МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Ю.Ю. Млавець

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Методичні вказівки до вивчення курсу
***для студентів економічного та географічного факультетів*)**

Ужгород – 2015

Млавець Ю.Ю. Вища математика (методичні вказівки до вивчення курсу для студентів економічного та географічного факультетів). – Ужгород: ДВНЗ “УжНУ”, 2015. – 40 с.

Рецензенти: канд. екон. наук, доц. Повідайчик М.М.
канд. фіз.-мат. наук, доц. Глебена М.І.

Рекомендовано до друку кафедрою кібернетики і прикладної математики ДВНЗ “Ужгородський національний університет”, протокол № 1 від 31 серпня 2015 р.

Рекомендовано до друку методичною комісією математичного факультету ДВНЗ “Ужгородський національний університет”, протокол № 7 від 31 серпня 2015 р.

Зміст

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Матриці, дії над матрицями.

Матрицею $A = (a_{ij})_{m\times n}$ розміру $m \times n$ називається таблиця, що складається з m рядків та n стовпчиків:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ a_{mn} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Іноді матриця A позначається не круглими дужками, а подвійними вертикальними відрізками $A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$, або квадратними дужками –

$$A = \left|a_{ij}\right|_{m\times n}.$$

Матриця розмірності $n \times n$ називається *квадратною матрицею* n *– порядку*. Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ в цьому випадку утворюють головну діагональ матриці.

Визначник, який складений з елементів квадратної матриці, називається *визначником (детермінантом)* матриці і позначається так: $\det A$, $|A|$.

Квадратна матриця, в який на головний діагоналі стоять одиниці, а інші елементи дорівнюють нулю, називаються *одиничною* і позначається Е:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то таку матрицю називають *нульовою* і позначають 0.

Дві матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$ і $B = (b_{ij})_{m\times n}$ називаються *рівними,* якщо вони однакового розміру та рівні їх елементи, що стоять на однакових місцях.

Добутком числа λ на матрицю A за означенням є матриця:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12}\cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\cdots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2}\cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, щоб помножити матрицю A на число λ, потрібно кожний елемент матриці помножити на це число.

Сумою матриць A та B однакового розміру $m \times n$ називається матриця C розміру $m \times n$ елементи якого знаходяться так:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ для всіх } i \text{ та } j.$$

Отже, додавання матриць зводиться до додавання відповідних елементів цих матриць.

Віднімання цих матриць визначається через дії, які вже розглядалися

$$A - B = A + (-1)B;$$

тобто віднімання двох матриць зводиться до віднімання їх відповідних елементів. Очевидно що віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$ і $B = (b_{ij})_{m\times n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m\times n}$, елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B, тобто

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj} \ \ (i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,k}\ ).$$

Для добутку матриць в загальному випадку справедливе співвідношення:
$AB \neq BA$, (якщо ж, звичайно, існує кожен із добутків).

Операції додавання матриць мають властивості:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $A + 0 = 0 + A = A$;
4) Якщо $A + B = 0$, тоді B – протилежна до A матриця.

Операції множення матриць мають такі властивості:

1) $AB \neq BA$;
2) $(AB)C = A(BC)$;
3) $AE = EA = A$;
4) $(A + B)C = AC + BC$;
5) $C(A + B) = CA + CE$.

Квадратна матриця A^2 це результат множення цієї матриці самої на себе.

Якщо в матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$ поміняти місцями рядки і стовпчики, то дістанемо матрицю $A^T = (a_{ij})_{m\times n}$, яку називають *транспонованою* до матриці A.

Приклад 1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

знайти матриці $A + B$, A^T, C^2, AB, BA.

Розв'язання:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C^2 = CC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 - 1(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1 & 1(-1) + 2\cdot 0 - 1\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0(-1) & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 2(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot 3 \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3(-1) & -1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1 & -1(-1) + 1\cdot 0 + 3\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix};$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2-3 & 2-2-2 & 0+4-4 \\ 2+0+9 & 1+0+6 & 0+0+12 \\ 8-3+6 & 4+3+4 & 0-6+8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 11 & 7 & 12 \\ 11 & 11 & 2 \end{pmatrix};$$

.

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 4+1+0 & 4+0+0 & -2+3+0 \\ 2-1+8 & 2+0-6 & -1-3+4 \\ 8-3+16 & 6+0-12 & -3+6+8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 9 & -4 & 0 \\ 24 & -6 & 11 \end{pmatrix};$$

Помічаємо, що $AB \neq BA$.

1.2. Обчислення визначників другого та третього порядку.

За означенням визначник другого порядку дорівнює:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

Використовуючи означення та властивості можемо обчислювати визначники.

Приклад 1. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 325 & -132 \\ 175 & -60 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Винесемо спочатку з першого стовпця спільний множник 25 за знак визначника:

$$\Delta = 25\begin{vmatrix} 13 & -132 \\ 7 & -60 \end{vmatrix},$$

а з другого стовпчика спільний множник –12:

$$\Delta = 25\cdot(-12)\begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Потім з першого рядка знайденого визначника віднімемо його другий рядок:

$$\Delta = 25\cdot(-12)\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Тепер винесемо з першого рядка спільний множник 6:

$$\Delta = 25 \cdot (-12) \cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -1800 \cdot (5-7) = 3600.$$

Приклад 2. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 105 & 55 \\ 245 & 154 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. З першого рядка винесемо загальний множник 5, а із другого 7:

$$\Delta = 5 \cdot 7 \begin{vmatrix} 21 & 11 \\ 35 & 22 \end{vmatrix},$$

Винесемо тепер спільний множник 7 з першого стовпчика і 11 з другого стовпчика

$$\Delta = 35 \cdot 7 \cdot 11 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2695.$$

Визначники третього порядку можна виразити через визначники другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Цю формулу називають розкладом визначника третього порядку за елементами першого рядка. Використовуючи її та властивості визначників можемо обчислювати визначники.

Приклад 3. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -14 & 21 & 28 \\ 6 & -9 & 12 \\ 10 & 15 & -20 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Виносимо за знак визначника спільні множники елементів кожного рядка:

$$\Delta = 7 \cdot 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix},$$

а потім третій рядок додаємо до першого і другого:

$$\Delta = 105 \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Розклавши знайдений визначник за елементами першого рядка, дістанемо:

$$\Delta = 105 \cdot (-6) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 630 \cdot 16 = 10080.$$

Відповідь. $\Delta = 10080$.

Приклад 4. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 36 & -24 & 60 \\ 20 & 27 & 46 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Винесемо спільний множник елементів другого рядка за знак визначника:

$$\Delta = 12 \begin{vmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 3 & -2 & 5 \\ 20 & 27 & 46 \end{vmatrix}.$$

Додавши до першого рядка другий, матимемо:

$$\Delta = 12\begin{vmatrix} 20 & 27 & 46 \\ 3 & -2 & 5 \\ 20 & 27 & 46 \end{vmatrix} = 0,$$

оскільки перший і третій рядки визначника однакові.
Відповідь. Δ=0.
Приклад 5. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 36 & 48 & 30 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Винесемо спільний множник елементів другого рядка (число 6) і спільний множник елементів третього рядка (число 2), а потім винесемо спільний множник елементів першого стовпця (число 3) і спільний множник елементів другого стовпця (число 4):

$$\Delta = 6 \cdot 2\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Обчисливши перетворений визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

отримаємо Δ=6·2·3·4·2=288.
Відповідь. Δ=288.

