазутдинов М.Н. О некоторых исследованиях динамики тонкостенных конструкций, взаимодействующих с движущимися объектами// Статика и динамика оболочек. Казань, 1979. – С. 5 – 31.
6. Колесник И.А. Колебания комбинированных арочных систем при действии подвижных нагрузок. К.: Донецк, 1977. – 152 с.
7. Доценко П.Д. О колебаниях и устойчивости прямолинейного трубопровода // Прикладная механика. – 1971. – №3. – С. 85 – 91.
8. Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку: Темат. сборник науч. трудов // Харьк. авиац. ин-т. – Вып. 1, 2, 3, 4. – 1978, 1980, 1982, 1984.
9. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 252 с.
10. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Перев. с нем. – Изд. 2-е, испр. и дополн. по 3-му нем. изд. – М.: Изд. иностр. лит., 1951. – 576 с.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. - Изд.6-е, перераб. и дополн. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1987. – 840 с.
12. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Асимптотические методы. – К.: Изд-во НАН Украины, 1995. – 396 с.
13. Горошко О.О. Дослідження одночастотних режимів в двохвильових системах (в системах з рухомим навантаженням) // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – №2. – С. 93 – 98.
14. Кикоть С.В. Оцінка додаткового натягу силами тертя в системах з рухомим навантаженням // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – №4. – С. 59 – 62.

Надійшла до редакції 05.11.2004

УДК 517.925.4

Ігор І. Король*

Дослідження періодичних розв'язків імпульсних систем з гамільтоновою лінійною частиною

Вивчаються питання існування періодичних розв'язків одного класу систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Для нелінійних двовимірних імпульсних диференціальних систем з гамільтоновою лінійною частиною запропоновано новий чисельно-аналітичний алгоритм дослідження існування і побудови періодичних розв'язків.

Ключові слова: імпульсні системи, чисельно-аналітичний метод.

Ihor I. Korol*

Investigating for periodic solutions of impulsive systems with gamiltonian linear part.

The problems on existence of periodical solutions for one type systems of ordinary differential equations with impulse action are studied. For a two-dimensional non-linear impulsive differential systems with Hamiltonian linear part a new numerical-analytic algorithm is suggested which allows one to study the existence of periodic solutions and to construct these solutions approximately.

Key words: impulsive systems, numerical-analytic method.

*E-mail: korol_ihor@ukr.net

Відомо, що природничі та технічні процеси з короткочасними збуреннями часто можна описати за допомогою математичних моделей у вигляді систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Для практичних потреб важливим є вивчення питання існування періодичних розв'язків таких систем та їх відшукання. У нелінійному випадку знайти точний розв'язок, як правило, неможливо, а тому велике значення мають алгоритми побудови наближених розв'язків. Ці питання досліджувались у монографіях [1,2], а також у роботах [3-5].

У даній роботі запропоновано схему дослідження і наближеної побудови періодичних розв'язків двовимірних імпульсних систем, у яких лінійна частина є гамільтоновою, встановлено достатні умови існування періодичних розв'язків.

1. Лінійні системи

Розглянемо лінійну неоднорідну ω- періодичну двовимірну систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + g(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + a_i, \qquad (1)$$

де

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & p(t) \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$x, g \in R^2$, $p(t), g(t)$ – неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) функції з спільним періодом ω, а сталі матриці B_i, сталі вектори a_i і моменти τ_i такі, що при всіх цілих i і при деякому натуральному p

$$B_i = \begin{pmatrix} \gamma_i & \beta_i \\ -\alpha_i & -\gamma_i \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \beta_i - \gamma_i^2 = 0,$$

$$B_{i+p} = B_i, \quad a_{i+p} = a_i, \quad \tau_{i+p} = \tau_i + \omega, \quad \tau_0 < 0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_p < \omega.$$

Як відомо [1], якщо X(t) – матрицант лінійної ω- періодичної гамільтонової системи з імпульсною дією

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x, \tag{2}$$

то будь-який розв'язок $x(t), x(0) = \xi$ системи (1) може бути представлений у вигляді

$$x(t) = X(t)\xi + \int_0^t X(t,s) f(s) ds + \sum_{0<\tau_i<t} X(t, \tau_i + 0) a_i,$$

де

$$X(t) = U(t, \tau_k)\left(\prod_{\nu=k}^{2} (E + B_\nu) U(\tau_\nu, \tau_{\nu-1})\right)(E + B_1) U(\tau_1, 0),$$

$$U(t,\sigma) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t,\sigma)) & \sin(\varphi(t,\sigma)) \\ -\sin(\varphi(t,\sigma)) & \cos(\varphi(t,\sigma)) \end{pmatrix}, \quad \varphi(t,\sigma) = \int_\sigma^t p(\tau) d\tau,$$

$X(t,\sigma) = X(t)X^{-1}(\sigma)$, $X(0,0) = E$, $X(t, \tau_i + 0) = (E + B_i) X(t, \tau_i)$, а $U(t,\sigma)$, $U(\sigma,\sigma) = E$ – матрицант відповідної лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь $dx/dt = P(t)x$.

