УДК 510
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).152-157

І. А. Мич[1], В. В. Ніколенко[2], О. В. Варцаба[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3392-1442

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0071-6896

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9158-2365

БАЗИСНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ У КЛАСІ УНІВЕРСАЛЬНИХ БУЛЕВИХ АЛГЕБР

У роботі вводиться поняття базисної еквівалентності, будується фактор-решітка класу алгебр M_2, встановлюється розташування вершин у фактор-решітці по базисній еквівалетності класу M_2. Будуються сигнатурні графи суміжних класів алгебри M_2. Досліджується 265 елементна базисна решітка фактор класу M_2^1/σ. Доводиться теорема про потужність класу M_2/σ.

Ключові слова: базисна еквівалентність, базисна решітка, сигнатурний граф суміжних класів

1. Вступ. У даній роботі продовжуються дослідження класу універсальних булевих алгебр, сигнатура яких складається з операцій, арність яких не перевищує два [1, 2]. Відомо, що в класі таких булевих функцій можна побудувати дев'ять двохопераційних базисів $a_1 = \{0, \Rightarrow\}$, $a_2 = \{0, \not\Rightarrow\}$, $a_3 = \{\neg, \wedge\}$, $a_4 = \{\neg, \vee\}$, $a_5 = \{\neg, \Rightarrow\}$, $a_6 = \{\neg, \not\Rightarrow\}$, $a_7 = \{\oplus, \Rightarrow\}$, $a_8 = \{\not\Rightarrow, \Rightarrow\}$, $a_9 = \{\not\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ і шість трьохопераційних базисів $a_{10} = \{0, \wedge, \Leftrightarrow\}$, $a_{11} = \{0, \vee, \Leftrightarrow\}$, $a_{12} = \{1, \wedge, \oplus\}$, $a_{13} = \{1, \vee, \oplus\}$, $a_{14} = \{\wedge, \oplus, \Leftrightarrow\}$, $a_{15} = \{\vee, \oplus, \Leftrightarrow\}$ та два однооператорних базисів $a_{16} = \{\uparrow\}$, $a_{17} = \{|\}$. Із сімнадцяти базисів можна утворити 2^{17} різних комбінацій базисів. Для більшості комбінацій базисів не існують універсальні булеві алгебри з операцій яких можна побудувати тільки ті базиси, що входять у вибрану комбінацію. З іншого боку, існують універсальні булеві алгебри з різними сигнатурами, з операцій яких можна побудувати однакову множину базисів.

2. Базисна еквівалентність. Кожній алгебрі $U_i = \langle A, \Omega_i \rangle \in M$ поставимо у відповідність 17-мірний булевий вектор $H_i = \{\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_{17}^i\}$, де $\alpha_j^i = 1$, якщо з операцій Ω_i можна утворити j-базис і $\alpha_j^i = 0$ у іншому випадку. Вектор H_i називається характеристичним базисним вектором алгебри U_i. Позначимо через $B(U_i)$ множину усіх базисів алгебри $U_i = \langle A, \Omega_i \rangle$ з операцій, що входять в Ω_i.

Означення 1. *Алгебри U_1 і $U_2 \in M$ називаються базисно еквівалентними $U_1 \overset{\sigma}{=} U_2$, якщо $B(U_1) = B(U_2)$. Зрозуміло, що $U_1 \overset{\sigma}{=} U_2$ тоді і тільки тоді, коли $H_1 = H_2$, де $\sigma-$відношення еквівалентності.*

Побудуємо фактор-решітку класу M_2 за базисною еквівалентністю σ, використовуючи характеристичні базисні вектори. Якщо алгебри $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ і $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ мають характеристичні базисні вектори $H_1 = \{\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_{17}^1\}$ і $H_2 = \{\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_{17}^2\}$, то $U_1 \leq U_2$ тоді і тільки тоді, коли $H_1 \leq H_2$, тобто $\alpha_i^1 \leq \alpha_i^2$, $\forall i = 1, 2, ..., 17$. Алгебри, які входять у нульовий елемент фактор-решітки мають характеристичний базисний вектор $(0, 0, \ldots, 0)$ з операцій яких не можна утворити жодного базису. Максимальним елементом фактор-решітки є алгебра U^* така, що $M^* = (1, 1, \ldots, 1)$, з операцій сигнатури яких можна утворити 17 базисів.

Побудуємо базисну фактор-решітку $R(M_2/\sigma)$. Вершинами $R(M_2/\sigma)$ є суміжні класи множини M_2/σ, а операції решітки визначаються за допомогою характеристичних базисних векторів.

