УДК 519.1
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).30-37

Н. Б. Ілаш[1], Н. М. Самарук[2]

[1] Хмельницький політехнічний фаховий коледж національного університету «Львівська політехніка»,
викладач спеціальних дисциплін,
кандидат фізико-математичних наук
nadyailash@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3123-9642

[2] Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат педагогічних наук, доцент
samaruk_nm@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4611-8528

МЕТОД ЄГОРИЧЕВА ДОВЕДЕННЯ КОМБІНАТОРНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ З МНОГОЧЛЕНАМИ НАРАЯНА

У цій публікації наведено нові доведення двох комбінаторних тотожностей. Часткові випадки цих тотожностей містять числа та многочлени Нараяна і використовуються, зокрема, у класичній теорії інваріантів та дискретній математиці. Одна із доведених нами тотожностей є узагальненням задачі Стенлі.

Хоча існує велика кількість методів генерування нових комбінаторних тотожностей, на жаль, не існує єдиного універсального методу, який дозволив би довести будь-яку комбінатрону тотожність. У сімдесятих роках минулого століття Георгієм Єгоричевим було розроблено декілька нових методів обчислення комбінаторних сум. У цій статті ми використовуємо один з методів Єгоричева – метод лишків (коефіцієнтів).

Ключові слова: комбінаторика, біноміальний коефіцієнт, комбінаторна тотожність, метод Єгоричева, многочлени Нараяна.

1. Вступ. Число Нараяна

$$N_{n,k} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}, (1 \le k \le n)$$

використовується в багатьох комбінаторних задачах (див. [1], [2]).

Ми розглядаємо многочлен Нараяна

$$N_n(z) = \sum_{k=1}^{n} N_{n,k} z^{k-1}.$$

В деяких джерелах його називають асоційованим многочленом Нараяна (див. [3]). Крім цього, розглянемо многочлен Наряна типу B, що визначається наступним чином:

$$W_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 z^k.$$

Зокрема, застосування многочленів Нараяна та числа Нараяна у класичній теорії інваріантів наведені у [4], [5], [6], [7]. В [8] знайдено рекурентне співвідношення для многочленів Нараяна:

$$N_n(z) = (1-z)N_{n-1}(z) + z\sum_{i=0}^{n-1} N_i(z)N_{n-1-i}(z).$$

Породжуюча функція

$$G(z,t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} N_n(z) t^i = \frac{1-(1-z)t - \sqrt{(1-z)^2t^2 - 2(1+z)t + 1}}{2zt}$$

задовільняє функціональне рівняння (див. [9]):

$$ztG(z,t)^2 + (t + zt - 1)G(z,t) + t = 0.$$

Різні рекурентні співвідношення для многочленів Нараяна обох типів доведено у [10] та у [11].

У [12] Р. Стенлі пропонує ряд задач. Серед них задача 15: довести, що многочлен Нараяна типу B можна подати у вигляді

$$W_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}(z-1)^k.$$

В [13] доведено аналог цієї формули для многочленів Нараяна $N_n(z)$.

В [14] чисто комбінаторно доведена тотожність, що їх узагальнює. Доведення займає декілька сторінок. В розділі 3 ми наводимо коротке і елементарне доведення цієї тотожності, використовуючи метод Єгоричева. Основні положення цього методу наведено в розділі 2.

В [21] чисто комбінаторно доведено комбінаторну тотожність

$$\sum_{i=0}^{min\{k,m\}} \binom{m}{i}\binom{m+2s}{i+s}\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \binom{m+k+s}{m+s}\binom{m+k+2s}{m+s},$$

що є узагальненням відомої тотожності Лі Жень-чу. Доведення займає декілька сторінок. У розділлі 4 ми пропонуємо простіше доведення, з використанням методу Єгоричева.

2. Метод Єгоричева обчислення комбінаторних сум. Розглянемо основні правила методу лишків (коефіцієнтів), розробленого Г. Єгоричевим у [15].