Лема 1. Якщо система (2) має нетривіальні ω- періодичні розв'язки, то завжди можна підібрати вектор-функцію $\Theta(t)$ і сталі вектори c_i такі, що система

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + g(t) - \Theta(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + a_i - c_i, \tag{3}$$

має 2-параметричну сім'ю нетривіальних ω- періодичних розв'язків.

Доведення. Нехай лінійна гамільтонова імпульсна система (2) має нетривіальний ω- періодичний розв'язок. Оскільки кратність її мультиплікатора $\rho = 1$ є парною, то система (2) має два лінійно незалежні ω- періодичні розв'язки $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ [1]. При цьому лінійна неоднорідна система (1) має ω- періодичні розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^\omega Y^T(s) g(s) ds + \sum_{i=1}^{p} Y^T(\tau_i + 0) a_i = 0, \tag{4}$$

де $Y(t)$ – матрицант спряженої до (2) системи з імпульсною дією

$$\frac{dx}{dt} = -P(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = -B_i^T x, \tag{5}$$

Будемо шукати $\Theta(t)$ і c_i у вигляді

$$\Theta(t) = X(t)\delta, \quad c_i = X(\tau_i + 0)\mu_i.$$

Умова ортогональності (4) для системи (3) запишеться так:

$$\int_0^\omega Y^T(s)(g(s) - X(s)\delta) ds + \sum_{i=1}^{p} Y^T(\tau_i + 0)(a_i - X(\tau_i + 0)\mu_i) = 0, \tag{6}$$

Враховуючи, що $Y^T(t) = X^{-1}(t)$, з останньої рівності бачимо, що для того, щоб система (3) мала нетривіальні ω- періодичні розв'язки, необхідно і досить, щоб вектори δ, μ_i, $i = \overline{1,p}$ задовольняли умові:

$$\omega\delta + \sum_{i=1}^{p} \mu_i = \int_0^\omega X^{-1}(s) g(s) ds + \sum_{i=1}^{p} X^{-1}(\tau_i + 0) a_i, \tag{7}$$

що і завершує доведення леми.

У випадку, коли при всіх $i = \overline{1,p}$ матриці B_i є нульовими, то X(t) = U(t,0). Якщо при цьому

$$\int_0^\omega p(s) ds = 2\pi n, \tag{8}$$

де n – деяке ціле число, то мультиплікатори рівні одиниці і з леми 1 одержуємо

Наслідок 1. Якщо для системи

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + g(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = a_i,$$

виконується умова (8), то завжди можна підібрати функцію $\Theta(t)$ і імпульси c_i так, щоб для довільної точки ξ система

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + g(t) - \Theta(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = a_i - c_i,$$

мала ω- періодичний розв'язок $x(t)$ такий, що $x(0) = \xi$.

Зауваження. З (7) очевидно, що на систему (1) завжди можна подіяти за допомогою або тільки зовнішньої сили $\Theta(t)$ (при $\mu_i = 0$, $i = \overline{1,p}$), або тільки імпульсами (прийнявши $\delta = 0$) так, щоб при цьому система (3) мала ω- періодичні розв'язки.

2. Нелінійні системи

Розглянемо нелінійну ω- періодичну імпульсну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + I_i(x), \tag{9}$$

у випадку, коли

A) її лінійна частина, тобто ω- періодична гамільтонова система

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x,$$

для будь-якого $\xi \in R^2$ має нетривіальний ω- періодичний розв'язок $x(t)$ такий, що $x(0) = \xi$.

Крім того, будемо вимагати виконання в області

$$(t,x) \in \Omega = R \times D, \quad D = \{x \mid r \leq \|x\| \leq R\}, \quad \|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2},$$

наступних припущень:

B) функція $f(t,x)$ неперервна (кусково-неперервна по t з розривами першого роду при $t = \tau_i$), ω- періодична по t, $I_i(x)$ – неперервні функції, $I_{i+p}(x) = I_i(x)$ $\forall i \in Z$, $x \in D$, а також існують функція $m(t) \in L_2[0,\omega]$ і сталі M, N_i такі, що

$$\sup_{x\in D}\|f(t,x)\| \leq m(t) \leq M, \quad \sup_{x\in D}\|I_i(x)\| \leq N_i, \quad i = \overline{1,p}; \tag{10}$$

C) функції $f(t,x)$ та $I_i(x)$ при всіх $i = \overline{1,p}$ Ліпшицеві по x:

$$\|f(t,x') - f(t,x'')\| \leq K\|x' - x''\|, \quad \|I_i(x') - I_i(x'')\| \leq K_i\|x' - x''\|; \tag{11}$$

D) вірними є співвідношення

$$2(L+N) \leq R - r, \tag{12}$$

$$\sqrt{\frac{2}{15}}\omega\Lambda K + S + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{15}}\omega\Lambda K - S\right)^2 + 4\Lambda KG} < 2, \tag{13}$$

