МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

СУСЛІКОВ Л. М., СТУДЕНЯК І.П.

ЗАДАЧІ З МЕТРОЛОГІЇ
ТА
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Навчально-методичний
посібник
для студентів фізико-технічних спеціальностей

УЖГОРОД – 2018

УДК 006.91(075.8)
ББК Ж10я73
С-90

Сусліков Л.М., Студеняк І.П. Задачі з метрології та методичні рекомендації щодо їх розв’язання: Навчально-методичний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ, 2018. - 224 с.

Навчально-методичний посібник "Задачі з метрології та методичні рекомендації щодо їх розв’язання" призначений для індивідуальної роботи студентів, що вивчають дисципліни "Основи метрології", "Метрологія та вимірювання". Він містить короткі теоретичні відомості, методичні вказівки щодо розв’язання типових задач метрології, приклади розв’язання задач та завдання для самостійної роботи, а також список рекомендованої літератури.

Посібник може бути використаний при проведенні практичних і лабораторних занять, пов'язаних з оцінкою похибок отримуваних результатів. Він також буде корисний широкому колу студентів, аспірантів і науково-педагогічних працівників при вирішенні ними конкретних практичних завдань метрології.

Рецензенти:

Пуга П.П.– старший науковий співробітник Інституту електронної фізики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор

Онопко В.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри електронних систем УжНУ

Рекомендовано редакційно–видавничою Радою Ужгородського національного університету (протокол № від 2018 р.)

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації по виконанню самостійної роботи студентів розроблені у рамках навчального плану дисципліни "Основи метрології " по ряду спеціальностей і напрямів підготовки дипломованих фахівців і підготовки бакалаврів і магістрів і призначені для організації і контролю самостійної роботи студентів.

Завданням дисципліни є формування у студентів достатніх знань в області основ метрології, що дозволяють використати сучасні вимірювальні технології, які є послідовністю дій, спрямованих на отримання вимірювальної інформації необхідної якості, що відбиває сучасні підходи до вирішення складних науково-технічних завдань.

Одне з таких завдань пов'язане з пошуком і встановленням істотних закономірностей зміни значень вимірюваних величин, які найадекватніше відбивають стани досліджуваних об'єктів.

Високоточні вимірювання і подальша обробка отриманих результатів набувають все більшого значення у багатьох сферах людської діяльності. Як правило, вимірювання безпосередньо пов'язані із завданнями оцінки (розпізнавання) станів досліджуваних об'єктів, тобто з пошуком закономірностей взаємозв'язку і зміни значень вимірюваних величин. Такий пошук неможливий без використання методів математичної обробки результатів вимірювань.

В той же час, як показує практика, існують труднощі в засвоєнні і розумінні студентами зв'язку завдань вимірювань і положень загальної метрології з характером і обгрунтованістю методів математичної обробки отримуваних результатів.

Метрологія стала такою наукою, на досягнення, засоби і методи якої спираються у своєму розвитку як фундаментальні, так і прикладні наукові напрями. Розвиток наукових теорій і їх практичне застосування неможливі без первинної інформації, що отримується шляхом вимірювань в процесі наукового пізнання. Без вимірювань сьогодні не може обійтися жодна наука, тому метрологія знаходиться у зв'язку з усіма науковими дисциплінами.

Мета цього навчально-методичного посібника – представити вказаний зв'язок, наскільки це можливо, в чіткому і систематизованому виді.

Усе більш очевидним стає той факт, що в процесі підготовки фахівця головним є не засвоєння готових знань, а розвиток у випускників здібностей до оволодіння методами пізнання, що дають можливість самостійно набувати знань, творчо їх використовувати на основі відомих або нових створених способів і засобів діяльності. Змінюється сама парадигма кінцевої освітньої мети: від "фахівця-виконавця" до компетентного "професіонала-дослідника".

Стати таким фахівцем без добре сформованих умінь і навичок самостійної учбової діяльності неможливо. У рамках вимог вищої освіти до рівня підготовки випускників вони повинні:

1. бути здатними до самостійного пошуку істини, до системної дії в професійній ситуації;

2. бути здатними до аналізу і проектування своєї діяльності;

3. мати прагнення до самоудосконалення (самосвідомості, самоконтролю, саморегуляції, саморозвитку);

4. прагнути до творчої самореалізації.

Самостійна робота студентів, а саме цю мету переслідує даний посібник, - одна із засадничих вимог вищої освіти.

Самостійна робота студентів - це активні форми індивідуальної і колективної діяльності, спрямовані на закріплення, розширення і систематизацію пройденого матеріалу за темами навчальної дисципліни "Основи метрології ".

Самостійна робота є одним з видів учбового зайняття студентів, цілями якої є:

- систематизація і закріплення отриманих теоретичних знань і практичних умінь студентів;
- поглиблення і розширення теоретичних знань;
- формування умінь використовувати різні інформаційні джерела: нормативну, правову, довідкову документацію і спеціальну літературу;
- розвиток пізнавальних здібностей і активності студентів, творчої ініціативи, самостійності, відповідальності і організованості;
- формування самостійності мислення, здібностей до саморозвитку, самоудосконалення і самореалізації;
- розвиток дослідницьких умінь.