Нехай $A(w)$ і $B(w)$ – породжуючі функції для числових послідовностей $\{a_k\}$ та $\{b_k\}, k = 0, 1, \ldots$. Множину тих числових рядів над полем K дійсних чи комплексних чисел, що містять скінченну кількість доданків з від'ємними степенями, позначимо через H. Введемо на H алгебру формальних степеневих рядів з операціями додавання, множення та взяття оберненого. Кільце R степеневих рядів виду

$$C(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k, c_1 \neq 0$$

над полем K має структуру алгебри Коші.

Означення 1 (див. [15]). *Нехай $C(w) \in H$. Лишком назвемо*

$$\boldsymbol{res} C(w) = \boldsymbol{res}_w C(w) = c_{-1},$$

де c_{-1} – коефіцієнт при w^{-1} ряду $C(w)$, що стоїть під знаком $\boldsymbol{res}$.

З означення лишку **res** та теорії аналітичних функцій випливають такі правила дій над лишками породжуючих функцій виду $A(w) = \sum_{k\geq 0} a_k w^k$.

Твердження 1 (див. [15])**.** *Правило зняття лишку*

$$\boldsymbol{res}_w A(w)w^{-k-1} = \boldsymbol{res}_w B(w)w^{-k-1}, k = 0, 1, \ldots,$$

тоді і тільки тоді, коли

$$A(w) = B(w).$$

Твердження 2 (див. [15])**.** *Правило лінійності*

$$\alpha \boldsymbol{res}_w A(w)w^{-k-1} + \beta \boldsymbol{res}_w B(w)w^{-k-1} = \boldsymbol{res}_w(\alpha A(w) + \beta B(w))w^{-k-1}.$$

Твердження 3 (див. [15])**.** *Правило заміни змінних*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \boldsymbol{res}_w A(w)w^{-k-1} = A(z).$$

Твердження 4 (див. [15])**.** *Нехай α — довільне комплексне число, m — натуральне. Біноміальний коефіцієнт можна виразити через лишок з допомогою формули*

$$\binom{\alpha}{n} = \boldsymbol{res}_w (1+w)^{\alpha} w^{-n-1}.$$

Останнє співвідношення залишається справедливим і у випадку, коли $A(w)$ многочлен, а $z = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k w^k, a_{-m} \neq 0$, де m додатне число.

Алгебраїчний підхід до означеня лишку розвинено у роботах [16] і [17].

Застосування даного методу дає можливість просто генерувати комбінаторні тотожності, зокрема, з числами Нараяна. Що буде продемонстровано нижче.

3. Доведення узагальненої задачі Стенлі. Застосовуючи метод Єгоричева, покажемо, що

Теорема 1 (див. [14])**.** *Для $n, q \geq 0, x \in \mathbb{C}$ справедлива тотожність*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n+x+q-k-2}{n+q-1} (z-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+x+q-2}{k+q-1} z^k.$$

Доведення. Виразимо біноміальні коефіцієнти у правій частині через лишки. Згідно твердження 4

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n+x+q-k-2}{n+q-1} (z-1)^k =$$

$$= \mathbf{res}_{uv} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+v)^n}{v^{k+1}} \frac{(1+u)^{2n+x+q-2-k}}{u^{n+q}} (z-1)^k =$$

$$= \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^{2n+q+x-2}}{u^{n+q}} \mathbf{res}_v \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-1}{1+u}\right)^k \frac{(1+v)^n}{v^{k+1}} =$$

Застосувавши правило замніни змінних, маємо

$$= \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^{2n+q+x-2}}{u^{n+q}} \left(1 + \frac{z-1}{1+u}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^{n+q+x-2}}{u^{k+q}} z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+x+q-2}{k+q-1} z^k.$$

Зазначимо, що при $x = q = 1$ ми довели задачу Стенлі:

Наслідок 1 (див. [12], [14]). *Многочлен Нараяна типу B можна подати у вигляді*

$$W_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} (z-1)^k.$$

При $q = 0, x = 2$ отримаємо аналогічний вираз для многочленів Нараяна.

Наслідок 2 (див. [13], [14], [18]). *Многочлен Нараяна можна подати у вигляді*

$$N_n(z) = \frac{1}{z(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \binom{2n-k}{n} (z-1)^k =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \binom{2n-k}{n} z^{n-k} (1-z)^k.$$

Зауважимо, що останній вираз для многочлена Нараяна отримується завдяки тому, що многочлен $xN_n(x)$ є самовзаємним.