Визначники третього порядку можна обчислювати також за правилом трикутника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11};$$

Покажемо це на конкретних прикладах.
Приклад 5. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 9 + 3 \cdot 6 \cdot 7 + 1 \cdot 8 \cdot 4 - 4 \cdot 0 \cdot 7 - 1 \cdot 3 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 2 =$$
$$= 0 + 126 + 32 - 0 - 27 - 96 = 35;$$

Приклад 2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} -sin\,\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \\ cos^2\,\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & sin^2\,\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} =$$
$$= -sin^2\,\alpha \cdot cos^2\alpha + cos^2\alpha \cdot sin^2\,\alpha + sin^2\,\alpha \cdot cos^2\alpha -$$
$$-sin^2\,\alpha \cdot cos^2\alpha + sin^4\,\alpha - cos^4\alpha = sin^4\,\alpha - cos^4\alpha =$$
$$= (sin^2\,\alpha - cos^2\alpha) \cdot (sin^2\,\alpha + cos^2\alpha) = -\cos 2\alpha;$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & -x \\ -x & 2x & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

-1+2 $x^2 + 6x^2 - 3x + 2x^2 - 2x = 4$

$10x^2 - 5x - 5 = 0;$

$2x^2 - x - 1 = 0;$

D=1+421=9> 0;

$x_1 = \dfrac{1+3}{4} = 1;$

$x_2 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2};$

Відповідь: -1/2; 1.

1.3. Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо виконуються рівності: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Якщо визначник матриці A не дорівнює нулю, то така матриця називається ***неособливою (невиродженою).***

Теорема. Для того, щоб матриця мала обернену необхідно і досить, щоб вона була невиродженою.

Алгоритм знаходження оберненої матриці

для заданої квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

1. Знайти визначник матриці $A: |A| = \Delta$.
2. Знайти алгебраїчні доповнення елементів матриці A.
3. Скласти матрицю з алгебраїчних доповнень елементів матриці A.
4. Транспонувати матрицю з алгебраїчних доповнень. Ця матриця називається ***приєднаною*** (або союзною) і позначається A .
5. Помножити приєднану матрицю на число $\dfrac{1}{\Delta}$.

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$ – матриця, обернена до матриці A. –

*Приклад 1.*Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. Знаходимо визначник матриці $A: |A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=5$.

Оскільки $\Delta \neq 0$, то обернена матриця існує

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4+1=5$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=(-8-2)-10$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=2-2=0$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-(-4)=4$$

$$A_{22}=+\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-(-3+2)=1$$

$$A_{31}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1-0=-1$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3$$

$$A_{33}=+\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3-2=1$$

3. Так $\overline{A}=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Транспортуємо матрицю $\overline{A}$ і знаходимо

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

5. Отже, обернена матриця $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 2 & 12/5 & -3/5\\ 0 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}.$

1.4. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай система n лінійних рівнянь з п невідомими має вигляд –

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

Теорема. Якщо визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь відмінний від нуля, то ця система має єдиний розв'язок.

Розв'язок системи можна знайти за ***формулами Крамера:***

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ ...,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

де Δ – визначник системи, $\Delta_k\left(k\in\overline{1,n}\right)$ - визначник, утворений з визначника системи заміною стовпця коефіцієнтів при шуканій змінній стовпцем вільних членів

Зауваження 1. Якщо визначник системи Δ дорівнює нулю і хоча б один із визначників Δ_k не дорівнює нулю, то система розв'язків не має.

Зауваження 2. Якщо визначник системи Δ дорівнює нулю і всі визначники Δ_k дорівнюють нулю, то система має безліч розв'язків.

*Приклад 1.*Розв'язати методом Крамера систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=10\\ 2x_1+6x_2+7x_3=25\\ x_1+4x_2+6x_3=17\end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначник системи: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 7\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}=4,$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}10 & 2 & 3\\ 25 & 6 & 7\\ 17 & 4 & 6\end{vmatrix}=12,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 10 & 3\\ 2 & 25 & 7\\ 1 & 17 & 6\end{vmatrix}=8,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 10\\ 2 & 6 & 25\\ 1 & 4 & 17\end{vmatrix}=4.$$

Використаємо формули $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ тоді

$x_1 = \frac{12}{4} = 3$, $x_2 = \frac{8}{4} = 2$, $x_3 = \frac{4}{4} = 1$

Відповідь. (3; 2; 1).

1.5. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Позначимо через A-матрицю, складену із ***коефіцієнтів при невідомих*** (так звану основну матрицю системи);

X – ***матрицю-стовпець із невідомих;***

B – ***матрицю-стовпець з вільних членів, тобто***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь можна переписати у вигляді ***матричного рівняння***: $AX = B$.

$X = A^{-1}B$ – ***матричний розв'язок*** системи лінійних рівнянь.

Знаходження матричного розв'язку називається ***матричним способом*** розв'язування систем лінійних рівнянь.

*Приклад 1.*Записати і розв'язати в матричній формі систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

Позначимо через $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Система лінійних рівнянь запишеться у матричній формі $AX = B$.
Матричний розв'язок системи буде $X = A^{-1}B$.

Для знаходження оберненої матриці A^{-1}:

1. Обчислюємо визначник матриці A: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 4$.

Оскільки $|A| \neq 0$,то для матриці A існує обернена A^{-1}, а значить, можна знайти єдиний розв'язок вихідної системи.

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 24 = -4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 27) = 12$$

$$A_{13} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 36 = -12$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -(10 - 8) = -2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = (16 - 18) = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = 3$$

$$A_{33} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

3. Обернена матриця має вигляд:

$$A^{1} = \frac{1}{|A|} A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 12 & 1 & -3 \\ -12 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1}B \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-5+7 \\ 9+\frac{5}{2}-\frac{21}{2} \\ -9+5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь: $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$.

Відповідь. (-1; 1; 3).

1.6. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих) ґрунтується на елементарних перетвореннях системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких належать:

1. переставляння двох рівнянь місцями;
2. множення обох частин одного з рівнянь системи на одне й те саме число, відмінне від нуля;
3. додавання до обох частин якого-небудь рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;
4. вилучення із системи рівняння, що є тотожністю.

Загальна ідея методу Гаусса полягає в тому, що з допомогою елементарних перетворень (при виключенні невідомого x_1 з усіх рівнянь, починаючи з другого, x_2 – з усіх рівнянь, починаючи з третього і т.д.) система зводиться до трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = \beta_m \end{cases}$$

З одержаної системи послідовно, починаючи з останньої за номером невідомої, рухаючись знизу вгору, знаходять усі інші невідомі. Часто на практиці замість перетворень над системою виконують відповідні перетворення над розширеною матрицею системи.