Даний посібник містить приклади рішень типових метрологічних завдань, рекомендації щодо виконання завдань, значний матеріал для самостійного роботи і підготовки до контрольних робіт по навчальній дисципліні.

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

Перш ніж приступити до розв'язання завдань необхідно коротко повторити теоретичний матеріал по темі зайняття. Ретельно вивчити методичні вказівки до завдань конкретної теми, ознайомитися з порядком їх виконання і вимогами оформлення. Для цього рекомендується при розв'язанні завдань при собі мати зошит з лекціями або електронний варіант лекцій, методичних вказівок до цього завдання.

Вимоги до оформлення.

1. Завдання з невеликою розрахунковою частиною рекомендується вирішувати в загальному вигляді і потім в отримані формули підставляти числові значення величин.

2. Для завдань з громіздкими обчисленнями необхідно спочатку показати загальний метод рішення, скласти відповідні рівняння, які зручніше потім розв'язувати з підставленими числовими значеннями.

3. Усі графічні побудови необхідно виконувати ретельно (із застосуванням креслярського приладдя) і з обов'язковою вказівкою прийнятих масштабів.

4. Результати, отримані при розв'язанні задачі, по можливості рекомендується перевірити декількома методами.

5. Якщо при розв'язанні задачі або при вивченні теоретичного матеріалу виникнуть труднощі, необхідно звернутися за консультацією до викладача, висловлюючи при цьому свої міркування щодо розв'язання завдань.

Робота над контрольним завданням допомагає студентам перевірити міру знання курсу, виробляє навички чітко і коротко викладати свої думки.

Для успішного досягнення цієї мети необхідно керуватися наступними правилами:

- починаючи розв'язок задачі, необхідно мати чітке уявлення про те, які фізичні закони або розрахункові методи слід покласти в основу її рішення;
- ретельно продумати, які літерні символи використати при вирішенні задачі, причому необхідно пояснити значення кожного символу словами або ж відповідними зображеннями на схемі;
- якщо одне і те ж завдання вирішується двома методами, то в обох випадках одна і та ж величина повинна позначатися однаково;
- проміжні і остаточні результати мають бути виписані на окремих рядках і чітко виділені із загального тексту;
- рішення задачі не слід перевантажувати наведенням усіх перетворень алгебри і арифметичних розрахунків;
- кожний етап розв'язку задачі повинен супроводжуватися відповідними поясненнями;
- при побудові графіків на осях координат потрібно наносити рівномірні шкали і вказувати величини, що відкладаються по осях координат, а також одиниці їх вимірювання.

РОЗДІЛ 1. ЗАСОБИ ВИМІРЮВАНЬ ТА ЇХ ПОХИБКИ

1.1. Теоретичні відомості

Вимірювання — це процес експериментального знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів. Під технічним засобом розуміють **засіб вимірювань** (ЗВ), який застосовується під час вимірювань і має нормовані метрологічні характеристики. Звідси випливає, що засоби вимірювань є невід’ємною складовою процесу вимірювань. Від засобів вимірювань залежить правильне визначення вимірюваної величини в процесі вимірювання.

Залежно від виду вимірюваних величин, необхідної їх точності, умов проведення експерименту та виду потрібної інформації використовуються різноманітні засоби вимірювальної техніки, що видають відповідні сигнали вимірювальної інформації. Будь-яка фізична вимірювана величина завдяки засобам вимірювання перетворюється на відповідний сигнал, який спостерігач сприймає безпосередньо на шкалі приладу, або ж після перетворення і опрацювання передається через канали зв'язку на інші засоби вимірювання у вигляді сигналу зовсім іншої фізичної величини.

Обов'язковими компонентами будь-якого вимірювання є ЗВ (прилад, вимірювальна установка, вимірювальна система), метод вимірювання і людина, що проводить вимірювання. Недосконалість кожного з цих компонентів призводить до появи своєї складової похибки результату вимірювання. Відповідно до цього, за джерелом (причинами) виникнення розрізняють **інструментальні, методичні і особистісні (суб'єктивні) похибки.**

Інструментальні (апаратурні, приладові) похибки виникають внаслідок недосконалості ЗВ, тобто вони обумовлені похибками ЗВ. Джерелами інструментальних похибок можуть бути, наприклад, неточне градуювання приладу і зміщення нуля, варіація показів приладу в процесі експлуатації тощо.

Від похибок, які властиві засобам вимірювань, залежить похибка результата вимірювань будь-якої фізичної величини, тобто похибка засобів вимірюваннь є важливою складовою, яка суттєво впливає на якість вимірювань.

Точність ЗВ є характеристикою якості ЗВ і відбиває близькість його похибки до нуля. Вважається, що чим менша похибка, тим точніший ЗВ.

Похибка засобу вимірювань – це є різниця між значенням величини, отриманим за допомогою цього засобу і істинним значенням вимірюваної величини. Оскільки істинне значення величини невідомо, на практиці замість нього користуються значенням величини, отриманим за допомогою більш точного засобу вимірювань.