де

$$L = \sup_{t\in[0,\omega]}\left\{\rho[0,t]\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t m^2(s)ds} + \rho[t,\omega]\frac{t}{\omega}\sqrt{\omega - t}\sqrt{\int_t^\omega m^2(s)ds}\right\},$$

$$N = \sup_{t\in[0,\omega]}\left\{\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sum_{0<\tau_i<t}\rho[\tau_i+0,t]N_i + \frac{t}{\omega}\sum_{t\leq\tau_i<\omega}\rho[t,\tau_i+0]N_i\right\},$$

$$S = \sup_{t\in[0,\omega]}\left\{\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sum_{0<\tau_i<t}\rho[\tau_i+0,t]K_i + \frac{t}{\omega}\sum_{t\leq\tau_i<\omega}\rho[t,\tau_i+0]K_i\right\},$$

$$G = \sup_{t\in[0,\omega]}\left\{\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sum_{0<\tau_i<t}\rho[\tau_i+0,t]K_i\alpha_1(\tau_i) + \frac{t}{\omega}\sum_{t\leq\tau_i<\omega}\rho[t,\tau_i+0]K_i\alpha_1(\tau_i)\right\},$$

$$\alpha_1(t) = \frac{2t(\omega - t)}{\omega}, \quad \rho[s,\sigma] = \begin{cases} 1, & \tau_i < s \leq \sigma \leq \tau_{i+1}, \\ \prod\limits_{s\leq\tau_i<\sigma}\rho_\nu, & 0 \leq s \leq \tau_i < \sigma \leq \omega, \end{cases}$$

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{p}\rho_\nu, \quad \rho_\nu = \sqrt{2 + (\alpha_\nu + \beta_\nu)^2}.$$

Розглянемо послідовність двовимірних ω- періодичних вектор-функцій

$$x_m(t,\xi) = x_0(t,\xi) + \int_0^t X(t,s)\left\{f(s,x_{m-1}(s,\xi)) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X(s,\tau)f(\tau,x_{m-1}(\tau,\xi))d\tau\right\}ds +$$

$$+\sum_{0<\tau_i<t}X(t,\tau_i+0)I_i(x_{m-1}(\tau_i,\xi)) - \frac{t}{\omega}\sum_{i=1}^{p}X(t,\tau_i+0)I_i(x_{m-1}(\tau_i,\xi)), \tag{14}$$

$$x_0(t,\xi) = X(t)\xi, \qquad m = 1,2,\ldots$$

Неважко переконатися, що $x_m(t,\xi)$ є ω- періодичним розв'язком імпульсної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t,x_{m-1}(t,\xi)) - X(t)\Delta_{m-1}(\xi),\ t \neq \tau_i,\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + I_i(x_{m-1}(\tau_i,\xi)),$$

де через $\Delta_m(\xi)$ позначено функцію

$$\Delta_m(\xi) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X^{-1}(s)f(s,x_m(s,\xi))ds + \frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{p}X^{-1}(\tau_i+0)I_i(x_m(\tau_i,\xi)). \tag{15}$$

Отже, якщо послідовність (14) рівномірно збігається до граничної функції $x^*(t,\xi)$, а в точці $\xi = \xi^*$ функція $\Delta(\xi)$:

$$\Delta(\xi) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X^{-1}(s)f(s,x^*(s,\xi))ds + \frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{p}X^{-1}(\tau_i+0)I_i(x^*(\tau_i,\xi)), \tag{16}$$

перетворюється в нуль, то $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ є ω- періодичним розв'язком системи (9). Таким чином, покажемо, що умови B)-D) є достатніми для рівномірної збіжності послідовності (14).

Попередньо наведемо деякі викладки. Оскільки при $0 \leq s,\sigma \leq t \leq \omega$ для довільної двовимірної кусково-неперервної вектор-функції $f(t)$ маємо, що $\|U(t,\sigma)f(s)\| = \|f(s)\|$, тому $\|U(t,\sigma)\| = 1$, і для $0 < \tau_j < s \leq \tau_{j+1} < \ldots < \tau_k < t \leq \tau_{k+1} < \omega$ одержимо наступні оцінки норм:

$$\|X^{-1}(s)\| = \left\|\left(U(s,\tau_j)\left(\prod_{\nu=j}^{2}(E+B_\nu)U(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})\right)(E+B_1)U(\tau_1,0)\right)^{-1}\right\| =$$

$$= \left\|U^{-1}(\tau_1,0)(E+B_1)^{-1}\left(\prod_{\nu=2}^{j}U^{-1}(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})(E+B_\nu)^{-1}\right)U^{-1}(s,\tau_j)\right\| \leq \tag{17}$$

$$\le \prod_{\nu=1}^{j} \left\| (E + B_{\nu})^{-1} \right\| = \prod_{\nu=1}^{j} \left\| (E - B_{\nu}) \right\| = \rho[0,s] \le \rho[0,\omega] = \Lambda,$$

$$\left\| X(t,s) \right\| = \left\| U(t,\tau_k) \left(\prod_{\nu=k}^{j+2} (E + B_{\nu}) U(\tau_{\nu}, \tau_{\nu-1}) \right) (E + B_{j+1}) U(\tau_{j+1}, s) \right\| \le \tag{18}$$

$$\le \prod_{\nu=j+1}^{k} \left\| (E + B_{\nu}) \right\| = \rho[s,t] \le \rho[0,\omega] = \Lambda.$$