Алгоритм методу Гаусса

1. Скласти розширену матрицю системи.
2. Зробити так, щоб коефіцієнт $a_{11} = 1$. Для цього можна поміняти рядки місцями, або поділити перший рядок на аи. a_{11}
3. У першому стовпці під коефіцієнтом 1 зробити всі нулі. Для цього помножити перший рядок послідовно на $-a_{21}, a_{31}, \ldots, -a_{m1}$ і додати відповідно до другого, третього, ..., m-го рядків.
4. Зробити так, щоб коефіцієнта $a_{22} = 1$, а під ним були нулі.

5. Описані дії повторити для всіх діагональних елементів (з однаковими індексами).
6. Знайти ранги основної і розширеної матриці системи.
7. За останньою матрицею скласти систему лінійних рівнянь та дослідити її:

a) якщо ранги основної і розширеної матриці не рівні, то система розв'язків не має;

b) якщо ранги основної і розширеної матриці рівні та ранг системи дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Його шукають так: з одержаної системи послідовно, починаючи з останньої за номером невідомої, рухаючись знизу вгору, знаходять усі інші невідомі.

c) якщо ранги співпадають, але ранг системи і' менший, ніж кількість невідомих n, то ця система невизначена. Розв'язки її шукають так: перші s невідомих $x_1, x_2, ..., x_s$, які називаються ***базисними*** визначають через інші невідомі $x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n$,які називаються ***вільними.***

$$\begin{cases} x_1 = a_{1,s+1}x_{s+1} + ... + a_{1n}x_n + \beta_1 \\ .... \\ x_s = a_{s,s+1}x_{s+1} + ... + a_{sn}x_n + \beta_s \end{cases}$$ – ***загальний розв 'язок системи.***

Якщо замість $x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n$ підставити конкретні числові значення, то отримаємо ***частинний розв'язок системи.*** Зокрема, якщо $x_{s+1}, x_{s+2} = 0, ..., x_n = 0$, то одержимо розв'язок $(\beta_1, ..., \beta_s, 0, ..., 0)$, який називають ***базисним.***

Приклад 1. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$$

Розв'язання

1. Виконуємо перетворення над розширеною матрицею системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array}\right) : 2 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array}\right) \times(-3) \times(-4) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 2 & -2,5 & -1 & -0,5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right) : (-2,5) \times 3 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 2,2 & -4,4 \end{array}\right) : 2 \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Оскільки ранги основної і розширеної матриці співпадають ($r = 3$) і ранг системи дорівнює кількості невідомих, то система має один розв'язок.

2. За останньою матрицею складаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + x_3 = 0,5 \\ \qquad x_2 + 0,4x_3 = 0,2 \\ \qquad\qquad x_3 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_2 = 0,2 - 0,4x_3 = 0,2 - 0,4 \cdot (-2) = 1 \\ x_1 = 0,5 - 0,5x_2 - x_3 = 0,5 - 0,5 + 2 = 2 \end{cases}$$

(2; 1; -2) - розв'язок системи.

Відповідь. (2; 1;-2).

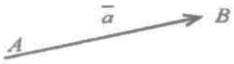
Розділ 2. Елементи аналітичної геометрії та векторної алгебри

2.1. Векторні та скалярні величини. Векторний простір

Скалярними величинами називаються величини, які характеризуються лише числовим значенням (довжина, площа, температура).

Векторними величинами називаються величини, які визначаються не тільки числовим значенням, а й напрямком (швидкість, сила, прискорення).

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого зазначено, яка з його точок є першою (початок вектора), а яка – другою (кінець вектора).



Вектор $\overline{a}$, або вектор AB : A — початок, B — кінець вектора.

Довжиною (модулем) вектора $\overline{AB}$ (позначається $\left|\overline{AB}\right|$) називають довжину відрізка, що зображує вектор.

N ***-вимірним вектором*** називають упорядковану сукупність п дійсних чисел, яка записується у вигляді $\overline{a}=\left(a_1,a_2,...a_n\right)$.

Числа $a_1,a_2,...a_n$ називають ***координатами (компонентами)*** вектора $\overline{a}$. Число n називають розмірністю вектора $\overline{a}$.

Поняття n-вимірного вектора широко використовується в *економічних задачах*. Наприклад, деякий набір товарів можна охарактеризувати вектором $\overline{a}=\left(a_1,a_2,...a_n\right)$, а відповідні ціни одиниці товару – вектором $\overline{b}=\left(b_1,b_2,...b_n\right)$.

Два вектори називаються ***рівними***, якщо рівні між собою їх відповідні координати, тобто
$\overline{a}\left(a_1,-a_2,...,-a_n\right)=\overline{b}\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$, якщо $a_1=b_1,a_2=b_2,...,a_n=b_n$.

Вектор називається ***нульовим (нуль-вектором)***, якщо всі його координати дорівнюють нулю: $\overline{0}=\left(0,0,...,0\right)$. Вектор $-\overline{a}=\left(-a_1,-a_2,...,-a_n\right)$ називається ***протилежним*** вектору $\overline{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$. Два ненульові вектори $\overline{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ і $\overline{b}=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ називаються ***колінеарними (паралельними)***, якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}.$$

Вектор називається одиничним (нормованим), якщо його довжина дорівнює одиниці.

Одиничні вектори, які мають напрями додатних координатних півосей, називаються ***координатними векторами (ортами)***: $\overline{e_1}\left(1,0,0\right),\overline{e_2}\left(0,1,0\right)\overline{e_3}\left(0,0,1\right)$.

Два вектори називаються ***перпендикулярними (взаємно ортогональними)***, якщо сума добутків відповідних координат векторів (скалярний добуток векторів) дорівнює нулю.

Дії з векторами, заданими в координатній формі.

1. ***Сумою*** n ***-вимірних векторів*** $\overline{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ і $\overline{b}=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ називають n-вимірний вектор $\overline{a}+\overline{b}$,координати якого дорівнюють сумі відповідних координат векторів- додатків, тобто

$$\overline{a}+\overline{b}=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n\right).$$

Наприклад, якщо $\overline{a}=\left(1;2;-1\right)$, $\overline{b}=\left(-3;1;0\right)$, то $\overline{a}+\overline{b}=\left(-2;3;-1\right)$.

2. ***Добутком числа*** k (скаляра) на n -вимірний вектор $\overline{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ називається n -вимірний вектор $k\overline{a}$, координати якого дорівнюють добутку числа k на відповідні координати вектора $\overline{a}$,тобто

$$k\overline{a}=\left(ka_1,ka_2,...,ka_n\right).$$

Наприклад,

якщо $\overline{a}=\left(1;2;-1\right)$, то $-3\overline{a}=\left(-3\cdot 1;-3\cdot 2-3\cdot\left(-1\right)\right)=\left(-3;-6;3\right)$.