Для робочого засобу вимірювань більш точним є зразковий засіб вимірювань, для зразкового – еталон. Державний еталон звіряють з міжнародним еталоном.

Похибки засобів вимірювальної техніки класифікують за наступними ознаками:

1. за характером прояву – систематичні і випадкові;
2. за умовами виникнення – основні і додаткові;
3. по відношенню до вимірюваної величини – динамічні і статичні;
4. за способом вираження – абсолютні, відносні і приведені;
5. за наявністю бо відсутністю функціонального зв'язку між похибкою вимірювання та значенням вимірюваної величини – адитивні і мультиплікативні похибки.

Систематична похибка ЗВ – складова похибки засобу вимірювань, яка приймається сталою або змінною по будь-якому закону. Тому її завжди можна врахувати при кінцевих результатах досліджень внесенням поправки.

Поправка – значення, яке додається алгебраїчно до результата вимірювань, отриманого за допомогою засобу вимірювань, з метою виключення систематичних похибок. По знаку поправка протилежна похибці.

Наприклад, якщо абсолютна похибка приладу Δх – це різниця між показами приладу х та істинним значенням $x_{іст}$ вимірюваної величини, то поправка П = - Δх.

Систематичну погрішність можна вважати постійною або закономірною величиною, що змінюється, тільки для одного екземпляра ЗВ. Реально й відповідно до нормативних документів систематична похибка визначається для сукупності ЗВ одного типу. Отже, систематичні погрішності кожного екземпляра будуть випадковим чином відрізнятися, а систематична похибка всієї сукупності ЗВ розглядається як випадкова величина.

Систематичні похибки у загальному випадку є функцією вимірюваної величини, чинників впливу (температури, тиску, вологості та ін.) конструктивних характеристик засобів вимірювань та методів вимірювань.

Випадкова похибка ЗВТ – складова похибки засобу вимірювань, яка змінюються випадковим чином.

Причинами випадкових погрішностей можуть бути: випадкові зміни параметрів конструктивних елементів ЗВ, випадкова зміна відліку за шкалою приладу тощо.

Основна похибка ЗВ – це похибка засобу вимірювань, яка визначається при нормальних умовах його використання.

Під нормальними умовами експлуатації ЗВ розуміються наступні загально прийняті умови:

- напруга мережі живлення - $\approx(220^{+22}_{-33})$ В;
- температура навколишнього середовища – $(20\pm2)^{o}$ С;
- відносна вологість – від 30 до 80 відсотків;
- тиск – (760 ± 25) мм рт. ст. ($1\cdot10^5$ Па);
- відсутність зовнішніх електричного та магнітного полів, крім земного тощо.

Додаткова похибка ЗВ – складова похибки засобу вимірювань, яка виникає внаслідок відхилення будь-якої із впливаючих величин від нормального її значення.

Реальні умови експлуатації ЗВ можуть відрізнятися від нормальних, у результаті чого виникають додаткові похибки, значення яких визначаються чутливістю ЗВ до величин, що на них впливають (факторів).

Тобто це похибки, які виникають при роботі приладів в умовах відмінних від нормальних.

Статична похибка ЗВ — це похибка засобу вимірювань, що виникає при вимірюванні ним постійної в часі фізичної величини. У статичному режимі вимірювана величина й вихідний сигнал, за яким оцінюється результат вимірювання, є незмінними в часі.

Динамічна похибка ЗВ — це похибка засобу вимірювань, що виникає при вимірюванні фізичної величини, що змінюється в процесі вимірювання.

Значення динамічної похибки залежить від співвідношення між швидкістю зміни вимірюваної величини й швидкістю реакції ЗВ на цю зміну.

Абсолютна похибка ЗВ (Δ) – це різниця між показом засобу вимірювань та істинним (дійсним) значенням вимірюваної величини:

$$\Delta = \pm (x - x_Д)$$

де x - покази засобу вимірювань;

$x_Д$ - дійсне значення вимірюваної величини.

Абсолютна похибка виражається в одиницях вимірюваної величини.

Відносна похибка ЗВ (ε) – похибка засобу вимірювань, яка визначається через відношення абсолютної похибки засобу вимірювань до дійсного значення вимірюваної величини в межах діапазону вимірювань:

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta}{x_Д} \cdot 100\% \qquad (1.1)$$

Вона може розраховуватися як у відносних одиницях, так і у відсотках.

Відносна похибка приймає значення нескінченності на початку діапазону ЗВ, а найменше значення має в його кінці. У зв’язку із цим, для показу й нормування похибок ЗВ, використовується різновид відносної похибки – приведена похибка.

Приведена похибка ЗВ (γ) – відносна похибка, яка визначається відношенням абсолютної похибки до умовно прийнятого значення величини, сталого на всьому діапазоні вимірювань або в частині діапазону:

$$\gamma = \pm \frac{\Delta}{X_N} \cdot 100\%, \qquad (1.2)$$

де X_N - умовно прийняте значення величини.