При цьому з нерівності Коші-Буняковського маємо

$$\left\| \int_0^t X(t,s) f(s) ds \right\| \le \sqrt{t} \sqrt{\int_0^t \left\| X(t,s) f(s) \right\|^2 ds} \le$$

$$\le \sqrt{t}\, \rho[0,t] \sqrt{\int_0^t \left\| f(s) \right\|^2 ds} \le \Lambda \sqrt{t} \sqrt{\int_0^t \left\| f(s) \right\|^2 ds}, \tag{19}$$

$$\left\| \int_t^{\omega} X(t,s) f(s) ds \right\| \le \sqrt{\omega - t} \sqrt{\int_t^{\omega} \left\| X(t,s) f(s) \right\|^2 ds} \le$$

$$\le \sqrt{\omega - t}\, \rho[t,\omega] \sqrt{\int_t^{\omega} \left\| f(s) \right\|^2 ds} \le \Lambda \sqrt{\omega - t} \sqrt{\int_t^{\omega} \left\| f(s) \right\|^2 ds}. \tag{20}$$

Отже,

$$\left\| \int_0^t X(t,s) \left\{ f(s) - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} X(s,\tau) f(\tau) d\tau \right\} ds \right\| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{t}{\omega} \right) \left\| \int_0^t X(t,s) f(s) ds \right\| + \frac{t}{\omega} \left\| \int_t^{\omega} X(t,s) f(s) ds \right\| \le$$

$$\le \rho[0,t] \left(1 - \frac{t}{\omega} \right) \sqrt{t} \sqrt{\int_0^t \left\| f(s) \right\|^2 ds} + \rho[t,\omega] \frac{t}{\omega} \sqrt{\omega - t} \sqrt{\int_t^{\omega} \left\| f(s) \right\|^2 ds} \le \tag{21}$$

$$\le \Lambda \left(\left(1 - \frac{t}{\omega} \right) \sqrt{t} \sqrt{\int_0^t \left\| f(s) \right\|^2 ds} + \frac{t}{\omega} \sqrt{\omega - t} \sqrt{\int_t^{\omega} \left\| f(s) \right\|^2 ds} \right).$$

Крім того,

$$\left\| \sum_{0<\tau_i<t} X(t,\tau_i+0) I_i(x(\tau_i)) - \frac{t}{\omega} \sum_{i=1}^{p} X(t,\tau_i+0) I_i(x(\tau_i)) \right\| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{t}{\omega} \right) \sum_{0<\tau_i<t} \left\| X(t,\tau_i+0) \right\| \cdot \left\| I_i(x(\tau_i)) \right\| + \frac{t}{\omega} \sum_{t \le \tau_i < \omega} \left\| X(\tau_i+0,t) \right\| \cdot \left\| I_i(x(\tau_i)) \right\| \le \tag{22}$$

$$\le \left(1 - \frac{t}{\omega} \right) \sum_{0<\tau_i<t} \rho[\tau_i+0,t] N_i + \frac{t}{\omega} \sum_{t \le \tau_i < \omega} \rho[t,\tau_i+0] N_i \le N.$$

При довільних невід'ємних сталих b, c для функції $\alpha_2(t)$:

$$\alpha_2(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega} \right) \sqrt{t} \sqrt{\int_0^t (b\alpha_1(s) + c)^2 ds} + \frac{t}{\omega} \sqrt{\omega - t} \sqrt{\int_t^{\omega} (b\alpha_1(s) + c)^2 ds},$$

маємо, що $\alpha_2(t) = h(t)\alpha_1(t)$, де

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{15}\omega} \left(\sqrt{12t^4b^2 - 30t^3\omega b^2 - 20t^2\omega b(c - \omega b) + 30t\omega^2 bc + 15\omega^2 c^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{12t^4b^2 - 18t^3\omega b^2 + 2t^2\omega b(\omega b - 10c) + 2t\,\omega^2 b(\omega b + 5c) + \omega^2 (2\omega^2 b^2 + 10\omega bc + 15c^2)} \right) \le$$

$$\le h\left(\frac{\omega}{2} \right) = \sqrt{\frac{2\omega^2 b^2 + 10\omega bc + 15c^2}{15}}.$$

Таким чином,

$$\alpha_2(t) \le h\left(\frac{\omega}{2} \right) \alpha_1(t) = \sqrt{\frac{2\omega^2 b^2 + 10\omega bc + 15c^2}{15}} \alpha_1(t) \le \left(\sqrt{\frac{2}{15}} \omega b + c \right) \alpha_1(t). \tag{23}$$