Властивості додавання векторів та множення числа на вектор (k,l – деякі числа):

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$
2) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$
3) $k\cdot\left(\overline{a}l\right)=\left(kl\right)\cdot\overline{a}$
4) $k\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=k\overline{a}+k\overline{b}$
5) $\left(k+l\right)\overline{a}=k\overline{a}+l\overline{a}$
6) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$
7) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$
8) Для довільного вектора $\overline{a}$ існує протилежний вектор $-\overline{a}$ такий, що $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0}$.

3. ***Різницею векторів*** $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають вектор $\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$, який позначатимемо $\overline{a}-\overline{b}$.

4. ***Скалярним добутком*** $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$ двох n -вимірних векторів $\overline{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ і $\overline{b}=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ називають число, що дорівнює сумі добутків відповідних координат векторів, тобто

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+...+a_n\cdot b_n.$$

Наприклад,

якщо $\overline{a}=(-1;2;0);\overline{b}=(3;1;-2)$, то $(\overline{a},\overline{b})=-1\cdot 3+2\cdot 1+0(-2)=-1$.

Скалярний добуток має простий *економічний зміст*. Якщо $\overline{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ -вектор об'ємів різних товарів, а $\overline{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ - вектор їх цін, то скалярний добуток $(\overline{a};\overline{b})$ виражає загальну вартість усіх цих товарів.

Властивості скалярного добутку векторів:

1) $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$.
2) $(\overline{a},\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a},\overline{b})+(\overline{a},\overline{c})$.
3) $(k\overline{a},\overline{b})=k(\overline{a},\overline{b})$.
4) $(\overline{a},\overline{a})\geq 0$, причому $(\overline{a},\overline{a})=0$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{a}=0$.

2.2. Координати вектора. Довжина вектора. Кут між векторами

Координати вектора $\overline{AB}$ дорівнюють різниці відповідних координат кінця та початку вектора. Якщо $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$ – відповідно початок та кінець вектора, то

$$\overline{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

Довжиною (нормою) вектора $\overline{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ (позначають $|\overline{a}|$) називають невід'ємне значення квадратного кореня з суми квадратів координат вектора, тобто $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2,a_2^2,...,a_n^2}$.

Наприклад, якщо $\overline{a}=(-1;2;3)$, то $|\overline{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

Кутом між ненульовими векторами $\overline{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ і $\overline{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ називається число $\varphi, 0\leq\varphi\leq\pi$, яке визначається рівністю

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+...+a_n\cdot b_n}{\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+...+b_n^2}}.$$

Приклад1. Знайти кут між векторами $\overline{a}(1;2;2),\overline{b}(2;-2;1)$

Розв'язання

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\frac{1\cdot 2+2\cdot(-2)+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}},$$

$$\cos\varphi=0,\varphi=\arccos 0\frac{\pi}{2}$$

Відповідь: $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

2.3. Лінії на площині

Числовою віссю називають пряму, на якій визначено напрям, початок відліку та одиничний відрізок (рис. 1).

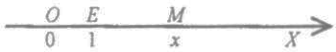


Рис. 1

Дві взаємно перпендикулярні числові осі з спільним початком відліку називають ***прямокутною декартовою системою координат (або просто прямокутною системою координат)*** на площині (рис. 2).

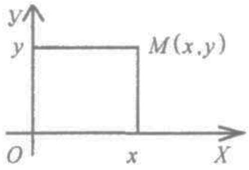


Рис. 2

Горизонтальну вісь називають ***віссю абсцис*** (вісь OX), а вертикальну – ***віссю ординат*** (вісь OY). Точку перетину осей координат називають ***початком координат*** (точка O). Одиниці масштабу на обох осях, як правило, вибирають однаковими.

Види рівнянь прямої на площині.

1. *Загальним рівнянням прямої* на площині називається рівняння 1-го степеня відносно x та y вигляду $Ax+By+C=0$, де A, B, C – сталі коефіцієнти, причому A і B одночасно не дорівнюють нулю.

Вектор $\overline{n}(A,B)$ – це вектор, перпендикулярний до прямої $Ax+By+C=0$. Вектор, перпендикулярний до цієї прямої, називається *нормальним вектором прямої* (вектором нормалі прямої).

Часткові випадки загального рівняння прямої

Значення коефіцієнти	Рівняння прямої	Зауваження
$C=0$	$Ax+By=0$	Пряма проходить через початок координат
$A=0$	$By+C=0$	Пряма паралельна осі OX
$B=0$	$Ax+C=0$	Пряма паралельна осі OY
$A=C=0$	$y=0$	Вісь OX
$B=C=0$	$x=0$	Вісь OY

Приклад 1. Пряма, паралельна осі OX , проходить через точку (-2; 3). Скласти рівняння цієї прямої.

Розв'язання

Оскільки пряма паралельна OX , то її рівняння: $By+C=0$.

Ордината точки дорівнює 3, тому $y=3$ або $y-3=0$ - шукане рівняння.

Відповідь: $y-3=0$.

2. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:*

$$y=kx+b, \text{ де } k=tga$$

де α – кут нахилу прямої до додатного напряму осі OX, b – відрізок, який відтинає пряма від осі OY.

Зауваження 1. Вертикальна пряма не має кутового коефіцієнта.

Зауваження 2. $y = kx$ – рівняння прямої, що проходить через початок координат.

$y = a\left(a = const\right)$ – рівняння прямої, паралельної осі OX,

$x = b\left(b = const\right)$ – рівняння прямої, паралельної осі OY.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і утворює з додатнім напрямком осі OX кут 30°.

Розв'язання

Рівняння прямої, яка проходить через початок координат, має виг ляд:

$y = kx; k = tg30°, k = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Отже, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ – шукане рівняння.

Відповідь. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

3. *Рівняння прямої, що проходить через дві точки* $M_1\left(x_1, y_1\right)$ та $M_2\left(x_2, y_2\right)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, x_2 \neq x_1, y_2 \neq y_1.$$

Приклад 3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A\left(-5;4\right)$ і $B\left(3;-2\right)$.

Розв'язання

Використаємо рівняння $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

$$\frac{x+5}{3+5} = \frac{y-4}{-2-4}, \left.\frac{x+5}{8} = \frac{y-4}{-6}\right| \cdot\left(-24\right), -3(x+5) = 4(y-4), -3x - 4y - 7 = 0.$$

Отже, $3x - 4y - 7 = 0$ – шукане рівняння.

Відповідь. $3x - 4y - 7 = 0$

4. *Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0\left(x_0, y_0\right)$, *перпендикулярно до заданого вектора* $\overline{n}\left(A, B\right)$

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0.$$

Приклад 4. Написати рівняння висоти AD трикутника, заданого точками $A\left(-5;3\right), B\left(3;7\right), C\left(4;-1\right)$.