Умовно прийняте значення величини називають **нормуючим значенням.** За нормуюче значення часто приймають верхню границю вимірювань або розмах шкали засобу вимірювань, тобто

$$X_N = X_{max} - X_{min},$$

де X_{max} і X_{min} - максимальне і мінімальне значення шкали ЗВ відповідно.

Якщо шкала ЗВ має різко нелінійний характер, то X_{max} і X_{min} вимірюються в одиницях вимірювання довжини шкали, тобто в см, мм або в умовних одиницях.

Адитивна похибка ЗВ – складова систематичної похибки засобу вимірювань, однакова на всьому діапазоні вимірювань. Це похибка, яка має постійну величину, і не залежить від значення вимірюваної величини.

Аналітично адитивна похибка визначається як

$$\Delta = \pm a,$$

де a - деяке додатне число.

Адитивною, наприклад, є систематична похибка, викликана неточною установкою нуля у стрілочного приладу з рівномірною шкалою. Джерела адитивної похибки - тертя в опорах, неточність відліку, шум, наведення і вібрації. Від цієї похибки залежить найменше значення величини, яке може бути виміряне приладом.

Мультиплікативна похибка ЗВ – складова систематичної похибки засобу вимірювань, яка змінюється пропорційно значенню вимірюваної величини.

Мультиплікативна похибка визначається як

$$\Delta = \pm bx,$$

де b - деяке додатне число; x - значення вимірюваної величини.

Мультиплікативною, наприклад, є похибка вимірювання відрізків часу відстаючими або поспішаючими годинниками. Ця похибка зростатиме за абсолютною величиною до тих пір, поки власник годинника не виставить їх правильно по сигналах точного часу. Така операція називається градуюванням похибки. Причина мультиплікативних похибок - вплив зовнішніх чинників та старіння елементів і вузлів приладів.

Похибки, причиною виникнення яких є засоби вимірювань, називаються **інструментальними похибками**. За характером прояву інструментальні похибки містять дві складові: систематичну та випадкову похибки, тобто

$$\Delta_{ЗВ} = \Delta_с + \Delta_в$$

де $\Delta_{ЗВ}$ - абсолютна похибка засобу вимірювань;

$\Delta_с$ - систематична складова похибки ЗВ;

$\Delta_в$ - випадкова складова похибки ЗВ.

Однак похибка результату вимірювання в основному визначається систематичною похибкою ЗВ, яка, в свою чергу, складається з адитивної Δ_a та мультиплікативної $\Delta_м$ похибок:

$$\Delta_c = \Delta_a + \Delta_м.$$

Систематична похибка ЗВ визначається його класом точності.

Клас точності ЗВ – це узагальнена характеристика засобу вимірювань, що визначається його гранично допустимою основною похибкою. Під **граничною допустимою похибкою** розуміють найбільшу з допустимих похибок. Клас точності дає можливість зробити висновок про границі похибки засобу вимірювань і відіграє важливу роль при виборі засобів вимірювань.

Для кожного виду засобу вимірювань встановлюється ряд класів точності і їм привласнюються різні позначення: номери, числа, літери та інші. Класи точності відповідно до стандарту, як правило, виводяться на шкалу приладів.

В основу всіх класифікацій класів точності покладено значення гранично допустимої **основної похибки**: відносної і приведеної. У зв'яку з цим існує декілька способів завдання класів точності ЗВ:

1 - й спосіб використовується для мір. При цьому способі вказується порядковий номер класу точності міри. Наприклад, нормальний елемент 1 класу точності, набір гирь 2 класу точності. Порядок обчислення похибок в цьому випадку визначають по технічній документації, що додається до міри.

2 - ий спосіб передбачає завдання класу точності для приладів з **переважаючими адитивними похибками** (це більшість аналогових приладів), для яких $|a| \gg |bx|$.

В цьому випадку клас точності визначається за основною **приведеною похибкою**

$$\gamma = \pm \frac{\Delta}{X_N} \cdot 100\% = \pm\, p,\ \% \qquad (1.3)$$

(Δ - абсолютна похибка) і задається у вигляді числа **К =** p (без кружечка). При цьому приведена похибка приладу, виражена у відсотках, в усіх точках шкали не повинна перевищувати по модулю числа К. Число К вибирається з ряду значень $(1{,}0;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 4{,}0;\ 5{,}0;\ 6{,}0)\cdot 10^n$, де n= 1, 0, - 1, - 2.

3 - ій спосіб передбачає завдання класу точності для приладів з **переважаючими мультиплікативними похибками,** тобто $|bx| \gg |a|$. В цьому випадку клас точності визначається за **основною відносною похибкою**, вираженою у відсотках:

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta}{x} \cdot 100\% = \pm\, q,\ \% \qquad (1.4)$$

Клас точності задається у вигляді числа **К =** q **в кружечку:** К

Число К вибирається з наведеного вище ряду чисел.

4 - й спосіб передбачає завдання класу точності для приладів з **сумірними адитивними і мультиплікативними похибками**, коли $|a| \cong |bx|$.