У базисній решітці $R(M_2/\sigma)$ є сімнадцять ярусів, на k-му ярусі знаходяться всі алгебри з сигнатури операцій яких можна скласти k базисів. У сигнатурних графах ребра несли інформацію про операцію, яка змінювала сигнатури алгебр, що їх з'єднували. У базисних графах ребра вказують на базис, який змінює два суміжні класи M_2/σ. Оскільки така зміна може призвести до виникнення додаткових базисів, то ребра в базисних графах можуть з'єднувати суміжні класи, які знаходяться не на сусідніх ярусах.

Аналогічно, як в роботах [1, 2], розіб'ємо M_2 на класи: M_2^1 – клас алгебр у сигнатуру яких входять операції $Q = \{0,\ 1,\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \oplus,\ \Rightarrow,\ \Leftarrow,\ \Leftrightarrow\}$; M_2^2 – клас алгебр у сигнатуру яких окрім вказаних операцій входить операція стрілка Пірса; M_2^3 – клас алгебр у сигнатуру яких, окрім вказаних операцій входить операція штрих Шефера; M_2^4 – клас алгебр у сигнатуру яких, окрім вказаних операцій входять операції стрілка Пірса та штрих Шефера.

Розглянемо суміжні класи M_2^1 за базисною еквівалентністю σ. Найбільше алгебр класу M_2^1 мають характеристичний базисний вектор $(0, 0, \ldots, 0)$. Це вісімдесят вісім функціонально неповних алгебр [1]. Є два суміжні класи до складу яких входять по десять алгебр: $K_{10}^1 = \{130,\ 138,\ 146,\ 162,\ 178,\ 386,\ 394,\ 402,\ 418,\ 434\}$, $K_{10}^2 = \{260,\ 261,\ 276,\ 292,\ 308,\ 388,\ 389,\ 406,\ 420,\ 436\}$. Класи K_{10}^1 і K_{10}^2 мають ізоморфні сигнатурні графи.

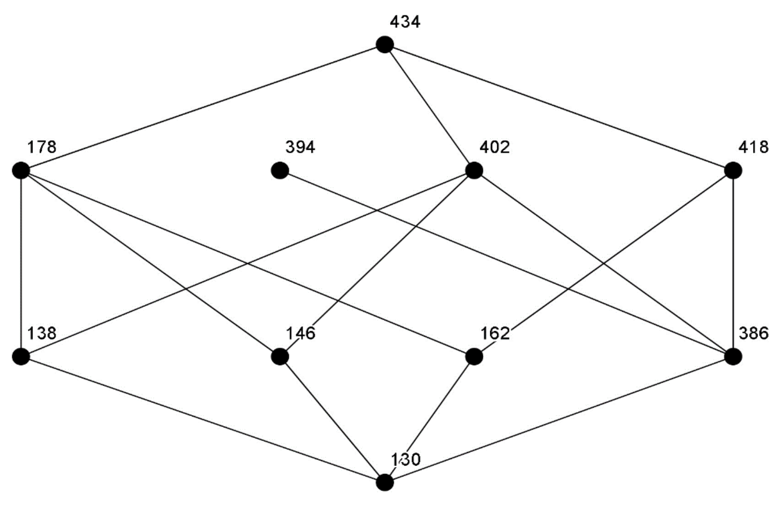

Рис. 1. Сигнатурний граф суміжних класів K_{10}^1 і K_{10}^2.

Три суміжні класи містять у своєму складі по 8 алгебр:
$K_8^1 = \{80, 81, 88, 208, 209, 336, 344, 464\}$, $K_8^2 = \{96, 97, 104, 224, 225, 352, 360, 480\}$, $K_8^3 = \{112, 113, 120, 240, 241, 368, 376, 490\}$ та мають ізоморфні сигнатурні графи (рис. 2).

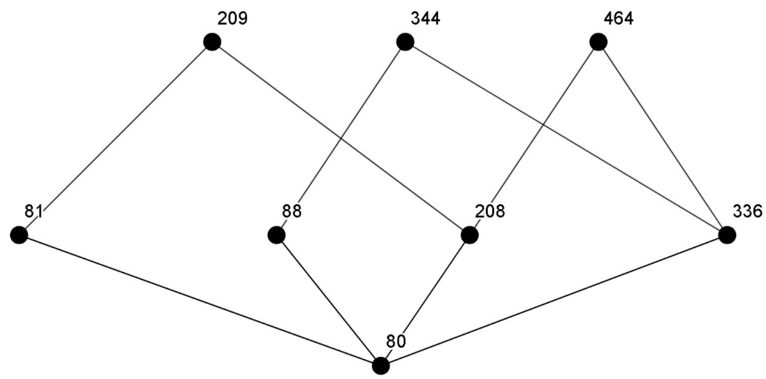

Рис. 2. Сигнатурний граф суміжних класів K_8^1, K_8^2 і K_8^3.