Розв'язання

Пряма, що містить висоту AD, проходить через вершину $A\left(-5;3\right)$ і має нормальний вектор $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (1;-8)$.

Рівняння висоти AD матиме вигляд:

$$1\cdot(x-(-5))-8\cdot(y-3)-0\text{, або } x-8y+29=0.$$

Відповідь, $x-8y+29=0$.

5. *Канонічне рівняння прямої* (рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$, паралельно до заданого вектора $\vec{s}(l,m)$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Будь-який ненульовий вектор, який паралельний до даної прямої, називається *напрямним* вектором цієї прямої.

6. *Параметричне рівняння прямої:*

$$x=x_0+lt; y=y_0+mt; t\in R.$$

7. *Рівняння прямої у відрізках на осях координат:*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

де $(a;0)$ і $(0;b)$ – точки перетину прямої з осями координат.

Кут між прямими:

а) Якщо прямі задані рівнянням *з кутовим коефіцієнтом* $y_1=k_1x+b_1$ і $y_2=k_2x+b_2$, то кут між ними φ знаходиться за формулою

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{k_1k_2+1}\right|;$$

б) Якщо прямі задані *загальними рівняннями* $A_1x+B_1+C_1=0$ і $A_2x+B_2+C_2=0$, то кут між ними φ знаходиться як кут між векторами нормалей до прямих $\left(\overline{n_1}(A_1,B_1),\overline{n_2}(A_2,B_2)\right)$

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

в) Якщо прямі задані канонічними рівняннями, то кут між ними знаходиться як кут між напрямними векторами прямих.

Приклад 5. Знайти кут між прямими $3x-4y+2=0$ та $-6x+8y+1=0$.

Розв'язання

Оскільки прямі задані загальним рівнянням, то кут між ними φ знайдемо за формулою $\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$

$$\cos\varphi=\frac{|3\cdot(-6)-4\cdot 8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\sqrt{(-6)^2+8^2}}=\frac{50}{50}=1, \varphi=\arccos 1=0$$

Отже, кут між заданими прямими дорівнює 0, тобто прямі паралельні.

Відповідь. 0.

Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.

Прямі п*аралельні*, якщо паралельні їх напрямні вектори, або вектори нормалей до прямих.

Прямі *перпендикулярні*, якщо перпендикулярні їх напрямні вектори, або вектори нормалей до прямих.

Нехай $\overline{s_1} = (l_1, m_1)$ та $\overline{s_2} = (l_2, m_2)$ – напрямні вектори заданих прямих, $\overline{n_1} = (A_1, B_1), \overline{n_2} = (A_2, B_2)$ – вектори нормалей до кожної з прямих.

Умови паралельності двох прямих

1. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$
2. $k_1 = k_2$
3. $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$

Умови перпендикулярності двох прямих

1. $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
2. $k_1k_2 = -1$
3. $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$

Відстань між точками $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ визначається за формулою

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Відстань d *від точки* $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\ .$$

Приклад 6. Знайти відстань від точки $M(2,-3)$ до прямої $3x - 4y + 2 = 0$.

Розв'язання

Використаємо формулу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, d = \frac{|3\cdot 2 - 4\cdot(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

Відповідь. 4.

2.4. Види рівнянь площини

1. Загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Дослідження неповного рівняння площини

Рівняння площини	Зауваження
$Ax + By + Cz = 0$	Площина проходить через початок координат
$By + Cz + D = 0$ $Ax + Cz + D = 0$ $Ax + By + D = 0$	Площина паралельна осі OX Площина паралельна осі OY Площина паралельна осі OZ
$By + Cz = 0$ $Ax + Cz = 0$ $Ax + By = 0$	Площина проходить через вісь OX Площина проходить через вісь OY Площина проходить через вісь OZ
$By + D = 0$ $Ax + D = 0$ $Cz + D = 0$	Площина паралельна площині OXZ Площина паралельна площині OYZ Площина паралельна площині OXY
$X = 0$ $Y = 0$ $Z = 0$	Координатна площина OYZ Координатна площина OXZ Координатна площина OXY

2. Рівняння площини, що проходить ***через*** задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***перпендикулярно до*** заданого ***вектора*** $\overline{n} = (A, B, C)$, має такий вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

3. ***Рівняння площини, що проходить через три точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 1. Записати рівняння площини, яка проходить через точки (1;1;1), (2;3;4), (4;3;1).

Розв'язання

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 3-1 & 4-1 \\ 4-1 & 3-1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, дістанемо

$2(z-1) + 9(y-1) - 6(z-1) - 6(x-1) = 0$

Отже, $-6x + 9y - 4z + 1 = 0$ – шукане рівняння площини.

Відповідь. $-6x + 9y - 4z + 1 = 0$.

Відстань d ***між точками*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ знаходиться за формулою:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Відстань d ***від точки*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***до площини*** $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,.$$

Приклад 2.. Знайти довжину висоти AH піраміди, заданої координатами своїх вершин:

$$A(-1;2;-1), B(1;0;2), C(0;1;-1), D(2;0;-1).$$

Розв'язання

Висоту AH знайдемо як відстань від точки $A(-1;2;-1)$ до площини BCD.

Знайдемо рівняння площини BCD: $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$.

Розкривши визначник, маємо $3x + 6y + z - 5 = 0$.

Знайдемо довжину висоти AH:

$$AH = \frac{|3\cdot(-1) + 6\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 5|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{46}}\,.$$

Відповідь, $\dfrac{3}{\sqrt{46}}$.

Нехай дві площини задано рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2z + D = 0.$$

Тоді $\overline{n_1} = (A_1, B_1, C_1), \overline{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ – вектори нормалей до площин.

1. ***Кут між площинами*** визначається кутом Q між векторами $\overline{n_1}$ і $\overline{n_2}$:

$$\cos Q = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\,.$$

2. ***Умова перпендикулярності площин*** $(\overline{n_1} \perp \overline{n_2})$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0\,.$$

3. ***Умова паралельності площин*** $\overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Види рівнянь прямої у просторі:

1. ***Канонічне рівняння прямої*** (рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно до заданого вектора $\overline{S} = (l, m, n)$):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}\,.$$

2. ***Рівняння прямоїяка проходить через дві точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ має такий вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

3. ***Загальне рівняння прямої.*** Будь-яка пряма лінія у просторі подасться *системою двох рівнянь*, які задають дві різні площини, що проходять через цю пряму.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$ – загальне рівняння прямої.

4. ***Параметричне рівняння прямої***: $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt, \quad t\in R. \\ z=z_0+nt \end{cases}$

Взаємне розміщення двох прямих у просторі.

Нехай дві прямі у просторі визначаються рівняннями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Тоді $\overline{s_1}=(l_1, m_1, n_1)$ та $\overline{s_2}=(l_2, m_2, n_2)$ – напрямні вектори даних прямих.

