Рего В. Л., Варга Я. В., Король І. І.

Навчальний посібник

із курсу «*Диференціальні рівняння*»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Частина II

Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

Рего В. Л., Варга Я. В., Король І. І.

Навчальний посібник
із курсу «*Диференціальні рівняння*»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Частина ІІ

Ужгород – 2022

УДК 517.9 (075.8)
ББК 22.161.6
Д-50

Навчальний посібник є методичною розробкою з основ теорії звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та систем звичайних диференціальних рівнянь. Розглянуті основні типи диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими та змінними коефіцієнтами, рівняння, звідні до них, а також системи звичайних диференціальних рівнянь та методи їх інтегрування. Поданий теоретичний матеріал широко ілюструється прикладами з детально викладеними розв'язаннями. Посібник містить також індивідуальні завдання для самостійної роботи.

Рецензенти:

Ронто М. Й. – доктор фізико-математичних наук, професор Мішкольцського університету;

Синявська О. О. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу ДВНЗ «УжНУ».

Рекомендовано Редакційно-видавничою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 22 лютого 2022 року, протокол №1.

§ 1. Диференціальні рівняння вищих порядків. Інтегровні типи нелінійних рівнянь

1.1. Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні поняття та означення

Диференціальне рівняння (ДР) n-го порядку має загальний вигляд

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0, \tag{1.1}$$

або, якщо його можна розв'язати відносно n-ї похідної,

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

(1.1) називається ***неявним***, а (1.2) – ***явним*** ДР n-го порядку.

Означення 1.1. Будь-яка n разів неперервно диференційовна в області визначення ДР (1.1) функція $y=\varphi(x)$, яка після підставлення в ДР (1.1) замість шуканої функції перетворює його в тотожність, називається ***розв'язком*** цього ДР.

Означення 1.2. ***Загальним розв'язком*** ДР (1.1) n-го порядку називається функція $y=\varphi(x,C_1,...,C_n)$, залежна від n довільних сталих, якщо:

а) вона справджує ДР (1.1) за будь-яких значень C_1, ..., C_n;

б) за заданих початкових умов

$$y(x_0)=y_0,\;\; y'(x_0)=y'_0,\;\; ...,\;\; y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{1.3}$$

сталі C_1, ..., C_n можна підібрати таким чином, що функція $y=\varphi(x,C_1,...,C_n)$ задовольнятиме ці умови (за припущення, що початкові значення x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ належать області, де виконуються умови існування розв'язку).

За відшукання загального розв'язку ДР n-го порядку часто отримується співвідношення вигляду

$$\Phi(x,y,C_1,...,C_n)=0, \tag{1.4}$$

яке визначає шуканий загальний розв'язок у неявному вигляді. Це співвідношення називається ***загальним інтегралом*** ДР n-го порядку.

Знаючи загальний інтеграл (1.4), можна відтворити відповідне ДР вигляду (1.1). Для цього слід виключити сталі C_1, ..., C_n із системи рівнянь

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0; \quad \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Рівність $\psi(x, y, y', ..., y^{(k)}, C_1, ..., C_k) = 0$ називається проміжковим інтегралом ДР (1.1), якщо після її диференціювання $(n-k)$ разів і виключення сталих одержуємо ДР (1.1).

Означення 1.3. Будь-яка функція, що отримується з загального розв'язку ДР n-го порядку за конкретних значень сталих C_1, ..., C_n, називається ***частинним розв'язком*** цього ДР. Графік частинного розв'язку називається ***інтегральною кривою*** заданого ДР n-го порядку.

Розв'язати (зінтегрувати) ДР n-го порядку означає:

1) знайти його загальний розв'язок (якщо початкові умови не задані) або

2) знайти той частинний розв'язок ДР, який справджує задані початкові умови (якщо такі є).

Означення 1.4. Задача знаходження частинного розв'язку ДР n-го порядку (1.1), який справджує початкові умови (1.3), називається ***задачею Коші*** для цього ДР.

Розглянемо умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для явного ДР (1.2).

Теорема 1.1 **(*про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для явного ДР* n-*го порядку*)**. Нехай права частина рівняння (1.2) $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$

а) визначена й неперервна по всіх аргументах у замкнутій області D: $|x - x_0| \le a, \quad |y^{(k)} - y_0^{(k)}| \le b, \quad k = \overline{0, n-1}$, де a, b – додатні сталі; тоді $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ є також обмеженою в D, тобто існує така додатна стала M, що

$$|f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})| \le M \text{ в області D;}$$

б) справджує умову Ліпшиця за аргументами y, y', ..., $y^{(n-1)}$ в області D, тобто існує така стала $L > 0$ (***стала Ліпшиця***), що

$$
\begin{aligned}
&| f(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y_2', ..., y_2^{(n-1)}) | \le \\
&\le L(| y_1 - y_2 | + | y_1' - y_2' | + ... + | y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)} |
\end{aligned}
$$

в області D.

Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ ДР (1.2), визначений і неперервний на проміжку $| x - x_0 | \le h$, де $h = \min\{a, b/M\}$, який у точці $x = x_0$ набуває значень

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)},\ k = \overline{0, n-1}.$$

Теорема 1.1 доводиться аналогічно до теореми Коші для ДР першого порядку: для застосування методу Пікара ДР (1.2) попередньо зводиться до системи ДР першого порядку.

Теорема 1.2 (***про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для неявного ДР* n*-го порядку***). Нехай ліва частина ДР (1.1) $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})$ в деякому h-околі точки M_0 з координатами $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)})$, де $y_0^{(n)}$ – розв'язок рівняння $F(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, неперервна разом із частинними похідними першого порядку за всіма аргументами і справджує умови: $F(M_0) = 0$, $\partial F(M_0)/\partial y^{(n)} \ne 0$. Тоді для всіх $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ ДР (1.1) має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який справджує початкові умови (1.3).

Доведення. Якщо $\partial F / \partial y^{(n)} \ne 0$ у точці M_0, то згідно з теоремою про існування неявної функції ДР (1.1) визначає $y^{(n)}(x)$ як однозначну функцію інших аргументів: $y^{(n)} = f_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ у деякому h-околі точки M_0. Функція $f_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ неперервна за всіма аргументами і матиме неперервні частинні похідні першого порядку, тобто в розглядуваній області (h-околі точки M_0) справджує умови Теореми 1.1. Тому явне ДР $y^{(n)} = f_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, а отже, і неявне ДР (1.1), визначає в h-околі точки M_0 єдину функцію $y = \varphi(x)$, яка справджує початкові умови (1.3).

1.2. Деякі інтегровні типи нелінійних диференціальних рівнянь вищих порядків

Розв'язки деяких нелінійних ДР вищих порядків вигляду (1.1) можна знайти шляхом зведення вихідного рівняння до ДР нижчого порядку. Розглянемо деякі інтегровні типи ДР, які допускають пониження порядку.

1. ***ДР вигляду*** $y^{(n)} = f(x)$ розв'язується *n*-кратним інтегруванням:

$$y(x) = \int \overset{(n)}{\dots} \int f(x)dx^n + \sum_{i=0}^{n-1} C_i x^i = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-\xi)^{n-1} f(\xi)d\xi + \sum_{i=0}^{n-1} C_i x^i, \qquad (1.5)$$

де $x_0 = const$. Формула (2.1) називається ***формулою Коші***. Очевидно, що за всіх $C_i = 0$ розв'язок (2.1) справджуватиме початкові умови $y^{(k)}(x_0) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$.

Приклад 1.1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''' = 12x, \quad y = y(x). \qquad (1.6)$$

Розв'язання. (1.6) є рівнянням вигляду $y^{(n)} = f(x)$, розв'язок якого знаходиться *n*-кратним інтегруванням (для заданого рівняння $n = 3$):

$$y'' = 12\int xdx + \overline{C}_1 = 6x^2 + \overline{C}_1,$$

$$y' = \int (6x^2 + \overline{C}_1)dx + C_2 = 2x^3 + \overline{C}_1 x + C_2,$$

$$y = \int (2x^3 + \overline{C}_1 x + C_2)dx + C_3 = \frac{x^4}{4} + \overline{C}_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Перепозначивши в останньому виразі задля спрощення $C_1 = \frac{\overline{C}_1}{2}$, отримаємо загальний розв'язок ДР (1.6). Із побудови цього розв'язку очевидно, що особливих розв'язків рівняння не має.

Відповідь. $y = \frac{x^4}{4} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

2. ***Якщо ДР не містить шуканої функції,*** тобто має вигляд

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1.7)$$

де $0 < k < n$, то підстановка $y^{(k)} = z(x)$ понижує його порядок на *k* одиниць: після її введення у ДР (1.7) отримуємо ДР $(n-k)$-го порядку

$$F(x,z,z',\ldots,z^{(n-k)})=0.$$

Приклад 1.2. Розв'язати рівняння:

$$y'''=y''\operatorname{ctg}x,\quad y=y(x). \tag{1.8}$$

Розв'язання. (1.8) є неповним ДР третього порядку, що не містить шуканої функції $y(x)$, а тому його порядок можна понизити підстановкою $y''=z(x)$, тоді $y'''=z'(x)$ і для визначення нової невідомої функції $z(x)$ отримуємо ДР першого порядку

$$z'=z\operatorname{ctg}x.$$

Це рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dz}{dx}=z\operatorname{ctg}x \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z}=\operatorname{ctg}x\,dx \quad\Rightarrow\quad \ln|z|=\ln|\sin x|+\ln|\overline{C}_1|,$$

звідки

$$z=\overline{C}_1\sin x.$$

Підклавши в останню рівність $z=y''$, отримаємо рівняння другого порядку вигляду $y^{(n)}=f(x)$, розв'язок якого знаходиться аналогічно до Прикладу 1.1:

$$y''=\overline{C}_1\sin x \quad\Rightarrow\quad y'=-\overline{C}_1\cos x+C_2 \quad\Rightarrow\quad y=-\overline{C}_1\sin x+C_2x+C_3.$$

Перепозначивши в останньому виразі задля спрощення $C_1=-\overline{C}_1$, одержимо загальний розв'язок ДР (1.2).

Зауважимо, що єдина підозріла на особливий розв'язок функція

$$z=0 \quad\Rightarrow\quad y''=0 \quad\Rightarrow\quad y=Ax+B$$

отримується з загального розв'язку при значенні $C_1=0$, тому додаткових розв'язків ДР (1.2) не має.

Відповідь. $y=C_1\sin x+C_2x+C_3$.

3. *Якщо ДР не містить незалежної змінної,* тобто має вигляд

$$F(y,y',\ldots,y^{(n)})=0, \tag{1.9}$$

то його порядок можна понизити підстановкою $y'=p(y)$, де $p(y(x))$ – нова невідома функція. Тоді маємо: $y''=p'p$, $y'''=p''p^2+p'^2p$, $y^{(4)}=p'''p^3+4p''p'p^2+p'^3p$ тощо. Оскільки вирази для $y^{(k)}$ містять похідні функції $p(y)$ тільки до порядку $(k-1)$, то після підкладання у ДР (1.9) отримаємо на порядок нижче ДР для визначення $p(y)$:

$$F_1(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0.$$

Приклад 1.3. Розв'язати рівняння:

$$y^2 y' - y'' = -\frac{y'^2}{y}, \quad y = y(x). \tag{1.10}$$

Розв'язання. (1.10) є неповним ДР другого порядку, що не містить незалежної змінної *x*, а тому його порядок можна понизити підстановкою $y' = p(y)$, де $p(y(x))$ – нова невідома функція. Тоді $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p$. Підстановка виразів для похідних у (1.10) дає

$$y^2 p - p'p = -\frac{p^2}{y},$$

звідки $p = 0$ або

$$y^2 - p' = -\frac{p}{y} \quad \Rightarrow \quad p' - \frac{p}{y} = y^2. \tag{1.11}$$

(1.11) є лінійне неоднорідне ДР першого порядку відносно невідомої функції $p(y)$. Зінтегруємо його методом варіації сталої (Лаґранжа). Згідно з алгоритмом цього методу спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного до (1.11) однорідного рівняння $p' - \frac{p}{y} = 0$. Це рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},$$

звідки

$$p_{\text{з.о.}} = C\,\mathrm{e}^{\int \frac{dy}{y}} = Cy, \quad C = const. \tag{1.12}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.11) будемо шукати у вигляді (1.12), вважаючи сталу *C* функцією незалежної змінної *y*:

$$p = C(y) \cdot y. \tag{1.13}$$

Функцію $C(y)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (1.13) в (1.11):

$$C'(y)\cdot y + C(y) - \frac{C(y)\cdot y}{y} = y^2,$$

звідки

$$C'(y) = y \quad \Rightarrow \quad C(y) = \frac{y^2}{2} + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(y)$ у (1.13), одержимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР першого порядку (1.13)

$$p = \left(\frac{y^2}{2} + C_1\right)\cdot y = \frac{y(y^2 + 2C_1)}{2}.$$

Із урахуванням підстановки $y' = p$ з останньої рівності для визначення $y(x)$ отримаємо ДР першого порядку, яке інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^2 + 2C_1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2dy}{y(y^2 + 2C_1)} = dx. \tag{1.14}$$

Дріб у лівій частині останньої рівності подамо сумою простих дробів:

$$\frac{2}{y(y^2 + 2C_1)} = \frac{A}{y} + \frac{By + D}{y^2 + 2C_1} = \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2 + 2C_1}\right).$$

Тоді з (1.14) після інтегрування одержимо

$$\frac{1}{C_1}\left(\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y^2 + 2C_1|\right) = x + \ln|\overline{C}_2|,$$

звідки

$$\frac{y}{\sqrt{y^2 + 2C_1}} = \overline{C}_2^{C_1}\, e^{C_1 x}.$$

Перепозначивши в останньому виразі задля спрощення $C_2 = \overline{C}_2^{C_1}$, одержимо загальний інтеграл ДР (1.10) $y = C_2\, e^{C_1 x}\sqrt{y^2 + 2C_1}$.

Додаткової перевірки вимагає випадок

$$p = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C.$$

Очевидно, що ця функція є розв’язком ДР (1.10) і не отримується з загального інтеграла при жодних значеннях сталих C_1, C_2 – отже, вона є особливим розв’язком.

Відповідь. $y = C_2 e^{C_1 x} \sqrt{y^2 + 2C_1}$, $y = C$.

Приклад 1.4. Розв’язати задачу Коші для ДР третього порядку

$$2y''' - 3y'^2 = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1. \tag{1.15}$$

Розв’язання. (1.15) є неповним ДР другого порядку, що не містить ні шуканої функції $y(x)$, ані незалежної змінної x, тому для пониження його порядку застосовні обидва методи, проілюстровані в Прикладах 1.2 та 1.3. Підстановка з Прикладу 1.2 виглядає простішою, тому покладемо $y' = z(x)$, тоді $y''' = z''(x)$ і для визначення нової невідомої функції $z(x)$ отримуємо ДР другого порядку

$$2z'' - 3z^2 = 0. \tag{1.16}$$

Неповне ДР (1.16) уже містить шукану функцію, зате не містить незалежної змінної, тобто для пониження його порядку слід застосувати підстановку з Прикладу 1.3 у вигляді $z' = p(z)$, де $p(z(x))$ – нова невідома функція. Тоді $z'' = p'p$ і з (1.16) маємо

$$2p\frac{dp}{dz} - 3z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2pdp = 3z^2 dz \quad \Rightarrow \quad p^2 = z^3 + C_1,$$

звідки

$$p = \pm\sqrt{z^3 + C_1}. \tag{1.17}$$

Обчислимо значення сталої C_1 з урахуванням початкових умов задачі Коші (1.15). Для цього спочатку знайдемо початкові значення для функцій z і p на підставі введених підстановок:

$$z = y' \quad \Rightarrow \quad z_0 = y_0' = 1,$$

$$p = z' = y'' \quad \Rightarrow \quad p_0 = y_0'' = -1.$$

Підстановка цих значень в (1.17) дає

$$-1 = \pm\sqrt{1^3 + C_1}.$$

Остання рівність виконується тільки за знаку «–» перед квадратним коренем і значення $C_1 = 0$. Отже, для знаходження розв'язку задачі Коші (1.15) рівність (1.17) слід записати у вигляді

$$p = -\sqrt{z^3}\ .$$

Оскільки $p = z'$, то з отриманої рівності маємо

$$\frac{dz}{dx} = -z^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z^{\frac{3}{2}}} = -dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{z^{\frac{1}{2}}} = -x + C_2\ .$$

З урахуванням початкових умов $x_0 = 0$, $z_0 = 1$ остання рівність дає $C_2 = -2$. Тому для знаходження розв'язку задачі Коші (1.15) одержимо співвідношення

$$-\frac{2}{z^{\frac{1}{2}}} = -x - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{z}} = x + 2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{4}{(x+2)^2}\ .$$

Оскільки $z = y'$, то після заміни та інтегрування отримаємо

$$y' = \frac{4}{(x+2)^2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{x+2} + C_3\ .$$

З урахуванням початкових умов $x_0 = 0$, $y_0 = -3$ остання рівність дає $C_3 = -1$. Отже, шуканий розв'язок задачі Коші (1.15) рівний

$$y = -\frac{4}{x+2} - 1 = \frac{-4 - x - 2}{x+2} = -\frac{x+6}{x+2}.$$

Відповідь. $y = -\dfrac{x+6}{x+2}$.

4. *Однорідні ДР вищих порядків.* Нехай ліва частина ДР (1.1) $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ є однорідною функцією відносно шуканої функції та її похідних, тобто для довільного $\lambda \neq 0$

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\ . \tag{1.18}$$

Тоді порядок ДР (1.1) можна понизити підстановкою $y = \mathrm{e}^{\int z(x)dx}$, де $z(x)$ нова невідома функція. Маємо: $y' = \mathrm{e}^{\int z(x)dx} \cdot z = yz$, $y'' = y(z' + z^2)$, $y''' = y(z'' + 3z'z + z^3)$ тощо. Підклавши похідні в ДР (1.1) і взявши в (1.18) $\lambda = 1/y$

$(y \neq 0)$, для визначення $z(x)$ отримаємо ДР на порядок нижче: $F_2(x, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0$.

Приклад 1.5. Розв'язати рівняння другого порядку

$$yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0. \tag{1.19}$$

Розв'язання. Покажемо, що ДР (1.19) є однорідним, тобто для довільного $\lambda \neq 0$ виконується умова однорідності у вигляді

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^m F(x, y, y', y''), \tag{1.20}$$

де $F(x, y, y', y'') = yy'' - y'^2 - 6xy^2$. Справді, для останньої функції

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda y \cdot \lambda y'' - (\lambda y')^2 - 6x \cdot (\lambda y)^2 = \lambda^2 F(x, y, y', y''),$$

тобто виконується умова (1.20) з виміром $m = 2$. Отже, ДР (1.19) є однорідним, а тому його порядок можна понизити підстановкою $y = \mathrm{e}^{\int z(x)dx}$, де $z(x)$ нова невідома функція. Маємо: $y' = \mathrm{e}^{\int z(x)dx} \cdot z = yz$, $y'' = y(z' + z^2)$. Підклавши похідні в ДР (1.19), для визначення $z(x)$ отримаємо ДР першого порядку

$$y \cdot y(z' + z^2) - (yz)^2 - 6xy^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z' - 6x = 0$$

за умови $y \neq 0$. Інтегруємо:

$$z' = 6x \quad \Rightarrow \quad z = 3x^2 + C_1. \tag{1.21}$$

Згідно з нашою підстановкою $y' = yz$, звідки $z = \dfrac{y'}{y}$. Підставивши це значення в (1.21), отримаємо ДР для визначення $y(x)$

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = (3x^2 + C_1)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x^3 + C_1 x + \ln|C_2|,$$

звідки

$$y = C_2 \, \mathrm{e}^{x^3 + C_1 x}.$$

Окремої перевірки вимагає випадок $y = 0$. Очевидно, що ця функція є розв'язком ДР (1.19), однак отримується з загального розв'язку при значенні $C_2 = 0$ – отже, вона не дає додаткового розв'язку.

Відповідь. $y = C_2 e^{x^3 + C_1 x}$.

5. ***Квазіоднорідні ДР вищих порядків.*** ДР (1.1) буде квазіоднорідним (узагальнено-однорідним) тоді, коли для довільного $k \neq 0$ виконується умова

$$F(kx, k^m y, k^{m-1} y', \ldots, k^{m-n} y^{(n)}) = k^{\alpha} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}). \tag{1.22}$$

Порядок такого ДР понижується введенням нової незалежної змінної t і нової шуканої функції $z(t)$ згідно з підстановками $x = e^t$, $y = e^{mt} \cdot z(t)$. Виразивши всі похідні $y^{(s)}(x)$ через $z^{(r)}(t)$ – наприклад, $y'(x) = dy/dt \cdot e^{-t} = e^{(m-1)t} \cdot [z'(t) + mz(t)]$ тощо, і поклавши в (1.22) $k = e^{-t} \neq 0$, для визначення функції $z(t)$ отримаємо ДР *n*-го порядку типу (1.9), яке не містить незалежної змінної *t*. Це рівняння згідно з викладеним вище зводиться до ДР $(n-1)$-го порядку заміною $z' = p(z)$.

Приклад 1.6. Зінтегрувати рівняння

$$\frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x} - 3\left(y' - \frac{y}{x}\right). \tag{1.23}$$

Розв'язання. Рівняння (1.23) не є ні неповним, ані однорідним (за перевірки умови однорідності в різних доданках отримуються різні степені λ). Покажемо, що задане ДР є квазіоднорідним, тобто для $k \neq 0$ виконується умова квазіоднорідності у вигляді

$$F(kx, k^m y, k^{m-1} y', k^{m-2} y'') = k^{\alpha} F(x, y, y', y''), \tag{1.24}$$

де $F(x, y, y', y'') = \dfrac{y^2}{x^2} + y'^2 - 3xy'' - \dfrac{2yy'}{x} + 3\left(y' - \dfrac{y}{x}\right)$. Для останньої функції

$$F(kx, k^m y, k^{m-1} y', k^{m-2} y'') = \frac{(k^m y)^2}{(kx)^2} + (k^{m-1} y')^2 -$$

$$- 3kx \cdot k^{m-2} y'' - \frac{2k^m y \cdot k^{m-1} y'}{kx} + 3\left(k^{m-1} y' - \frac{k^m y}{kx}\right).$$

Зрозуміло, що умова (1.24) виконуватиметься тоді, коли степені k в усіх доданках отриманого виразу будуть рівними. Прирівнявши ці степені, отримаємо систему рівнянь для визначення m

$$2m-2=2(m-1)=1+m-2=m+m-1-1=m-1=m-1,$$

яку, вилучивши повторювані вирази, можна спростити до вигляду

$$2m-2=m-1.$$

Коренем останнього алгебраїчного рівняння є число $m=1$. Існування цього кореня й означає, що ДР (1.23) є квазіоднорідним.

Отже, порядок ДР (1.23) понижується введенням нової незалежної змінної t і нової шуканої функції $z(t)$ згідно з підстановками

$$x=\mathrm{e}^t \;\; (t=\ln x), \;\; y=\mathrm{e}^{mt}\cdot z(t)=\mathrm{e}^t\cdot z(t). \tag{1.25}$$

Тоді

$$y'(x)=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}=\mathrm{e}^t\cdot[z'(t)+z(t)]\cdot\mathrm{e}^{-t}=z'+z,$$

$$y''(x)=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{1}{x}=[z''(t)+z'(t)]\cdot\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{-t}(z''+z').$$

Підклавши вирази для x, y, y' та y'' у ДР (1.23), одержимо рівність

$$\frac{(\mathrm{e}^t z)^2}{\mathrm{e}^{2t}}+(z'+z)^2=3\mathrm{e}^t\cdot\mathrm{e}^{-t}(z''+z')+\frac{2\mathrm{e}^t z\cdot(z'+z)}{\mathrm{e}^t}-3\left(z'+z-\frac{\mathrm{e}^t z}{\mathrm{e}^t}\right),$$

яка після спрощення запишеться у вигляді

$$z'^2=3z''.$$

Це ДР другого порядку, що не містить шуканої функції, тому для пониження його порядку покладемо $z'=v(t)$, тоді $z''=v'(t)$ і для визначення нової невідомої функції $v(t)$ отримуємо ДР першого порядку

$$v^2=3v'. \tag{1.26}$$

Зінтегруємо рівняння (1.26):

$$3\frac{dv}{dt}=v^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v^2}=\frac{dt}{3} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{v}=\frac{t}{3}+\frac{C_1}{3},$$

звідки

$$v=-\frac{3}{t+C_1}.$$

Оскільки $v=z'$, то після підстановки й інтегрування маємо

$$z' = -\frac{3}{t + C_1} \quad \Rightarrow \quad z = -3\ln|t + C_1| + C_2 .$$

Загальний розв'язок ДР (1.23) отримується з урахуванням підстановок (1.25):

$$y = \mathrm{e}^t \cdot z(t) = x \cdot (C_2 - 3\ln|\ln x + C_1|) .$$

Додаткової перевірки вимагає випадок

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad z' = 0 \quad \Rightarrow \quad z = C \quad \Rightarrow \quad y = Cx .$$

Ця функція є розв'язком ДР (1.23), і не отримується з загального розв'язку при жодних значеннях сталих C_1, C_2 – отже, вона є особливим розв'язком.