В цьому випадку клас точності визначається за **основною відносною похибкою** і задається двома числами c/d, розділеними косою рискою, причому c > d. Основна відносна похибка визначається за формулою:

$$\varepsilon = \left[c + d\left(\left|\frac{X_k}{x}\right| - 1\right)\right],\% \qquad (1.5)$$

де x – значення вимірюваної величини;

X_k – більша по модулю границя вимірювань, або кінцеве значення діапазону вимірювань приладу;

c і d – додатні числа, також виражені в процентах.

Число «c» відповідає за мультиплікативну складову похибки, а число «d» - за адитивну. Значення «c» і «d» вибираються з наведеного вище ряду чисел.

До приладів, клас точності яких виражається дробом, відносяться цифрові прилади, а також мости і компенсатори.

5 - й спосіб завдання класу точності використовується для приладів **з різко нерівномірною шкалою,** для яких нормуюче значення X_N виражають в одиницях довжини шкали (мм, см, умовних поділках) Клас точності задається числом К з наведеного вище ряду чисел, підкресленим галочкою: $\underset{\vee}{К}$.

В цьому випадку клас точності визначається за **основною приведеною похибкою** у відсотках від довжини шкали.

При оцінюванні результату вимірювань обчислюються:

а) абсолютна похибка, яка використовується для заокруглення результату і його правильному запису;

б) відносна та приведена похибка, яка застосовується для порівняння точності результату і приладу.

Правила заокруглення розрахованого значення похибки і отриманого експериментального результату наступні:

- похибку результату вимірювання вказують двома значущими цифрами, якщо перша з них дорівнює 1 або 2, і однією, якщо перша дорівнює 3 і більше;

- результат вимірювання заокруглюють до того ж десяткового розряду, яким закінчується значення абсолютної похибки;

- заокруглення робиться лише в остаточній відповіді, а усі попередні обчислення - з одним - двома зайвими розрядами.

Значущими цифрами називають усі цифри, включаючи 0, якщо він стоїть всередині або в кінці числа. Зазначимо, що не слід при записі наближених чисел відкидати останні значущі нулі.

1.2. Методичні вказівки до розв'язання задач

При розв'язанні задач даного розділу слід звернути увагу на наступні моменти.

1. Слід добре усвідомлювати, що всі похибки засобів виміювань – абсолютні, відносні та приведені – пов'язані між собою. Тобто, якщо відома будь-яка з перерахованих похибок і числове значення вимірюваної величини, то користуючись співвідношеннями (1.1) та (1.2) можна визначити всі інші похибки засобу вимірювань.

2. Необхідно пам'ятати, що клас точності засобу вимірювань визначається за різними похибками (абсолютною чи відносною) в залежності від того, яка похибка переважає: адитивна чи мультиплікативна.

Якщо в задачі акцентується увага на тому, що абсолютна похибка засобу вимірювань є сталою на всьому діапазоні вимірювань, то це свідчить про те, що адитивна похибка перевищує мультиплікативну і клас точності ЗВ визначається за приведеною похибкою, тобто за виразом (1.3).

Якщо ж в задачі наголошується на тому, що відносна похибка є сталою для даного ЗВ, то це означає, що мультиплікативна похибка перевищує адитивну і клас точності ЗВ визначається за відносною похибкою, тобто за виразом (1.4).

3. Необхідно добре орієнтуватися в способах позначення класів точності засобів вимірювань, а саме:

а). якщо клас точності ЗВ позначений у вигляді числа **К** без кружечка, то це означає, що для даного ЗВ адитивна похибка переважає мультиплікативну і клас точності визначається за приведеною похибкою (1.3).

б). якщо клас точності ЗВ позначений у вигляді числа **К в кружечку** К **,** то це означає, що для даного ЗВ мультиплікативна похибка перевищує адитивну і клас точності ЗВ визначається за відносною похибкою (1.4).

в). якщо клас точності ЗВ задається у вигляді двох чисел c/d, розділених косою рискою, то це означає, що для даного ЗВ адитивна мультиплікативна похибки сумірні і клас точності ЗВ визначається за відносною похибкою (1.5). При цьому має виконуватися умова $c > d$.

4. Для засобів вимірювань, у яких адитивна похибка переважає мультиплікативну (клас точності позначається просто числом К) **абсолютна похибка вимірювання є сталою** на всьому діапазоні, а **відносна похибка зменшується** із зростанням значення вимірюваної величини, тобто від початку шкали до її кінця.

5. Для засобів вимірювань, у яких мультиплікативна похибка переважає адитивну (клас точності позначається як (K)) **відносна похибка вимірювання є сталою** на всьому діапазоні, а **абсолютна похибки зростає** із зростанням значення вимірюваної величини, тобто від початку шкали до її кінця.

6. При знаходженні приведеної похибки засобу вимірювань важливе значення має правильне визначення нормуючого значення X_N, що фігурує у формулі (1.2).