1) ***Прямі паралельні***, якщо напрямні вектори прямих паралельні, тобто

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

2) ***Прямі взаємно перпендикулярні***, якщо напрямні вектори прямих перпендикулярні, тобто $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

Кут між прямими визначається кутом Q між їх напрямними векторами:

$$\cos Q=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Розділ 3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Границя послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Якщо за деяким законом (правилом) кожному натуральному числу n поставлено у відповідність деяке дійсне число a_n, то кажуть, що задана ***числова послідовність*** $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Числа a_i – *члени послідовності*, i – *номер члена послідовності*.

Позначення *числової послідовності*: $(a_n), (x_n), \{a_n\}, \{x_n\}$.

Приклади числових послідовностей:

1) $a_n = \frac{1}{n}, \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} ...$
2) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$
3) $a_n = n!, \quad 1, 2, 6, 24$

Число B називається *границею послідовності* $\{x_n\}$. якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - B| < \varepsilon$. тобто $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = B$.

Послідовність, що має скінченну границю, називається ***збіжною***, інакше – ***розбіжною***

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо її границя дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою*, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \infty$.

Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність, то $y_n = \frac{1}{x_n}$ – нескінченно мала послідовність. Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно мала послідовність і $x_n \neq 0$, то послідовність $y_n = \frac{1}{x_n}$ нескінченно великою.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою знизу (зверху)***, якщо існує таке число $M(m)$, що для всіх $n \in N$ виконується нерівність $x_n \geq m(x_n \leq M)$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою***, якщо існують такі числа m і M, що для всіх $n \in N$ виконується нерівність $m \leq x_n \leq M$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***зростаючою (спадною)***, якщо для будь-якого n виконується нерівність $a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} \leq a)$.

Якщо $a_{n+1} \geq a_n \; (a_{n+1} \leq a)$, то послідовність називається строго *зростаючою (спадною).*

Теорема 1. Якщо послідовність мас границю, то така границя єдина.

Теорема 2. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збігаються, а також $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{x\to\infty} y_n = b$ то послідовності $\{x_n + y_n\}, \{x_n y_n\}, \{const x_n\}, \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} (b \neq 0)$ також збігаються і виконуються рівності:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{x\to\infty} x_n + \lim\limits_{x\to\infty} y_n = a + b$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{x\to\infty} x_n \lim\limits_{x\to\infty} y_n = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(const x_n) = const \lim\limits_{x\to\infty} x_n = const \cdot a$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} x_n}{\lim\limits_{x\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}, \quad (b \neq 0)$.

Приклади обчислення границь послідовностей

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{-3n^2} = -\frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{-3n^2} = -\frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1} =$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}\right) = -\frac{1}{3}(1 - 0 + 0) = -\frac{1}{3}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}}{n\left(1 - \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{n\left(1 - \frac{3}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{3}{n}\right)} = = \frac{0}{1 - 0} = 0.$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 - 2n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2 - 2n} - n\right)\left(\sqrt{n^2 - 2n} + n\right)}{\sqrt{n^2 - 2n} + n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} = \frac{\left(\sqrt{n^2 - 2n}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2 - 2n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n - n^2}{\sqrt{n^2\left(1 + \frac{3}{n}\right)} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{n\left(1 + \frac{3}{n} + 1\right)} =$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{1 + 0} + 1} = -1.$$

3.2. Поняття границі функції

Число B називається *границею функції*/ $f(x)$ в точці a (при $x \to a$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такс число $\delta > 0$, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівність $|x-a|<\delta$ виконується нерівність $|f(x)-B|$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$.

Функція $y=f(x)$ називається *нескінченно малою* в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Функція $y=f(x)$ називається *нескінченно великою* в точці x_0 x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Основні теореми про границі. Чудові границі:

1. *Границя суми (різниці)* двох функцій дорівнює сумі (різниці) границь цих функцій, якщо границі доданків існують, тобто

$$\lim_{x\to x_0-}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x).$$

2. *Границя добутку* двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій, якщо границі співмножників існують, тобто

$$\lim_{x\to x_0-}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

3. *Границя частки* двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границі чисельника і знаменника існують. а границя знаменника не дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\quad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

4. *Стлий множник* можна винести за знак границі тобто

$$\lim_{x\to a}\left(C\cdot f\left(x\right)\right)=C\lim_{x\to a} f(x).$$

5. *Границя цілого додатного степеня* функції дорівнює тому ж степеню границі функції, тобто

$$\lim_{x\to a}\left(f\left(x\right)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}(f(x)\right)^n.$$

Перша важлива границя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k,\quad k\neq 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x}=1,\quad k\neq 0$

Друга важлива границя: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, де $r=2{,}718281...$

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{9-x^2}{x-1}=\frac{9-2^2}{2-1}=5$

2. Розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: в чисельнику і знаменнику винести за дужки найвищий степінь невідомого.

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=6,$$

$x^2-5x+6=0$

$x_1=3; x_2=2$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

3. Розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$:

а) розкласти чисельник і знаменник на множники:

б) якщо до чисельника або знаменника входять *квадратні чи кубічні корені,* то потрібно домножити чисельник і знаменник на відповідні вирази, щоб позбутися коренів:

Приклад 3.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=(4+4)(\sqrt{4}+2)=8\cdot 4=32\,.$$

в) якщо під знаком границі стоять *тригонометричні або обернені тригонометричні функції,* то такі границі зводяться до першої визначної границі або її варіацій (наслідків).

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cos 2x}{7x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x\cos 2x}{7x}=$

$$=\frac{5}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\cos 2x=\frac{5}{7}\cos 0=\frac{5}{7}.$$

4. Розкриття невизначеності $\left[1^{\infty}\right]$ звести *до другої визначної* границі:

Приклад 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{2x}=\lim\limits_{\frac{3}{4x}\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{\frac{4x\cdot 3}{3\cdot 4x}\cdot 2x}=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}\,.$

3.3. Похідна та диференціал функції. Застосування.

Границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називається швидкістю зміни функції в даній точці або її *похідною* (derivative) і позначається одним із символів:

$$f'(x_0), y'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 існує, то функція називається *диференційовною в точці* x_0.

Якщо функція диференційовна в кожній точці деякого проміжку *X*, то вона називається *диференційовною на проміжку X*.

Операція відшукання похідної називається операцією *диференціюванням.*

Правила диференціювання:

Теорема 1. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні в точці x, то справедливі формули для похідних суми, добутку та частки цих функцій:

1) $\big(u(x) + v(x)\big)' = u'(x) + v'(x)$;
2) $\big(u(x) \cdot v(x)\big)' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$;
3) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$, при $v(x) \neq 0$.

Похідна складеної функції .

Нехай функція $y = f(u)$ визначена в деякому околі точки u і функція $u = \varphi(x)$ визначена в деякому околі точки x, таким чином визначена складена функція $y = f[\varphi(x)]$.

Похідна оберненої функції .