Відповідь. $y = x \cdot (C_2 - 3\ln|\ln x + C_1|)$, $y = Cx$.

Приклад 1.7. Розв'язати задачу Коші:

$$x^2 y'' - 3xy' = \frac{6y^2}{x^2} - 4y, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4 . \qquad (1.27)$$

Розв'язання. Рівняння (1.27) не є ні неповним, ані однорідним (за перевірки умови однорідності в різних доданках отримуються різні степені λ). Покажемо, що задане ДР є квазіоднорідним, тобто для $k \neq 0$ виконується умова квазіоднорідності у вигляді (1.24), де $F(x, y, y', y'') = x^2 y'' - 3xy' - \dfrac{6y^2}{x^2} + 4y$. Для останньої функції

$$F(kx, k^m y, k^{m-1} y', k^{m-2} y'') = (kx)^2 \cdot k^{m-2} y'' -$$
$$- 3kx \cdot k^{m-1} y' - \frac{6(k^m y)^2}{(kx)^2} + 4k^m y.$$

Умова (1.24) виконуватиметься тоді, коли степені k в усіх доданках отриманого виразу будуть рівними. Прирівнявши ці степені, отримаємо систему рівнянь для визначення m

$$2 + m - 2 = 1 + m - 1 = 2m - 2 = m ,$$

яку, вилучивши повторювані значення, можна спростити до вигляду

$$2m - 2 = m .$$

Коренем останнього алгебраїчного рівняння є число $m = 2$. Існування цього кореня й означає, що ДР (1.27) є квазіоднорідним.

Отже, порядок ДР (1.27) понижується введенням нової незалежної змінної t і нової шуканої функції $z(t)$ згідно з підстановками

$$x = \mathrm{e}^t \ \ (t = \ln x), \ \ y = \mathrm{e}^{mt} \cdot z(t) = \mathrm{e}^{2t} \cdot z(t). \qquad (1.28)$$

Тоді

$$y'(x) = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} = \mathrm{e}^{2t} \cdot [z'(t) + 2z(t)] \cdot \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^t (z' + 2z),$$

$$y''(x) = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{x} = \mathrm{e}^t \cdot [z''(t) + 2z'(t) + z'(t) + 2z(t)] \cdot \mathrm{e}^{-t} = z'' + 3z' + 2z.$$

Підклавши вирази для x, y, y' та y'' у ДР (1.27), одержимо рівність

$$\mathrm{e}^{2t} (z'' + 3z' + 2z) - 3\mathrm{e}^t \cdot \mathrm{e}^t (z' + 2z) = \frac{6(\mathrm{e}^{2t} z)^2}{\mathrm{e}^{2t}} - 4\mathrm{e}^{2t} z,$$

яка після спрощення запишеться у вигляді

$$z'' = 6z^2.$$

Це ДР другого порядку, що не містить незалежної змінної, тому для пониження його порядку покладемо $z' = p(z)$, тоді $z'' = p'p$ і для визначення нової невідомої функції $p(z)$ отримуємо ДР першого порядку

$$p'p = 6z^2. \qquad (1.29)$$

Зінтегруємо рівняння (1.29):

$$p\frac{dp}{dz} = 6z^2 \quad \Rightarrow \quad pdp = 6z^2 dz \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2} = 2z^3 + \frac{C_1}{2},$$

звідки

$$p = \pm\sqrt{4z^3 + C_1}. \qquad (1.30)$$

Обчислимо значення сталої C_1 з урахуванням початкових умов задачі Коші (1.27). Для цього спочатку знайдемо початкові значення для функцій z і p на підставі введених підстановок:

$$x = \mathrm{e}^t, \quad x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 0;$$

$$y = \mathrm{e}^{2t} \cdot z, \quad y_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad z_0 = 1;$$

$$y' = \mathrm{e}^t (z' + 2z), \quad y'_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad z'_0 = p_0 = 2.$$

Підстановка цих значень у (1.30) дає

$$2 = \pm\sqrt{4\cdot 1^3 + C_1}\ .$$

Остання рівність виконується тільки за знаку «+» перед квадратним коренем і значення $C_1 = 0$. Отже, для знаходження розв'язку задачі Коші (1.27) рівність (1.30) слід записати у вигляді

$$p = 2\sqrt{z^3}\ .$$

Оскільки $p = z'$, то з отриманої рівності маємо

$$\frac{dz}{dt} = 2z^{\frac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z^{\frac{3}{2}}} = 2dt \quad\Rightarrow\quad -\frac{2}{z^{\frac{1}{2}}} = 2t + C_2\ .$$

З урахуванням початкових умов $t_0 = 0$, $z_0 = 1$ остання рівність дає $C_2 = -2$. Тому для знаходження розв'язку задачі Коші (1.27) одержимо співвідношення

$$-\frac{2}{z^{\frac{1}{2}}} = 2t - 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{\sqrt{z}} = 2 - 2t \quad\Rightarrow\quad z = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Шуканий розв'язок задачі Коші (1.27) отримується з урахуванням підстановок (1.28):

$$y = \mathrm{e}^{2t}\cdot z(t) = x^2\cdot\frac{1}{(1-\ln|x|)^2}\ .$$

Відповідь. $y = \dfrac{x^2}{(1-\ln|x|)^2}$.

6. Якщо ДР (1.1) можна перетворити до точної похідної за змінною x від деякої функції $\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, тобто ДР (1.1) подається у вигляді $d\varphi/dx = 0$, то його першим проміжковим інтегралом буде співвідношення $\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1$. Ця рівність є ДР на порядок нижчим за (1.1).

Приклад 1.8. Розв'язати рівняння (1.19) шляхом подання його лівої частини у вигляді точної похідної.

Розв'язання. Щоб подати ДР (1.19) у вигляді точної похідної, поділимо його на y^2, вважаючи $y \neq 0$. Маємо

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} - 6x = 0.$$

Очевидно, що дріб у першому доданку є похідною частки, тому останню рівність можна записати як

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y} - 3x^2\right) = 0,$$

звідки після інтегрування маємо

$$\frac{y'}{y} - 3x^2 = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 3x^2 + C_1.$$

Отримане рівняння вже розв'язане у Прикладі 1.5 (див. вище).

Деякі диференціальні рівняння вищих порядків допускають пониження порядку шляхом подання обох їх частин у вигляді точних похідних за незалежною змінною від якихось складних функцій. Такий спосіб інтегрування вже ілюструвався у Прикладі 1.8. Задля кращого розуміння наведемо ще кілька типових прикладів, де допускається цей штучний шлях пониження порядку для рівнянь вищих порядків.

Приклад 1.9. Зінтегрувати рівняння четвертого порядку шляхом подання у вигляді точної похідної:

$$5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0, \quad y = y(x). \tag{1.31}$$

Розв'язання. (1.31) є неповним ДР четвертого порядку, що не містить ні шуканої функції $y(x)$, ані незалежної змінної *x*, тобто належить до інтегровних типів. Щоб подати його ліву частину у вигляді точної похідної, перепишемо (1.31) у вигляді

$$2y'''^2 + 3[y'''^2 - y''y^{(4)}] = 0.$$

Поділимо останню рівність на y'''^2, вважаючи $y''' \neq 0$. Маємо

$$2 + \frac{3[y'''^2 - y''y^{(4)}]}{y'''^2} = 0. \tag{1.32}$$

Очевидно, що дріб у другому доданку є похідною частки, тому (1.32) можна подати як

$$\frac{d}{dx}\left(2x+\frac{3y''}{y'''}\right)=0,$$

звідки після інтегрування маємо

$$2x+\frac{3y''}{y'''}=\overline{C}_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{y'''}{y''}=\frac{3}{\overline{C}_1-2x} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'''}{y''}+\frac{3}{2x+C_1}=0,$$

де $C_1=-\overline{C}_1$. Отримане рівняння третього порядку також допускає подання у вигляді точної похідної:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln y''+\frac{3}{2}\ln(2x+C_1)\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \ln y''+\frac{3}{2}\ln(2x+C_1)=\ln|\overline{C}_2|,$$

звідки

$$y''=\overline{C}_2(2x+C_1)^{-3/2}. \tag{1.33}$$

Отримане ДР другого порядку (1.33) є рівнянням вигляду $y^{(n)}=f(x)$, розв'язок якого знаходиться n-кратним інтегруванням (для нашого рівняння $n=2$):

$$y'=-\overline{C}_2(2x+C_1)^{-1/2}+C_3,$$

$$y=-\overline{C}_2(2x+C_1)^{1/2}+C_3x+C_4.$$

Ввівши позначення $C_2=-\overline{C}_2$, отримаємо загальний розв'язок ДР (1.31)

$$y=C_2\sqrt{2x+C_1}+C_3x+C_4. \tag{1.34}$$

Додаткової перевірки вимагає випадок

$$y'''=0 \quad\Rightarrow\quad y''=\overline{A}_1 \quad\Rightarrow\quad y'=\overline{A}_1x+A_2 \quad\Rightarrow\quad y=A_1x^2+A_2x+A_3,$$

де $A_1=0{,}5\overline{A}_1$. Отримана функція очевидно є розв'язком ДР (1.31) і не отримується з загального розв'язку (1.34) – отже, вона є особливим розв'язком.

Відповідь. $y=C_2\sqrt{2x+C_1}+C_3x+C_4$, $y=A_1x^2+A_2x+A_3$.

Приклад 1.10. Зінтегрувати рівняння другого порядку шляхом подання у вигляді точної похідної:

$$y''(2y'-y)=y'^2, \quad y=y(x). \tag{1.35}$$

Розв'язання. (1.35) є неповним ДР, що не містить незалежної змінної x, і водночас однорідним ДР другого порядку, тобто належить до інтегровних типів. Щоб подати його у вигляді точної похідної, перепишемо (1.35) у вигляді

$$2y'y'' - (yy'' + y'^2) = 0.$$

Очевидно, що вираз у дужках є похідною добутку, тому (1.35) можна подати як

$$\frac{d}{dx}(y'^2 - yy') = 0,$$

звідки після інтегрування маємо

$$y'^2 - yy' = C_1 \quad \Rightarrow \quad y = y' - \frac{C_1}{y'}. \tag{1.36}$$

Це неявне рівняння типу $y = f(y')$. Розв'яжемо його шляхом введення параметра

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad dy = pdx. \tag{1.37}$$

Тоді з (1.36)

$$y = p + \frac{C_1}{p} \quad \Rightarrow \quad dy = \left(1 - \frac{C_1}{p^2}\right)dp. \tag{1.38}$$

Із (1.38) з урахуванням (1.37) маємо:

$$pdx = \left(1 - \frac{C_1}{p^2}\right)dp \quad \Rightarrow \quad dx = \left(\frac{1}{p} - \frac{C_1}{p^3}\right)dp,$$

звідки $x = \ln|p| + \frac{C_1}{2p^2} + C_2$. Отже, загальний розв'язок ДР (1.35) у параметричній формі

$$x = \ln|p| + \frac{C_1}{2p^2} + C_2, \quad y = p + \frac{C_1}{p}.$$

Із (1.36) випливає, що додаткової перевірки вимагає випадок

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C.$$

Отримана функція очевидно є розв'язком ДР (1.35) і не одержується з загального розв'язку – отже, вона є особливим розв'язком.

Відповідь. $x = \ln|p| + \frac{C_1}{2p^2} + C_2, \quad y = p + \frac{C_1}{p}; \quad y = C.$

Приклад 1.11. Із застосуванням подання рівняння у вигляді точної похідної розв'язати задачу Коші для рівняння другого порядку:

$$yy'' - y'^2 = xy^2 y' + y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \tag{1.39}$$

Розв'язання. Можна показати, що рівняння (1.39) є квазіоднорідним при $m = -2$, а отже, належить до інтегровних типів. Щоб подати його у вигляді точної похідної, перенесемо всі доданки в ДР (1.39) у ліву частину і поділимо отриману рівність на y^2, враховуючи, що з огляду на початкові умови $y \neq 0$. Маємо

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} - (xy' + y) = 0. \tag{1.40}$$

Очевидно, що дріб у першому доданку є похідною частки, а вираз у дужках – похідною добутку, тому (1.40) можна подати як

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y} - xy\right) = 0,$$

звідки після інтегрування маємо

$$\frac{y'}{y} - xy = C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 y + xy^2. \tag{1.41}$$

Обчислимо значення сталої C_1 з урахуванням початкових умов задачі Коші (1.39):

$$-1 = C_1 \cdot 1 + 0 \cdot 1^2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1,$$

а тому рівняння (1.41) запишеться як

$$y' + y = xy^2. \tag{1.42}$$

Зінтегруємо одержане рівняння Бернуллі (1.42) методом підстановки (Д'Аламбера), шукаючи розв'язок у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{1.43}$$

Після підстановки (1.43) у рівняння (1.42) і групування доданків маємо:

$$u'v + u[v' + v] = x(uv)^2. \tag{1.44}$$

Будемо вимагати, щоб у (1.44) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився в нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$\frac{dv}{dx} + v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -dx,$$

наприклад, $v = e^{-\int dx} = e^{-x}$. Тоді з (1.44) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$e^{-x}\frac{du}{dx} = e^{-2x}\cdot xu^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2} = x e^{-x}\,dx,$$

звідки після інтегрування дістанемо

$$-\frac{1}{u} = -e^{-x}(x+1) - C_2 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{e^{-x}(x+1) + C_2}.$$

Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у (1.43), одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (1.42)

$$y = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(x+1) + C_2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x+1+C_2\,e^{x}}. \tag{1.45}$$

Виділимо з (1.45) частинний розв'язок, який справджує задану початкову умову $y(0) = 1$:

$$1 = \frac{1}{1 + C_2} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Шуканий розв'язок задачі Коші (1.39) отримаємо, підставивши знайдене значення сталої C_2 в (1.45).

Відповідь. $y = \dfrac{1}{x+1}$.

Завдання для індивідуальної роботи №4

Постановка завдань:

1 - 3. Зінтегрувати диференціальне рівняння.

4 - 5. Розв'язати задачу Коші.

Варіант 1

1. $(1+x^2)y''+2xy'=12x^3$.

2. $xy''+y'-x^2-1=0$.

3. $yy''+y'^2=\dfrac{y^2}{x^2}$.

4. $y'y'''-3y''^2=0$, $y(1)=2$, $y'(1)=y''(1)=1$.

5. $y''+y'^2+2y'=0$, $y(0)=\ln 2$, $y'(0)=-1$.

Варіант 2

1. $xy''=y'+x\sin\dfrac{y'}{x}$.

2. $2y''\ln y'=y'$.

3. $x^2-\dfrac{1}{y''^2}=1$.

4. $y'''-y''y'=y''$, $y(0)=y'(0)=2$, $y''(0)=4$.

5. $y''+2\sin y\cos^3 y=0$, $y(\pi)=0$, $y'(\pi)=-1$.

Варіант 3

1. $4y'+y''=4xy''$.

2. $y''+y'^2=2\mathrm{e}^{-y}$.

3. $y'''y'-3y''^2=0$.

4. $xy'''+y''-x-1=0$, $y(1)=0$, $y'(1)=\dfrac{3}{4}$, $y''(1)=1$.

5. $y''=32\sin^3 y\cos y$, $y(2)=\dfrac{\pi}{2}$, $y'(2)=4$.

Варіант 4

1. $y'' - (1 + 2\operatorname{tg}^2 x)y = 0$.

2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

3. $xy''' - y''^2 = 0$.

4. $y''y''' + 1 = 0$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$.

5. $y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

Варіант 5

1. $xy'' = y' + x\sin\dfrac{y'}{x}$.

2. $2y''\ln y' = y'$.

3. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

4. $y''' - xy''^2 = 0$, $y(3) = 7\ln 2$, $y'(3) = \ln 2$, $y''(3) = -\dfrac{1}{4}$.

5. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

Варіант 6

1. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.

2. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.

3. $yy'' - y'^2 = \dfrac{y^2}{x^2}$.

4. $y''' = 3yy'$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \dfrac{9}{2}$.

5. $yy'' + y = y'^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \sqrt{3}$.

Варіант 7

1. $y''\operatorname{tg} 5x = 5y'$.

2. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.

3. $3y'^2 - 2yy'' = 4y^2$.

4. $x^2 y''' = y''^2$, $y(1) = \dfrac{5}{2}$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = \dfrac{1}{2}$.

5. $y''(1 + 2\ln y') = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Варіант 8

1. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

2. $y'' \operatorname{cth} x - y' + \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$.

3. $y'' = 2yy'$.

4. $y'''^2 - y'^2 = y'^4$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

5. $yy'' - 2xy'^2 = 0$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{8}{27}$.

Варіант 9

1. $x = y''^2 + 1$.

2. $y'' + y'^2 = \mathrm{e}^{-y}$.

3. $y'' + \dfrac{2x}{x^2+1} y' = 2x$.

4. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \dfrac{5}{2}$, $y''(1) = -2$.

5. $(x^2 + 1)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Варіант 10

1. $y'' + \dfrac{2x}{x^2+1} y' = 2x$.

2. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

3. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$.

4. $(1 + \sin x)y''' = y'' \cos x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = y''(0) = 2$.

5. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

Варіант 11

1. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$.

2. $y(xy'' - y') + xy'^2 = 0$.

3. $(x^2+1)(y'^2-yy'')=xyy'$.

4. $y'y'''-y''^2=0$, $y(1)=0$, $y'(1)=2$, $y''(1)=1$.

5. $3xy'^2y''=y'^3+\dfrac{x^4}{9}$, $y(1)=\dfrac{2}{7}$, $y'(1)=\dfrac{1}{3}$.

Варіант 12

1. $y''\operatorname{th}x-y'+\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}=0$.

2. $xyy''-xy'^2-2yy'-y^2=0$.

3. $y''y'''=-1$.

4. $x^2y'''+y''^2=0$, $y(1)=2\ln 2$, $y'(1)=\ln 2$, $y''(1)=-\dfrac{1}{2}$.

5. $4y''y^3=16y^4-1$, $y(0)=y'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Варіант 13

1. $yy''-3y'^2=8y^2$.

2. $x^3y''-(y-xy')^2=0$.

3. $y''-xy'-y=1$.

4. $(x+1)y'''+y''=x+1$, $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=1$.

5. $y''=2\sin^3 y\cos y$, $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$, $y'(1)=1$.

Варіант 14

1. $y''\operatorname{tg}x-y'\csc x=0$.

2. $xyy''+xy'^2-3yy'=0$.

3. $2yy''-3y'^2=4y^2$.

4. $y'''y'-y''^2-y'^3=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

5. $y''=2\sin^3 y\cos y$, $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$, $y'(1)=1$.

Варіант 15

1. $x^2 y''' = y''^2$.

2. $y'' - y'^2 = 0$.

3. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.

4. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$, $y(1) = -9$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = -1$.

5. $y'' = 2yy'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Варіант 16

1. $x^2 y'' = y'^2$.

2. $yy''' = y'y''$.

3. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.

4. $yy''' = y'(2 - y'')$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 2$.

5. $y''\operatorname{ctg} x - y' - \dfrac{1}{\sin^3 x} = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

Варіант 17

1. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.

2. $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0$.

3. $yy'' + y'^2 = \dfrac{y^2}{x^2}$.

4. $y'y''' - 3y''^2 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = y''(1) = 1$.

5. $y'' + y'^2 + 2y' = 0$, $y(0) = \ln 2$, $y'(0) = -1$.

Варіант 18

1. $xy'' = y' + x\sin\dfrac{y'}{x}$.

2. $2y''\ln y' = y'$.

3. $x^2 - \dfrac{1}{y''^2} = 1$.

4. $y''' - y''y' = y''$, $y(0) = y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$.

5. $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = -1$.

Варіант 19

1. $4y' + y'' = 4xy''$.

2. $y'' + y'^2 = 2\mathrm{e}^{-y}$.

3. $y'''y' - 3y''^2 = 0$.

4. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \dfrac{3}{4}$, $y''(1) = 1$.

5. $y'' = 32\sin^3 y\cos y$, $y(2) = \dfrac{\pi}{2}$, $y'(2) = 4$.

Варіант 20

1. $y'' - (1 + 2\,\mathrm{tg}^2\, x)y = 0$.

2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

3. $xy''' - y''^2 = 0$.

4. $y''y''' + 1 = 0$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$.

5. $y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

Варіант 21

1. $y'' = xy' + y + 1$.

2. $1 + y'^2 = 2yy''$.

3. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

4. $y''' - xy''^2 = 0$, $y(3) = 7\ln 2$, $y'(3) = \ln 2$, $y''(3) = -\dfrac{1}{4}$.

5. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

Варіант 22

1. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.

2. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.

3. $yy'' - y'^2 = \dfrac{y^2}{x^2}$.

4. $y''' = 3yy'$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \dfrac{9}{2}$.

5. $yy'' + y = y'^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \sqrt{3}$.

Варіант 23

1. $y''\,\mathrm{tg}\,5x = 5y'$.

2. $3y'^2 - 2yy'' = 4y^2$.

3. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$.

4. $x^2 y''' = y''^2$, $y(1) = \dfrac{5}{2}$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = \dfrac{1}{2}$.

5. $y''(1 + 2\ln y') = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Варіант 24

1. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

2. $y''\,\mathrm{cth}\,x - y' + \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x} = 0$.

3. $y'' = 2yy'$.

4. $y'''^2 + y'^2 = y'^4$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

5. $yy'' - 2xy'^2 = 0$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{8}{27}$.

Варіант 25

1. $x = y''^2 + 1$.

2. $y'' + y'^2 = \mathrm{e}^{-y}$.

3. $y'' + \dfrac{2x}{x^2+1} y' = 2x$.

4. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \dfrac{5}{2}$, $y''(1) = -2$.

5. $(x^2 + 1)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

§ 2. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку та їх властивості. Теорема про структуру загального розв'язку ЛОДР

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) n-го порядку називається диференціальне рівняння (ДР) вигляду

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \quad x \in [a,b], \tag{2.1}$$

де $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – деякі неперервні на проміжку $x \in [a,b]$ функції, L – позначення лінійного оператора.

Наведемо спочатку найзагальніші властивості ЛОДР (2.1), які доводяться шляхом безпосередньої підстановки у вказане ДР:

а) будь-яке перетворення незалежної змінної $x = \varphi(\xi)$ з проміжку $a \le x \le b$, $\alpha \le \xi \le \beta$, де $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, не змінює лінійності ЛОДР (2.1);

б) лінійне перетворення залежної змінної $y(x) = \gamma_1(x)z(x) + \gamma_2(x)$, де $z(x)$ нова залежна змінна, $\gamma_1(x)$ і $\gamma_2(x)$ задані неперервні функції, не змінює лінійності ЛОДР (2.1);

в) якщо $y_1(x)$ деякий частинний розв'язок ЛОДР (2.1), то функція $y_2(x) = Cy_1(x)$, де C довільна стала, також буде розв'язком ЛОДР (2.1);

г) якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – два частинні розв'язки ЛОДР (2.1), то їх сума $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$ також буде розв'язком ЛОДР (2.1).

Означення 2.1. Система функцій $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ називається ***лінійно залежною*** на проміжку $x \in [a,b]$, якщо існують такі сталі C_i, $i = \overline{1,n}$, не всі рівні нулеві, що лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \equiv 0$ для всіх $x \in [a,b]$. У протилежному випадку (якщо лінійна комбінація рівна нулеві лише за всіх $C_i = 0$, $i = \overline{1,n}$), система $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ називається ***лінійно незалежною***.

Означення 2.2. Детермінант вигляду

$$W[y_1,\ldots,y_n]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x)\\ & \ldots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

називається ***детермінантом Вронського*** (вроньськіаном) для системи функцій $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$.

Означення 2.3. Система n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ ЛОДР (2.1) називається ***фундаментальною системою частинних розв'язків*** (ФСЧР) ЛОДР (2.1).

Наступні властивості ЛОДР (2.1) формулюватимемо у вигляді теорем.

Теорема 2.1 (***про детермінант Вроньського для лінійно залежної системи функцій***). Якщо система функцій $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ є лінійно залежною, то детермінант Вроньського для цієї системи функцій тотожно рівний нулеві: $W[y_1,\ldots,y_n]\equiv 0$.

Теорема 2.2 (***про детермінант Вроньського для лінійно незалежної системи розв'язків ЛОДР***). Якщо розв'язки $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ ЛОДР (2.1) є лінійно незалежними на відрізку $x\in[a,b]$, то детермінант Вроньського $W[y_1,\ldots,y_n]$ не перетворюється в нуль у жодній точці цього відрізка.

Теорема 2.3 (***про існування ФСЧР для ЛОДР***). Для всякого ЛОДР вигляду (2.1) існує фундаментальна система частинних розв'язків.

Теорема 2.4 (***про структуру загального розв'язку ЛОДР* n*-го порядку***). Якщо функції $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ утворюють ФСЧР ЛОДР (2.1), то загальний розв'язок ЛОДР (2.1) рівний лінійній комбінації

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i y_i(x), \tag{2.2}$$

де C_i, $i=\overline{1,n}$ – довільні сталі.

Доведення. Розглянемо задачу Коші для ЛОДР (2.1) із початковими умовами

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\quad x_0\in[a,b]. \tag{2.3}$$

Функція (2.2) є розв'язком ЛОДР (2.1) згідно з властивостями ***в)***, ***г)*** ЛОДР (2.1). Покажемо, що (2.2) є загальним розв'язком ЛОДР (2.1), тобто з (2.2) підбором числових значень сталих C_i, $i=\overline{1,n}$ завжди можна одержати частинний розв'язок ЛОДР (2.1), який справджує початкові умови вигляду (2.3).