Беручи до уваги оцінки (18)–(23), оцінимо відхилення послідовних наближень (14):

$$\left\| x_1(t,\xi) - x_0(t,\xi) \right\| \le \left\| \int_0^t X(t,s) \left\{ f(s, x_0(s,\xi)) - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} X(s,\tau) f(\tau, x_0(\tau,\xi)) d\tau \right\} ds \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{0<\tau_i<t} X(t,\tau_i+0) I_i(x_0(\tau_i,\xi)) - \frac{t}{\omega} \sum_{i=1}^{p} X(t,\tau_i+0) I_i(x_0(\tau_i,\xi)) \right\| \le$$

$$\le \rho[0,t] \left(1 - \frac{t}{\omega} \right) \sqrt{t} \sqrt{\int_0^t \left\| f(s, x_0(s,\xi)) \right\|^2 ds} + \tag{24}$$

$$+ \rho[t,\omega] \frac{t}{\omega} \sqrt{\omega - t} \sqrt{\int_t^{\omega} \left\| f(s, x_0(s,\xi)) \right\|^2 ds} +$$

$$+ \left(1 - \frac{t}{\omega} \right) \sum_{0<\tau_i<t} \rho[\tau_i+0,t] N_i + \frac{t}{\omega} \sum_{t \le \tau_i < \omega} \rho[t,\tau_i+0] N_i \le L + N.$$

З (12) слідує, що область $D_0 = \{ \xi \mid r + L + N \le \|\xi\| \le R - (L+N) \}$, $D_0 \subset D$ є непорожньою, а тому виберемо довільну точку $\xi \in D_0$. Оскільки $\left\| x_0(t,\xi) \right\| = \|\xi\|$, то з (24) за правилом трикутника одержимо нерівності

$$\left\| x_1(t,\xi) \right\| \ge \left\| x_0(t,\xi) \right\| - \left\| x_1(t,\xi) - x_0(t,\xi) \right\| \ge r,$$

$$\left\| x_1(t,\xi) \right\| \le \left\| x_1(t,\xi) - x_0(t,\xi) \right\| + \left\| x_0(t,\xi) \right\| \le R,$$

а тому $x_1(t,\xi) \in D$. Шляхом індукції можна переконатися, що при всіх $m \ge 1$ маємо

$$\left\| x_m(t,\xi) - x_0(t,\xi) \right\| \le L + N,$$

а отже $r \le \left\| x_m(t,\xi) \right\| \le R$, тобто всі члени послідовності (14) лежать в області D.

Крім того, оскільки $m(t)\le M$, $\rho[s,\sigma]\le\Lambda$ при довільних $s,\sigma\in[0,\omega]$, то з (24) одержуємо оцінку

$$\|x_1(t,\xi)-x_0(t,\xi)\|\le \Lambda M\alpha_1(t)+N\equiv b_0\alpha_1(t)+c_0. \tag{25}$$

З урахуванням умови Ліпшіца (11) оцінимо різницю сусідніх членів послідовності (14):

$$\begin{aligned}\|x_{m+1}(t,\xi)-x_m(t,\xi)\|\le \Lambda K\Bigg\{&\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t\|x_m(s,\xi)-x_{m-1}(s,\xi)\|^2ds}+\\&+\frac{t}{\omega}\sqrt{\omega-t}\sqrt{\int_t^\omega\|x_m(s,\xi)-x_{m-1}(s,\xi)\|^2ds}\Bigg\}+\\&+\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sum_{0<\tau_i<t}\rho[\tau_i+0,t]K_i\|x_m(\tau_i,\xi)-x_{m-1}(\tau_i,\xi)\|+\\&+\frac{t}{\omega}\sum_{t\le\tau_i<\omega}\rho[t,\tau_i+0]K_i\|x_m(\tau_i,\xi)-x_{m-1}(\tau_i,\xi)\|.\end{aligned}\tag{26}$$

При m=1 з (25), (26) маємо, що

$$\begin{aligned}\|x_2(t,\xi)-x_1(t,\xi)\|\le \Lambda K\Bigg\{&\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t(b_0\alpha_1(s)+c_0)^2ds}+\\&+\frac{t}{\omega}\sqrt{\omega-t}\sqrt{\int_t^\omega(b_0\alpha_1(s)+c_0)^2ds}\Bigg\}+\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sum_{0<\tau_i<t}\rho[\tau_i+0,t]K_i(b_0\alpha_1(\tau_i)+c_0)+\\&+\frac{t}{\omega}\sum_{t\le\tau_i<\omega}\rho[t,\tau_i+0]K_i(b_0\alpha_1(\tau_i)+c_0)\le\\&\le\Lambda K\left(\sqrt{\frac{2}{15}}\omega b_0+c_0\right)\alpha_1(t)+Gb_0+Sc_0\equiv b_1\alpha_1(t)+c_1.\end{aligned}\tag{27}$$

Отже, виконується нерівність

$$\begin{pmatrix}b_1\\c_1\end{pmatrix}\le Q\begin{pmatrix}b_0\\c_0\end{pmatrix},$$

де

$$Q=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{2}{15}}\omega\Lambda K & \Lambda K\\ G & S\end{pmatrix}.$$