Нормуюче значення X_N залежить від багатьох факторів і приймається рівним:

1) кінцевому значенню шкали приладу, якщо нульова відмітка знаходиться на краю шкали або поза нею;

2) сумі кінцевих значень шкали приладу (без врахування знаків), якщо нульова відмітка знаходиться всередині шкали;

3) номінальному значенню вимірюваної величини, якщо таке встановлено (наприклад, для частотомірів з діапазоном вимірювання 45-55 Гц і номінальною частотою 50Гц, нормуюче значення X_N = 50 Гц);

4) для вимірювальних приладів з суттєво нерівномірною шкалою X_N приймають рівним всій довжині шкали або її частині, яка відповідає діапазону вимірювань - в цьому випадку похибку і довжину шкали виражають в одних одиницях, наприклад, в одиницях довжини;

5) діапазону вимірювань для багатошкальних приладів, або якщо шкала приладу проградуйована в одиницях величини, для якої прийнята шкала з умовним нулем (наприклад, температура в °С).

7. При визначенні класу точності засобу вимірювань слід пам’ятати, що число, яким позначається клас точності ЗВ, обирається з наступного ряду чисел, визначених стандартом:

$(1{,}0;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 4{,}0;\ 5{,}0;\ 6{,}0)\cdot 10^n$, де n= 1, 0, - 1, - 2.

Якщо при розв’язанні задачі на визначення класу точності засобу вимірювань отримано число, що не входить в зазначений ряд чисел, то за клас точності приймається число, найближче до отриманого, але яке більше за нього.

1.3. Приклади розв'язку задач

Задача 1. Визначити абсолютну, відносну і приведену похибку вольтметра з діапазоном вимірювань 0...150 В при показах його $x_П$ =120 В і дійсному значенні вимірюваної напруги $x_Д$ =120,6 В. За нормуюче значення прийнято верхню границю вимірювань x_N =150 В.

Розв'язок.

1. Абсолютна похибка визначається за формулою

$$\Delta x_П = x_П - x_Д = 120 - 120{,}6 = -0{,}6 \text{ В}.$$

2. Відносна похибка визначається за формулою

$$\varepsilon_П = \pm \frac{\Delta x_П}{x_Д} \cdot 100\% = \frac{-0{,}6}{120{,}6} \cdot 100\% = -0{,}005 \cdot 100\% = -0{,}5\% .$$

3. Приведена похибка визначається за формулою

$$\gamma = \pm \frac{\Delta x_П}{x_N} \cdot 100\% = \frac{-0{,}6}{150} \cdot 100\% = -0{,}004 \cdot 100\% = -0{,}4\%$$

Задача 2. Клас точності засобу вимірювань напруги 0,5. Знайти основну абсолютну похибку, якщо кінцеве значення діапазону вимірювань x_N=150 В.

Розв'язок.

Задання класу точності одним числом означає, що у даного ЗВ адитивна складова основної похибки перевищує мультиплікативну. А це означає, що граничні приведена і абсолютна похибки сталі і однакові для будь-якої точки шкали ЗВ і не залежать від значення вимірюваної величини x.

Якщо нуль відліку знаходиться на початку шкали, а кінцеве значення діапазону вимірювань x_N= 150 В, то приведена похибка визначається за формулою:

$$\gamma = \pm \frac{\Delta x}{x_N} \cdot 100\% = \pm p$$

де $p = (1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 4;\ 5;\ 6) \cdot 10^n$; $n = -1, -2, 0, 1, 2$).

Звідси

$$\Delta x = \pm \frac{\gamma \cdot x_N}{100\%} = \pm \frac{0{,}5\% \cdot 150 \text{ В}}{100\%} = \pm 0{,}75 \text{ В}.$$

Задача 3. Цифровий вольтметр з діапазоном вимірювання 0...100 В має клас точності 0,1/0,05. Значення виміряної напруги x = 58,75 В. Знайти максимально можливу основну(відносну і абсолютну) похибку приладу при вимірюванні даного значення напруги.

Розв'язок.

Клас точності приладу 0,1/0,05. Це означає, що c/d =0,1/0,05 і відповідно c = 0,1% і d = 0,05%. А це, в свою чергу, означає, що адитивна і мультиплікативна складові похибки приблизно рівні між собою. В цьому випадку граничне значення основної відносної похибки визначається виразом:

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\% = \pm\left[\frac{a+bx}{x}\right]\cdot 100\% = \pm\left[c + d\left(\left|\frac{X_k}{x}\right| - 1\right)\right]\%.$$

де X_k - більша по модулю границя вимірювань або кінцеве значення діапазону вимірювань.

В нашому випадку маємо

$$\varepsilon = \pm\left[0,1\% + 0,05\%\left(\left|\frac{X_k}{x}\right| - 1\right)\right] \qquad (1.6)$$

За умовою задачі, нормуюче значення цього вольтметру X_N=100 В; x = 58,75 В.