Підклавши (2.2) у початкові умови (2.3), отримуємо лінійну неоднорідну алгебраїчну систему для визначення сталих C_i, $i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + \ldots + C_n y_{n0} = y_0, \\ C_1 y'_{10} + \ldots + C_n y'_{n0} = y'_0, \\ \qquad\quad \ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{2.4}$$

де $y_{i0}^{(k)} = y_i^{(k)}(x_0)$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,n-1}$. Оскільки функції $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ утворюють ФСЧР ЛОДР (2.1), то визначник системи (2.4), рівний детермінанту Вроньського $W[y_1,...,y_n]$, відмінний від нуля в точці x_0 згідно з Теоремою 2.2. Отже, сталі C_1, ..., C_n визначаються однозначно із системи (2.4), а тому вираз (2.2) є загальним розв'язком ЛОДР (2.1).

Теорема 2.5 (***про систему* (n+1)*-го частинного розв'язку ЛОДР* n*-го порядку***). Система (n+1)-го частинного розв'язку $\{y_1(x),...,y_n(x), y_{n+1}(x)\}$ ЛОДР (2.1) є лінійно залежною.

Теорема 2.6 (***про ЛОДР зі спільною ФСЧР***). Якщо два ЛОДР вигляду (2.1) мають спільну ФСЧР, то вони є тотожними між собою, тобто всі їх коефіцієнти співпадають. Звідси випливає, що ФСЧР цілком визначає ЛОДР зі старшим коефіцієнтом, рівним 1.

Використовуючи Теореми 2.5 і 2.6, можна завжди побудувати ЛОДР вигляду (2.1), якщо відома його ФСЧР. Справді, нехай $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ – ФСЧР деякого ЛОДР. Тоді згідно з Теоремою 2.6 вона цілком визначає відповідне ЛОДР вигляду (2.1). Нехай $y(x)$ – інший частинний розв'язок цього ж ЛОДР. Тоді згідно з Теоремою 2.5 система функцій $\{y_1(x),...,y_n(x), y(x)\}$ буде лінійно залежною, а отже (Теорема 2.1)

$$W[y_1,...,y_n,y] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n & y \\ y_1' & \dots & y_n' & y' \\ & \dots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2.5)$$

Рівність (2.5) якраз і визначає шукане ЛОДР для заданої ФСЧР. Щоб отримати ЛОДР у вигляді (2.1), розкладемо детермінант Вроньського $W[y_1,...,y_n,y]$ по елементах останнього стовпця і поділимо на коефіцієнт при $y^{(n)}(x)$. Маємо:

$$y^{(n)} - \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ & \dots & \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1,...,y_n]} y^{(n-1)} + \dots + (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ & \dots & \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1,...,y_n]} y = 0 . \qquad (2.6)$$

Зауважимо, що коефіцієнтом при $y^{(n)}(x)$ є вроньськіан $W[y_1,...,y_n]$, який згідно з Теоремою 2.2 не обертається в нуль у жодній точці заданого відрізка. Отже, (2.6) є шукане ЛОДР вигляду (2.1), яке відповідає заданій ФСЧР $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$.

Порівнюючи коефіцієнти ЛОДР (2.1) та (2.6), отримуємо тотожність

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ & \dots & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1,...,y_n]} . \qquad (2.7)$$

Легко бачити, що визначник у чисельнику рівності (2.7) є похідною від вронськіяна, що міститься в знаменнику, оскільки подається у вигляді суми детермінантів, одержаних із $W[y_1,...,y_n]$ диференціюванням одного з його рядків [при цьому (n–1) перших визначників матимуть два однакові рядки, а отже, обертатимуться в нуль, і лише диференціювання n-го рядка дасть ненульовий вираз – а саме чисельник дробу з (2.7)]. Отже, з (2.7) маємо

$$\frac{W'[y_1,...,y_n]}{W[y_1,...,y_n]} = -p_1(x).$$

Зінтегрувавши останнє ДР на проміжку від x_0 (вибрана стала) до x, отримаємо:

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt + \ln C \quad \Rightarrow \quad W = C\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}.$$

Для визначення сталої C покладемо $x = x_0$. Отже, $C = W(x_0)$ і

$$W[y_1,...,y_n] = W(x_0)\cdot \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}. \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) називається ***формулою Остроградського-Ліувілля***. Рівність (2.8) визначає детермінант Вроньського через коефіцієнт при $y^{(n-1)}$ заданого ЛОДР (2.1) із точністю до сталого множника.

2.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку та їх властивості. Теорема про структуру загального розв'язку ЛНДР

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) n-го порядку називається ДР вигляду

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x), \quad x \in [a,b], \qquad (2.9)$$

де $f(x) \neq 0$, $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – деякі неперервні на проміжку $x \in [a,b]$ функції, L – позначення лінійного оператора. При цьому рівняння (2.1) називають ЛОДР, відповідним до ЛНДР (2.9).

Оскільки оператор L лінійний, то для довільних функцій y_1, y_2 з його області визначення мають силу рівності: $L[Cy_1] = CL[y_1]$; $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$. Із цих властивостей випливають деякі властивості ЛНДР (2.1), зокрема:

а) якщо $y_0(x)$ деякий розв'язок ЛНДР (2.1), а $Y(x)$ – будь-який розв'язок відповідного ЛОДР (2.1), то їх сума $y(x) = Y(x) + y_0(x)$ буде розв'язком ЛНДР (2.9). Справді, $L[y] = L[y_0 + Y] = L[y_0] + L[Y] = f(x) + 0 = f(x)$;

б) якщо $f(x)=\sum_{k=1}^{m} f_k(x)$ і для кожного з рівнянь $L[y]=f_k(x)$ знайдені відповідні розв'язки $y_k(x)$, то функція $y(x)=\sum_{k=1}^{m} y_k(x)$ є розв'язком ЛНДР (2.9) (***принцип суперпозиції***). Справді,

$$L[y]=L[y_1+\ldots+y_m]=L[y_1]+\ldots+L[y_m]=f_1(x)+\ldots+f_m(x)=f(x).$$

Теорема 2.7 (***про структуру загального розв'язку ЛНДР*** **n**-***го порядку***). Загальний розв'язок ЛНДР (2.9), де $f(x)$, $p_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ – неперервні на заданому відрізку $x\in[a,b]$ функції, є сумою загального розв'язку $Y(x)$ відповідного ЛОДР (2.1) і будь-якого частинного розв'язку $y_0(x)$ ЛНДР (2.9):

$$y(x)=Y(x)+y_0(x). \tag{2.10}$$

Доведення. Функція (2.10) є розв'язком ЛНДР (2.9) згідно з властивістю ***а)***. Покажемо, що (2.10) є загальним розв'язком ЛНДР (2.9), тобто за будь-яких початкових умов (2.3) із (2.10) завжди можна одержати частинний розв'язок ЛНДР (2.9), який справджує початкові умови (2.3).

Нехай $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ – ФСЧР відповідного до (2.9) ЛОДР (2.1). Тоді згідно з теоремою 2.4 $Y(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, а звідси на підставі (2.10)

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)+y_0(x). \tag{2.11}$$

Підклавши (2.11) у початкові умови (2.3), отримуємо лінійну неоднорідну алгебраїчну систему для визначення невідомих сталих C_i, $i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=y_0-y_0(x_0), \\ C_1y_1'(x_0)+\ldots+C_ny_n'(x_0)=y_0'-y_0'(x_0), \\ \qquad\qquad\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}(x_0), \end{cases} \tag{2.12}$$

визначник якої $W[y_1,\ldots,y_n](x_0)\neq 0$ згідно з Теоремою 1.2. Отже, сталі C_1, ..., C_n визначаються однозначно із системи (2.12), тобто з (2.10) завжди можна отримати частинний розв’язок ЛНДР (2.9), який справджує початкові умови (2.3). Тому (2.10) є загальним розв’язком ЛНДР (2.9).

Теорема 2.8 (***метод варіації сталих для ЛНДР n-го порядку***). Якщо відома ФСЧР $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ ЛОДР (2.1), то загальний розв’язок відповідного ЛНДР (2.9) може бути знайдений за допомогою *n* квадратур.

Доведення. Нехай для ЛОДР (2.1) відома ФСЧР $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$, тоді для цієї системи функцій $W[y_1,...,y_n](x) \neq 0$ у будь-якій точці $x \in [a,b]$, а загальний розв’язок ЛОДР (2.1) рівний $Y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, де C_1, ..., C_n – довільні сталі.

Для побудови розв’язку ЛНДР (2.9) застосуємо ***метод варіації сталих*** (***метод Лаґранжа***) аналогічно до лінійних ДР першого порядку: загальний розв’язок ЛНДР (2.9) знаходимо, поклавши в загальному розв’язку відповідного ЛОДР $C_i = C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ (деякі наразі невідомі функції). Отже,

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x), \tag{2.13}$$

звідки $y'(x) = \sum_{i=1}^{n} [C_i'(x) y_i(x) + C_i(x) y_i'(x)]$. Покладемо в останньому виразі $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) = 0$, тоді $y''(x) = \sum_{i=1}^{n} [C_i'(x) y_i'(x) + C_i(x) y_i''(x)]$. Покладемо $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) = 0$ і так далі, поки нарешті на *n*-му кроці отримаємо $y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} [C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + C_i(x) y_i^{(n)}(x)]$. Для того, щоб функція (2.13) із вибраними таким чином коефіцієнтами $C_i(x)$ була розв’язком ЛНДР (2.9), повинна виконуватися рівність $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x)$. Це випливає з безпосереднього підкладання (2.13) та виразів для похідних із урахуванням додаткових умов у ЛНДР (2.9).

Отже, у підсумку для визначення $C_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ отримуємо лінійну неоднорідну алгебраїчну систему відносно перших похідних шуканих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1^{(s)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(s)}(x)=0, \quad s=\overline{0,n-2}; \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases} \tag{2.14}$$

Система (2.14) називається ***системою Лаґранжа***, а її визначник $W[y_1,\ldots,y_n]\neq 0$ в жодній точці проміжку $x\in[a,b]$. Тому (2.14) має єдиний розв'язок вигляду $C_i'(x)=\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, а отже, власне коефіцієнти $C_i(x)$ знаходяться за допомогою n квадратур (інтегрувань): $C_i(x)=\int\varphi_i(x)dx+\overline{C}_i$, $i=\overline{1,n}$, де $\overline{C}_i$ довільні сталі.

Підклавши знайдені $C_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ у (2.13), одержимо загальний розв'язок ЛНДР (2.9).

2.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера

ЛОДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$L[y]\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0, \quad x\in[a,b], \tag{2.15}$$

де a_1, ..., a_n – задані сталі.

Для інтегрування ЛОДР (2.15) застосуємо ***метод Ейлера***. Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y(x)=\mathrm{e}^{\lambda x} \tag{2.16}$$

(***підстановка Ейлера***), де λ деяка стала. Тоді $y'(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, ..., $y^{(n)}(x)=\lambda^n\,\mathrm{e}^{\lambda x}$. Підклавши (2.16) і вирази для похідних у (2.15), після скорочення на ненульовий множник $\mathrm{e}^{\lambda x}$ одержимо

$$P(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{2.17}$$

Вираз $P(\lambda)$ називається ***характеристичним поліномом***, а рівність (2.17) – ***характеристичним рівнянням*** (ХР) для ЛОДР (2.15). Вигляд загального розв'язку ЛОДР (2.15) визначається коренями ХР (2.17). Тут можливі три випадки.

1. Випадок дійсних різних коренів. Нехай усі корені ХР (2.17) дійсні й різні, тобто $\lambda_i \in R$, $i=\overline{1,n}$, причому $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тоді кожному з коренів λ_i згідно з (2.16) відповідатиме частинний розв'язок $y_i(x)=e^{\lambda_i x}$, а загальний розв'язок ЛОДР (2.15) згідно з Теоремою 2.4 запишеться у вигляді лінійної комбінації

$$y=C_1 e^{\lambda_1 x}+\ldots+C_n e^{\lambda_n x},$$

де C_1, ..., C_n – довільні сталі. Зауважимо, що частинні розв'язки $y_i(x)=e^{\lambda_i x}$, $i=\overline{1,n}$ є лінійно незалежними, оскільки детермінант Вронського для цієї системи функцій

$$W[y_1,\ldots,y_n]=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ & & \ldots & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

(визначник в останній рівності є детермінантом Вандермонда, який, як відомо з курсу алгебри, у випадку всіх різних чисел λ_i не рівний нулеві).

Приклад 2.1. Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння методом Ейлера:

$$y'''-2y''-3y'=0. \tag{2.18}$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.18):

$$\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda \equiv \lambda(\lambda^2-2\lambda-3)=0.$$

Коренями останнього рівняння є $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=3$ – отже, маємо випадок дійсних різних коренів. Згідно з методом Ейлера у цьому випадку кореням характеристичного рівняння відповідають частинні розв'язки ДР (2.18) вигляду

$$\varphi_1(x)=e^{0\cdot x}=1, \quad \varphi_2(x)=e^{-x}, \quad \varphi_3(x)=e^{3x},$$

а загальний розв'язок ДР (2.18) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x),$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Відповідь. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$.

2. Випадок комплексно спряжених коренів. Нехай ХР (2.17) має два комплексно спряжені корені $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Тоді згідно з (2.16) їм відповідатимуть комплексні розв'язки ЛОДР (2.15) вигляду (із застосуванням формули Ейлера)

$$\bar{y}_{1,2}(x) = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x). \tag{2.19}$$

Має силу наступна

Лема. Якщо $f(x) = u(x) + iv(x)$ є комплексним розв'язком ЛОДР (2.15), то дійсна й уявна частини цієї функції також є розв'язками ЛОДР (2.15). Справді, $L[f] = L[u] + iL[v]$, тому з рівності $L[f] = 0$ випливають рівності $L[u] = 0$, $L[v] = 0$.

Використовуючи наведену лему в застосуванні до функцій (2.19), одержимо: парі комплексно спряжених коренів ХР (2.17) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0)$ відповідають два дійсні частинні розв'язки ЛОДР (2.15): $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Зауважимо, що ці частинні розв'язки є лінійно незалежними, оскільки

$$W[y_1, y_2] = e^{2\alpha x} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Приклад 2.2. Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння методом Ейлера:

$$y''' + y = 0. \tag{2.20}$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.20):

$$\lambda^3 + 1 \equiv (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0.$$

Коренями останнього рівняння є $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Згідно з правилами методу Ейлера дійсному однократному кореню $\lambda_1=-1$ відповідає частинний розв'язок ДР (2.20) вигляду $\varphi_1(x)=\mathrm{e}^{-x}$, парі комплексно спряжених коренів $\lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ відповідають два лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (2.20) вигляду

$$\varphi_2(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\quad \varphi_3(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

а загальний розв'язок ДР (2.20) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+C_3\varphi_3(x),$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Відповідь. $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

3. Випадок кратних коренів. Нехай дійсне число λ_0 є коренем ХР (2.17) кратності $k>1$. Тоді характеристичний поліном $P(\lambda)$ подається у вигляді $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k P_{n-k}(\lambda)$, де $P_{n-k}(\lambda)$ деякий поліном від λ степеня $(n-k)$ з коренями, відмінними від λ_0. Тоді з урахуванням ХР (3.3) одержимо:

$$P(\lambda_0)=P'(\lambda_0)=\ldots=P^{(k-1)}(\lambda_0)=0. \qquad (2.21)$$

Розглянемо функцію $y(x)=x^m\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$, де $m<n$ натуральне число. Знайдемо її похідні до n-го порядку включно:

$$y'(x)=\mathrm{e}^{\lambda_0 x}(\lambda_0 x^m+mx^{m-1}),$$

$$y''(x)=\mathrm{e}^{\lambda_0 x}[\lambda_0^2 x^m+2m\lambda_0 x^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}],\ \ldots,$$

$$y^{(m)}(x)=\mathrm{e}^{\lambda_0 x}(\lambda_0^m x^m+m^2\lambda_0^{m-1}x^{m-1}+\ldots+m!),\ \ldots,$$

$$y^{(n)}(x)=\mathrm{e}^{\lambda_0 x}\left(\lambda_0^n x^m+nm\lambda_0^{n-1}x^{m-1}+\ldots+\frac{n!}{(n-m)!}\lambda_0^{n-m}\right).$$

Підклавши знайдені похідні в ЛОДР (2.15), після зведення подібних доданків одержимо:

$$L[y] \equiv \mathrm{e}^{\lambda_0 x}\left(P(\lambda_0)x^m + mP'(\lambda_0)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}P''(\lambda_0)x^{m-2} + \ldots + P^{(m)}(\lambda_0) \right) = 0\,. \tag{2.22}$$

Із урахуванням (2.21) рівність (2.22) виконуватиметься для всіх $m = 0,1,\ldots,k-1$. Тому відповідні функції $y(x) = x^m\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$ будуть розв'язками ЛОДР (2.15).

Отже, якщо дійсне число λ_0 є коренем ХР (2.17) кратності $k > 1$, то йому відповідають k лінійно незалежних ($W[y_1,\ldots,y_k] \neq 0$) частинних розв'язків

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_0 x},\;\; y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda_0 x},\;\; \ldots,\;\; y_k(x) = x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x}.$$

Аналогічно можна показати: якщо кожен із двох комплексно спряжених коренів ХР (2.17) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ має кратність $k > 1$, то цій парі відповідатимуть $2k$ лінійно незалежних частинних розв'язків ЛОДР (2.15)

$$y_{1,m}(x) = x^m\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,,\;\; y_{2,m}(x) = x^m\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,,\;\; m = \overline{0,k-1}.$$

Із розглянутих випадків очевидно, що всім кореням ХР (2.17) загалом відповідають n лінійно незалежних частинних розв'язків, які складають ФСЧР ЛОДР (2.15). Тоді загальний розв'язок ЛОДР (2.15) згідно з Теоремою 2.4 записується у вигляді лінійної комбінації (2.2). Отже, метод Ейлера дає змогу інтегрувати ЛОДР вигляду (2.15) без квадратур.

Приклад 2.3. Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння методом Ейлера:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0\,. \tag{2.23}$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.23):

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 \equiv (\lambda - 1)^3 = 0\,.$$

Останнє рівняння має трикратний дійсний корінь $\lambda_{1,2,3} = 1$. Згідно з методом Ейлера у цьому випадку кореню $\lambda = 1$ відповідають три лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (2.23) вигляду

$$\varphi_1(x) = e^x, \quad \varphi_2(x) = x e^x, \quad \varphi_3(x) = x^2 e^x,$$

а загальний розв'язок ДР (2.23) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x),$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Відповідь. $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$.

Приклад 2.4. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння четвертого порядку

$$y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0 \tag{2.24}$$

за початкових умов

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = -11, \quad y'''(0) = 16. \tag{2.25}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок ДР (2.24) аналогічно до Прикладів 2.1-2.3. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.24):

$$\lambda^4 + 13\lambda^2 + 36 \equiv (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 9) = 0.$$

Останнє рівняння має комплексні корені $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, $\lambda_{3,4} = \pm 3i$. Згідно з правилами методу Ейлера парі комплексно спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ відповідають два лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (2.24) вигляду

$$\varphi_1(x) = \cos 2x, \quad \varphi_2(x) = \sin 2x,$$

іншій парі комплексно спряжених коренів $\lambda_{3,4} = \pm 3i$ – ще два лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (2.24) вигляду

$$\varphi_3(x) = \cos 3x, \quad \varphi_4(x) = \sin 3x,$$

а загальний розв'язок ДР (2.24) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x. \tag{2.26}$$

Виділимо з (2.26) частинний розв'язок, який справджує початкові умови (2.25). Підставивши (2.26) у (2.25), одержимо алгебраїчну систему для визначення невідомих сталих C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &\equiv C_1 + C_3 = 4, \\ y'(0) &\equiv 2C_2 + 3C_4 = -4, \\ y''(0) &\equiv -4C_1 - 9C_3 = -11, \\ y'''(0) &\equiv -8C_2 - 27C_4 = 16, \end{aligned}\right\}$$

звідки $C_1 = 5$, $C_2 = -2$, $C_3 = -1$, $C_4 = 0$. Підставивши знайдені значення сталих в (2.26), одержимо шуканий розв'язок задачі Коші (2.24)-(2.25).

Відповідь. $y = 5\cos 2x - 2\sin 2x - \cos 3x$.

Приклад 2.5. Методом варіації сталих розв'язати лінійне неоднорідне ДР

$$y'' + 9y = 3\csc 3x. \tag{2.27}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного до ДР (2.27) однорідного рівняння

$$y'' + 9y = 0 \tag{2.28}$$

аналогічно до Прикладів 2.1-2.4. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.28):

$$\lambda^2 + 9 = 0.$$

Останнє рівняння має комплексні корені $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Згідно з правилами методу Ейлера цій парі комплексно спряжених коренів відповідають два лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (2.28) вигляду

$$\varphi_1(x) = \cos 3x, \quad \varphi_2(x) = \sin 3x,$$

а загальний розв'язок ДР (2.28) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків:

$$y_{з.о.} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Тоді згідно з алгоритмом методу варіації сталих (Теорема 2.8) загальний розв'язок неоднорідного ДР (2.27) слід шукати у вигляді

$$y = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x, \tag{2.29}$$

де невідомі функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ визначаються із системи Лаґранжа (2.14), тобто у нашому випадку

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0, \\ -3C_1'(x)\sin 3x + 3C_2'(x)\cos 3x = 3\csc 3x \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0, \\ -C_1'(x)\sin 3x + C_2'(x)\cos 3x = \dfrac{1}{\sin 3x}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Детермінант системи (2.30) рівний

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -\sin 3x & \cos 3x \end{vmatrix} = 1,$$

а тоді

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \sin^{-1} 3x & \cos 3x \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = -x + \overline{C}_1,$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -\sin 3x & \sin^{-1} 3x \end{vmatrix} = \operatorname{ctg} 3x \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + \overline{C}_2,$$

де $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ – довільні сталі.

Підставивши знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ у (2.29), одержимо шуканий загальний розв'язок неоднорідного ДР (2.27).

Відповідь. $y = (\overline{C}_1 - x)\cos 3x + \left(\overline{C}_2 + \frac{1}{3}\ln|\sin 3x|\right)\sin 3x$.

Приклад 2.6. Із застосуванням методу Лаґранжа розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y''' - y'' = 6e^{3x} \tag{2.31}$$

за початкових умов

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \tag{2.32}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного до (2.31) однорідного ДР

$$y''' - y'' = 0. \tag{2.33}$$

аналогічно до попередніх прикладів. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.33):

$$\lambda^3 - \lambda^2 \equiv \lambda^2(\lambda - 1) = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_3=1$. Згідно з правилами методу Ейлера двократному дійсному кореню $\lambda=0$ відповідають два лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (2.33) вигляду

$$\varphi_1(x)=1,\quad \varphi_2(x)=x,$$

тоді як однократному дійсному кореню $\lambda_3=1$ відповідає частинний розв'язок ДР (2.33) $\varphi_3(x)=\mathrm{e}^x$. Загальний розв'язок ДР (2.33) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків:

$$y_{з.о.}=C_1+C_2x+C_3\,\mathrm{e}^x. \tag{2.34}$$

Тоді згідно з алгоритмом методу варіації сталих загальний розв'язок неоднорідного ДР (2.5) слід шукати у вигляді

$$y=C_1(x)+C_2(x)\cdot x+C_3(x)\mathrm{e}^x, \tag{2.35}$$

де невідомі функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ визначаються із системи Лаґранжа

$$\begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)\cdot x+C_3'(x)\mathrm{e}^x=0, \\ C_2'(x)+C_3'(x)\mathrm{e}^x=0, \\ C_3'(x)\mathrm{e}^x=6\mathrm{e}^{3x}, \end{cases}$$

звідки послідовно визначаємо

$$C_3'(x)=6\mathrm{e}^{2x}\quad\Rightarrow\quad C_3(x)=3\mathrm{e}^{2x}+\overline{C}_3,$$

$$C_2'(x)=-6\mathrm{e}^{3x}\quad\Rightarrow\quad C_2(x)=-2\mathrm{e}^{3x}+\overline{C}_2,$$

$$C_1'(x)=6(x-1)\mathrm{e}^{3x}\quad\Rightarrow\quad C_1(x)=\frac{6x-8}{3}\mathrm{e}^{3x}+\overline{C}_1,$$

де $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$ – довільні сталі.

Підставивши знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ у (2.35), одержимо загальний розв'язок неоднорідного ДР (2.31)

$$y=\overline{C}_1+\frac{6x-8}{3}\mathrm{e}^{3x}+(\overline{C}_2-2\mathrm{e}^{3x})\cdot x+(\overline{C}_3+3\mathrm{e}^{2x})\cdot\mathrm{e}^x$$

або після спрощення

$$y=\overline{C}_1+\overline{C}_2x+\overline{C}_3\,\mathrm{e}^x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}. \tag{2.36}$$

Виділимо з (2.36) частинний розв'язок, який справджує початкові умови (2.6). Підставивши (2.36) у (2.32), одержимо алгебраїчну систему для визначення невідомих сталих $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$

$$\left.\begin{aligned} &y(0) \equiv \overline{C}_1 + \overline{C}_3 + \frac{1}{3} = 0, \\ &y'(0) \equiv \overline{C}_2 + \overline{C}_3 + 1 = 0, \\ &y''(0) \equiv \overline{C}_3 + 3 = 0, \end{aligned}\right\}$$

звідки $\overline{C}_1 = \frac{8}{3}$, $\overline{C}_2 = 2$, $\overline{C}_3 = -3$. Підставивши знайдені значення сталих у (2.36), одержимо шуканий розв'язок задачі Коші (2.31)-(2.32).