За індукцією можемо показати, що для всіх $m\ge0$ виконуються оцінки

$$\|x_{m+1}(t,\xi)-x_m(t,\xi)\|\le b_m\alpha_1(t)+c_m,\quad \begin{pmatrix}b_{m+1}\\c_{m+1}\end{pmatrix}\le Q\begin{pmatrix}b_m\\c_m\end{pmatrix}, \tag{28}$$

а тому при довільних $j\ge1$ маємо

$$\begin{aligned}\|x_{m+j}(t,\xi)-x_m(t,\xi)\|&\le\sum_{i=0}^{j-1}\|x_{m+i+1}(t,\xi)-x_{m+i}(t,\xi)\|\le\\&\le(\alpha_1(t),1)\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\begin{pmatrix}b_m\\c_m\end{pmatrix}\le(\alpha_1(t),1)Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\begin{pmatrix}b_0\\c_0\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{29}$$

Оскільки $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{15}}\omega\Lambda K+S+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{15}}\omega\Lambda K-S\right)^2+4\Lambda KG}\right)$ є більшим із власних значень матриці Q, то з (13) слідує, що послідовність (14) рівномірно збігається при $m\to\infty$ в області $(t,\xi)\in R\times D_0$ до граничної функції $x^*(t,\xi)$. Переходячи в (29) до границі при $j\to\infty$, одержимо оцінку

$$\|x^*(t,\xi)-x_m(t,\xi)\|\le(\alpha_1(t),1)Z_m\begin{pmatrix}\Lambda M\\N\end{pmatrix}, \tag{30}$$

де

$$Z_m=\begin{pmatrix}Z_m^1 & Z_m^2\\ Z_m^3 & Z_m^4\end{pmatrix}=Q^m(E-Q)^{-1}.$$

Оскільки всі функції $x_m(t,\xi)$ послідовності (14) періодичні по t з періодом ω і при $t=0$ приймають значення $x_m(0,\xi)=\xi$, то і гранична функція $x^*(t,\xi)=\xi$ теж є ω- періодичною і $x^*(0,\xi)=\xi$.

Переходячи в (14) до границі при $m\to\infty$, бачимо, що гранична функція $x^*(t,\xi)$ є ω- періодичним розв'язком інтегрального рівняння

$$\begin{aligned}x(t)=X(t)\xi+\int_0^t X(t,s)\left\{f(s,x(s))-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega X(s,\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau\right\}ds+\\+\sum_{0<\tau_i<t}X(t,\tau_i+0)I_i(x(\tau_i))-\frac{t}{\omega}\sum_{i=1}^p X(t,\tau_i+0)I_i(x(\tau_i)),\end{aligned}$$

а тому, якщо точка $\xi=\xi^*$ є нулем функції $\Delta(\xi)$ вигляду (16), то $x^*(t,\xi^*)$ є ω- періодичним розв'язком системи (9).

З іншого боку, нехай деяка ω- періодична функція $\varphi(t)$, $\varphi(0)=\xi$ є розв'язком системи (9). Тоді можемо записати [1], що

$$\varphi(t)=X(t)\xi+\int_0^t X(t,s)f(s,\varphi(s))ds+\sum_{0<\tau_i<t}X(t,\tau_i+0)I_i(\varphi(\tau_i)).$$

Беручи до уваги, що $X(\omega)=E$, отримуємо:

$$\varphi(t+\omega)=\varphi(t)+X(t)\left(\int_0^\omega X^{-1}(s)f(s,\varphi(s))ds+\sum_{i=1}^p X^{-1}(\tau_i+0)I_i(\varphi(\tau_i))\right),$$

а тому з ω- періодичності слідує, що $\varphi(t)$ задовольняє умові

$$\int_0^{\omega} X^{-1}(s) f(s,\varphi(s))ds + \sum_{i=1}^{p} X^{-1}(\tau_i+0) I_i(\varphi(\tau_i)) = 0 .$$

Одержані вище результати сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. Нехай система (9) задовольняє умовам A)–D). Тоді

1) послідовність функцій $x_m(t,\xi)$ вигляду (14) при $m \to \infty$ рівномірно збігається відносно $(t,\xi) \in R \times D_0$ до граничної функції $x^*(t,\xi)$ і при всіх натуральних m справджуються оцінки збіжності (30);
2) гранична функція $x^*(t,\xi)$ ω- періодична по t і приймає початкове значення $x^*(0,\xi) = \xi$;
3) для того, щоб функція $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ була ω- періодичним розв'язком системи диференціальних рівнянь (9) необхідно і досить, щоб точка $\xi = \xi^*$ була розв'язком рівняння $\Delta(\xi) = 0$.

Наведемо твердження, яке містить достатні умови існування ω- періодичного розв'язку імпульсної системи (9).