Чотири класи мають у своєму складі по 7 алгебр:
$K_7^1 = \{3,\ 11,\ 19,\ 35,\ 51,\ 259,\ 267\}$, $K_7^2 = \{12,\ 13,\ 28,\ 44,\ 60,\ 140,\ 141\}$, $K_7^3 = \{131, 139, 147, 163, 179, 387, 395\}$, $K_7^4 = \{268, 269, 284, 300, 316, 396, 397\}$, які можемо зобразити у вигляді сигнатурних графів (рис. 3).

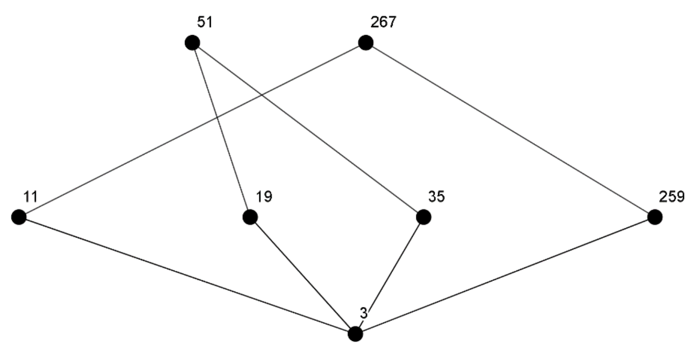

Рис. 3. Сигнатурний граф суміжних класів K_7^1, K_7^2, K_7^3, K_7^4.

Двадцять два суміжні класи $K_4^{t_1}$, $t_1 = 1, 2, \ldots, 22$ до класу яких входить чотири алгебри, тридцять класів $K_2^{t_2}$, $t_2 = 1, 2, \ldots, 30$ містять по дві алгебри і сто сімдесят шість класів $K_1^{t_3}$, $t_3 = 1, 2, \ldots, 176$ – по одній алгебрі. Сигнатурні решітки цих класів зображені на рис. 4.

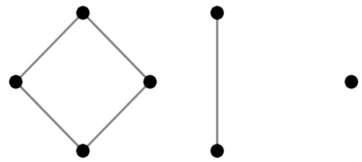

Рис. 4. Сигнатурний граф суміжних класів $K_4^{t_1}$, $K_2^{t_2}$, $K_1^{t_3}$.

Побудуємо базисну решітку фактор-класу M_2/σ . Вершини решітки будуть кодуватися бінарними кодами базисів або сигнатурним кодом канонічних алгебр, які входять до відповідного класу. Ребра будуть кодуватися або номерами базисів або кодами операцій, які з'єднують канонічні алгебри. У кожному суміжному класі є одна канонічна алгебра, а решта алгебр – вільні. Тому фактор решітку можна побудувати, використовуючи множину канонічних алгебр.

На рис. 5 побудована фактор-решітка, на який зображені алгебри, що мають однакову базисність, а саме:

1) 0-базисні алгебри (88 алгебр) утворюють нульову вершину фактор-решітки.
2) Алгебри першого ярусу — це однобазисні алгебри, які розподілені по дев'ять елементів фактор-класу: до складу двох входить по десять алгебр, двох по вісім, двох по сім, трьох по чотири. Ці класи можемо задати при побудові фактор-решітки відповідними канонічними алгебрами цього класу з номерами $3, 6, 12, 66, 68, 80, 96, 130, 260$.
3) Алгебри третього ярусу — це сорок трьохбазисних канонічних алгебр.