Відповідь. $y = 2x - 3\mathrm{e}^x + \dfrac{8 + \mathrm{e}^{3x}}{3}$.

2.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів

ЛНДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \quad x \in [a,b], \tag{2.37}$$

де a_1, ..., a_n – задані сталі, $f(x) \neq 0$ – відома функція.

Загальний розв'язок $y(x)$ ЛНДР (2.37) згідно з Теоремою 2.8 є сумою загального розв'язку $Y(x)$ відповідного ЛОДР (2.15) і деякого частинного розв'язку $y_0(x)$ ЛНДР (2.37), тобто подається у вигляді (2.10). Як було показано в розділі 2.3, $Y(x)$ у вигляді (2.2) можна побудувати за допомогою методу Ейлера залежно від коренів характеристичного рівняння (2.17).

Розглянемо випадок, коли вільний член $f(x)$ ЛНДР (2.37) має вигляд ***квазіполінома***

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_{s_1}(x)\cos\beta x + Q_{s_2}(x)\sin\beta x\right), \tag{2.38}$$

де $P_{s_1}(x)$, $Q_{s_2}(x)$ – поліноми степенів s_1 і s_2 відповідно; α, β – відомі дійсні числа.

Тоді для відшукання частинного розв'язку $y_0(x)$ ЛНДР (2.37) застосовний штучний метод, який має назву ***методу невизначених коефіцієнтів*** і дає змогу розв'язати ЛНДР (2.37) без квадратур.

Згідно з цим методом частинний розв'язок $y_0(x)$ ЛНДР (2.37) шукаємо у вигляді подібного до (2.38) квазіполінома

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\overline{P}_s(x)\cos\beta x + \overline{Q}_s(x)\sin\beta x\right)\cdot x^m, \tag{2.39}$$

де $s = \max\{s_1, s_2\}$, а число m рівне кратності кореня ХР (2.17) $\gamma = \alpha + i\beta$ (якщо γ не є коренем ХР, то $m = 0$). Останнє значення називають ***контрольним числом*** для квазіполінома (2.38).

Поліноми $\overline{P}_s(x)$, $\overline{Q}_s(x)$ записуємо з невизначеними коефіцієнтами, які як правило позначаються літерами. Числові значення цих коефіцієнтів знаходимо шляхом безпосередньої підстановки квазіполінома (2.39) у ЛНДР (2.37). Якщо загальний вигляд частинного розв'язку виписаний вірно, то з отриманої після підстановки рівності ці коефіцієнти повинні визначатися однозначно.

Підставивши знайдені числові значення коефіцієнтів у (2.39), одержимо шуканий частинний розв'язок $y_0(x)$ ЛНДР (2.37). Тоді загальний розв'язок $y(x)$ ЛНДР (2.37) записується згідно з формулою (2.10).

Зауваження 2.1. Якщо $f(x)$ складається з кількох доданків-квазіполіномів вигляду (2.38), яким відповідають різні контрольні числа, то для кожного з цих доданків частинний розв'язок записується окремо згідно з формулою (2.39), після чого $y_0(x)$ шукається методом невизначених коефіцієнтів у вигляді суми всіх записаних частинних розв'язків.

Зауваження 2.2. Якщо вільний член ЛНДР (2.37) не має спеціального вигляду (2.38), то загальний розв'язок такого рівняння знаходять за допомогою методу Лаґранжа аналогічно до ЛНДР зі змінними коефіцієнтами згідно з алгоритмом, викладеним у Теоремі 2.8.

Приклад 2.7. Побудувати загальний розв'язок рівняння (2.31) із застосуванням методу невизначених коефіцієнтів.

Розв'язання. Вільний член рівняння (2.31) має вигляд квазіполінома, тому до даного рівняння застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Згідно з алгоритмом цього методу загальний розв'язок ДР (2.31) шукаємо у вигляді (2.10): $y = Y(x) + y_0(x)$, де $Y(x)$ – загальний розв'язок відповідного до (2.31) однорідного ДР (2.33), а $y_0(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного ДР (2.31).

Зауважимо, що знаходження $Y(x)$ викладене у Прикладі 2.2, і ця складова шуканого розв'язку (2.10) дається формулою (2.8). Знайдемо другу складову $y_0(x)$, виписавши спочатку її загальний вигляд відповідно до правил методу невизначених коефіцієнтів: якщо вільний член рівняння має вигляд квазіполінома (2.38)

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_{s_1}(x)\cos\beta x + Q_{s_2}(x)\sin\beta x\right),$$

де $P_{s_1}(x)$, $Q_{s_2}(x)$ – поліноми степенів s_1 і s_2 відповідно; α, β – відомі дійсні числа, то частинний розв'язок $y_0(x)$ неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді подібного до (2.38) квазіполінома (2.39):

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\overline{P}_s(x)\cos\beta x + \overline{Q}_s(x)\sin\beta x\right)\cdot x^m,$$

де $s = \max\{s_1, s_2\}$, а число m рівне кратності кореня характеристичного рівняння (контрольного числа) $\gamma = \alpha + i\beta$.

У нашому випадку $f(x) = 6\mathrm{e}^{3x}$. Порівнюючи з (2.38), визначаємо контрольне число:

$$\alpha = 3, \quad \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \alpha + i\beta = 3.$$

Це число не є коренем характеристичного рівняння (див. Приклад 2.2), тому його кратність $m = 0$. Числовий коефіцієнт при експоненті є поліномом нульового степеня, тому $s = 0$.

Виходячи зі знайдених чисел, виписуємо частинний розв'язок на підставі формули (2.39):

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{3x}[\overline{P}_0(x)\cos(0\cdot x) + \overline{Q}_0(x)\sin(0\cdot x)]\cdot x^0 = \mathrm{e}^{3x}\,\overline{P}_0(x) = A\mathrm{e}^{3x},$$

де A – невизначений коефіцієнт, числове значення якого належить знайти із неоднорідного рівняння (2.31) безпосередньою підстановкою.

Отже, маємо: $y_0''(x)=9Ae^{3x}$, $y_0'''(x)=27Ae^{3x}$. Підставивши у (2.31), одержимо

$$27Ae^{3x}-9Ae^{3x}=6e^{3x},$$

звідки $A=\frac{1}{3}$ і $y_0(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$. Тоді згідно з (2.10) із урахуванням (2.34)

$$y=C_1+C_2x+C_3e^x+\frac{1}{3}e^{3x},$$

що цілком узгоджується з формулою (2.36), отриманою із застосуванням методу Лаґранжа.

Відповідь. $y=C_1+C_2x+C_3e^x+\frac{1}{3}e^{3x}$.

Приклад 2.8. Записати загальний розв'язок рівняння

$$y^{(6)}-5y^{(4)}+4y''=5x^2(2-e^{-2x})-1+\cos 6x+3x(e^{4x}-\sin x)-9\cos x+7e^x \quad (2.40)$$

із невизначеними коефіцієнтами (числових значень коефіцієнтів не знаходити).

Розв'язання. Вільний член рівняння (2.40) має вигляд суми квазіполіномів, тому до даного рівняння застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Згідно з алгоритмом цього методу загальний розв'язок ДР (2.40) шукаємо у вигляді (2.10), де $Y(x)$ – загальний розв'язок відповідного до (2.41) однорідного ДР

$$y^{(6)}-5y^{(4)}+4y''=0, \quad (2.41)$$

а $y_0(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного ДР (2.40).

Знайдемо спочатку $Y(x)$. Для цього запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.41):

$$\lambda^6-5\lambda^4+4\lambda^2\equiv\lambda^2(\lambda^4-5\lambda^2+4)=0,$$

звідки $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_{3,4}=\pm1$, $\lambda_{5,6}=\pm2$. Згідно з правилами методу Ейлера цим кореням відповідають частинні розв'язки

$$\varphi_1(x)=1,\quad \varphi_2(x)=x,\quad \varphi_3(x)=e^x,\quad \varphi_4(x)=e^{-x},\quad \varphi_5(x)=e^{2x},\quad \varphi_6(x)=e^{-2x}.$$

Тоді загальний розв'язок ДР (2.41) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків:

$$Y(x)=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4e^{-x}+C_5e^{2x}+C_6e^{-2x}. \quad (2.42)$$

Випишемо загальний вигляд частинного розв'язку $y_0(x)$ відповідно до правил методу невизначених коефіцієнтів. Для цього виділимо з вільного члена рівняння (2.40) доданки, яким відповідають різні контрольні числа – у цьому можна переконатися, порівнюючи кожен доданок із загальним виглядом (2.38), – і тоді $y_0(x)$ буде сумою частинних розв'язків, побудованих за формулою (2.39) для кожного з квазіполіномів, утвореного з доданків, яким відповідає однакове контрольне число. Таких квазіполіномів отримуємо шість:

$$f_1(x)=10x^2-1,\quad f_2(x)=-5x^2\,\mathrm{e}^{-2x},\quad f_3(x)=\cos 6x,$$

$$f_4(t)=3x\,\mathrm{e}^{4x},\quad f_5(x)=-3x\sin x-9\cos x,\quad f_6(x)=7\,\mathrm{e}^{x}\ .$$

Визначимо вигляд частинного розв'язку для кожного з цих квазіполіномів.

1. Для функції $f_1(x)$ маємо: $\alpha=0$ (числовий коефіцієнт у степені експоненти), $\beta=0$ (числовий коефіцієнт в аргументі косинуса чи синуса), тоді контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=0$. Це число є двократним коренем характеристичного рівняння (маємо ***резонансний випадок***), тому $m=2$. Останнє необхідне для застосування формули (2.39) число $s=2$ (маємо поліном другого степеня). Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (2.39), одержимо загальний вигляд першої складової частинного розв'язку

$$y_{01}(x)=\overline{P}_2(x)\cdot x^2=Ax^4+Bx^3+Cx^2.$$

2. Для функції $f_2(x)$ маємо: $\alpha=-2$, $\beta=0$, тоді контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=-2$. Це число є однократним коренем характеристичного рівняння, тому $m=1$. Коефіцієнт при експоненті є поліномом другого степеня, тому $s=2$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (2.39), одержимо загальний вигляд другої складової частинного розв'язку

$$y_{02}(x)=\overline{P}_2(x)\mathrm{e}^{-2x}\cdot x=(Dx^3+Ex^2+Fx)\mathrm{e}^{-2x}.$$

3. Для функції $f_3(x)$ маємо: $\alpha=0$, $\beta=6$, і контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=6i$. Це число не є коренем характеристичного рівняння (***нерезонансний випадок***), тому $m=0$. Також очевидно $s=0$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (2.39), одержимо загальний вигляд третьої складової частинного розв’язку

$$y_{03}(x)=\overline{P}_0(x)\cos 6x+\overline{Q}_0(x)\sin 6x=G\cos 6x+H\sin 6x.$$

4. Для функції $f_4(x)$ маємо: $\alpha=4$, $\beta=0$, і контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=4$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m=0$. Також очевидно $s=1$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (2.39), одержимо загальний вигляд четвертої складової частинного розв’язку

$$y_{04}(x)=\overline{P}_1(x)\mathrm{e}^{4x}=(Ix+J)\mathrm{e}^{4x}.$$

5. Для функції $f_5(x)$ маємо: $\alpha=0$, $\beta=1$, і контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=i$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m=0$. При синусі маємо поліном першого степеня, тому $s=1$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (2.39), одержимо загальний вигляд п’ятої складової частинного розв’язку

$$y_{05}(x)=\overline{P}_1(x)\cos x+\overline{Q}_1(x)\sin 6x=(Kx+L)\cos x+(Mx+N)\sin x.$$

6. Для функції $f_6(x)$ маємо: $\alpha=1$, $\beta=0$, тоді контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=1$. Це число є однократним коренем характеристичного рівняння, тому $m=1$. Коефіцієнт при експоненті є поліномом нульового степеня, тому $s=0$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (2.39), одержимо загальний вигляд шостої складової частинного розв’язку

$$y_{06}(x)=\overline{P}_0(x)\mathrm{e}^{x}\cdot x=Ox\mathrm{e}^{x}.$$

Шуканий частинний розв’язок $y_0(x)$ буде сумою шести його складових. Позначені літерами коефіцієнти теоретично можна знайти безпосередньою підстановкою $y_0(x)$ у рівняння (2.40), однак у завданні знаходження їх числових значень не вимагається.

Згідно з формулою (2.10) загальний розв’язок неоднорідного рівняння (2.40) рівний сумі побудованого частинного розв’язку $y_0(x)$ і загального розв’язку (2.42) відповідного однорідного рівняння.

Відповідь. $y=C_1+C_2x+C_3\mathrm{e}^{x}+C_4\mathrm{e}^{-x}+C_5\mathrm{e}^{2x}+C_6\mathrm{e}^{-2x}+Ax^4+Bx^3+Cx^2+$

$$+(Dx^3+Ex^2+Fx)\mathrm{e}^{-2x}+G\cos 6x+H\sin 6x+(Ix+J)\mathrm{e}^{4x}+$$

$$+(Kx+L)\cos x+(Mx+N)\sin x+Ox\,\mathrm{e}^{x}.$$

Приклад 2.9. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$y''-9y=\mathrm{e}^{3x}\cos x \tag{2.43}$$

за початкових умов

$$y(0)=-\frac{1}{37},\quad y'(0)=\frac{3}{37}. \tag{2.44}$$

Розв'язання. Вільний член рівняння (2.43) має вигляд квазіполінома, тому до даного рівняння застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Згідно з алгоритмом цього методу загальний розв'язок ДР (2.43) шукаємо у вигляді (2.10), де $Y(x)$ – загальний розв'язок відповідного до (2.43) однорідного ДР

$$y''-9y=0, \tag{2.45}$$

а $y_0(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного ДР (2.43).

Знайдемо спочатку $Y(x)$. Для цього запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.45):

$$\lambda^2-9=0,$$

звідки $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=3$. Згідно з правилами методу Ейлера цим кореням відповідають частинні розв'язки

$$\varphi_1(x)=\mathrm{e}^{-3x},\quad \varphi_2(x)=\mathrm{e}^{3x}.$$

Тоді загальний розв'язок ДР (2.45) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків:

$$Y(x)=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^{3x}. \tag{2.46}$$

Знайдемо частинний розв'язок $y_0(x)$, виписавши спочатку його загальний вигляд відповідно до правил методу невизначених коефіцієнтів.

Для вільного члена $f(x)=\mathrm{e}^{3x}\cos x$ маємо: $\alpha=3$, $\beta=1$, і контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=3+i$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m=0$. Також очевидно $s=0$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (2.39), одержимо загальний вигляд частинного розв'язку:

$$y_0(x)=\mathrm{e}^{3x}[\overline{P}_0(x)\cos x+\overline{Q}_0(x)\sin x]=\mathrm{e}^{3x}(A\cos x+B\sin x), \qquad (2.47)$$

де A, B – невизначені коефіцієнти, числові значення яких належить знайти шляхом безпосередньої підстановки (2.47) у неоднорідне рівняння (2.43). Маємо:

$$y_0'(x)=\mathrm{e}^{3x}(3A\cos x+3B\sin x-A\sin x+B\cos x),$$

$$y_0''(x)=\mathrm{e}^{3x}(8A\cos x+8B\sin x-6A\sin x+6B\cos x).$$

Підставивши у (2.43), одержимо

$$\mathrm{e}^{3x}(8A\cos x+8B\sin x-6A\sin x+6B\cos x)-9\mathrm{e}^{3x}(A\cos x+B\sin x)=\mathrm{e}^{3x}\cos x,$$

або після спрощення

$$-A\cos x-B\sin x-6A\sin x+6B\cos x=\cos x.$$

Прирівнюючи в останній рівновті коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, одержимо систему для визначення A і B:

$$\begin{cases}-A+6B=1,\\ -6A-B=0,\end{cases}$$

звідки $A=-\frac{1}{37}$, $B=\frac{6}{37}$. Тоді згідно з (2.10) із урахуванням (2.46) і (2.47) загальний розв'язок ДР (2.43) запишеться у вигляді

$$y=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x-\frac{1}{37}\cos x\right). \qquad (2.48)$$

Виділимо з (2.48) частинний розв'язок, який справджує початкові умови (2.44). Підставивши (2.48) у (2.44), одержимо алгебраїчну систему для визначення невідомих сталих C_1, C_2

$$\left.\begin{aligned}y(0)&\equiv C_1+C_2-\frac{1}{37}=-\frac{1}{37},\\ y'(0)&\equiv -3C_1+3C_2+\frac{3}{37}=\frac{3}{37},\end{aligned}\right\}$$

звідки $C_1=C_2=0$. Підставивши знайдені значення сталих у (2.48), одержимо шуканий розв'язок задачі Коші (2.43)-(2.44).

Відповідь. $y=\mathrm{e}^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x-\frac{1}{37}\cos x\right)$.

2.5. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку, що зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Рівняння Ейлера має вигляд

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad x \in [a,b], \tag{2.49}$$

де a_1, ..., a_n – задані сталі.

ДР (2.49) є лінійним неоднорідним [при $f(x) \equiv 0$ – однорідним] рівнянням n-го порядку зі змінними коефіцієнтами. Воно зводиться до лінійного ДР зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної $x = \mathrm{e}^t$, $t = \ln x$, $x > 0$ (якщо $x < 0$, то заміна $x = e^{-t}$) . Справді, тоді маємо

$$y'(x) = \mathrm{e}^{-t} y'(t), \quad y''(x) = \mathrm{e}^{-2t}[y''(t) - y'(t)], \quad y'''(x) = \mathrm{e}^{-3t}[y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)]$$

тощо. Очевидно, що після підстановки знайдених похідних у ДР (2.49) коефіцієнти x^k, $k = \overline{1,n}$ скоротяться, тому одержимо лінійне ДР зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y(t) = f(\mathrm{e}^t), \tag{2.50}$$

де всі похідні беруться вже за новою незалежною змінною t.

Іноді (особливо у випадку однорідного рівняння) для інтегрування ДР (2.49) зручно ввести підстановку $y = x^\lambda$, де λ деяка невідома стала. Тоді після підкладання в ДР (2.49) для визначення λ одержимо алгебраїчне рівняння

$$\begin{gathered} \lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1) + \ldots + a_1\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+2) + \ldots + \\ + a_{n-2}\lambda(\lambda-1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \end{gathered} \tag{2.51}$$

Можна показати, що рівняння (2.51) буде характеристичним для ДР (2.50). Нехай λ_1, ..., λ_n – корені рівняння (2.51), а $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$ – відповідні частинні розв'язки ЛОДР

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y(t) = 0. \tag{2.52}$$

Тоді загальний розв'язок ДР (2.52) $y(t) = C_1 y_1(t) + \ldots + C_n y_n(t)$. Частинний розв'язок ЛНДР (2.50) можна знайти методом невизначених коефіцієнтів або методом Лаґранжа. Із загального розв'язку ЛНДР (2.50) заміною $t = \ln x$ одержуємо загальний розв'язок рівняння Ейлера (2.49).

Приклад 2.10. Розв’язати рівняння Ейлера

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x - 1. \qquad (2.53)$$

Розв’язання. Зведемо рівняння Ейлера (2.53) до лінійного ДР зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної $x = \mathrm{e}^t$, $t = \ln x$. Тоді

$$y'(x) = \mathrm{e}^{-t}\, y'(t), \quad y''(x) = \mathrm{e}^{-2t}[y''(t) - y'(t)],$$

і після підстановки в (2.53) одержимо

$$\mathrm{e}^{2t} \cdot \mathrm{e}^{-2t}[y''(t) - y'(t)] - 2\mathrm{e}^t \cdot \mathrm{e}^{-t}\, y'(t) + 2y(t) = 4\mathrm{e}^t - 1,$$

або після спрощення

$$y'' - 3y' + 2y(t) = 4\mathrm{e}^t - 1. \qquad (2.54)$$

Вільний член рівняння (2.54) має вигляд суми квазіполіномів, тому до даного рівняння застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Маємо:

$$y = Y(t) + y_0(t), \qquad (2.55)$$

де $Y(t)$ – загальний розв’язок відповідного до (2.54) однорідного ДР

$$y'' - 3y' + 2y(t) = 0, \qquad (2.56)$$

а $y_0(t)$ – деякий частинний розв’язок неоднорідного ДР (2.54).

Знайдемо спочатку $Y(t)$. Для цього запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.56):

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Згідно з правилами методу Ейлера цим кореням відповідають частинні розв’язки

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^t, \quad \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

Тоді загальний розв’язок ДР (2.56) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв’язків:

$$Y(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{2t}. \qquad (2.57)$$

Знайдемо частинний розв’язок $y_0(t)$, виписавши спочатку його загальний вигляд відповідно до правил методу невизначених коефіцієнтів. Для цього розглянемо окремо кожен із доданків вільного члена рівняння (2.54), оскільки їм відповідають різні контрольні числа. Маємо два квазіполіноми:

$$f_1(t)=4e^t, \quad f_2(t)=-1,$$

Визначимо вигляд частинного розв'язку для кожного з цих квазіполіномів.

1. Для функції $f_1(t)$ маємо: $\alpha=1$, $\beta=0$, тоді контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=1$. Це число є однократним коренем характеристичного рівняння, тому $m=1$. Також очевидно $s=0$. Тоді з урахуванням формули (2.39) одержимо загальний вигляд першої складової частинного розв'язку

$$y_{01}(t)=\overline{P}_0(t)e^t\cdot t=At\,e^t.$$

2. Для функції $f_2(t)$ маємо: $\alpha=0$, $\beta=0$, тоді контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=0$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m=0$. Також очевидно $s=0$. Тоді з урахуванням формули (2.39) одержимо загальний вигляд другої складової частинного розв'язку

$$y_{02}(t)=\overline{P}_0(t)=B.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$y_0(t)=At\,e^t+B, \tag{2.58}$$

де A, B – невизначені коефіцієнти, числові значення яких належить знайти шляхом безпосередньої підстановки (2.58) у неоднорідне рівняння (2.54). Маємо:

$$y_0'(t)=e^t(At+A), \quad y_0''(x)=e^t(At+2A).$$

Підставивши у (2.54), одержимо

$$e^t(At+2A)-3e^t(At+A)+2(At\,e^t+B)=4e^t-1,$$

або після спрощення

$$-Ae^t+2B=4e^t-1.$$

звідки очевидно $A=-4$, $B=-\frac{1}{2}$. Тоді згідно з (2.55) із урахуванням (2.57) і (2.58) загальний розв'язок ДР (2.54) запишеться у вигляді

$$y=C_1e^t+C_2e^{2t}-4t\,e^t-\frac{1}{2}. \tag{2.59}$$

Ввівши в (2.59) обернену підстановку незалежної змінної $t=\ln x$, одержимо шуканий загальний розв'язок рівняння Ейлера (2.53).

Відповідь. $y = C_1 x + C_2 x^2 - 4x\ln x - \dfrac{1}{2}$.

Рівняння Лежандра є ДР типу Ейлера і має вигляд

$$(\alpha x+\beta)^n y^{(n)} + a_1(\alpha x+\beta)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(\alpha x+\beta)y' + a_n y = f(x),\ x\in[a,b], \quad (2.60)$$

де α, β – задані ненульові сталі. Очевидно, що при $\alpha = 0$ (2.60) буде лінійним ДР зі сталими коефіцієнтами, а при $\beta = 0$ стане рівнянням Ейлера. Якщо ж $\alpha\beta \neq 0$, то (2.60) можна звести до рівняння Ейлера заміною незалежної змінної $\xi = \alpha x + \beta$; тоді $y'(x) = \alpha y'(\xi)$, ..., $y^{(n)}(x) = \alpha^n y^{(n)}(\xi)$, і з (2.60) одержимо рівняння Ейлера вигляду

$$\alpha^n \xi^n y^{(n)} + a_1 \alpha^{n-1}\xi^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\alpha\xi y' + a_n y(\xi) = f\left(\frac{\xi-\beta}{\alpha}\right).$$

Ураховуючи наведені вище способи інтегрування ДР (2.49), можна і не зводити (2.60) попередньо до рівняння Ейлера, а одразу вводити підстановки: незалежної змінної $\alpha x + \beta = \mathrm{e}^t$ або залежної змінної $y = (\alpha x+\beta)^\lambda$ і далі розв'язувати отримане лінійне ДР зі сталими коефіцієнтами аналогічно до ДР (2.49).