Теорема 2. Нехай система (9) задовольняє умовам A)–D) і, крім того:

1) при деякому фіксованому натуральному m рівняння
$$\Delta_m(\xi) = 0, \tag{31}$$
має ізольований розв'язок $\xi = \xi_{0m}$;
2) індекс особливої точки ξ_{0m} відображення $\Delta_m(\xi)$ породженого (15), не рівний нулю ;
3) існує випукла, замкнена область $D_1 \subset D_0$ така, що ξ_{0m} є в D_1 єдиним розв'язком рівняння (31) і на її границі ∂D_1 виконується нерівність
$$\inf_{\xi \in \partial D_1} \|\Delta_m(\xi)\| > P_1 + P_2, \tag{32}$$

де

$$P_1 = \frac{\Lambda K}{\sqrt{15}} \Big(2\omega^2 \left(\Lambda M Z^1_m + N Z^2_m \right)^2 +$$
$$+10\omega \left(\Lambda M Z^1_m + N Z^2_m \right)\left(\Lambda M Z^3_m + N Z^4_m \right) + 15 \left(\Lambda M Z^3_m + N Z^4_m \right)^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$
$$P_2 = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{p} \rho[0,\tau_i+0] K_i \left(\alpha_1(\tau_i) \left(\Lambda M Z^1_m + N Z^2_m \right) + \Lambda M Z^3_m + N Z^4_m \right).$$

Тоді система (9) має єдиний розв'язок $x = x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ з початковою умовою $x^*(0) = \xi^*$, де $\xi^* \in D_1$.

Доведення. Використовуючи оцінки (17), (19), (30), при $m \geq 1$ одержимо наступні співвідношення:

$$\|\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)\| = \frac{1}{\omega} \left\| \int_0^{\omega} X^{-1}(s) \left(f(s,x^*(s,\xi)) - f(s,x_m(s,\xi)) \right) ds \right\| +$$
$$+ \frac{1}{\omega} \left\| \sum_{i=1}^{p} X^{-1}(\tau_i+0) \left\{ I_i(x^*(\tau_i,\xi)) - I_i(x_m(\tau_i,\xi)) \right\} \right\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\int_0^{\omega} \|X^{-1}(s)\|^2 \cdot \|f(s,x^*(s,\xi)) - f(s,x_m(s,\xi))\|^2 ds} +$$
$$+ \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{p} \|X^{-1}(\tau_i+0)\| \cdot \|I_i(x^*(\tau_i,\xi)) - I_i(x_m(\tau_i,\xi))\| \leq$$
$$\leq \frac{\Lambda K}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\int_0^{\omega} \|x^*(s,\xi) - x_m(s,\xi)\|^2 ds} +$$
$$+ \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{p} \rho[0,\tau_i+0] K_i \|x^*(\tau_i,\xi) - x_m(\tau_i,\xi)\| \leq P_1 + P_2 .$$

Далі, враховуючи останню оцінку, аналогічно до доведення теореми 3.1 [6], можемо показати гомотопність полів $\Delta(\xi)$ і $\Delta_m(\xi)$, що завершує доведення теореми.

3. Системи з малим параметром

Розглянемо ω- періодичну систему
$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + g(t) + \varepsilon f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + a_i + \varepsilon I_i(x), \tag{33}$$

де ε – малий параметр.

Припустимо, що при $(t,x) \in \Omega$, функція $f(t,x)$ задовольняє умовам B), C), а також, що

A1) відповідна (33) лінійна неоднорідна ω- періодична система (1) при довільному $\xi \in R^2$ має нетривіальний ω- періодичний розв'язок $x(t)$, $x(0) = \xi$.

Побудуємо послідовність ω- періодичних функцій

$$\tilde{x}_m(t,\xi) = \tilde{x}_0(t,\xi) + \int_0^t X(t,s) \left\{ f(s,\tilde{x}_{m-1}(s,\xi)) - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} X(s,\tau) f(\tau,\tilde{x}_{m-1}(\tau,\xi)) d\tau \right\} ds +$$
$$+ \sum_{0<\tau_i<t} X(t,\tau_i+0) I_i(x_{m-1}(\tau_i,\xi)) - \frac{t}{\omega} \sum_{i=1}^{p} X(t,\tau_i+0) I_i(x_{m-1}(\tau_i,\xi)), \tag{34}$$

$$\tilde{x}_0(t,\xi) = X(t)\xi + \int_0^t X(t,s) g(s) ds + \sum_{0<\tau_i<t} X(t,\tau_i+0) a_i, \qquad m=1,2,\ldots$$

Зрозуміло, що при достатньо малих ε вірними є нерівності

$$2\varepsilon(L+N)\le R-r\,,\quad \varepsilon\left(\sqrt{\frac{2}{15}}\omega\Lambda K+S+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{15}}\omega\Lambda K-S\right)^2+4\Lambda KG}\right)<2\,,$$

а тому, проводячи викладки, аналогічні вищенаведеним, можемо показати, що при $m\ge 1$ для членів послідовності (34) справджуються оцінки

$$\left\|\widetilde{x}_m(t,\xi)-\widetilde{x}_0(t,\xi)\right\|\le\varepsilon\{\Lambda M\alpha_1(t)+N\}, \tag{35}$$

$$\left\|\widetilde{x}^*(t,\xi)-\widetilde{x}_m(t,\xi)\right\|\le\varepsilon(\alpha_1(t),1)V_m\begin{pmatrix}\Lambda M\\ N\end{pmatrix},$$

$$\left\|\widetilde{\Delta}(\xi)-\widetilde{\Delta}_m(\xi)\right\|\le\varepsilon(R_1+R_2),$$