З іншого боку

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\% \qquad (1.7)$$

Тоді

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta x_{max}}{x}\cdot 100\% = \pm\frac{\Delta x_{max}}{58,75}\cdot 100\% = \left[0,1\% + 0,05\%\left(\frac{100\ \text{В}}{58,75\ \text{В}} - 1\right)\right] = \pm 0,135\%$$

звідки

$$\Delta x_{max} = \pm\frac{\varepsilon x}{100} = \pm\, 0,0793\ \text{В} \approx \pm\, 0,08\ \text{В}.$$

Або, прирівнюючи вирази (1.6) та (1.7), отримуємо

$$\frac{\Delta x_{max}}{x}\cdot 100\% = \pm\left[0,1\% + 0,05\%\left(\frac{100\ \text{В}}{58,75\ \text{В}} - 1\right)\right]$$

звідки

$$\Delta x_{max} = \frac{58{,}75\ \text{В} \cdot \left[0{,}1\% + 0{,}05\%\left(\dfrac{100\ \text{В}}{58{,}75\ \text{В}} - 1\right)\right]}{100\%} = \pm\, 0{,}08\ \text{В}$$

Задача 4. Визначити клас точності магнітоелектричного міліамперметра з кінцевим значенням діапазону вимірювання сили струму $I_k = 0{,}5$ мА, якщо граничне значення абсолютної похибки вимірювання є сталим і дорівнює $\Delta = \pm\, 0{,}0015$ мА.

Розв'язок.

В нашому випадку маємо справу з приладом, у якого адитивна складова похибки перевищує мультиплікативну (про це свідчить той факт, що граничне значення абсолютної похибки є сталим).

Клас точності приладу визначається в даному випадку за значенням приведеної основної похибки, яка визначається як

$$\gamma = \pm\, \frac{\Delta I}{I_k} \cdot 100\% = \pm\, \frac{0{,}0015\ \text{мА}}{0{,}5\ \text{мА}} \cdot 100\% = \pm 0{,}3\%.$$

Оскільки числове значення 0,3 відсутнє в ряду можливих значень класів точності $p = k \cdot 10^n$, де k = 1; 1.5; 2; 2,5; 4; 5;6, то обираємо найменше число, яке більше за 0,3: це є число 0,4. Таким чином клас точності міліамперметра 0,4.

Задача 5. Визначити клас точності магнітоелектричного міліамперметра з кінцевим значенням шкали I_k =0,5 мА для вимірювання сили струму I = 0,1…0,5 мА так, щоб відносна похибка ε вимірювання струму не перевищила 1%.

Розв'язок.

Клас точності визначається по максимальній, або граничній, приведеній похибці

$$\gamma = \pm\, \frac{\Delta I}{I_N} \cdot 100\% = \pm\, p, \qquad (1.8)$$

де p –число з ряду чисел $k \cdot 10^n$.

Відносна похибка вимірювання

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\%. \qquad (1.9)$$

Згідно умови: $\varepsilon \leq 1\%$ при вимірюванні сили струму I = 0,1...0,5 мА. Оскільки відносна похибка максимальна на початку шкали, тобто при $I = I_{min}$, то абсолютна похибка в усьому діапазоні не має бути більше, ніж $\varepsilon \cdot I_{min}$

$$\Delta I \le \pm\frac{\varepsilon \cdot I_{min}}{100\%} = \pm\frac{1\% \cdot 0{,}1}{100\%} = \pm 0{,}001\ мА. \qquad (1.10)$$

Враховуючи, що в даному випадку $I_N = I_k =$ 0,5мА з формули (1.8) отримуємо

$$\gamma = \pm\frac{0{,}001}{0{,}5} \cdot 100\% = \pm 0{,}2\%.$$

Отже клас точності приладу має бути не гірше p = 0,2.
Кінцева формула має вигляд:

$$\gamma = \pm\frac{\varepsilon \cdot I_{min} \cdot 100\%}{100\% \cdot I_N} = \pm\frac{\varepsilon \cdot I_{min}}{I_N}, \% = \pm 0{,}2\%$$

Задача 6. Метрологічні дослідження виявили, що амперметр постійного струму з діапазоном вимірювання від -10А до +10А при вимірюванні сили струму I_1 = 1А дає відносну похибку ε_1 = 4%, а силу струму I_2= 8А вимірює з відносною похибкою ε_2 = 1%. Оцінити клас точності приладу.

Розв'язок.

1. Оскільки відносна похибка змінюється по діапазону, то очевидно, що адитивна складова похибки переважає мультиплікативну. Тоді клас точності амперметру визначається за приведеною похибкою:

$$\gamma = \pm\frac{\Delta I}{I_N} \cdot 100\%,$$

де ΔI - максимальна можлива абсолютна похибка амперметра у всьому діапазоні вимірювань;

I_N - нормоване значення, яке для даного приладу, по визначенню становить

$$I_N = |-10А| + |+10А| = 20А$$

оскільки „нуль" знаходиться в середині шкали.

2. Відносні похибки вимірювання струмів I_1 і I_2 визначаються за формулами:

$$\varepsilon_1 = \pm\frac{\Delta I_1}{I_1} \cdot 100\% \quad і \quad \varepsilon_2 = \pm\frac{\Delta I_2}{I_2} \cdot 100\%.$$

Звідси абсолютні похибки вимірювання струмів I_1 та I_2 дорівнюють

$$\Delta I_1 = \pm\frac{\varepsilon_1 \cdot I_1}{100\%} = \pm\frac{4\% \cdot 1\ А}{100\%} = \pm 0.04\ А$$

$$\Delta I_2 = \pm\frac{\varepsilon_2 \cdot I_2}{100\%} = \pm\frac{1\% \cdot 8\ A}{100\%} = \pm 0.08\ A$$

Отже максимальна можлива абсолютна похибка приладу при вимірюванні струму є не більшою за 0,08 А, тобто $\Delta I \le 0{,}08A$.