Приклад 2.11. Розв'язати рівняння Лежандра

$$(3x-1)^2 y'' + 3\cdot(3x-1)y' + 9y = 6x - 2. \quad (2.61)$$

Розв'язання. Зведемо рівняння Лежандра (2.61) до лінійного ДР зі сталими коефіцієнтами заміною $3x - 1 = \mathrm{e}^t$, $t = \ln(3x-1)$. Тоді

$$y'(x) = 3\mathrm{e}^{-t}\, y'(t),\quad y''(x) = 9\mathrm{e}^{-2t}[y''(t) - y'(t)],$$

і після підстановки в (2.61) одержимо

$$\mathrm{e}^{2t}\cdot 9\mathrm{e}^{-2t}[y''(t)-y'(t)] + 3\mathrm{e}^{t}\cdot 3\mathrm{e}^{-t}\, y'(t) + 9y(t) = 2t,$$

або після спрощення

$$y'' + y(t) = \frac{2t}{9}. \quad (2.62)$$

Вільний член рівняння (2.62) має вигляд квазіполінома, тому до даного рівняння застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Згідно з алгоритмом цього методу загальний розв'язок ДР (2.62) шукаємо у вигляді (2.55), де $Y(t)$ – загальний розв'язок відповідного до (2.62) однорідного ДР

$$y'' + y(t) = 0, \qquad (2.63)$$

а $y_0(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного ДР (2.62).

Знайдемо спочатку $Y(t)$. Для цього запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.63):

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2} = \pm i$. Згідно з правилами методу Ейлера цим кореням відповідають частинні розв'язки

$$\varphi_1(t) = \cos t, \quad \varphi_2(t) = \sin t.$$

Тоді загальний розв'язок ДР (2.63) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків:

$$Y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t. \qquad (2.64)$$

Знайдемо частинний розв'язок $y_0(t)$, виписавши спочатку його загальний вигляд відповідно до правил методу невизначених коефіцієнтів. Для вільного члена ДР (2.62) визначаємо: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, тоді контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = 0$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m = 0$. Також очевидно $s = 1$. Тоді з урахуванням формули (2.39) одержимо загальний вигляд частинного розв'язку

$$y_0(t) = \overline{P}_1(t) = At + B, \qquad (2.65)$$

де A, B – невизначені коефіцієнти, числові значення яких належить знайти шляхом безпосередньої підстановки (2.65) у неоднорідне рівняння (2.62). Маємо:

$$y_0'(t) = A, \quad y_0''(t) = 0.$$

Підставивши у (2.62), одержимо

$$At + B = \frac{2t}{9},$$

звідки очевидно $A = \frac{2}{9}$, $B = 0$. Тоді згідно з (2.55) із урахуванням (2.64) і (2.65) загальний розв'язок ДР (2.62) запишеться у вигляді

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{2t}{9}. \qquad (2.66)$$

Ввівши в (2.66) обернену підстановку незалежної змінної $t = \ln(3x-1)$, одержимо шуканий загальний розв’язок рівняння Лежандра (2.61).

Відповідь. $y = C_1 \cos \ln(3x-1) + C_2 \sin \ln(3x-1) + \frac{2}{9} \ln(3x-1)$.

Завдання для індивідуальної роботи №5

Постановка завдань:

1. Розв’язати лінійне однорідне диференціальне рівняння методом Ейлера.

2. Розв’язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами методом варіації сталих.

3. Записати вигляд загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння з застосуванням методу невизначених коефіцієнтів (числові значення коефіцієнтів не знаходити).

4. Знайти розв’язок задачі Коші.

5. Розв’язати рівняння Ейлера чи Лежандра.

Варіант 1

1. $y^{(4)} + 64y = 0$.

2. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

3. $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x + x\cos x$.

4. $y'' - 2y' + y = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$.

5. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$.

Варіант 2

1. $y''' - 8y = 0$.

2. $y'' - y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$.

3. $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{ch} x \cdot \sin x$.

4. $y'' + y = 4\mathrm{e}^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

5. $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$.

Варіант 3

1. $4y'' + 4y' + y = 0$.

2. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

3. $y'' - 8y' + 20y = 5x\mathrm{e}^{4x} \sin 2x$.

4. $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

5. $x^3 y''' + xy' - y = 0$.

Варіант 4

1. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$.

2. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^2 x\sqrt{\sin x \cos x}}$.

3. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\cos 5x$.

4. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

5. $x^2 y''' - 2y' = 0$.

Варіант 5

1. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

2. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$.

3. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x$.

4. $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

5. $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$.

Варіант 6

1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

2. $y'' + y = \mathrm{tg}\, x$.

3. $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin 2x$.

4. $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$.

5. $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$.

Варіант 7

1. $y''' - y'' - y' + y = 0$.

2. $y'' + y = \dfrac{(2 - \cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x}$.

3. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3x\sin x)$.

4. $y^{(4)} + y'' = 2\cos x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = 0$.

5. $x^3 y'' - 2xy = 6\ln x$.

Варіант 8

1. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$.

2. $y'' - y = \dfrac{x^2 - 2}{x^3}$.

3. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$.

4. $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

5. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

Варіант 9

1. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$.

2. $y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x}(\cos^2 x + \mathrm{tg}\, x)$.

3. $y'' + 2y' + y = x(\mathrm{e}^{-x} - \cos x)$.

4. $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

5. $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$.

Варіант 10

1. $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$.

2. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^x}$.

3. $y'' + 4y' + 3y = \mathrm{ch}\, x$.

4. $4y'' - 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

5. $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$.

Варіант 11

1. $y'' - 7y' + 10y = 0$.

2. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

3. $y'' - 6y' + 13y = x^2 \mathrm{e}^{3x} - 3\cos 2x$.

4. $y'' - 4y = e^{2x}(11\cos x - 7\sin x)$, $y(0) = y'(0) = 1$.

5. $x^2 y'' + 3xy' + 2y = x^3$.

Варіант 12

1. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$.

2. $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,x$.

3. $y'' - 9y = e^{-3x}(x^2 + \sin 3x)$.

4. $y'' - 9y' + 20y = e^{6x}$, $y(0) = y'(0) = 1$.

5. $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4$.

Варіант 13

1. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$.

2. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

3. $y^{(4)} + y'' = 7x - 3\cos x$.

4. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 1$.

5. $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$.

Варіант 14

1. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$.

2. $y'' + y = 2\sec^3 x$.

3. $y'' + 4y = \cos x \cos 3x$.

4. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

5. $xy'' + y' = 0$.

Варіант 15

1. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$.

2. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^{x}}$.

3. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$.

4. $y'' + y = 4e^{x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

5. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$.

Варіант 16

1. $y''' + 27y = 0$.

2. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

3. $y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^{2x}\sin^2 x$.

4. $y'' - 2y' = 2\mathrm{e}^x$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

5. $x^3y''' - xy' - 3y = x^2$.

Варіант 17

1. $y^{(4)} - 8y' = 0$.

2. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$.

3. $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}\cos^2 x$.

4. $y'' + y = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 9$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

5. $x^3y''' + 8x^2y'' + 12xy' = \ln x$.

Варіант 18

1. $y''' + 27y = 0$.

2. $y'' + \dfrac{y}{\pi^2} = \dfrac{1}{\pi^2 \cos\frac{x}{\pi}}$.

3. $y'' - 2y' + 2y = (x + \mathrm{e}^x)\sin x$.

4. $y'' - y = 2x$, $y(1) = -2$, $y'(1) = -1$.

5. $x^4y^{(4)} + 10y = 0$.

Варіант 19

1. $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$.

2. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$.

3. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin x \cos 2x$.

4. $y'' + y = 1,\ y(\pi) = -1,\ y'(\pi) = 0$.

5. $(x+1)^2 y'' + 3(x+1)y' + y = 0$.

Варіант 20

1. $y^{(4)} + 9y'' = 0$.

2. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

3. $y'' - y = 4\operatorname{sh} x$.

4. $y'' - y = x^2 + 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

5. $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$.

Варіант 21

1. $y^{(4)} + 5y'' + 6y = 0$.

2. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$.

3. $y'' + 4y = \operatorname{sh} x \sin 2x$.

4. $y'' - 3y' + 2y = x^3,\ y(0) = y'(0) = 0$.

5. $(x+2)^2 y'' - 4(x+2)y' + 6y = 0$.

Варіант 22

1. $y^{(6)} - y = 0$.

2. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x$.

3. $y'' + 6y' + 10y = 3x\mathrm{e}^{-3x} - 2\mathrm{e}^{3x} \cos x$.

4. $y'' - 4y' + 4y = x\mathrm{e}^{x},\ y(0) = y'(0) = 0$.

5. $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$.

Варіант 23

1. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y''' = 0$.

2. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + \mathrm{e}^{-2x}}$.

3. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2$.

4. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. $2(2x+1)^2 y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$.

Варіант 24

1. $y^{(6)} + 3y^{(4)} = 0$.

2. $y'' + 4y = \sin 2x$.

3. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + 2e^{4x}\sin x$.

4. $y''' - 4y' = x^2$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

5. $(2x+3)^3 y'' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$.

Варіант 25

1. $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 13y^{(4)} = 0$.

2. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = \cos x$.

3. $y''' - 2y' + 4y = e^{x}\cos x + \sin 2x + x^2$.

4. $y'' + 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

5. $(x+1)^3 y''' + 9(x+1)^2 y'' + 4(x+1)y' - 4y = 0$.

§ 3. Системи звичайних диференціальних рівнянь

3.1. Основні поняття та означення

Позначимо незалежну змінну через t, а через $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_m(t)$ – деякі невідомі функції цієї змінної.

Означення 3.1. Сукупність співвідношень вигляду

$$F_i[t, x_1(t), \ldots, x_1^{(q_1)}(t), \ldots, x_m(t), \ldots, x_m^{(q_m)}(t)] = 0, \quad q_i \in \mathrm{N}, \quad i = \overline{1, m} \tag{3.1}$$

називається ***системою диференціальних рівнянь*** (СДР).

Означення 3.2. ***Порядком*** СДР (3.1) називається число n, рівне сумі порядків старших похідних функцій $x_1(t)$, ..., $x_m(t)$ з тих, які входять у співвідношення (3.1):

$$n = \sum_{i=1}^{m} q_i .$$

Означення 3.3. Система функцій $x_1(t)$, ..., $x_m(t)$ називається ***розв'язком*** СДР (3.1) на проміжку $t \in [\tau_0, \tau_1]$, якщо

а) функції $x_1(t)$, ..., $x_m(t)$ мають похідні до порядків q_1, ..., q_m відповідно на проміжку $t \in [\tau_0, \tau_1]$;

б) при $t \in [\tau_0, \tau_1]$ точка $M[t, x_1(t), \ldots, x_1^{(q_1)}(t), \ldots, x_m(t), \ldots, x_m^{(q_m)}(t)]$ належить області визначення $\mathrm{D} \subset \mathrm{R}^{n+m+1}$ функцій F_i;

в) для довільного значення $t_0 \in [\tau_0, \tau_1]$

$$F_i[t_0, x_1(t_0), \ldots, x_1^{(q_1)}(t_0), \ldots, x_m(t_0), \ldots, x_m^{(q_m)}(t_0)] = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Означення 3.4. СДР, розв'язана відносно старших похідних шуканих функцій $x_1(t)$, ..., $x_m(t)$, називається ***канонічною*** і записується як

$$x_i^{(q_i)} = \Phi_i[t, x_1(t), \ldots, x_1^{(q_1-1)}(t), \ldots, x_m(t), \ldots, x_m^{(q_m-1)}(t)], \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.2}$$

Канонічну СДР вигляду (3.2) із m рівнянь вищих порядків завжди можна замінити еквівалентною їй СДР $n = \sum_{i=1}^{m} q_i$ рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних усіх n шуканих функцій:

$$\dot{y}_i \equiv \frac{dy_i}{dt} = f_i[t, y_1(t), ..., y_n(t)], \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.3}$$

де $y_1(t) = x_1^{(q_1-1)}$, $y_2(t) = x_1^{(q_1-2)}$,..., $y_{q_1}(t) = x_1(t)$,..., $y_{q_1+1}(t) = x_2^{(q_2-1)}$,

$$y_{q_1+2}(t) = x_2^{(q_2-2)}, ..., \; y_n(t) = x_m(t).$$

СДР вигляду (3.3) називається ***нормальною***. Нормальна СДР (3.3) називається ***автономною***, якщо $f_i \equiv f_i[y_1(t), ..., y_n(t)]$, $i = \overline{1,n}$, і ***неавтономною*** в протилежному випадку. Із фізичної точки зору нормальна система (3.3) визначає в довільний момент часу t в заданій точці n-вимірного простору $(y_1(t), ..., y_n(t))$ компоненти швидкості $(v_1, ..., v_n) = (\dot{y}_1, ..., \dot{y}_n)$, або поле напрямів. Із такої точки зору СДР (3.3) називається ***динамічною***, а будь-який її розв'язок називається ***рухом***.

Означення 3.5. ***Розв'язком*** СДР (3.3) називається будь-яка система функцій $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$, визначених і неперервних на деякому проміжку $t \in [\tau_0, \tau_1]$, якщо

а) при $t \in [\tau_0, \tau_1]$ точка $M[t, y_1(t), ..., y_n(t)]$ належить області визначення $\mathrm{D} \subset \mathrm{R}^{n+1}$ функцій f_i;

б) для довільного $t \in [\tau_0, \tau_1]$ за підкладання функцій $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$ у рівняння СДР (3.3) останні перетворюються на тотожності.

Означення 3.6. ***Задачею Коші*** для СДР (3.3) називається задача знаходження такого розв'язку цієї системи, який справджує початкові умови

$$y_1(t_0) = y_1^0, \quad y_2(t_0) = y_2^0, \quad ..., \quad y_n(t_0) = y_n^0, \quad t_0 \in [\tau_0, \tau_1], \tag{3.4}$$

де y_1^0, ..., y_n^0 – задані сталі. Із фізичної точки зору початкова умова в точці t_0 $(y_1^0, ..., y_n^0)$ задає початкове положення рухомої матеріальної точки. Розв'язок задачі Коші для СДР (3.3) являє собою ***траєкторію*** руху матеріальної точки.

Означення 3.7. Будь-яка функція $\psi(y_1, ..., y_n)$, що набуває сталого значення $C = const$ тільки за підкладання в неї розв'язку СДР (3.3), називається ***інтегралом*** цієї системи. Співвідношення $\psi(y_1, ..., y_n) = C$ називається ***першим інтегралом***

СДР (3.3). Сукупність n лінійно незалежних перших інтегралів СДР (3.3) складає ***загальний інтеграл*** цієї системи.

Означення 3.8. Система співвідношень

$$y_i(t) = \varphi_i(t, C_1, \ldots, C_n), \quad i = \overline{1,n} \tag{3.5}$$

називається ***загальним розв'язком*** СДР (3.3), якщо

а) (3.5) є розв'язком СДР (3.3) за довільних значень сталих C_1, ..., C_n;

б) (3.5) допускає визначення сталих C_1, ..., C_n як функцій змінних t, y_1, ..., y_n.

Теорема 3.1 ***(про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для нормальної СДР)***. Якщо в системі (3.3) функції f_i та їх частинні похідні за аргументами y_1, ..., y_n неперервні в деякій області $\mathrm{D} \subset \mathrm{R}^{n+1}$, яка містить точку $M(t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, тоді існує єдиний розв'язок СДР (3.3), який справджує початкові умови (3.4).

Фіксуючи в (3.5) значення сталих C_1, ..., C_n, одержимо ***частинний розв'язок*** СДР (3.3). Розв'язок, у кожній точці якого порушується умова єдиності (тобто не виконуються умови Теореми 3.1), називається ***особливим розв'язком*** СДР (3.3).

Якщо в кожному з рівнянь СДР (3.3) визначити dt і прирівняти отримані співвідношення, то дістанемо еквівалентну до нормальної СДР (3.3) ***систему в симетричній формі***

$$\frac{dt}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n}. \tag{3.6}$$

Якщо в (3.6) підкласти будь-який розв'язок (рух) СДР (3.3), то симетрична система перетвориться на рівняння дотичної до заданої кривої (руху).

3.2. Метод виключення змінних для нормальних систем диференціальних рівнянь

Суть методу виключення змінних загалом полягає у зведенні СДР до звичайних диференціальних рівнянь відносно шуканих функцій.

Розглянемо нормальну СДР другого порядку

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1[t, x(t), y(t)], & (3.7) \\ \dot{y} = f_2[t, x(t), y(t)]. & (3.8) \end{cases}$$

Продиференціюємо рівняння (3.7) за змінною *t*, одержимо:

$$\ddot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \dot{y} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot f_2 \tag{3.9}$$

з урахуванням (3.7) і (3.8). Якщо $\partial f_1 / \partial y \neq 0$, то з рівності (3.7) можна визначити $y = \varphi(t, x, \dot{x})$ і підкласти у (3.9). Таким чином отримаємо ДР другого порядку для визначення функції $x(t)$:

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}). \tag{3.10}$$

Зінтегрувавши ДР (3.10), одержимо його загальний розв'язок $x = x(t, C_1, C_2)$, тоді друга функція $y(t)$ рівна $y = \varphi[t, x(t, C_1, C_2), \dot{x}(t, C_1, C_2)]$.

Особливо просто за допомогою методу виключення інтегруються лінійні СДР. Розглянемо, наприклад, нормальну лінійну СДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + f_1(t), & (3.11) \\ \dot{y} = cx + dy + f_2(t), & (3.12) \end{cases}$$

де *a, b, c, d* – задані сталі. Зауважимо, що при $b = 0$ або $c = 0$ змінні уже є виключеними, тому надалі вважатимемо $cb \neq 0$.

Якщо $b \neq 0$, то після диференціювання (3.11) за змінною *t* і підкладання значень $\dot{y}(t)$ із (3.12) і $y(t)$ із (3.11) маємо:

$$\ddot{x} = a\dot{x} + b\dot{y} + \dot{f}_1(t) = a\dot{x} + b[cx + dy + f_2(t)] + \dot{f}_1(t) =$$
$$= a\dot{x} + b\left[cx + d\,\frac{\dot{x} - ax - f_1(t)}{b} + f_2(t)\right] + \dot{f}_1(t),$$

або після зведення подібних доданків

$$\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = bf_2(t) - df_1(t) + \dot{f}_1(t). \tag{3.13}$$

Визначивши з (3.13) $x(t)$, другу функцію $y(t)$ знаходимо з рівняння (3.11):

$$y(t) = \frac{\dot{x} - ax - f_1(t)}{b}.$$

Якщо $c \neq 0$, то після диференціювання (3.12) за змінною t і підкладання значень $\dot{x}(t)$ із (3.11) і $x(t)$ із (3.12) маємо:

$$\ddot{y} = c\dot{x} + d\dot{y} + \dot{f}_2(t) = c[ax + by + f_1(t)] + d\dot{y} + \dot{f}_2(t) =$$
$$= c\left[a\frac{\dot{y} - dy - f_2(t)}{c} + by + f_1(t)\right] + d\dot{y} + \dot{f}_2(t),$$

або після зведення подібних доданків

$$\ddot{y} - (a + d)\dot{y} + (ad - bc)y = cf_1(t) - af_2(t) + \dot{f}_2(t). \qquad (3.14)$$

Визначивши з (3.14) $y(t)$, другу функцію $x(t)$ знаходимо з рівняння (3.12):

$$x(t) = \frac{\dot{y} - dy - f_2(t)}{c}.$$

Зауважимо, що ДР (3.13) і (3.14) мають однакові корені характеристичного рівняння (ХР)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left[a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}\right],$$

які співпадають із коренями ХР системи (3.11)-(3.12).

Аналогічно нормальна СДР n-го порядку може бути зведена до одного ДР n-го порядку або $k < n$ ДР нижчих порядків, сума порядків яких дорівнює n.

3.3. Метод інтегровних комбінацій для нормальних систем диференціальних рівнянь

Суть методу загалом полягає у побудові на підставі заданої СДР так званих ***інтегровних комбінацій***, тобто звичайних диференціальних рівнянь, які є наслідком системи і легко інтегруються.

Для нормальної СДР n-го порядку (3.3) інтегровні комбінації зазвичай будують, складаючи вирази вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dot{y}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \qquad (3.15)$$

де α_i, $i=\overline{1,n}$ – деякі числові коефіцієнти. У рівності (3.15) ліва частина є похідною за змінною *t* від функції $z=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$. Отже, якщо праву частину можна подати у вигляді функції виключно змінних *t* і *z*, то співвідношення (3.15) дає інтегровну комбінацію вигляду

$$\dot{z}=F(t,z),$$

визначивши з якої $z(t)$, можна понизити на одиницю порядок СДР (3.3).

Якщо нормальна СДР *n*-го порядку допускає побудову *n* лінійно незалежних інтегровних комбінацій, то її можна звести до системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій.

Застосуємо наведений вище спосіб побудови інтегровних комбінацій до СДР другого порядку (3.11)-(3.12). Маємо:

$$\alpha\dot{x}+\beta\dot{y}=\alpha[ax+by+f_1(t)]+\beta[cx+dy+f_2(t)],$$

тобто

$$\alpha\dot{x}+\beta\dot{y}=(\alpha a+\beta c)x+(\alpha b+\beta d)y+\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).$$

Остання рівність очевидно дає інтегровну комбінацію тоді й тільки тоді, коли виконуються умови

$$\alpha a+\beta c=k\alpha,\quad \alpha b+\beta d=k\beta,\quad k\in \mathrm{R}$$

або при $\alpha\beta\neq 0$

$$a+\frac{\beta}{\alpha}c=\frac{\alpha}{\beta}b+d. \tag{3.16}$$

Введемо позначення $\gamma=\frac{\alpha}{\beta}$, тоді з (3.16) маємо

$$a+\frac{c}{\gamma}=b\gamma+d \quad\Rightarrow\quad \gamma=\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2b}.$$

Із отриманого співвідношення очевидно випливає: інтегровні комбінації для СДР (3.11)-(3.12) існують тільки у випадку $(a-d)^2+4bc\geq 0$, а їх коефіцієнти α, β визначаються на підставі формули

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2b}.$$

Приклад 3.1. Знайти загальний розв’язок $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (ЛОСДР) шляхом зведення до звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases}\dot{x}=x-y-z,\\ \dot{y}=x+y,\\ \dot{z}=3x+z.\end{cases} \tag{3.17}$$

Розв’язання. Як відомо, за виконання певних умов нормальну систему n-го порядку можна звести до одного диференціального рівняння n-го порядку відносно однієї з шуканих функцій. Перевіримо можливість застосування цього методу. Для цього продиференціюємо перше рівняння системи (3.17) за змінною t із урахуванням другого і третього рівнянь системи:

$$\ddot{x}=\dot{x}-\dot{y}-\dot{z}=x-y-z-(x+y)-(3x+z)=-3x-2y-2z. \tag{3.18}$$

Із (3.18) і першого з рівнянь (3.17) одержимо:

$$\begin{cases}y+z=x-\dot{x},\\ 2y+2z=-3x-\ddot{x}.\end{cases} \tag{3.19}$$

Очевидно, що y і z із системи (1.3) не визначаються однозначно як функції x, $\dot{x}$ і $\ddot{x}$ тому ЛОСДР (3.17) не можна звести до одного диференціального рівняння третього порядку відносно невідомої функції $x(t)$. Однак це ще не означає, що такого рівняння не можна отримати відносно функцій $y(t)$ або $z(t)$. Будемо наполегливими й почнемо все спочатку, виходячи з другого рівняння системи (3.17). Маємо:

$$\ddot{y}=\dot{x}+\dot{y}=x-y-z+(x+y)=2x-z. \tag{3.20}$$

Цього разу умова можливості застосування методу очевидно виконується, адже з (3.17) і (3.20) для x і z отримуємо однозначні вирази

$$x=\dot{y}-y,\quad z=2x-\ddot{y}=2\dot{y}-2y-\ddot{y}. \tag{3.21}$$

Щоб отримати шукане рівняння третього порядку, продиференціюємо рівняння (3.20) за змінною t з урахуванням (3.17) та (3.21):

$$\dddot{y}=2\dot{x}-\dot{z}=2(x-y-z)-(3x+z)=-x-2y-3z=-(\dot{y}-y)-2y-3(2\dot{y}-2y-\ddot{y})$$
,

звідки

$$\dddot{y}-3\ddot{y}+7\dot{y}-5y=0\,. \tag{3.22}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.22) знаходимо за методом Ейлера для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$\lambda^3-3\lambda^2+7\lambda-5\equiv(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5)=0$$

має корені $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=1\pm 2i$, яким відповідають лінійно незалежні частинні розв'язки $y_1=\mathrm{e}^t$, $y_2=\mathrm{e}^t\cos 2t$, $y_3=\mathrm{e}^t\sin 2t$. Тоді загальний розв'язок рівняння (3.22)

$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3=\mathrm{e}^t(C_1+C_2\cos 2t+C_3\sin 2t)\,,$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі. Підставивши знайдену $y(t)$ у формули (3.21), знаходимо дві інші невідомі функції:

$$x=\dot{y}-y=\mathrm{e}^t(C_1+C_2\cos 2t+C_3\sin 2t-2C_2\sin 2t+2C_3\cos 2t)-$$
$$-\mathrm{e}^t(C_1+C_2\cos 2t+C_3\sin 2t)=2\mathrm{e}^t(C_3\cos 2t-C_2\sin 2t),$$

$$z=2x-\ddot{y}=4\mathrm{e}^t(C_3\cos 2t-C_2\sin 2t)-\mathrm{e}^t(C_1-3C_2\cos 2t-3C_3\sin 2t-$$
$$-4C_2\sin 2t+4C_3\cos 2t)=\mathrm{e}^t(-C_1+3C_2\cos 2t+3C_3\sin 2t).$$

Відповідь. $x=2\mathrm{e}^t(C_3\cos 2t-C_2\sin 2t)$, $y=\mathrm{e}^t(C_1+C_2\cos 2t+C_3\sin 2t)$,

$$z=\mathrm{e}^t(-C_1+3C_2\cos 2t+3C_3\sin 2t)\,.$$

Приклад 3.2. Знайти розв'язок задачі Коші для ЛОСДР

$$\begin{cases}\dot{x}=4x-y-z,\\ \dot{y}=x+2y-z,\\ \dot{z}=x-y+2z\end{cases} \tag{3.23}$$

за початкових умов

$$x(0)=1,\quad y(0)=-1,\quad z(0)=0\,. \tag{3.24}$$

Розв'язання. Спробуємо застосувати метод зведення до рівняння третього порядку аналогічно до прикладу 3.1. Виходячи з першого рівняння системи (3.23), маємо:

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} = 4(4x - y - z) - (x + 2y - z) - (x - y + 2z) = 14x - 5y - 5z\,. \quad (3.25)$$

Із (3.25) і першого з рівнянь (3.23) одержимо:

$$\begin{cases} y + z = 4x - \dot{x}, \\ 5y + 5z = 14x - \ddot{x}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Очевидно, що y і z із системи (3.26) не визначаються однозначно як функції x, $\dot{x}$ і $\ddot{x}$, тому ЛОСДР (3.23) також не можна звести до одного диференціального рівняння третього порядку відносно невідомої функції $x(t)$. Ба більше, виходячи з другого і третього рівнянь системи (3.23), можна переконатися, що задану ЛОСДР не вдасться звести до рівняння третього порядку відносно жодної з невідомих функцій.