де

$$R_1=\frac{\Lambda K}{\sqrt{15}}\Big(2\omega^2\left(\Lambda MV_m^1+NV_m^2\right)^2+$$

$$+10\omega\left(\Lambda MV_m^1+NV_m^2\right)\left(\Lambda MV_m^3+NV_m^4\right)+15\left(\Lambda MV_m^3+NV_m^4\right)^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$R_2=\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{p}\rho[0,\tau_i+0]K_i\left(\alpha_1(\tau_i)\left(\Lambda MV_m^1+NV_m^2\right)+\Lambda MV_m^3+NV_m^4\right),$$

$$\widetilde{\Delta}_m(\xi)=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}X^{-1}(s)f(s,\widetilde{x}_m(s,\xi))ds+\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{p}X^{-1}(\tau_i+0)I_i(\widetilde{x}_m(\tau_i,\xi)),$$

$$\widetilde{\Delta}(\xi)=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}X^{-1}(s)f\left(s,\widetilde{x}^*(s,\xi)\right)ds+\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{p}X^{-1}(\tau_i+0)I_i\left(\widetilde{x}^*(\tau_i,\xi)\right),$$

$$\widetilde{x}^*(t,\xi)=\lim_{m\to\infty}\widetilde{x}_m(t,\xi),\quad V_m=\begin{pmatrix}V_m^1 & V_m^2\\ V_m^3 & V_m^4\end{pmatrix}=(\varepsilon Q)^m(E-\varepsilon Q)^{-1}.$$

Таким чином, всі результати вищенаведених теорем переносяться і на систему (33).

Крім того, має місце наступне твердження.

Теорема 3. Нехай для системи (33) виконуються умови А1), В), С),і відображення

$$\widetilde{\Delta}_0(\xi)=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}X^{-1}(s)f(s,\widetilde{x}_0(s,\xi))d\tau+\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{p}X^{-1}(\tau_i+0)I_i(\widetilde{x}_0(\tau_i,\xi)),$$

має в області D_1 ізольовану особливу точку $\xi=\xi_0$ ненульового індексу. Тоді існує таке ε_0, що при всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ система (33) має ω- періодичний розв'язок.

Доведення. Переходячи в (35) до границі при $m\to\infty$, отримаємо оцінку

$$\left\|\widetilde{x}^*(t,\xi)-\widetilde{x}_0(t,\xi)\right\|\le\varepsilon\{\Lambda M\alpha_1(t)+N\},$$

звідки при $m=0$ маємо нерівність аналогічну до (32):

$$\inf_{\xi\in\partial D_1}\left\|\widetilde{\Delta}_0(\xi)\right\|>$$

$$>\varepsilon\left(\frac{\Lambda K\sqrt{2(\omega\Lambda M)^2+10\omega\Lambda MN+15N^2}}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{p}\rho[0,\tau_i+0]K_i(\Lambda M\alpha_1(\tau_i)+N)\right).$$

Приймемо за D_1 коло радіуса δ з центром у точці ξ_0. Так як ξ_0 – ізольована особлива точка, то при достатньо малому δ в D_1 відображення $\widetilde{\Delta}_0(\xi)$ не має інших особливих точок і

$$\inf_{\|\xi-\xi_0\|=\delta}\left\|\widetilde{\Delta}_0(\xi)\right\|=\eta>0,$$

отже

$$\eta>\varepsilon\left(\frac{\Lambda K\sqrt{2(\omega\Lambda M)^2+10\omega\Lambda MN+15N^2}}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{p}\rho[0,\tau_i]K_i(\Lambda M\alpha_1(\tau_i)+N)\right).$$

Таким чином, при

$$\varepsilon<\varepsilon_0=\frac{\eta}{\left(\frac{\Lambda K\sqrt{2(\omega\Lambda M)^2+10\omega\Lambda MN+15N^2}}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{p}\rho[0,\tau_i]K_i(\Lambda M\alpha_1(\tau_i)+N)\right)},$$

система (33) має ω- періодичний розв'язок. Теорема доведена.

Висновки. Одержані результати можуть бути використані при дослідженні існування і практичному знаходженні наближених розв'язків імпульсних систем з гамільтоновою лінійною частиною, а також узагальнені на більш широкий клас задач.

Література

1.Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987. – 288 с.
2.Samoilenko A.M., Perestjuk N.A. Impulsive differential equations. – Singapore, 1995. – 455 p.
3.Перестюк Н.А., Шовкопляс В.Н. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием// Укр. матем. журн. – 1979. – т. 31, №5. – С. 517-524.
4.Bainov D.D., Simeonov P.S. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications.– Longman Sci. and Techn., Pitman Monographs, 1993.
5.Трофимчук Е.П. Исследование численно-аналитическим методом с улучшенной сходимостью решений краевой задачи для импульсной системы // Асимптотические методы в задачах математической физики.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 32-37.
6.Самойленко А.М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наука, 1992. – 279 с.

Надійшла до редколегії 21.05.2004.