Теорема 2. Якщо функція $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ має обернену $x = f^{-1}(y)$ і для всіх $x \in X$, існує похідна $f'(x) \neq 0$, то для всіх $y \in Y$ існує похідна $(f^{-1}(y))'$, причому справедлива рівність:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}, \qquad \text{або } x'_y = \frac{1}{y'_x}, (y'_x \neq 0).$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій:

1) $(const)' = 0$;
2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\forall n \in N,$ або $\forall n \in R$ при $x > 0)$;
3) $(a^n)' = a^x lna$, $(\forall a > 0, a \neq 1)$;
4) $(e^x)' = e^x$;
5) $(\mathrm{Log}_a\, x)' = \frac{1}{x \cdot lna}$, $\big((\forall a > 0, a \neq 1) \cap \forall x > 0\big)$;
6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\forall x > 0)$;
7) $(\sin x)' = \cos x$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$;

9) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\right)$;

10) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $(x \neq \pi k,\ k \in Z)$;

11) $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$;

12) $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$;

13) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;

14) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;

Логарифмічне диференціювання.

Іноді відшукання похідної спрощується, якщо її попередньо прологарифмувати. В зв'язку з цим такий метод називається *логарифмічним диференціюванням*.

Похідна функції, заданої неявно.

Якщо на деякому проміжку X диференційовна функція $y = y(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, то її похідну $y'(x)$ можна знайти з рівняння

$$[F(x, y)]'_x = 0,$$

де $F(x, y)$ розглядається як складена функція змінної x.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0, то вираз $f'(x_0) \cdot \Delta x$ називається *диференціалом* функції в цій точці і позначається символом $dy(x_0)$. Тобто,

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

При малих Δx має місце наближена рівність:

$$\Delta x \approx dy, \text{ тобто } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Звідки

$$f(x_1) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Приклад 1. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = 3x - x^2$ у точці $x = 2$ і з'ясувати зміст одержаного результату.

Розв'язання:

Знайдемо приріст даної функції в точці $x = x_0$.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)^2) - (3x_0 - x_0^2)$$
$$= 3\Delta x - 2x_0\Delta x - (\Delta x)^2 = (3 - 2x_0)\Delta x - (\Delta x)^2.$$

Звідки

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3 - 2x_0)\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = 3 - 2x_0 - \Delta x.$$

Отже ,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3 - 2x_0 - \Delta x).$$

Якщо $x_0 = 2$, то $f'(2) = 3 - 2 \cdot 2 = -1$. Це означає, що в даній точці функція спадає з такою ж самою швидкістю, з якою зростає аргумент.
Відповідь: -1.
Приклад 2. Знайти похідну функції
$$f(x) = tgx.$$
Розв'язання:
За означенням функція $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ визначена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$. Знайдемо похідну частки
$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
Відповідь: при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ маємо:
$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
Приклад 3. Знайти похідну функції
$$y = \cos^5 3x.$$
Розв'язання:
Приймаючи $y = u^5, u = \cos 3x$ маємо:
$$y' = (u^5)'(\cos 3x)' = 5u^4((-\sin 3x) \cdot 3) = 5\cos^4 3x \cdot (-3\sin 3x) = -15\cos^4 3x \cdot \sin 3x$$
Тут враховано, що $u = \cos 3x$ також складена функція і тому вона має похідну $u' =- 3\sin 3x$.
Відповідь: $y' = -15\cos^4 3x \cdot \sin 3x$.
Приклад 4. Знайти похідну функції
$$y = e^{x^3} \cdot \mathrm{ctg}^5 x \cdot \arcsin x.$$
Розв'язання:
Логарифмуючи обидві частини рівності дістанемо
$$\ln y = x^3 \ln e + 5\ln(ctg\, x) + \ln(\arcsin x).$$
Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:
$$(\ln y)' = (x^3)' + 5\,(\ln(ctg\, x))' + (\ln(\arcsin x))',$$
або
$$\frac{1}{y}y' = 3x^2 + 5\frac{1}{ctgx} \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right) + \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
Відповідь: $y' = e^{x^3} \cdot \mathrm{ctg}^5 x \cdot \arcsin x \left(3x^2 + \frac{5}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right)$.
Приклад 5. Знайти похідну функції
$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{(2x - 1)^6 (3x + 5)^2}.$$

Розв'язання:

Логарифмуючи обидві частини рівності дістанемо

$$\ln y = \ln\sqrt{x^2+3} - \ln(2x-1)^6 - \ln(3x+5)^2;$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) - 6\ln(2x-1) - 2\ln(3x+5).$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = \tfrac{1}{2}(\ln(x^2+3))' - 6\,(\ln(2x-1))' - 2\,(\ln(3x+5))',$$

або

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+3}2x - 6\frac{1}{2x-1}2 - 2\frac{1}{3x+5}3 = \frac{x}{x^2+3} - \frac{12}{2x-1} - \frac{6}{3x+5}$$

Відповідь: $y' = \frac{\sqrt{x^2+3}}{(2x-1)^6(3x+5)^2}\left(\frac{x}{x^2+3} - \frac{12}{2x-1} - \frac{6}{3x+5}\right)$.

Приклад 6. Знайти диференціал функції

$$y = \sqrt[3]{(2+\cos x)^2}.$$

Розв'язання:

Перший спосіб. Знаходимо похідну від заданої функції:

$$y' = \left(\sqrt[3]{(2+\cos x)^2}\right)' = \left((2+\cos x)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(2+\cos x)^{\frac{-1}{3}}\cdot(2+\cos x)'$$

$$= \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}(\sin x);$$

$$dy = -\frac{2\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}dx.$$

Другий спосіб. Знаходимо диференціал

$$dy = \frac{2}{3}(2+\cos x)^{\frac{-1}{3}}\cdot d(2+\cos x) = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}(-\sin x\cdot dx) =$$

$$= -\frac{2\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}dx.$$

Відповідь: $dy = -\frac{2\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}dx$.

3.4. Невизначений інтеграл. Найпростіші методи інтегрування

Означення 1. Будемо говорити, що функція $F(x)$ на інтервалі (a,b) називається *первісною функцією* для функції $f(x)$, якщо

$$\forall x \in (a,b):\ F' = f(x)$$

Нехай $F(x)$ — первісна для $f(x)$, тоді будь-яка $\Phi(x) = (F(x)+c)$, де $c = const$, також буде первісною для $f(x)$. Дійсно,

$$\Phi'(x) = (F(x)+c)' = F'(x) + c' = f(x).$$

Таким чином, якщо функція має первісну, то вона має безліч первісних, до того ж всі ці первісні відрізняються лише на сталу.

Теорема 1*. (Основна теорема інтегрального числення*). Нехай функція $f(x)$ визначена і *неперервна* на (a,b) . Тоді $f(x)$ має первісну на цьому інтервалі.

Скрізь далі довільну сталу будемо позначати c.

Означення 2. Множина усіх первісних для функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* для $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = \mathrm{F(x)} + \mathrm{c},$$

де $F(x)$— одна з первісних функції $f(x)$, $c = const$.