Ну що ж, тоді спробуємо хоча б понизити порядок заданої системи, аби спростити розв'язання. Для цього застосуємо так званий ***метод інтегровних комбінацій***.

Як відомо, інтегровною комбінацією шуканих функцій та їх похідних називається будь-яке диференціальне рівняння, яке є наслідком системи і легко інтегрується. Побудувавши k лінійно незалежних інтегровних комбінацій для заданої системи диференціальних рівнянь n-го порядку, можна понизити порядок останньої на k одиниць. Якщо вдалося побудувати n таких комбінацій, то знаходження розв'язку СДР можна звести до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

Підбираючи інтегровні комбінації для системи (3.23) у вигляді $a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z}$, де a, b, c –дійсні коефіцієнти, знаходимо два придатні співвідношення:

$$\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} = 2x - 2y - 2z\,, \quad \dot{x} - \dot{y} = 3x - 3y\,.$$

Звідси отримуємо два лінійно незалежні перші інтеграли системи (3.23):

$$\frac{d(x - y - z)}{dt} = 2(x - y - z) \quad \Rightarrow \quad x - y - z = C_1 \mathrm{e}^{2t}\,,$$

$$\frac{d(x-y)}{dt}=3(x-y) \quad \Rightarrow \quad x-y=C_2\,\mathrm{e}^{3t},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Із отриманих рівностей визначаємо

$$z=-C_1\,\mathrm{e}^{2t}+C_2\,\mathrm{e}^{3t}, \quad x=y+C_2\,\mathrm{e}^{3t}. \tag{3.27}$$

Підставивши функції (3.27) у друге рівняння системи (3.23), дістанемо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку для визначення невідомої функції $y(t)$:

$$\dot{y}=x+2y-z=y+C_2\,\mathrm{e}^{3t}+2y-(-C_1\,\mathrm{e}^{2t}+C_2\,\mathrm{e}^{3t})=3y+C_1\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Розв'язавши це рівняння методом варіації сталої чи методом підстановки, дістанемо $y=-C_1\,\mathrm{e}^{2t}+C_3\,\mathrm{e}^{3t}$, а тоді з (3.27) $x=-C_1\,\mathrm{e}^{2t}+(C_2+C_3)\,\mathrm{e}^{3t}$.

Отже, загальний розв'язок ЛОСДР (3.23) має вигляд

$$x=-C_1\,\mathrm{e}^{2t}+(C_2+C_3)\,\mathrm{e}^{3t}, \quad y=-C_1\,\mathrm{e}^{2t}+C_3\,\mathrm{e}^{3t}, \quad z=-C_1\,\mathrm{e}^{2t}+C_2\,\mathrm{e}^{3t}. \tag{3.28}$$

Щоб знайти шуканий розв'язок задачі Коші, підставимо (3.28) у початкові умови (3.24):

$$\begin{aligned} x(0) &\equiv -C_1+C_2+C_3=1, \\ y(0) &\equiv -C_1+C_3=-1, \\ z(0) &\equiv -C_1+C_2=0. \end{aligned}$$

Із останньої системи алгебраїчних рівнянь знаходимо: $C_1=C_2=2$, $C_3=1$. Підклавши ці значення в (3.28), отримаємо шуканий частинний розв'язок.

Відповідь. $x=-2\mathrm{e}^{2t}+3\mathrm{e}^{3t}$, $y=-2\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{3t}$, $z=-2\mathrm{e}^{2t}+2\mathrm{e}^{3t}$.

3.4. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь (ЛОСДР) та їх властивості. Теорема про структуру загального розв'язку ЛОСДР

Система диференціальних рівнянь називається ***лінійною***, якщо вона є лінійною відносно шуканих функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ та всіх їх похідних.

Нормальна лінійна однорідна СДР має вигляд

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t), \quad i=\overline{1,n}, \tag{3.29}$$

де коефіцієнти $a_{ij}(t)$ – відомі неперервні на заданому проміжку $t \in [\tau_0, \tau_1]$ функції.

Нехай $x_1^{(1)}(t)$, ..., $x_n^{(1)}(t)$ – деякий частинний розв'язок ЛОСДР (3.29). Тоді мають силу наступні очевидні твердження:

а) для довільного значення $C = const$ система функцій $Cx_1^{(1)}(t)$, ..., $Cx_n^{(1)}(t)$ також буде частинним розв'язком ЛОСДР (3.29);

б) якщо $x_1^{(2)}(t)$, ..., $x_n^{(2)}(t)$ деякий інший частинний розв'язок ЛОСДР (3.29), то система функцій $x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t)$, ..., $x_n^{(1)}(t) + x_n^{(2)}(t)$ також буде частинним розв'язком ЛОСДР (3.29).

Нехай

$$x_1^{(j)}(t), \ldots, x_n^{(j)}(t), \; j = \overline{1,n} \tag{3.30}$$

система n частинних розв'язків ЛОСДР (3.29). Складемо матрицю з векторів-стовпців

$$A = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \ldots & x_1^{(n)}(t) \\ & \ldots & \\ x_n^{(1)}(t) & \ldots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Система функцій (3.30) називається ***фундаментальною системою частинних розв'язків*** (ФСЧР) для ЛОСДР (3.29), якщо вона є лінійно незалежною, тобто $\det A \neq 0$ при $t \in [\tau_0, \tau_1]$. Тоді визначник $\det A$ називається ***детермінантом Вроньського*** для системи функцій (3.30) і позначається $W(t)$. Для ЛОСДР (3.29) ФСЧР завжди існує, а $W(t)$ для довільного $t \in [\tau_0, \tau_1]$ справджує рівність

$$W(t) = W(t_0)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau) + \ldots + a_{nn}(\tau)]d\tau}. \tag{3.31}$$

Формула (3.31) називається формулою Остроградського-Ліувілля для ЛОСДР (3.29), або ***формулою Якобі***. Із (3.31) випливає, що при $W(t_0) \neq 0$ $W(t) \neq 0$ для всіх $t \in [\tau_0, \tau_1]$.

Справедлива наступна

Теорема 3.2 (***про структуру загального розв'язку ЛОСДР***). Якщо система функцій (3.30) утворює ФСЧР ЛОСДР (3.29), то загальний розв'язок цієї СДР має вигляд

$$x_i(t) = C_1 x_i^{(1)}(t) + \ldots + C_n x_i^{(n)}(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.32}$$

де C_1, ..., C_n – довільні сталі.

Доведення. На підставі властивостей ***а)***, ***б)*** система функцій (3.32) буде розв'язком ЛОСДР (3.29). Покажемо, що (3.32) є загальним розв'язком ЛОСДР (3.29), тобто з (3.32) можна отримати будь-який частинний розв'язок цієї СДР, задавши деякі початкові умови

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1,n} \tag{3.33}$$

у точці $t_0 \in [\tau_0, \tau_1]$.

Поклавши в (3.32) $t = t_0$, одержимо лінійну неоднорідну алгебраїчну систему для визначення сталих C_1, ..., C_n, детермінант якої рівний $W(t_0) \neq 0$, оскільки система функцій (3.30) складає ФСЧР ЛОСДР (3.29). Тому значення сталих із алгебраїчної системи визначаються однозначно: $C_i = C_{i0}$, $i = \overline{1,n}$, а отже, з розв'язку (3.32) підкладанням знайдених значень C_{i0} одержимо розв'язок задачі Коші (3.29), (3.33). Це й означає, що (3.32) буде загальним розв'язком ЛОСДР (3.29).

3.5. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера

Розглянемо ЛОСДР *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{X} = AX, \tag{3.34}$$

де $X = \mathrm{col}(x_1(t) \quad \ldots \quad x_n(t))$ – вектор-стовпець із невідомих функцій, $A: n \times n$ – матриця зі сталими елементами.

Будемо шукати розв'язок СДР (3.34) за алгоритмом методу Ейлера у вигляді

$$X = h\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{3.35}$$

де $h = \mathrm{col}(h_1 \quad \ldots \quad h_n) \neq \vec{0}$ – n-вимірний вектор зі сталими елементами, λ – деяка стала.

Підставивши (3.35) у (3.34), після скорочення на $e^{\lambda t} \neq 0$ отримаємо лінійну однорідну алгебраїчну систему для визначення елементів вектора h

$$(A - \lambda E)h = \vec{0}, \tag{3.36}$$

де E – одинична матриця. Система (3.36) має нетривіальні розв'язки за виконання умови

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{3.37}$$

Означення 3.8. Ті значення параметра λ, для яких виконується рівність (3.37), називаються ***власними значеннями*** матриці A, а відповідний нетривіальний розв'язок системи (3.36) називається ***власним вектором*** матриці A, що відповідає власному значенню λ.

Рівність (3.37) називається ***характеристичним рівнянням*** для ЛОСДР (3.34). Корені характеристичного рівняння є власними значеннями матриці A.

Загальний розв'язок ЛОСДР (3.34) визначається залежно від коренів характеристичного рівняння (3.37), тобто власних значень матриці A. Тут, як і для звичайних ЛОДР зі сталими коефіцієнтами, можливі три випадки.

1. Випадок дійсних різних коренів. Нехай усі власні значення матриці A дійсні й різні, тобто $\lambda_i \in \mathrm{R}$, $i = \overline{1,n}$, причому $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тоді згідно з (3.35) кожному з власних значень λ_i відповідає частинний розв'язок

$$X_i = h_i e^{\lambda_i t}, \tag{3.38}$$

де h_i власний вектор, що відповідає власному значенню λ_i і визначається з векторної рівності

$$(A - \lambda_i E)h_i = \vec{0}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Згідно з Теоремою 3.2 загальний розв'язок ЛОСДР (3.34) записується як лінійна комбінація частинних розв'язків (3.38):

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(t),$$

де C_1, ..., C_n – довільні сталі.

2. Випадок комплексно спряжених коренів. Нехай $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – пара однократних комплексних власних значень матриці *A*. Тоді згідно з (3.35) їм відповідає пара комплексних частинних розв’язків ЛОСДР (3.34)

$$\overline{X}_1 = h_1 \, \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)t}, \quad \overline{X}_2 = h_2 \, \mathrm{e}^{(\alpha - i\beta)t}, \tag{3.39}$$

де

$$[A - (\alpha + i\beta)E]h_1 = \vec{0}, \; [A - (\alpha - i\beta)E]h_2 = \vec{0}.$$

Виділимо з (3.39) дійсні частинні розв’язки ЛОСДР (3.34). Із властивостей лінійних однорідних СДР очевидно випливає: якщо комплексна функція $Y = U + iV$ є частинним розв’язком СДР (3.34), то дійсні функції $U = \mathrm{Re}\,Y$ та $V = \mathrm{Im}\,Y$ також є частинними розв’язками СДР (3.34). Таким чином, із (3.39) одержимо дійсні частинні розв’язки:

$$X_1 = \mathrm{Re}\left[h_1 \, \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)t}\right], \quad X_2 = \mathrm{Im}\left[h_1 \, \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)t}\right]. \tag{3.40}$$

Зауважимо, що із $\overline{X}_2$ отримуються аналогічні функції з точністю до знака, тому для знаходження дійсних частинних розв’язків можна використати будь-яку з двох комплексних функцій (3.39).

Отже, парі однократних комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ матриці *A* відповідають два лінійно незалежні частинні розв’язки ЛОСДР (3.34) вигляду (3.40).

3. Випадок кратних коренів. Нехай дійсне число $\lambda = \alpha$ є коренем ХР (3.37) кратності $k > 1$. Тоді йому повинні відповідати *k* лінійно незалежних частинних розв’язків ЛОСДР (3.34). Спосіб побудови цих частинних розв’язків залежить від числа

$$s = n - \mathrm{rang}(A - \alpha E),$$

яке називається ***кратністю власного значення*** $\lambda = \alpha$ (не плутати з кратністю кореня ХР!) і визначає кількість лінійно незалежних розв’язків векторного рівняння (3.36) (тобто кількість лінійно незалежних власних векторів матриці *A*, які відповідають власному значенню $\lambda = \alpha$).

I. Якщо $s = k$, то власному значенню $\lambda = \alpha$ відповідають k лінійно незалежних власних векторів h_1, ..., h_k, які визначаються з векторного рівняння (3.36). Тоді згідно з (3.35) система k лінійно незалежних частинних розв'язків має вигляд

$$X_1 = h_1 \mathrm{e}^{\alpha t}, \ \ldots, \ X_k = h_k \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

II. Якщо $s = 1$ і h_1 – відповідний власний вектор матриці A, визначений із (3.36), то перший частинний розв'язок згідно з (3.35) має вигляд $X_1 = h_1 \mathrm{e}^{\alpha t}$. Для побудови наступних частинних розв'язків X_2, ..., X_k розглянемо систему функцій

$$\begin{aligned} X_2 &= (h_1 t + h_2)\mathrm{e}^{\alpha t}, \\ X_3 &= \left(h_1 \frac{t^2}{2} + h_2 t + h_3 \right)\mathrm{e}^{\alpha t}, \\ &\ldots \\ X_k &= \left(h_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + h_{k-1} t + h_k \right)\mathrm{e}^{\alpha t}, \end{aligned} \tag{3.41}$$

де h_2, ..., h_k – невідомі вектори зі сталими елементами.

Підставивши функцію X_2 в ЛОСДР (3.34), одержимо

$$\left[\alpha(h_1 t + h_2) + h_1\right]\mathrm{e}^{\alpha t} = A(h_1 t + h_2)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

або

$$(A - \alpha E)(h_1 t + h_2)\mathrm{e}^{\alpha t} = h_1 \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Враховуючи, що $(A - \alpha E)h_1 = \vec{0}$, для визначення вектора h_2 отримаємо рівняння

$$(A - \alpha E)h_2 = h_1.$$

Аналогічно, підставивши в ЛОСДР (3.34) функцію X_3, маємо

$$\left[h_1 t + h_2 + \alpha\left(h_1 \frac{t^2}{2} + h_2 t + h_3 \right)\right]\mathrm{e}^{\alpha t} = A\left(h_1 \frac{t^2}{2} + h_2 t + h_3 \right)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

або

$$(A-\alpha E)\left(h_1\frac{t^2}{2}+h_2t+h_3\right)e^{\alpha t}=(h_1t+h_2)e^{\alpha t}.$$

Оскільки $(A-\alpha E)h_1=\vec{0}$ і $(A-\alpha E)h_2=h_1$, то для визначення вектора h_3 отримаємо рівняння

$$(A-\alpha E)h_3=h_2.$$

Аналогічно можна показати, що функції (3.41) будуть частинними розв'язками ЛОСДР (3.34) за виконання умов

$$(A-\alpha E)h_{i+1}=h_i,\quad i=\overline{1,k-1}. \tag{3.42}$$

Вектори h_2, ..., h_k, які справджують рекурентні співвідношення (3.42), називають системою векторів, ***приєднаних*** до власного вектора h_1.

Отже, у випадку $s=1$ k-кратному дійсному кореню ХР (3.37) $\lambda=\alpha$ відповідають k лінійно незалежних частинних розв'язків ЛОСДР (3.34) вигляду

$$X_j=\left(h_1\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}+\ldots+h_{j-1}t+h_j\right)e^{\alpha t},\quad j=\overline{1,k},$$

де h_1 власний вектор, що визначається з рівняння (3.36), а h_2, ..., h_k – система приєднаних до h_1 векторів, яка визначається зі співвідношень (3.42).

III. Якщо $1<s<k$, то власному значенню $\lambda=\alpha$ відповідає $s>1$ лінійно незалежних власних векторів h_1, ..., h_s, до яких слід побудувати $(k-s)$ приєднаних векторів аналогічно до випадку II. Тоді перші s частинних розв'язків будуть

$$X_1=h_1e^{\alpha t},\ \ldots,\ X_s=h_se^{\alpha t},$$

а інші $(k-s)$ частинних розв'язків отримуються у вигляді (3.41) залежно від власних векторів, до яких будуються приєднані вектори.

Приклад 3.3. Розв'язати лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\dot{X}=AX,\ A=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

Розв'язання. Згідно з алгоритмом методу Ейлера спочатку знаходимо власні значення матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\det(A-\lambda E)\equiv\begin{vmatrix}4-\lambda & -5 & 2\\ 5 & -7-\lambda & 3\\ 6 & -9 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(1-\lambda)=0.$$

Звідси $\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=0$.

Для власного значення $\lambda_1=1$ – однократного кореня характеристичного рівняння – знаходимо власний вектор $h_1=\operatorname{col}(h_{11},\ h_{12},\ h_{13})\neq\vec{0}$, елементи якого визначаються з рівності $(A-\lambda_1 E)h_1=\vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 5 & -8 & 3\\ 6 & -9 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_{11}\\ h_{12}\\ h_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

або у скалярному вигляді

$$\begin{cases}3h_{11}-5h_{12}+2h_{13}=0,\\ 5h_{11}-8h_{12}+3h_{13}=0,\\ 6h_{11}-9h_{12}+3h_{13}=0.\end{cases}\tag{3.44}$$

Алгебраїчна система (3.44) має безліч нетривіальних розв'язків, одним із яких є, наприклад, $h_{11}=h_{12}=h_{13}=1$. Отже, за власний вектор можна взяти $h_1=\operatorname{col}(1,\ 1,\ 1)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера для побудови фундаментальної системи частинних розв'язків ЛОСДР власному значенню $\lambda_1=1$ відповідає частинний розв'язок

$$\varphi_1(t)=h_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}.$$

Власне значення $\lambda=0$ є коренем характеристичного рівняння кратності $m=2$. Кратність цього власного значення, тобто кількість відповідних йому лінійно незалежних власних векторів, визначається числом $s=n-\operatorname{rang}(A-\lambda E)$, де n – порядок заданої ЛОСДР. У нашому випадку

$$s = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Отже, для побудови $m = 2$ лінійно незалежних частинних розв'язків системи (3.43), що відповідають власному значенню $\lambda = 0$, треба визначити $s = 1$ власний вектор $h_2 = \mathrm{col}(h_{21},\ h_{22},\ h_{23}) \neq \vec{0}$ із рівності $(A - \lambda E)h_2 = \vec{0}$, а також $m - s = 2 - 1 = 1$ приєднаний до нього вектор $h_3 = \mathrm{col}(h_{31},\ h_{32},\ h_{33})$ із рівності $(A - \lambda E)h_3 = h_2$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно з правилами методу Ейлера для кратних коренів характеристичного рівняння відповідні до $\lambda = 0$ частинні розв'язки записуються у вигляді

$$\varphi_2(t) = h_2\, \mathrm{e}^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = (h_2 t + h_3)\mathrm{e}^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок системи (3.43) рівний $X = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + C_3\varphi_3(t)$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі. Підклавши в останню формулу знайдену ФСЧР, отримаємо шукану вектор-функцію.

Відповідь. $X = \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^t + C_2 + C_3(t-1) \\ C_1\mathrm{e}^t + 2C_2 + C_3(2t-1) \\ C_1\mathrm{e}^t + 3C_2 + 3tC_3 \end{pmatrix}.$

Приклад 3.4. Методом Ейлера побудувати загальний розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{X} = AX\,,\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Розв'язання. Згідно з алгоритмом методу Ейлера спочатку знаходимо власні значення матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\det(A-\lambda E)\equiv\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ -1 & -2-\lambda & 0\\ -3 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)(-\lambda^2-4\lambda-8)=0.$$

Звідси $\lambda_1=-2$, $\lambda_{2,3}=-2\pm 2i$.

Для власного значення $\lambda_1=-2$ – однократного кореня характеристичного рівняння – знаходимо власний вектор $h_1=\mathrm{col}(h_{11},\ h_{12},\ h_{13})\neq\vec{0}$, елементи якого визначаються з рівності $(A-\lambda_1 E)h_1=\vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_{11}\\ h_{12}\\ h_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Одним із нетривіальних розв'язків є, наприклад, $h_{11}=0$, $h_{12}=1$, $h_{13}=-1$. Отже, за власний вектор можна взяти $h_1=\mathrm{col}(0,\ 1,\ -1)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера для побудови фундаментальної системи частинних розв'язків ЛОСДР власному значенню $\lambda_1=-2$ відповідає частинний розв'язок

$$\varphi_1(t)=h_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}.$$

Щоб знайти дійсні частинні розв'язки, які відповідають комплексно спряженим кореням характеристичного рівняння $\lambda_{2,3}=-2\pm 2i$, знайдемо власний вектор $\gamma=\mathrm{col}(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)\neq\vec{0}$ для одного з цих власних значень, наприклад, для $\lambda_2=-2+2i$. Комплекснозначні елементи цього вектора визначаються з рівності $(A-\lambda_2 E)\gamma=\vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix}-2i & 1 & 1\\ -1 & -2i & 0\\ -3 & 0 & -2i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Одним із нетривіальних розв'язків є, наприклад, $\gamma_1 = 2i$, $\gamma_2 = -1$, $\gamma_3 = -3$. Отже, за власний вектор можна взяти $\gamma = \mathrm{col}(2i,\ -1,\ -3)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера для побудови фундаментальної системи частинних розв'язків ЛОСДР парі комплексно спряжених власних значень $\lambda_{2,3} = -2 \pm 2i$ відповідають дійсні частинні розв'язки, що отримуються як дійсна і уявна частини комплексної вектор-функції

$$\varphi(t) = \gamma\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(-2+2i)t} = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} (\cos 2t + i \sin 2t).$$

Отже, маємо:

$$\varphi_2(t) = \mathrm{Re}\,\varphi(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -\cos 2t \\ -3\cos 2t \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = \mathrm{Im}\,\varphi(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ -\sin 2t \\ -3\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок системи (3.45) рівний $X = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + C_3\varphi_3(t)$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі. Підклавши в останню формулу знайдену ФСЧР, отримаємо шукану вектор-функцію.

Відповідь. $X = \mathrm{e}^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t \\ C_1 - C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t \\ -C_1 - 3C_2 \cos 2t - 3C_3 \sin 2t \end{pmatrix}.$

Приклад 3.5. Застосувати метод Ейлера для знаходження загального розв'язку системи (3.23), розглянутої в Прикладі 3.2.

Розв'язання. Система (3.23) задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо власні значення матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-3)^2 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 3$.

Для власного значення $\lambda_1 = 2$ – однократного кореня характеристичного рівняння – знаходимо власний вектор $h_1 = \mathrm{col}(h_{11},\ h_{12},\ h_{13}) \neq \vec{0}$, елементи якого визначаються з рівності $(A - \lambda_1 E)h_1 = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Одержана алгебраїчна система має безліч нетривіальних розв’язків, одним із яких є, наприклад, $h_{11} = h_{12} = h_{13} = 1$. Отже, за власний вектор можна взяти $h_1 = \mathrm{col}(1,\ 1,\ 1)$. Тоді власному значенню $\lambda_1 = 2$ відповідає частинний розв’язок

$$\varphi_1(t) = h_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}.$$

Власне значення $\lambda = 3$ є коренем характеристичного рівняння кратності $m = 2$. Кратність цього власного значення, тобто кількість відповідних йому лінійно незалежних власних векторів, рівна $s = n - \mathrm{rang}(A - \lambda E)$. У нашому випадку

$$s = 3 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Отже, для побудови $m = 2$ лінійно незалежних частинних розв’язків системи (3.23), що відповідають власному значенню $\lambda = 3$, треба визначити $s = 2$ лінійно незалежні власні вектори $h_2,\ h_3$ вигляду $\gamma = \mathrm{col}(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) \neq \vec{0}$ із рівності $(A - \lambda E)\gamma = \vec{0}$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно з правилами методу Ейлера для кратних коренів характеристичного рівняння у цьому випадку відповідні до $\lambda = 3$ частинні розв’язки записуються у вигляді

$$\varphi_2(t)=h_2\,\mathrm{e}^{\lambda t}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{3t},\ \ \varphi_3(t)=h_3\,\mathrm{e}^{\lambda t}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{3t}.$$

Тоді загальний розв'язок системи (3.23) $\mathrm{col}(x,\ y,\ z)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+C_3\varphi_3(t)$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі. Підклавши в останню формулу знайдену ФСЧР, дістанемо шукану вектор-функцію. Результат із точністю до позначень довільних сталих цілком узгоджується з формулами (3.28), отриманими із застосуванням методу інтегровних комбінацій.