4. Доведення узагальнення тотожності Лі Жень-чу. Існує багато формул, які легко застосувати як до чисел Нараяна, так і для чисел виду $q_{n,k} = \binom{n}{k}^2$. Наприклад, згортка Вандермонда дає можливість легко знайти як суму $\sum_{k=1}^{n} N_{n,k}$, так і суму $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2$.

В [19], [20] Ріордан доводить рекурентні формули для чисел $r_{n,m} = N_{n,m+1}$

$$r_{n,m} = \sum_{i=0}^{m} r_{m,i} \binom{n+i}{2m},$$

або для чисел Нараяна

$$N_{n,m+1} = \sum_{i=0}^{m} N_{m,i+1} \binom{n+i}{2m},$$

$$q_{n,m} = \sum_{i=0}^{m} q_{m,i} \binom{n+i}{2m}.$$

Замінивши n на $m+k$ та i на $m-i$ в останній формулі, бачимо, що вона є іншим записом тотожності Лі Жень-чу. Використовуючи метод Єгоричева, доведемо що справедлива більш загальна формула.

Теорема 2 (див. [21]). *Для довільних цілих невід'ємних m, k, s справедлива тотожність:*

$$\sum_{i=0}^{min\{k,m\}} \binom{m}{i}\binom{m+2s}{i+s}\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \binom{m+k+s}{m+s}\binom{m+k+2s}{m+s}.$$

Доведення. Зауважимо, що $\binom{m}{i}=0$ при $i>m$ та при $i>0$, також

$$\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s}=0$$

при $i>k$, тому

$$\sum_{i>k}\binom{m}{i}\binom{m+2s}{i+s}\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s}=0=\sum_{i>m}\binom{m}{i}\binom{m+2s}{i+s}\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s}.$$

Отже,

$$\sum_{i=0}^{min\{k,m\}} \binom{m}{i}\binom{m+2s}{i+s}\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{m+2s}{i+s}\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{m+2s}{i+s}\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i}\binom{m+2s}{i+s}\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s}.$$

Використовуючи твердження 4, подамо біноміальні коефіцієнти через лишки:

$$S=\sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i}\binom{m+2s}{s+i}\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} =$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{res}_u\frac{(1+u)^m}{u^{i+1}}\mathbf{res}_v\frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m-i+s+1}}\mathbf{res}_w\frac{(1+w)^{k-i+2m+2s}}{w^{2m+2s+1}} =$$

$$=\mathbf{res}_{vw}\frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m+s+1}}\frac{(1+w)^{k+2m+2s}}{w^{2m+2s+1}}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{v}{1+w}\right)^i\mathbf{res}_u\frac{(1+u)^m}{u^{i+1}}.$$

Застосувавши правило заміни, отримаємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{v}{1+w}\right)^i\mathbf{res}_u\frac{(1+u)^m}{u^{i+1}} = \left(1+\frac{v}{1+w}\right)^m = (1+v+w)^m(1+w)^{-m}.$$

Врахувавши також формулу бінома Ньютона та правило лінійності, маємо:

$$S=\mathbf{res}_{vw}(1+v+w)^m\frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m+s+1}}\frac{(1+w)^{k+m+2s}}{w^{2m+2s+1}} =$$

$$= \mathbf{res}_{vw} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (1+v)^i w^{m-i} \frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m+s+1}} \frac{(1+w)^{k+m+2s}}{w^{2m+2s+1}} =$$

$$= \sum_{i=m}^{2m} \binom{m}{i-m} \mathbf{res}_w \frac{(1+w)^{k+m+2s}}{w^{i+2s+1}} \mathbf{res}_v \frac{(1+v)^{i+2s}}{v^{m+s+1}} =$$

$$= \sum_{i=m}^{2m} \binom{m}{i-m} \binom{k+m+2s}{i+2s} \binom{i+2s}{s+i}.$$

Оскільки

$$\binom{n}{m}\binom{m}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{m-p},$$

то

$$S=\binom{m+k+2s}{m+s} \sum_{i=m}^{2m} \binom{m}{2m-i} \binom{k+s}{i-m+s} = \binom{m+k+s}{m+s} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{m-i} \binom{k+s}{s+1}.$$

Використавши згортку Вандермонда, отримаємо

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{m-i} \binom{k+s}{i+s} = \binom{m+k+s}{m+s}.$$

Що і доводить тотожність.