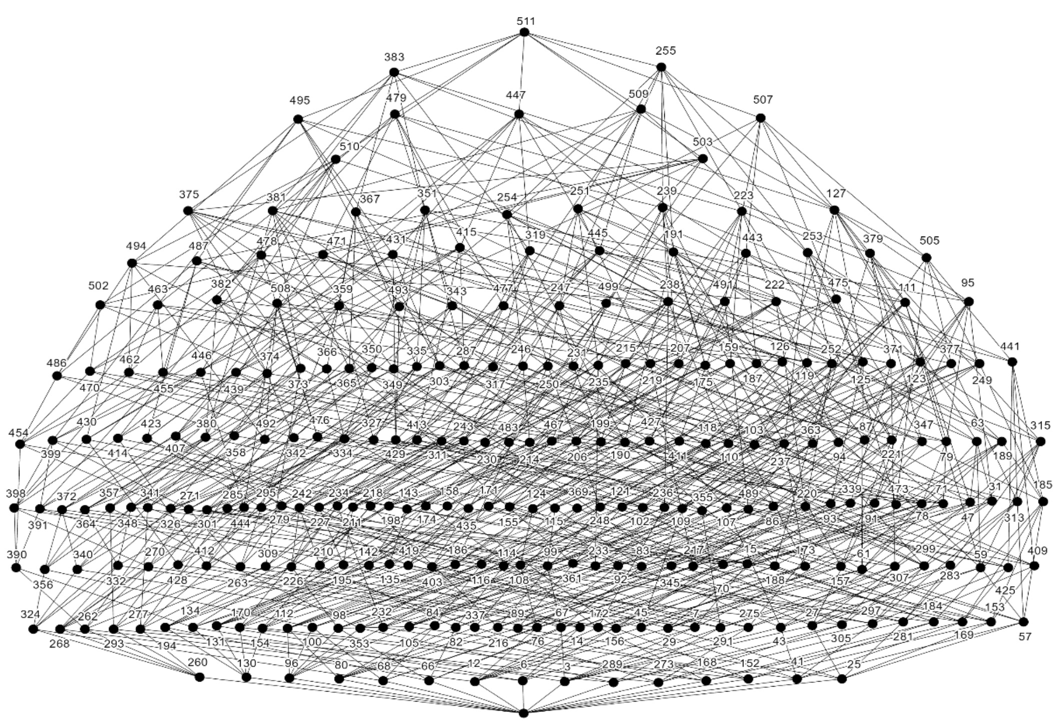

Рис. 5. Базисна решітка фактор-класу M_2/σ.

Оскільки між канонічними алгебрами і базисними векторами існує взаємнооднозначна відповідність, то базисна решітка ізоморфна сигнатурній решітці канонічних алгебр, яка описана в [1]. Для побудови базисної решітки класу алгебр M_2^1, скористаємось твердженням 6 [1], яке стверджує, що кількість елементів в решітці $R(M_2^1/\sigma)$ по ярусах задає наступна таблиця:

Таблиця 1

Ярус	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кількість суміжних класів	1	15	39	39	49	39	35	16	13	9	2	5	2	-	-	1

З цієї таблиці випливає, що $|M_2^1/\sigma|$ рівна 265 алгебр. Базисні решітки $R(M_2^2/\sigma), R(M_2^3/\sigma)$, $R(M_2^4/\sigma)$ ізоморфні решітці M_2^1/σ [3]. Якщо об'єднати ці решітки в одну базисну решітку $R(M_2/\sigma)$, то відповідні алгебри U_k^i решіток M_2^i/σ, $i = 1, 2, 3, 4$, утворюють підрешітки такого типу:

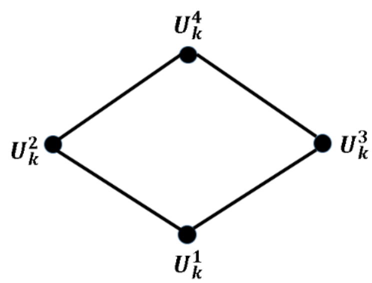

Рис. 6. Базисний граф ізоморфних алгебр класів M_2^i/σ.

Звідси випливає теорема.

Теорема 1. *Потужність класу M_2/σ рівна 1060 алгебр.*

Дійсно $|M_2/\sigma| = |M_2^1/\sigma| + |M_2^2/\sigma| + |M_2^3/\sigma| + |M_2^4/\sigma| = 4 \cdot 265 = 1060$.

3. Висновки. З 17 базисів можна скласти 2^{17} різних комбінацій і тільки 1060 таким комбінаціям можна знайти алгебру яка має тільки ті базиси що вказані у вибраній комбінації.

Список використаної літератури

1. Мич І.А., Ніколенко В.В., Варцаба О.В. Дослідження сигнатурного кубу універсальних булевих алгебр. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Вип. 2(37), С. 157-167. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167.
2. Мич І.А., Ніколенко В.В., Варцаба О.В. Структура сигнатурного кубу булевих алгебр. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38, №1. С. 149-156. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).149-156.
3. Уилсон Р.Дж. Введение в теорию графов. Спб: ООО «Диалектика», 2019. 240 с.

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V. Basic equivalence in class universal boolean algebras.

In this paper, the concept of basic equivalence has been introduced and the factor-grating $R(M_2^1/\sigma)$ of the class of algebras M_2 is obtained. The ordering of the vertexes of factor-grating of basic equivalence of the class M_2 is installed. The signature graph of the adjacent classes of algebra M_2 is given. 265-elements bases grating factor class M_2^1/σ is investigated. Theorem about the power of class M_2/σ has been proven.

Keywords: Basic Equivalence, basic grating, the signature graph of the adjacent classes.

References

1. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2020). Investigation of signature cube of universal boolean algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 2*(37), 157-167. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167 [in Ukrainian].
2. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2021). Structure of signature cube of Boolean algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 38*(1), 149-156. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).149-156 [in Ukrainian].
3. Uilson, R. J. (2019). *Vvedenie v teoriyu grafov [Introduction to graph theory].* Spb: OOO «Dialektika» [in Russian].

Одержано 31.10.2021