Відповідь. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\,\mathrm{e}^{2t}+(C_2+C_3)\mathrm{e}^{3t}\\ C_1\,\mathrm{e}^{2t}+C_2\,\mathrm{e}^{3t}\\ C_1\,\mathrm{e}^{2t}+C_3\,\mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}.$

3.6. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь (ЛНСДР). Метод варіації сталих (Лаґранжа)

Нормальна лінійна неоднорідна СДР має вигляд

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)+f_i(t),\quad i=\overline{1,n},\tag{3.46}$$

де $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ – відомі неперервні на заданому проміжку $t\in[\tau_0,\tau_1]$ функції. Тоді (4.1) називають лінійною однорідною СДР, що відповідає ЛНСДР (3.46).

Загальний розв'язок ЛНСДР (3.46) знаходять як суму загального розв'язку відповідної ЛОСДР (3.29) і деякого частинного розв'язку неоднорідної СДР (3.46). Якщо такий спосіб призводить до складнощів, то можна скористатися теоремою, яка дає загальний метод інтегрування ЛНСДР (3.46).

Теорема 3.3 (***метод Лаґранжа для лінійної неоднорідної СДР***). Якщо відомий загальний розв'язок відповідної ЛОСДР (3.29), то загальний розв'язок ЛНСДР (3.46) знаходиться за допомогою *n* квадратур.

Доведення. Нехай відомий загальний розв'язок відповідної ЛОСДР (3.29) у вигляді (3.32). Будемо вважати в (3.32) $C_i=C_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. Тоді

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j(t)\dot{x}_i^{(j)}(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{C}_j(t)x_i^{(j)}(t), \quad i = \overline{1,n}.$$

Враховуючи, що (3.32) є загальним розв'язком ЛОСДР (3.29) $x_i^0(t)$, $i=\overline{1,n}$, після підстановки в ЛНСДР (3.46) одержимо

$$\dot{x}_i^0(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{C}_j(t)x_i^{(j)}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j^0(t) + f_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$

звідки отримуємо лінійну неоднорідну алгебраїчну систему відносно похідних $\dot{C}_j(t)$

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{C}_j(t)x_i^{(j)}(t) = f_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.47}$$

Система (3.47) називається ***системою Лаґранжа*** для СДР (3.46). Її визначник $W(t) \neq 0$ при $t \in [\tau_0, \tau_1]$, а отже, (3.47) має єдиний розв'язок $\dot{C}_j(t) = \varphi_j(t)$, $j = \overline{1,n}$. Тоді функції $C_j(t)$ знаходимо за допомогою n квадратур: $C_j(t) = \int \varphi_j(t)dt + \overline{C}_j$, $j = \overline{1,n}$, де $\overline{C}_j$ – довільні сталі. Підклавши знайдені функції в (3.32), одержимо загальний розв'язок ЛНСДР (3.46).

Приклад 3.6. Методом варіації сталих розв'язати лінійну неоднорідну СДР

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + e^{2t}\sec t, \\ \dot{y} = x + 2y + e^{2t}\csc t. \end{cases} \tag{3.48}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідної однорідної СДР

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases} \tag{3.49}$$

Ця система задається матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Власні значення цієї матриці є коренями характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

Щоб знайти ФСЧР системи (3.49), що відповідає знайденим комплексно спряженим власним значенням, визначимо власний вектор $\gamma = \mathrm{col}(\gamma_1,\ \gamma_2) \neq \vec{0}$ для одного з цих власних значень, наприклад, для $\lambda_1 = 2 + i$. Комплекснозначні елементи цього вектора визначаються з рівності $(A - \lambda_1 E)\gamma = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Одним із нетривіальних розв'язків є, наприклад, $\gamma_1 = i$, $\gamma_2 = 1$. Отже, за власний вектор можна взяти $\gamma = \mathrm{col}(i,\ 1)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера для побудови ФСЧР парі комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ відповідають дійсні частинні розв'язки, що отримуються як дійсна і уявна частини комплексної вектор-функції

$$\varphi(t) = \gamma \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} (\cos t + i \sin t).$$

Отже, маємо:

$$\varphi_1(t) = \mathrm{Re}\,\varphi(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \mathrm{Im}\,\varphi(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок однорідної системи (3.49) $\mathrm{col}(x,\ y)_{з.о.} = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Згідно з алгоритмом методу варіації сталих загальний розв'язок неоднорідної системи (3.48) будемо шукати унаступному вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}[-C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t] \\ \mathrm{e}^{2t}[C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t] \end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів $C_1(t)$, $C_2(t)$ складаємо систему Лаґранжа (3.47):

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{2t}[-\dot{C}_1(t)\sin t + \dot{C}_2(t)\cos t] = \mathrm{e}^{2t}\sec t, \\ \mathrm{e}^{2t}[\dot{C}_1(t)\cos t + \dot{C}_2(t)\sin t] = \mathrm{e}^{2t}\csc t, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} -\dot{C}_1(t)\sin t + \dot{C}_2(t)\cos t = \cos^{-1} t, \\ \dot{C}_1(t)\cos t + \dot{C}_2(t)\sin t = \sin^{-1} t. \end{cases} \tag{3.51}$$

Визначник системи (3.51) $\Delta = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} = -1$. Тоді за методом Крамера

$$\dot{C}_1(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\begin{vmatrix} \cos^{-1} t & \cos t \\ \sin^{-1} t & \sin t \end{vmatrix} = -\mathrm{tg}\, t + \mathrm{ctg}\, t = 2\,\mathrm{ctg}\, 2t\,,$$

$$\dot{C}_2(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\begin{vmatrix} -\sin t & \cos^{-1} t \\ \cos t & \sin^{-1} t \end{vmatrix} = 2\,.$$

Звідси шляхом двократного інтегрування отримуємо:

$$C_1(t) = 2\int \mathrm{ctg}\, 2t dt = \ln|\sin 2t| + c_1\,, \quad C_2(t) = 2\int dt = 2t + c_2\,,$$

де c_1, c_2 – довільні сталі. Підставивши знайдені коефіцієнти у (3.50), дістанемо шуканий загальний розв’язок неоднорідної системи (3.48).

Відповідь. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \cdot \begin{pmatrix} -(\ln|\sin 2t| + c_1)\sin t + (2t + c_2)\cos t \\ (\ln|\sin 2t| + c_1)\cos t + (2t + c_2)\sin t \end{pmatrix}$.

Приклад 3.7. Із застосуванням методу Лаґранжа розв’язати задачу Коші для лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y + \dfrac{2}{\mathrm{e}^t + 1} \end{cases} \tag{3.52}$$

за початкових умов

$$x(0) = 0, \;\; y(0) = \ln 4\,. \tag{3.53}$$

Розв’язання. Знайдемо спочатку загальний розв’язок відповідної однорідної СДР

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases} \tag{3.54}$$

Ця система задається матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Власні значення цієї матриці є коренями характеристичного рівняння

$$\det(A-\lambda E)\equiv\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0.$$

Звідси $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$.

Щоб знайти ФСЧР системи, що відповідає знайденим дійсним однократним кореням характеристичного рівняння, визначимо власні вектори $h_1=\mathrm{col}(h_{11},\ h_{12})\neq\vec{0}$ та $h_2=\mathrm{col}(h_{21},\ h_{22})\neq\vec{0}$, елементи яких визначаються з рівностей $(A-\lambda_1 E)h_1=\vec{0}$, $(A-\lambda_2 E)h_2=\vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_{11}\\ h_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_{21}\\ h_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Нетривіальними розв'язками наведених систем, є, наприклад, $h_{11}=1,\ h_{12}=2$, $h_{21}=h_{22}=1$. Отже, за власні вектори можна взяти $h_1=\mathrm{col}(1,\ 2)$, $h_2=\mathrm{col}(1,\ 1)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера відповідна до власних значень $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$ ФСЧР системи (3.54) має вигляд

$$\varphi_1(t)=h_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t},\ \ \varphi_2(t)=h_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}.$$

Тоді загальний розв'язок однорідної системи (3.54) $\mathrm{col}(x,\ y)_{\text{з.о.}}=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)$, де $C_1,\ C_2$ – довільні сталі.

Згідно з алгоритмом методу варіації сталих загальний розв'язок неоднорідної системи (3.52) будемо шукати у наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1(t)\varphi_1(t)+C_2(t)\varphi_2(t)=\begin{pmatrix}C_1(t)\mathrm{e}^{-t}+C_2(t)\mathrm{e}^{t}\\ 2C_1(t)\mathrm{e}^{-t}+C_2(t)\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів $C_1(t)$, $C_2(t)$ складаємо систему Лаґранжа (3.47):

$$\begin{cases}\dot{C}_1(t)\mathrm{e}^{-t}+\dot{C}_2(t)\mathrm{e}^{t}=0,\\ 2\dot{C}_1(t)\mathrm{e}^{-t}+\dot{C}_2(t)\mathrm{e}^{t}=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{t}+1}.\end{cases} \tag{3.56}$$

Віднявши від другого рівняння алгебраїчної системи (3.56) перше і поділивши на e^{-t}, маємо:

$$\dot{C}_1(t) = \frac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t + 1} \quad \Rightarrow \quad C_1(t) = 2\ln(\mathrm{e}^t + 1) + c_1 .$$

Тоді з першого рівняння (3.56), підставивши відоме значення $\dot{C}_1(t)$, дістанемо

$$\dot{C}_2(t) = -\frac{2\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + 1} = -\frac{2\mathrm{e}^{-2t}}{1 + \mathrm{e}^{-t}} \quad \Rightarrow \quad C_2(t) = 2[1 + \mathrm{e}^{-t} - \ln(1 + \mathrm{e}^{-t})] + c_2$$

(c_1, c_2 – довільні сталі). Підставивши знайдені коефіцієнти у (3.55), дістанемо загальний розв'язок неоднорідної системи (3.52). Випишемо його покомпонентно:

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{-t} \cdot [2\ln(\mathrm{e}^t + 1) + c_1] + \mathrm{e}^t \cdot [2 + 2\mathrm{e}^{-t} - 2\ln(1 + \mathrm{e}^{-t}) + c_2], \\ y &= 2\mathrm{e}^{-t} \cdot [2\ln(\mathrm{e}^t + 1) + c_1] + \mathrm{e}^t \cdot [2 + 2\mathrm{e}^{-t} - 2\ln(1 + \mathrm{e}^{-t}) + c_2]. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Виділимо з (3.57) частинний розв'язок, що справджує початкові умови (3.53). Підставивши функції (3.57) у (3.53), маємо:

$$\begin{aligned} &x(0) \equiv c_1 + 4 + c_2 = 0, \\ &y(0) \equiv 2\ln 2 + 2c_1 + 4 + c_2 = \ln 4. \end{aligned}$$

Звідси $c_1 = 0$, $c_2 = -4$. Підклавши ці значення в (3.57), одержимо шуканий розв'язок задачі Коші (3.52)-(3.53).

Відповідь. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} \cdot \ln(\mathrm{e}^t + 1) + 2\mathrm{e}^t \cdot [\mathrm{e}^{-t} - 1 - \ln(1 + \mathrm{e}^{-t})] \\ 4\mathrm{e}^{-t} \cdot \ln(\mathrm{e}^t + 1) + 2\mathrm{e}^t \cdot [\mathrm{e}^{-t} - 1 - \ln(1 + \mathrm{e}^{-t})] \end{pmatrix}.$

3.7. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів

ЛНСДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\dot{X} = AX + F(t), \tag{3.58}$$

де $X = \mathrm{col}(x_1(t) \ \ldots \ x_n(t))$ – вектор-стовпець із невідомих функцій, $F(t) = \mathrm{col}(f_1(t) \ \ldots \ f_n(t))$ – вектор-стовпець вільних членів, $A : n \times n$ – матриця зі сталими елементами.

Загальний розв'язок $X(t)$ ЛНСДР (3.58), як уже згадувалося в розділі 3.6, є сумою загального розв'язку $X_{з.о.}$ відповідної ЛОСДР (3.34) і деякого частинного розв'язку $X_{ч.н.}$ ЛНСДР (3.58). Як було показано в розділі 3.5, $X_{з.о.}$ можна побудувати за допомогою методу Ейлера залежно від коренів характеристичного рівняння (3.37).

Розглянемо випадок, коли вільний член $F(t)$ ЛНСДР (3.58) має вигляд ***векторного квазіполінома***

$$F(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(P_{s_1}(t)\cos\beta t + Q_{s_2}(t)\sin\beta t\right), \tag{3.59}$$

де $P_{s_1}(t)$, $Q_{s_2}(t)$ – n-вимірні вектор-функції, елементами яких є поліноми від змінної t максимальних степенів s_1 і s_2 відповідно; α, β – відомі дійсні числа.

Тоді для відшукання частинного розв'язку $X_{ч.н.}$ ЛНСДР (3.58) застосовний штучний метод, який має назву ***методу невизначених коефіцієнтів*** і дає змогу розв'язати ЛНСДР (3.58) без квадратур аналогічно до звичайного ЛНДР n-го порядку.

Згідно з цим методом частинний розв'язок $X_{ч.н.}$ ЛНСДР (3.58) шукаємо у вигляді подібного до (3.59) векторного квазіполінома

$$X_{ч.н.}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\overline{P}_{s+m}(t)\cos\beta t + \overline{Q}_{s+m}(t)\sin\beta t\right), \tag{3.60}$$

де $s = \max\{s_1, s_2\}$, а число m рівне кратності кореня ХР (3.37) $\gamma = \alpha + i\beta$ (якщо γ не є коренем ХР, то $m = 0$). Останнє значення називають ***контрольним числом*** для векторного квазіполінома (3.59).

Поліноми в вектор-функціях $\overline{P}_{s+m}(t)$, $\overline{Q}_{s+m}(t)$ записуємо з невизначеними коефіцієнтами, які як правило позначаються літерами. Числові значення цих коефіцієнтів знаходимо шляхом безпосередньої підстановки квазіполінома (3.60) у ЛНСДР (3.58).

Підставивши знайдені числові значення коефіцієнтів у (3.60), одержимо шуканий частинний розв'язок $X_{ч.н.}$ ЛНСДР (3.58). Тоді загальний розв'язок ЛНСДР (3.58) записується у вигляді суми

$$X(t) = X_{з.о.} + X_{ч.н.}. \tag{3.61}$$

Зауваження 3.1. Якщо $F(t)$ складається з кількох векторних квазіполіномів вигляду (3.59), яким відповідають різні контрольні числа, то для кожного з цих квазіполіномів частинний розв'язок записується окремо згідно з формулою (3.60), після чого $X_{ч.н.}$ шукається методом невизначених коефіцієнтів у вигляді суми всіх записаних частинних розв'язків.

Зауваження 3.2. Якщо вільний член ЛНСДР (3.58) не має спеціального вигляду (3.59), то загальний розв'язок такого рівняння знаходять за допомогою методу Лаґранжа аналогічно до ЛНСДР зі змінними коефіцієнтами згідно з алгоритмом, викладеним у Теоремі 3.3.

Приклад 3.8. Побудувати загальний розв'язок ЛНСДР методом невизначених коефіцієнтів (числових значень коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + 2\cos t - 9, \\ \dot{y} = 3x + y - z + 4t^2 - 5t\,\mathrm{e}^{-t}, \\ \dot{z} = x + z - 6t\sin t + 3\mathrm{e}^{2t} - 7t. \end{cases} \tag{3.62}$$

Розв'язання. Усі доданки вільних членів у рівняннях системи (3.62) мають вигляд квазіполіномів, тому для її розв'язання застосовний метод невизначених коефіцієнтів.

Отже, будемо шукати загальний розв'язок системи (3.62) у вигляді (3.61), і знайдемо спочатку $X_{з.о.}(t)$ методом Ейлера із відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z, \end{cases} \tag{3.63}$$

яка задається матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Її власні значення є коренями характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2,3} = 2$.

Отже, власне значення $\lambda = 2$ є коренем характеристичного рівняння кратності $m = 3$. Кратність цього власного значення, тобто кількість відповідних йому лінійно незалежних власних векторів, рівна $s = n - \operatorname{rang}(A - \lambda E)$. У нашому випадку

$$s = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Отже, для побудови $m = 3$ лінійно незалежних частинних розв'язків системи (3.63), що відповідають власному значенню $\lambda = 2$, треба визначити $s = 1$ власний вектор $h_1 = \operatorname{col}(h_{11},\ h_{12},\ h_{13}) \neq \vec{0}$ із рівності $(A - \lambda E)h_1 = \vec{0}$, а також ланцюжок із $m - s = 3 - 1 = 2$ приєднаних до нього векторів $h_2 = \operatorname{col}(h_{21},\ h_{22},\ h_{23})$, $h_3 = \operatorname{col}(h_{31},\ h_{32},\ h_{33})$ із рівностей $(A - \lambda E)h_2 = h_1$, $(A - \lambda E)h_3 = h_2$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно з правилами методу Ейлера для кратних коренів характеристичного рівняння відповідні до $\lambda = 2$ частинні розв'язки записуються у вигляді

$$\varphi_1(t) = h_1 \mathrm{e}^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}, \quad \varphi_2(t) = (h_1 t + h_2)\mathrm{e}^{\lambda t} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{2t},$$

$$\varphi_3(t) = \left(h_1 \frac{t^2}{2} + h_2 t + h_3 \right) \mathrm{e}^{\lambda t} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{2t}.$$

Тоді загальний розв'язок системи (3.63) $\operatorname{col}(x,\ y,\ z) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t)$, де c_1, c_2, c_3 – довільні сталі, тобто

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{з.о.} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + 0{,}5 c_3 t^2 \\ 2c_1 + c_2(2t-1) + c_3(t^2 - t) \\ c_1 + c_2(t-1) + c_3(0{,}5t^2 - t + 1) \end{pmatrix}. \qquad (3.64)$$

Побудуємо тепер частинний розв'язок $X_{ч.н.}$ неоднорідної системи (3.62). Оскільки вільні члени рівнянь цієї системи містять доданки, яким відповідають різні контрольні числа – у цьому можна переконатися, порівнюючи кожен доданок із загальним виглядом (3.59), – то $X_{ч.н.}$ буде сумою частинних розв'язків, побудованих за формулою (3.60) для кожного з квазіполіномів, утвореного з доданків, яким відповідає однакове контрольне число. Таких квазіполіномів отримуємо чотири:

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 0 \\ -6t\sin t \end{pmatrix}, \ F_2(t) = \begin{pmatrix} -9 \\ 4t^2 \\ -7t \end{pmatrix}, \ F_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5t\,e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \ F_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Визначимо вигляд частинного розв'язку для кожного з цих квазіполіномів.

1. Для вектор-функції $F_1(t)$ маємо: $\alpha = 0$ (числовий коефіцієнт у степені експоненти), $\beta = 1$ (числовий коефіцієнт в аргументі косинуса чи синуса), тоді контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = i$. Це число не є коренем характеристичного рівняння (маємо ***нерезонансний випадок***), тому $m = 0$. Останнє необхідне для застосування формули (3.60) число $k = 1$ (коефіцієнт при синусі є поліномом першого степеня – вищого за коефіцієнт при косинусі). Підставивши визначені α, β, m і k в формулу (3.60), одержимо загальний вигляд першої складової частинного розв'язку

$$X_{ч.н1}(t) = \overline{P_1}(t)\cos t + \overline{Q_1}(t)\sin t,$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ч.н.1} = \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \\ A_3 t + B_3 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} C_1 t + D_1 \\ C_2 t + D_2 \\ C_3 t + D_3 \end{pmatrix} \sin t. \qquad (3.65)$$

2. Для вектор-функції $F_2(t)$ маємо: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, тоді контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = 0$. Це число також не є коренем характеристичного рівняння, тому

$m=0$. Порівнюючи степені поліномів, знаходимо $k=2$ (найвищий степінь). Підставивши визначені α, β, m і k в формулу (3.60), одержимо загальний вигляд другої складової частинного розв'язку

$$X_{ч.н2}(t)=\overline{P}_2(t),$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ч.н.2} = \begin{pmatrix} E_1t^2+F_1t+G_1 \\ E_2t^2+F_2t+G_2 \\ E_3t^2+F_3t+G_3 \end{pmatrix}. \tag{3.66}$$

3. Для вектор-функції $F_3(t)$ маємо: $\alpha=-1$, $\beta=0$, і контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=-1$. Це число знову не є коренем характеристичного рівняння, тому $m=0$. Також очевидно $k=1$. Підставивши визначені α, β, m і k в формулу (3.60), одержимо загальний вигляд третьої складової частинного розв'язку

$$X_{ч.н.3}(t)=\overline{P}_1(t)\,\mathrm{e}^{-t},$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ч.н.3} = \begin{pmatrix} H_1t+I_1 \\ H_2t+I_2 \\ H_3t+I_3 \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{-t}. \tag{3.67}$$

4. Нарешті, для вектор-функції $F_4(t)$ маємо: $\alpha=2$, $\beta=0$, і контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=2$. Це число є трикратним коренем характеристичного рівняння, тому $m=3$ (***резонансний випадок***). Числовий коефіцієнт при експоненті є поліномом нульового степеня, тому $k=0$. Підставивши визначені α, β, m і k в формулу (3.60), одержимо загальний вигляд четвертої й останньої складової частинного розв'язку

$$X_{ч.н.4}(t)=\overline{P}_3(t)\,\mathrm{e}^{2t},$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ч.н.4} = \begin{pmatrix} J_1t^3+K_1t^2+L_1t+M_1 \\ J_2t^3+K_2t^2+L_2t+M_2 \\ J_3t^3+K_3t^2+L_3t+M_3 \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{2t}. \tag{3.68}$$

Шуканий частинний розв'язок $X_{ч.н.}(t)$ буде сумою чотирьох його складових (3.65), (3.66), (3.67) і (3.68). Позначені літерами коефіцієнти теоретично можна знайти безпосередньою підстановкою $X_{ч.н.}(t)$ у систему (3.62), однак у завданні знаходження їх числових значень не вимагається.

Згідно з формулою (3.61) загальний розв'язок неоднорідної системи (3.62) рівний сумі побудованого частинного розв'язку $X_{ч.н.}(t)$ і загального розв'язку (3.64) відповідної однорідної системи.

Відповідь. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + 0{,}5 c_3 t^2 \\ 2c_1 + c_2(2t-1) + c_3(t^2 - t) \\ c_1 + c_2(t-1) + c_3(0{,}5t^2 - t + 1) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \\ A_3 t + B_3 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} C_1 t + D_1 \\ C_2 t + D_2 \\ C_3 t + D_3 \end{pmatrix} \sin t +$$

$$+ \begin{pmatrix} E_1 t^2 + F_1 t + G_1 \\ E_2 t^2 + F_2 t + G_2 \\ E_3 t^2 + F_3 t + G_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_1 t + I_1 \\ H_2 t + I_2 \\ H_3 t + I_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{pmatrix} J_1 t^3 + K_1 t^2 + L_1 t + M_1 \\ J_2 t^3 + K_2 t^2 + L_2 t + M_2 \\ J_3 t^3 + K_3 t^2 + L_3 t + M_3 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}.$$

Приклад 3.9. Із застосуванням методу невизначених коефіцієнтів розв'язати задачу Коші для лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases} \tag{3.69}$$

за початкових умов

$$x(0) = 0, \;\; y(0) = 4. \tag{3.70}$$

Розв'язання. Усі доданки вільних членів у рівняннях системи (3.69) мають вигляд квазіполіномів, тому для її розв'язання застосовний метод невизначених коефіцієнтів.

Отже, будемо шукати загальний розв'язок системи (3.69) у вигляді (3.61), і знайдемо спочатку $X_{з.о.}(t)$ методом Ейлера із відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases} \tag{3.71}$$

Ця система задається матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Власні значення цієї матриці є коренями характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 .$$

Звідси $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$.

Щоб знайти ФСЧР системи (3.71), що відповідає знайденим дійсним однократним кореням характеристичного рівняння, визначимо власні вектори $h_1 = \mathrm{col}(h_{11},\ h_{12}) \neq \vec{0}$ та $h_2 = \mathrm{col}(h_{21},\ h_{22}) \neq \vec{0}$, елементи яких визначаються з рівностей $(A - \lambda_1 E)h_1 = \vec{0}$, $(A - \lambda_2 E)h_2 = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетривіальними розв’язками наведених систем, є, наприклад, $h_{11} = 1$, $h_{12} = -1$; $h_{21} = h_{22} = 1$. Отже, за власні вектори можна взяти $h_1 = \mathrm{col}(1,\ -1)$, $h_2 = \mathrm{col}(1,\ 1)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера відповідна до власних значень $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$ ФСЧР системи (3.71) має вигляд

$$\varphi_1(t) = h_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t},\ \ \varphi_2(t) = h_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}.$$

Тоді загальний розв’язок однорідної системи (3.71) $\mathrm{col}(x,\ y)_{з.о.} = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$, де $C_1,\ C_2$ – довільні сталі.