Зазначимо, що у випадку $s = 0$, отримаємо відому тотожність Лі Жень-чу: (або рекурсію для $q_{n,m}$)

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}^2 \binom{k+2m-i}{2m} = \binom{m+k}{k}^2.$$

А при $s = 1$ і $n = k - m$ – рекурсію для $N_{m,n}$, отриману Ріорданом, про яку йшлось на початку цього розділу.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. Основним результатом даного дослідження є нові доведення двох комбінаторних формул, поданих у теоремах 1 та 2. Для доведення використано метод Єгоричева, що дозволяє легко обчислювати багато видів комбінаторних сум.

Список використаної літератури

1. Rodica S. Combinatorial statistics on noncrossing partitions. *J. Combin. Theory Ser. A.* 1994. Vol 66, № 2. P. 270–301.
2. Kreveras G. Sur les partitions non cro isées d'un cycle. *Descrete Math.* 1972. Vol 1, № 4. P. 333—350.
3. Toufik M., Yidong S. Identities involving Narayana polynomials and Catalan numbers. *Descrete Math.* 2009. Vol. 309, № 12. P. 4079–4088.
4. Stanley R. Invariants of finite groups and their applications to combinatorics *Bull. Amer. Math. Soc.* 1979. № 1. P. 475—511.
5. Bedratyuk L. The MAPLE package for calculating Poincaré series *arXiv.* 2011. [Електронний ресурс]
URL: https://arxiv.org/abs/1006.5372 (дата звернення: 15.02.2019).
6. Ilash N. B. Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms *Carpathian Math. Publ.* 2017. Vol. 9, № 1. P. 57–62.

7. Ilash N. B. Hilbert polynomials of the algebras of SL_2-invariants. *Carpathian Math. Publ.* 2018. Vol. 10, № 2. P. 303–312.
8. Lassalle M. Narayana polynomials and Hall-Littlewood symmetric functions. *Adv. in Appl. Math.* 2012. Vol. 49, № 3. P. 239–262.
9. Zeilberger D. Six etudes in generating functions. *Int. J. Comput. Math.* 1989. Vol. 29, № 2–4. P. 201–215.
10. Alexeev N., Tikhomirov A. Singular Values Distribution of Squares of Elliptic Random Matrices and type B Narayana Polynomials. *J. Theoret. Probab.* 2017. Vol. 30, № 3. P. 1170–1190.
11. Sulanke R. A. The Narayana distribution. Special issue on lattice path combinatorics and applications. *J. Statist. Plann. Inference.* 2002. Vol. 101, № 1–2. P. 311–326.
12. Stanley R. P. Bijective proof problems, version of 18 August 2009.
URL: http://www-math.mit.edu/ rstan/ (дата звернення: 01.11.2021).
13. Mansour T. Dyck Paths and partial Bell polynomials. *Australas. J. Combin.* 2008. Vol. 42. P. 285–297.
14. Chen R. X. F., Reidys C. M. Narayana polynomials and some generalizations. *arXiv.* 2015. [Електронний ресурс]
URL: https://arxiv.org/abs/1411.2530v3 (дата звернення: 15.02.2019).
15. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. *Новосибирск: Наука*, 1977. 285 с.
16. Huang I-C. Applications of residues to combinatorial identities. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1997. Vol. 125, № 4. P. 1011–1017.
17. Huang I-C. Pseudofunctors onmodules with zero dimensional support. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 1995. xii+53 p.
18. Chen W. Y. C., Pang S. X. M. On the combinatorics of the Pfaff identity. *Discrete Math.* 2009. Vol. 309. P. 2190–2196.
19. Riordan J. Combinatorial Identities. *NY : Huntington*, 1979. 256 p.
20. Graham R. L., Riordan J. The Solution of a Certain Recurrence. *The American Mathematical Monthly.* 1966. Vol. 73, № 6. P. 604–608.
21. Székely L. Common origin of cubic binomial identities; a generalization of Surányi's proof on Le Jen Shoo's formula *J. Combin. Theory Ser. A.* 1985. Vol. 40. P. 171–174.