Властивості невизначеного інтеграла:

Нехай функції $f(x), f_1(x), f_2(x)$, визначені на (a,b), а $F(x), F_1(x), F_2(x)$ – їх відповідні первісні на (a,b) . Через $df(x), dF(x)$ будемо позначати диференціали відповідних функцій. Тоді

1. $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + c,$
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ де $k = const, k \in R;$
3. $\int \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx = F_1(x) + F_2(x) + c.$

Таблиця основних невизначених інтегралів (ТОНІ):

1. $\int 0dx = c;$
2. $\int dx = x + c;$
3. $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c,$ де $\mu = const, \mu \neq -1;$
4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c, \quad (x \neq 0);$
5. $\int e^x dx = e^x + c;$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad (a > 0, a \neq 1);$
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + c;$
8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c;$
9. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + c;$
10. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + c;$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + c = -arcctg\, x + c;$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + c,\ \ a = const,\ \ a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c;$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, \quad a = const, \quad a \neq 0;$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c;$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c,\ \ a = const, a \neq 0$ –довгий логарифм;
17. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c;$

18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ — високий логарифм.

Перевіримо наприклад, правильність формули 18 в таблиці основних невизначених інтегралів. Для цього знайдемо похідну від правої частини і порівняємо її з підінтегральною функцією $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}$:

.

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + c\right) = \frac{1}{2a}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{2a(x+a)}{2a(x-a)(x+a)} =$$
$$= \frac{1}{x^2-a^2} = f(x).$$

При використанні таблиці основних невизначених інтегралів треба бути уважними до формул 12, 14, 16, 18, де присутній параметр a. Наприклад, інтеграл $\int \frac{dx}{3+x^2}$ має вигляд 12 в таблиці, а стала 3 розглядається як a^2, тому $a = \sqrt{3}$, а

$$\int \frac{dx}{3+x^2} = \frac{dx}{(\sqrt{3})^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\ \frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

Найпростіші правила інтегрування:

1. За властивістю 3 невизначеного інтеграла отримуємо перше правило інтегрування: *постійний множник можна виносити з-під знака інтеграла*.
2. З властивостей 3,4 невизначеного інтеграла випливає друге правило: *невизначений інтеграл від суми (різниці) функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$ дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій (тут припускається, що первісні для функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$ існують)*.
3. Не існує загального правила обчислення інтеграла від складної функції. Винятком є лише випадок, коли складна функція $h(x)$ містить лише *два рівні вкладеності, до того ж внутрішня функція є лінійною*, тобто
$$h(x) = f(ax+b),$$
де $f(t)$ — зовнішня, а $t = ax+b$ — внутрішня функції. Тоді
$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c,$$
де
$$\int f(t)dt = F(t) + c.$$

Дійсно:
$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + c\right)' = \frac{1}{a}\big(F(ax+b)\big)' + c' = \frac{1}{a}F'(ax+b)(ax+b)' =$$
$$= \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

.

Таким чином, для обчислення первісної у цьому випадку треба:

а) *знайти первісну $F(t)$ для зовнішньої функції $f(t)$;*

b) *замінити аргумент* t *в первісній* $F(t)$ *на внутрішню лінійну функцію* $t = ax + b$;

c) *домножити отриману функцию на* $\frac{1}{a}$, *де* a *— кутовий коефіцієнт внутрішньої функції* $t = ax + b$.

Приклад 1. Знайти:

$$\int \frac{2}{3x^5}dx.$$

Розв'язання:

$$\int \frac{2}{3x^5}dx = \int \frac{2}{3}x^{-5}dx = \frac{2}{3}\int x^{-5}dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = -\frac{1}{6}x^{-4} + c =$$
$$= -\frac{1}{6x^4} + c.$$

Приклад 2. Знайти:

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx.$$

Розв'язання:

Підінтегральний вираз представляє дріб. Правила інтегрування дробу, на відміну від диференціювання, не існує. Але якщо розділити почленно чисельник дроба на знаменник, отримаємо під знаком інтеграла суму степеневих функцій, інтегрування яких не визиває труднощів.

$$\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{2}{2}-\frac{1}{3}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{5}{12}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{5}{12}}\right)dx$$
$$= \frac{1}{6}\int x^{\frac{1}{6}}dx - \frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}\int x^{\frac{5}{12}}dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}$$
$$+ \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1} + c = \frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{8\sqrt[4]{5}}{17}x^{\frac{17}{12}} + c =$$
$$= \frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{8}{17}\sqrt[12]{125x^{17}} + c.$$

*Приклад 3.*Знайти:

$$\int (2x^2 + 1)^3 dx.$$

Розв'язання:

Хоча підінтегральний вираз є складною функцією, яка містить лише два рівні вкладеності, внутрішня функція $(2x^2 + 1)$ не є лінійною, тому ми не можемо користуватися правилом 3.

Скористаємося для підінтегральної функції формулою скороченого множення:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Отримаємо:

$$(2x^2 + 1)^3 = 8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1.$$

Тоді за правилами 1,2 і формулами 2,3 (ТОНІ), отримаємо:

$$\int (2x^2 + 1)^3 dx =$$

$$= \int (8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1)dx =$$

$$= 8\int x^6 dx + 12\int x^4 dx + 6\int x^2 dx + \int dx = \frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^3$$
$$+ x + c.$$

Приклад 4. Знайти:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

Розв'язання:

Оскільки коефіцієнт при x^2 в знаменнику підінтегральної функції дорівнює 1, для розв'язання рівняння $x^2 - 5x + 6$ скористуємося ***теоремою Вієта:*** сума коренів дорівнює 5, а добуток 6. Корені — 2,3.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c\,.$$

Список літератури

1. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр “Академія”, 2002.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Вища математика. – Т.1. – К.: Національна академія управління, 2001.
3. Овчинников П.П. Вища математика. Підручник. У 2-х ч. Ч. 1. К.: Техніка, 2000.
4. Овчинников П.П. Вища математика. Підручник. У 2-х ч. Ч. 2. К.: Техніка, 2000.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993.
6. Жильцов О.Б., Торбін Г.М. Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навч. посібник – К.: МАУП, 2002.
7. Лавренчук В. П., Готинчан Т.І. та ін. Вища математика. Частина 1: Навчальний посібник. – 2-е вид. – Чернівці: Рута, 2002.
8. Лавренчук В. П., Готинчан Т.І. та ін. Вища математика. Частина 2: Навчальний посібник. – 2-е вид. – Чернівці: Рута, 2002.
9. Дутка Г.Я. Практикум з математики для економістів. – Львів: Львівський банківський коледж, 1998.

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри кібернетики і прикладної математики доктор технічних наук, проф. Гече Ф.Е.

Автор: канд. фіз.-мат. наук, доц. Млавець Ю.Ю.

Рецензенти: канд. екон. наук, доц. Повідайчик М.М.
канд. фіз.-мат. наук, доц. Глебена М.І.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(**Методичні вказівки до вивчення курсу**
для студентів економічного та географічного факультетів)