Побудову частинного розв’язку $X_{ч.н.}(t)$ неоднорідної системи (3.69) розпочнемо з визначення кількості його складових. Для цього виділимо з вільного члена квазіполіноми, що відповідають різним контрольним числам. Таких квазіполіномів отримуємо два:

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{t} \\ 0 \end{pmatrix},\ \ F_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вигляд частинного розв'язку для кожного з цих квазіполіномів.

1. Для вектор-функції $F_1(t)$ маємо: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, тоді контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = 1$. Це число є однократним коренем характеристичного рівняння тому $m = 1$. Числовий коефіцієнт при експоненті є поліномом нульового степеня, тому $k = 0$. Підставивши визначені α, β, m і k в формулу (3.60), одержимо загальний вигляд першої складової частинного розв'язку

$$X_{ч.н.1}(t) = \overline{P}_1(t)\,\mathrm{e}^t,$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{ч.н.1} = \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t. \tag{3.72}$$

2. Для вектор-функції $F_2(t)$ маємо: $\alpha = 4$, $\beta = 0$, і контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = 4$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m = 0$. Числовий коефіцієнт при експоненті є поліномом нульового степеня, тому $k = 0$. Підставивши визначені α, β, m і k в формулу (3.60), одержимо загальний вигляд другої складової частинного розв'язку

$$X_{ч.н.2}(t) = \overline{P}_0(t)\,\mathrm{e}^{4t},$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{ч.н.2} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{4t}. \tag{3.73}$$

Частинний розв'язок буде сумою двох його складових (3.72) і (3.73). Випишемо його покомпонентно:

$$\begin{aligned} x_{ч.н.} &= (A_1 t + B_1)\mathrm{e}^t + D_1\,\mathrm{e}^{4t}, \\ y_{ч.н.} &= (A_2 t + B_2)\mathrm{e}^t + D_2\,\mathrm{e}^{4t}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Числові значення невизначених коефіцієнтів знаходимо підстановкою (3.74) у неоднорідну систему (3.69). Маємо:

$$(A_1 t + B_1 + A_1)\mathrm{e}^t + 4D_1\,\mathrm{e}^{4t} = 2(A_1 t + B_1)\mathrm{e}^t + 2D_1\,\mathrm{e}^{4t} + (A_2 t + B_2)\mathrm{e}^t + D_2\,\mathrm{e}^{4t} + 2\mathrm{e}^t,$$

$$(A_2 t + B_2 + A_2)\mathrm{e}^t + 4D_2\,\mathrm{e}^{4t} = (A_1 t + B_1)\mathrm{e}^t + D_1\,\mathrm{e}^{4t} + 2(A_2 t + B_2)\mathrm{e}^t + 2D_2\,\mathrm{e}^{4t} - 3\mathrm{e}^{4t}.$$

Щоб останні рівності виконувалися для довільних t, коефіцієнти при однакових функціях зліва і справа повинні співпадати. Отже,

$$t\,\mathrm{e}^t: \quad \begin{cases} A_1 = 2A_1 + A_2, \\ A_2 = A_1 + 2A_2; \end{cases} \quad \mathrm{e}^t: \quad \begin{cases} B_1 + A_1 = 2B_1 + B_2 + 2, \\ B_2 + A_2 = B_1 + 2B_2; \end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{4t}: \quad \begin{cases} 4D_1 = 2D_1 + D_2, \\ 4D_2 = D_1 + 2D_2 - 3. \end{cases}$$

Наведені рівності справджуються, наприклад, для наступного набору числових значень: $A_1 = 1$, $A_2 = B_2 = D_1 = -1$, $B_1 = 0$, $D_2 = -2$. Підклавши ці значення у (3.74), одержимо остаточний вигляд частинного розв'язку

$$\begin{aligned} x_{ч.н.} &= t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{4t}, \\ y_{ч.н.} &= (-t-1)\,\mathrm{e}^t - 2\,\mathrm{e}^{4t}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Додавши до (3.75) покомпонентно загальний розв'язок $\mathrm{col}(x,\ y)_{з.о.} = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$ однорідної системи (3.71), одержимо загальний розв'язок ЛНСДР (3.69):

$$\begin{aligned} x &= C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{3t} + t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{4t}, \\ y &= -C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{3t} - (t+1)\,\mathrm{e}^t - 2\,\mathrm{e}^{4t}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Виділимо з (3.76) частинний розв'язок, що справджує початкові умови (3.70). Підставивши функції (3.76) у (3.70), маємо:

$$\begin{aligned} x(0) &\equiv C_1 + C_2 - 1 = 0, \\ y(0) &\equiv -C_1 + C_2 - 3 = 4. \end{aligned}$$

Звідси $C_1 = -3$, $C_2 = 4$. Підклавши ці значення в (3.76), одержимо шуканий розв'язок задачі Коші (3.69)-(3.70).

Відповідь. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cdot (t-3) + 4\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{4t} \\ \mathrm{e}^t \cdot (2-t) + 4\mathrm{e}^{3t} - 2\mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}.$

3.8. Експонента матриці та її властивості

Позначимо через $M_n(\mathrm{C})$ клас матриць розмірності $n \times n$ зі сталими (загалом кажучи, комплекснозначними) елементами.

Означення 3.9. ***Експонентою*** e^A матриці $A \in M_n(\mathbb{C})$ називається сума матричного ряду

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots, \tag{3.77}$$

де E – одинична матриця. Ряд (1) є збіжним для будь-якої матриці $A \in M_n(\mathbb{C})$, а сума ряду e^A є матрицею тієї ж розмірності, що й A.

Властивості матричної експоненти:

1. Для кожної матриці $A \in M_n(\mathbb{C})$ справджується рівність:

$$e^A = \lim_{m \to \infty} \left(E + \tfrac{1}{m} A\right).$$

2. Якщо матриці A та B комутують, тобто $AB = BA$, то

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.$$

3. Матриця e^A є невиродженою для кожної $A \in M_n(\mathbb{C})$, оскільки

$$\det\, e^A = e^{\operatorname{tr} A},$$

де $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ – слід матриці A.

4. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

5. Експоненти подібних матриць є подібними матрицями, тобто якщо

$$A = HBH^{-1}, \text{ то } e^A = H\, e^B\, H^{-1}.$$

6. Для кожної невиродженої матриці $B \in M_n(\mathbb{C})$ існує така матриця A, що

$$B = e^A.$$

Матрицю A називають логарифмом матриці B і записують $A = \ln B$.

7. Матриця $X(t) = e^{At}$ є розв'язком лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX \tag{3.78}$$

за початкової умови

$$X(0) = E. \tag{3.79}$$

Нехай $\{x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)\}$, де $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ – n-вимірні вектори-стовпці, – деяка фундаментальна система частинних розв'язків (ФСЧР) системи (3.78). Складемо ***фундаментальну матрицю*** $X(t): n\times n$, $X(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t))$.

Означення 3.10. Фундаментальну матрицю $X(t)$, для якої виконується початкова умова $X(t_0)=E$, називають ***матрицантом*** системи (3.78), нормованим у точці $t=t_0$, і позначають $X(t,t_0)$.

Із властивостей експоненти матриці випливає: якщо відомий матрицант $X(t,0)$ системи (3.78), тобто матриця $X(t)=\mathrm{e}^{At}$, яка одержується як розв'язок задачі Коші (3.78), (3.79), тоді експонента матриці A рівна

$$\mathrm{e}^{A}=X(1).$$

Отже, обчислення експоненти матриці A можна проводити за наступною схемою:

1. Знаходимо власні значення матриці A і відповідну ФСЧР із системи (3.78).
2. Складаємо фундаментальну матрицю $X(t)$ системи (3.78).
3. Якщо для отриманої фундаментальної матриці не виконується умова (3.79), то нормалізуємо цю матрицю в точці $t=0$ шляхом знаходження такої сталої матриці C, для якої $X(0)\cdot C=E$. Тоді шуканий матрицант $X(t,0)=X(t)\cdot C$.
4. Отже, експонента матриці A рівна

$$\mathrm{e}^{A}=X(t,0)\big|_{t=1}. \tag{3.80}$$

Інший спосіб відшукання матрицанта $X(t,0)$ використовує канонічну жорданову форму матриці A.

Нехай $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m\}$ – множина всіх різних власних значень матриці A. Позначимо

$$J=\begin{pmatrix} J_{k_1(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_p(\lambda_m)} \end{pmatrix}$$

канонічну жорданову форму матриці A, де $J_k(\lambda_i)$ – жорданова клітина (жордановий блок) розмірності $k \times k$, що відповідає власному значенню λ_i. Ці клітини (блоки) формуються за наступними правилами:

а) кожному дійсному власному значенню λ, однократному в розумінні кореня характеристичного рівняння, відповідає один одновимірний блок

$$J_1(\lambda) = (\lambda);$$

б) кожній парі комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, однократних у розумінні коренів характеристичного рівняння, відповідають або два комплекснозначні блоки

$$J_1(\lambda_1) = (\alpha + i\beta), \quad J_1(\lambda_2) = (\alpha - i\beta),$$

або одна дійснозначна двовимірна жорданова клітина, що формується задля спрощення обчислень:

$$J_2(\lambda_{1,2}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}; \tag{3.81}$$

в) k-кратному (у розумінні кореня характеристичного рівняння) дійсному власному значенню λ відповідають $s = n - \mathrm{rang}(A - \lambda E)$ жорданових клітин (по одній для кожного власного вектора), сумарна розмірність яких рівна k. Ці клітини записуються у вигляді:

$$J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_p(\lambda): p \times p,$$

де λ позначає власний вектор, а одиниці – приєднані до нього вектори.

Нехай тепер H – матриця, складена з усіх власних і приєднаних векторів, що відповідають власним значенням $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_m$ матриці A:

$$H = (h_1, \ h_2, \ \ldots, \ h_n).$$

Задля спрощення обчислень у випадку комплексних власних векторів у матрицю H записуватимемо їх дійсну та уявну частини, тобто при $h_1 = u + iv$, $h_2 = u - iv$ за перші два стовпці матриці H будемо брати вектори u і v.

Тоді справджується рівність

$$H^{-1}AH = J\,, \tag{3.82}$$

звідки згідно з властивостями матричної експоненти

$$X(t,0) \equiv \mathrm{e}^{At} = H\,\mathrm{e}^{Jt}\,H^{-1}, \tag{3.83}$$

де

$$\mathrm{e}^{Jt} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{J_{k_1}(\lambda_1)t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{J_{k_p}(\lambda_m)t} \end{pmatrix}, \tag{3.84}$$

а матриці $\mathrm{e}^{J_p(\lambda)t}$ для дійсних λ визначаються згідно з формулами

$$\mathrm{e}^{J_p(\lambda)t} = \mathrm{e}^{\lambda t}\cdot\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ & 0 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(тут p – розмірність жорданової клітини). У випадку пари комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ жордановій клітині вигляду (3.81) відповідає блок

$$\mathrm{e}^{J_2(\alpha \pm i\beta)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Обчисливши матрицант за формулою (3.83), експоненту матриці A знаходимо з рівності (3.80).

Таким чином, ще одна схема обчислення експоненти матриці A полягає в наступному:

1. Знаходимо власні значення матриці A.

2. Знаходимо власні та приєднані вектори, що відповідають знайденим власним значенням матриці A, і складаємо з них як зі стовпців матрицю перетворення H.
3. Будуємо канонічну жорданову форму матриці A за формулою (3.82). Зауважимо, що жорданова форма J легко виписується за відомими власними значеннями, тому формулу (3.82) можна використати просто як перевірку правильності обчислень на цьому етапі.
4. Знаходимо e^{Jt} у вигляді (3.84) за вказаними формулами для клітин цієї матриці.
5. За формулою (3.83) обчислюємо матрицант $X(t,0)=\mathrm{e}^{At}$. Зауважимо, що для отриманої матриці повинна виконуватися умова (3.79), яку доцільно використати для перевірки правильності обчислень на цьому етапі.
6. Знаходимо експоненту матриці A з рівності (3.80).

Зауваження 3.3. Оскільки $X(t,0)$ є фундаментальною матрицею системи (3.78), то загальний розв'язок цієї системи можна записати у вигляді

$$X(t)=X(t,0)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2, ..., C_n – довільні сталі.

Аналогічно: оскільки $X(t,0)$ справджує умову (3.79), то розв'язок задачі Коші для системи (3.78) з довільною початковою умовою $X(0)=X_0$, де X_0 – заданий n-вимірний вектор-стовпець зі сталими елементами, знаходиться за формулою:

$$X(t)=X(t,0)\cdot X_0.$$

Приклад 3.10. Знайти експоненту матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Згідно з властивостями експоненти матриці, матрицю e^A можна знайти, побудувавши матрицант $X(t) = e^{At}$ – фундаментальну матрицю лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь $\dot{X} = AX$, для якої справджується початкова умова $X(0) = E$ (одинична матриця). Якщо відомий матрицант $X(t) = e^{At}$, то тоді експонента матриці *A* рівна $e^A = X(1)$.

Для знаходження матриціанта користуються співвідношеннями

$$H^{-1}AH = J, \tag{3.77}$$

$$X(t) \equiv e^{At} = H e^{Jt} H^{-1}, \tag{3.78}$$

де *H* – матриця, сформована з усіх власних і приєднаних векторів, що відповідають різним власним значенням матриці *A* (у випадку комплексно спряжених власних значень беруться дійсна і уявна частини комплексно спряжених власних векторів), *J* – канонічна жорданова форма матриці *A*, а e^{Jt} – експонента матриці *Jt*.

Для застосування формул (3.77), (3.78) спочатку знайдемо власні значення матриці *A* як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$.

Щоб сформувати матрицю перетворення (3.77) *H*, знайдемо для одного з комплексно спряжених власних значень, наприклад, $\lambda_1 = 1 + 3i$, відповідний власний вектор $\gamma = \mathrm{col}(\gamma_1,\ \gamma_2) \neq \vec{0}$, елементи якого визначаються з рівності $(A - \lambda_1 E)\gamma = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Одним із нетривіальних розв'язків є, наприклад, $\gamma_1 = i$, $\gamma_2 = 1$. Отже, за власний вектор можна взяти $\gamma = \mathrm{col}(i,\ 1)$. За стовпці матриці *H* візьмемо вектори $h_1 = \mathrm{Re}\gamma = \mathrm{col}(0,\ 1)$, $h_2 = \mathrm{Im}\gamma = \mathrm{col}(1,\ 0)$. Тоді

$$H=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1}=H=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Згідно з правилами формування жорданових клітин парі комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2}=1\pm 3i$ відповідає один двовимірний жордановий блок

$$J=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}. \qquad (3.79)$$

Для перевірки правильності обчислень на цьому етапі скористаємося рівністю (3.78):

$$H^{-1}AH=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}=J,$$

тобто рівність справді виконується.

Згідно з правилами запису експоненти матриці Jt за відомою жордановою формою (3.79) отримуємо:

$$\mathrm{e}^{Jt}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\cos 3t & \mathrm{e}^t\sin 3t\\ -\mathrm{e}^t\sin 3t & \mathrm{e}^t\cos 3t\end{pmatrix}.$$

Тепер можемо знайти шуканий матрицант із рівності (3.78):

$$X(t)\equiv\mathrm{e}^{At}=H\,\mathrm{e}^{Jt}H^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\cos 3t & \mathrm{e}^t\sin 3t\\ -\mathrm{e}^t\sin 3t & \mathrm{e}^t\cos 3t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\cos 3t & -\mathrm{e}^t\sin 3t\\ \mathrm{e}^t\sin 3t & \mathrm{e}^t\cos 3t\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що для отриманої матриці очевидно справджується початкова умова $X(0)=E$, яка повинна виконуватися за означенням матрицанта.

Тоді експонента матриці A $\mathrm{e}^A=X(1)$.

Відповідь. $\mathrm{e}^A=\mathrm{e}\cdot\begin{pmatrix}\cos 3 & -\sin 3\\ \sin 3 & \cos 3\end{pmatrix}.$

Приклад 3.11. Знайти експоненту матриці

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Будемо шукати експоненту за алгоритмом, викладеним у Прикладі 3.10. Спочатку знайдемо власні значення матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\det(A-\lambda E)\equiv\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & -1\\ 2 & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3=0.$$

Звідси $\lambda_{1,2,3}=-1$.

Отже, власне значення $\lambda=-1$ є коренем кратності $m=3$ характеристичного рівняння. Кратність цього власного значення, тобто кількість відповідних йому лінійно незалежних власних векторів, рівна $s=n-\mathrm{rang}(A-\lambda E)$. У нашому випадку

$$s=3-\mathrm{rang}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=3-1=2.$$

Отже, щоб сформувати матрицю перетворення (3.77) H, треба для власного значення $\lambda=-1$ визначити $s=2$ лінійно незалежних власних векторів $h_1=\mathrm{col}(h_{11},\ h_{12},\ h_{13})\neq\vec{0}$, $h_2=\mathrm{col}(h_{21},\ h_{22},\ h_{23})\neq\vec{0}$ із рівностей $(A-\lambda E)h_1=\vec{0}$, $(A-\lambda E)h_2=\vec{0}$, а також $m-s=3-2=1$ приєднаний до одного з них, наприклад, до h_2, вектор $h_3=\mathrm{col}(h_{31},\ h_{32},\ h_{33})$ із рівності $(A-\lambda E)h_3=h_2$. Маємо:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_{11}\\ h_{12}\\ h_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad h_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_{21}\\ h_{22}\\ h_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_{31}\\ h_{32}\\ h_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_{21}\\ h_{22}\\ h_{23}\end{pmatrix}.\end{cases}$$

Система рівнянь для елементів вектора h_3 має розв'язок, якщо $h_2 = \mathrm{col}(k,\ k,\ 2k)$, де k – будь-яке дійсне число, не рівне нулю. Зауважимо, що за $k \neq 0$ вектор h_2 очевидно буде лінійно незалежним відносно вибраного вектора h_1. Покладемо $k = 1$, тоді $h_2 = \mathrm{col}(1,\ 1,\ 2)$, а за приєднаний вектор можна взяти $h_3 = \mathrm{col}(1,\ 0,\ 0)$.

Тепер можемо сформувати матрицю *H*, стовпцями якої будуть знайдені вектори, і побудувати обернену до неї матрицю H^{-1}:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки власному значенню $\lambda = -1$ відповідають два лінійно незалежні власні вектори, то для кожного з них формується окрема жорданова клітина, причому вектору h_1 відповідатиме одновимірний блок $J_1(\lambda) = (-1)$, а вектору h_2 – двовимірний блок $J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (одиниця у правому верхньому куті позначає приєднаний вектор). Тому канонічна жорданова форма матриці *A* має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.80}$$

Для перевірки правильності обчислень на цьому етапі скористаємося рівністю (3.78):

$$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J,$$

тобто рівність справді виконується.

Згідно з правилами запису експоненти матриці *Jt* за відомою жордановою формою (3.80) отримуємо:

$$
e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t\,e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.
$$

Тепер можемо знайти шуканий матрицант із рівності (3.78):

$$
X(t) \equiv e^{At} = H\,e^{Jt}\,H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t\,e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} & e^{-t}(t+1) \\ 0 & e^{-t} & t\,e^{-t} \\ e^{-t} & 2\,e^{-t} & 2t\,e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} t+1 & t & -t \\ t & t+1 & -t \\ 2t & 2t & 1-2t \end{pmatrix}.
$$

Зауважимо, що для отриманої матриці очевидно справджується початкова умова $X(0) = E$, яка повинна виконуватися за означенням матрицанта.

Тоді експонента матриці A $e^{A} = X(1)$.

Відповідь. $e^{A} = e^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Завдання для індивідуальної роботи №6

Постановка завдань:

1. Розв'язати лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь методом Ейлера.

2. Знайти загальний розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь.

3. Розв'язати лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь методом варіації сталих (Лаґранжа).

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (числові значення коефіцієнтів не знаходити).

5. Знайти експоненту матриці.

Варіант 1

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - z, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = 2x - z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y + e^t, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y + t. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 2

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x - z, \\ \dot{y} = -x - 3z, \\ \dot{z} = 2x - y - z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z + e^{-t}\sin 2t, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Варіант 3

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = -x - y - z, \\ \dot{y} = -x - 2z, \\ \dot{z} = x. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 3t\cos t, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z + 2e^{2t}. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 4

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = 2x - z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z - 2t + 1, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Варіант 5

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x + \sin t, \\ \dot{y} = z + x - t\cos t, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 6

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y - te^{t}\sin 2t, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Варіант 7

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 5t^2, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x + 1. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 8

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = x + 2z + 5t, \\ \dot{z} = y - 2x - z. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Варіант 9

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = 3x - y - 2z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z + 7e^{3t}, \\ \dot{z} = x - y + 2z - \cos 4t. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 10

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = x + 4y - 2z, \\ \dot{z} = x + 5y - 3z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^{t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z + t - 1, \\ \dot{z} = 2z - x + y. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Варіант 11

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -2x - y + 2z, \\ \dot{z} = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z + 3\sin t + 1, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 12

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x - y + z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16t\,\mathrm{e}^{t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z - t\cos t, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z - \mathrm{e}^{2t}, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Варіант 13

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y + z, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y + 3t^2 + 2t + 1. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Варіант 14

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y + \mathrm{e}^{-t}, \\ \dot{z} = 2x + y - z - \cos 2t. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 15

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z + 3t, \\ \dot{z} = x - z - 2\mathrm{e}^{3t}. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Варіант 16

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = z - x. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2\mathrm{e}^{t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z + t\cos 3t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y - 2\sin 3t. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 17

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2z, \\ \dot{y} = -x + 2z, \\ \dot{z} = -2x + 3z. \end{cases}$ **3.**

$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + \mathrm{e}^{4t}, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z - 7t\,\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 18

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = 2x + 2y - 3z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2\mathrm{e}^{t}, \\ \dot{y} = x + 2y - 3\mathrm{e}^{4t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y - 2z + 4, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 3x + 3y - z - 2t. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Варіант 19

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - z, \\ \dot{y} = x - y, \\ \dot{z} = 3x - y - z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = y + \mathrm{e}^{-t}\sin t, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = z. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 20

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + z, \\ \dot{z} = 2z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5\mathrm{e}^{t}\sin t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3z + t\,\mathrm{e}^{t}\cos 3t, \\ \dot{y} = -x + 2y + 3z - 2\sin 3t, \\ \dot{z} = y - z. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Варіант 21

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 2z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x + y - 3z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = y + \mathrm{tg}^2\, t - 1, \\ \dot{y} = -x + \mathrm{tg}\, t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z - t\cos t, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z - \mathrm{e}^{2t}, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Варіант 22

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = 3x - y - 2z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{\mathrm{e}^{3t}}{\mathrm{e}^{2t} + 1}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y + \mathrm{e}^{t}, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y + t. \end{cases}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 23

1. $\dot{X}=AX$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases}\dot{x}=2x+y-z,\\ \dot{y}=-x+z,\\ \dot{z}=x+y.\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}\dot{x}=-4x-2y+\dfrac{2}{e^t-1},\\ \dot{y}=6x+3y-\dfrac{3}{e^t-1}.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dot{x}=2x-y-z+t\cos t,\\ \dot{y}=2x-y-2z,\\ \dot{z}=2z-x+y-2e^{3t}.\end{cases}$ **5.** $A=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Варіант 24

1. $\dot{X}=AX$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases}\dot{x}=2x-y-z,\\ \dot{y}=x-z,\\ \dot{z}=3x-y-2z.\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}\dot{x}=-x-y+\dfrac{1}{\cos t},\\ \dot{y}=2x+y.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dot{x}=x-y-z,\\ \dot{y}=x+y-te^t\sin 2t,\\ \dot{z}=3x+z.\end{cases}$ **5.** $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

Варіант 25

1. $\dot{X}=AX$, $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. **2.** $\begin{cases}\dot{x}=y+z,\\ \dot{y}=x+y,\\ \dot{z}=z-x.\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}\dot{x}=3x-2y,\\ \dot{y}=2x-y+15e^t\sqrt{t}.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dot{x}=2x-y+z-3t\cos t,\\ \dot{y}=x+2y-z,\\ \dot{z}=x-y+2z+2e^{2t}.\end{cases}$ **5.** $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -3 & -1\end{pmatrix}$.

Список рекомендованої літератури

1. *Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В*. Звичайні диференціальні рівняння. Навчально-методичний посібник для студентів математичних та фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів, частина 1, Івано-Франківськь, "ЛІК", 2005.120 с.
2. *Городецький Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк В. М.* Диференціальні рівняння. Л.: ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. 470 с.
3. *Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М.* Диференціальні та інтегральні рівняння. К.: Либідь, 2004. 408 с.
4. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2. М.: «Наука», 1970. 576 с.
5. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. К.: Вища школа, 1994. 454 с.
6. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. К.: Либідь, 2003. 600 с.
7. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468с.
8. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 176 с.
9. *Rontó Miklós, Raisz Péterné*. Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. – Miskolci egyetemi kiadó, 2004. 324 o.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Навчальний посібник

із курсу «*Диференціальні рівняння*»

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь, канд. фіз.-мат. наук, доц. Рейтій О. К.

Автори: ст. викл. Рего В. Л.
канд. фіз.-мат. наук Варга Я. В.
д-р. фіз.-мат. наук, доц. Король І. І.

Рецензенти: д-р. фіз.-мат. наук, проф. Ронто М. Й.,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Синявська О. О.