Ilash N. B., Samaruk N. M. Egorychev method for proving combinatorial identities involving Narayana polynomials.

We give new proofs of two combinatorial identities. Partial cases of the identities contain Narayana number and Narayana polynomials. They are used, in particular, in classical invariant theory and discrete mathematics. One of these identities is a generalization of Stanley's problem.

There are a large number of methods for proving combinatorial identities. However, there is no universal method that would prove any combinatorial identity.

In the seventies of the last century, Georgy Yegorychev developed several new methods for calculating combinatorial sums. In this article we use one of Yegorychev methods – the method of coefficients.

Keywords: combinatorics, binomial coefficient, combinatorial identity, Egorychev method, Narayana polynomials.

References

1. Rodica, S.(1994). Combinatorial statistics on noncrossing partitions. *J. Combin. Theory Ser. A,* 6(2), 270-301.
2. Kreveras, G. (1972). Sur les partitions non cro isées d'un cycle. *Descrete Math.*, 1(4), 333-350.
3. Toufik, M. & Yidong, S. (2009). Identities involving Narayana polynomials and Catalan numbers. *Descrete Math.*, 309(12), 4079-4088.
4. Stanley, R. (1979). Invariants of finite groups and their applications to combinatorics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1, 475-511.
5. Bedratyuk, L. (2011). The MAPLE package for calculating Poincaré series *arXiv.*
Retrieved at: https://arxiv.org/abs/1006.5372.

6. Ilash, N. B. (2017). Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms. *Carpathian Math. Publ.*, 9(1), 57-62.
7. Ilash, N. B. (2018). Hilbert polynomials of the algebras of SL_2-invariants. *Carpathian Math. Publ.*, 10(2), 303-312.
8. Lassalle, M. (2012). Narayana polynomials and Hall-Littlewood symmetric functions. *Adv. in Appl. Math.*, 49(3-5), 239-262.
9. Zeilberger, D. (1989). Six etudes in generating functions. *Int. J. Comput. Math.*, 29, 201-215.
10. Alexeev, N. & Tikhomirov, A. (2017). Singular Values Distribution of Squares of Elliptic Random Matrices and type B Narayana Polynomials. *J. Theoret. Probab.*, 30(3), 1170-1190.
11. Sulanke, R. A. (2002). The Narayana distribution. Special issue on lattice path combinatorics and applications (Vienna, 1998). *J. Statist. Plann. Inference*, 101(1-2), 311-326.
12. Stanley, R. P. Bijective proof problems, version of 18 August 2009.
Retrieved at: http://www-math.mit.edu/ rstan/.
13. Mansour, T. (2008). Dyck Paths and partial Bell polynomials. *Australasian Journal Of Combinatorics*, 42, 285-297.
14. Chen R. X. F. & Reidys, C. M. (2015). Narayana polynomials and some generalizations. *arXiv.*, Retrieved at: https://arxiv.org/abs/1411.2530v3 (15.02.2019).
15. Egorychev, G. P. (1977). Integralňoe predstavlenie i vychislenie kombinatornykh summ. *Novosibirsk: Nauka* [in Russian].
16. Huang, I-C. (1997). Aplications of residues to combinatorial identities.*Memoirs of the American Mathematical Society*, 125(4), 1011-1017.
17. Huang, I-C. (1995). Pseudofunctors onmodules with zero dimensional support. *Memoirs of the American Mathematical Society*, xii+53.
18. Chen, W.Y.C. & Pang, S.X.M. (2009). On the combinatorics of the Pfaff identity, *Discrete Mathematics*, 309(8), 2190-2196.
19. Riordan, J. (1979). Combinatorial Identities. *NY : Huntington.*
20. Graham, R. L. & Riordan, R. (1966). The Solution of a Certain Recurrence. *The American Mathematical Monthly*, 73(6), 604-608.
21. Székely, L. (1985). Common origin of cubic binomial identities; a generalization of Surányi's proof on Le Jen Shoo's formula. *Journal of combinatorial theory*, 40, 171-174.

Одержано 31.10.2021