3. Тоді приведена похибка

$$\gamma = \pm\frac{\Delta I}{I_N}\cdot 100\% = \pm\frac{0{,}08A}{20A}\cdot 100\% = \pm 0{,}4\%.$$

Вона співпадає з таким же числом з ряду $k\cdot 10^n$. Отже клас точності амперметра p = 0,4.

Задача 7. Визначити абсолютну похибку, з якою виконано вимірювання індуктивності котушки L = 85 мГн і опору резистора R = 2,83 Ом. Основна відносна похибка моста задана у вигляді двох складових: адитивної і мультиплікативної $\pm\left(1+\frac{6}{L}\right)\%$; $\pm\left(1+\frac{6}{R}\right)\%$, де L - індуктивність, мГн; R - опір, Ом

Розв'язок.

1. Якщо адитивна і мультиплікативна складові похибки сумірні, то відносна похибка вимірювання деякої величини x виражається формулою:

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\% = \pm\frac{a+bx}{x}\cdot 100\% = \pm\left(\frac{a}{x}+b\right)\cdot 100\% = \pm\left(b+\frac{a}{x}\right)\cdot 100\% \qquad (1.11)$$

2. Підставляючи покази вимірюваних величин L та R у формулу (1.11) отримуємо

$$\varepsilon_L = \pm\left(\frac{6}{85}+1\right),\% = \pm 1{,}07\% \approx \pm 1{,}1\%$$

$$\varepsilon_R = \pm\left(\frac{6}{2{,}83}+1\right),\% = \pm 3{,}1\%$$

З іншого боку

$$\varepsilon_L = \pm\frac{\Delta L}{L}\cdot 100\%$$

$$\varepsilon_R = \pm\frac{\Delta R}{R}\cdot 100\%$$

Звідси абсолютні похибки вимірювань L та R дорівнюють

$$\Delta L = \pm\frac{\varepsilon_L \cdot L}{100\%} = \pm\frac{1{,}1\% \cdot 85}{100\%} = \pm 0{,}9 мГн$$

$$\Delta R = \pm\frac{\varepsilon_R \cdot R}{100\%} = \pm\frac{3{,}1\% \cdot 2{,}83}{100\%} = \pm\, 0{,}09\text{Ом}$$

Задача 8. Визначити покази двох послідовно з'єднаних магнітоелектричних міліамперметрів з кінцевим значенням шкали I_k = 100 мА (число поділок шкали - 100) і класами точності 1.0 і 0,5. Дійсне значення струму при вимірюванні $I_Д$ = 50 мА. Визначити найбільшу різницю в показах цих двох міліамперметрів.

Розв'язок.

Через послідовно з'єднані амперметри проходить однаковий струм ($I_Д$=50 мА). Максимальна абсолютна похибка приладу визначається згідно формули

$$\Delta I = \pm\frac{p \cdot I_N}{100}$$

де p - клас точності приладу, I_N - нормуюче значення.

В даному випадку $I_N = I_k$ = 100 мА. Отже $\Delta I_1 = \pm$ 1 мА і $\Delta I_2 = \pm$ 0,5 мА.

Тоді покази кожного з приладів знаходяться в межах

$$I = I_Д \pm \Delta I$$

і для першого міліамперметра вони знаходяться в межах від 49 мА до 51 мА а для другого - від 49,5 мА до 50,5 мА.

Отже максимальна можлива різниця в показах цих двох становить

$$\Delta I_{max} = \left| I_{1max} - I_{2min} \right| = 51\text{ мА} - 49{,}5\text{ мА} = 1{,}5\text{ мА},$$

або

$$\Delta I_{max} = \left|\Delta I_1\right| + \left|\Delta I_2\right| = 1{,}0\text{мА} + 0{,}5\text{мА} = 1{,}5\text{мА}$$

Задача 9. У електровимірювального приладу рівномірна шкала (шкала з поділками постійної довжини і з постійною ціною поділки) поділена на 100 інтервалів. Нижня границя вимірювання $U_Н$ = - 25 мВ; верхня $U_В$ = 25 мВ.

Визначити ціну поділки шкали і чутливість приладу.

Розв'язок.

1. В даному випадку стрілка переміститься з однієї поділки шкали на сусідню при зміні вхідної напруги на величину:

$$\Delta U = \frac{25\ \text{мВ} - (-25\ \text{мВ})}{100} = \frac{50\ \text{В}}{100} = 0{,}5\ \text{мВ}$$

Отже, ціна поділки $C = 0{,}5$ мВ/под.

2. Чутливість вимірювального приладу S – це відношення зміни сигналу на виході вимірювального приладу до зміни вимірюваної величини на вході, що викликає зміну вихідного сигналу:

$$S = \frac{\Delta L}{\Delta x}$$

де ΔL - зміна вихідного сигналу;

Δx - зміна вхідного сигналу, що спричинює зміну ΔL.

Якщо за зміну вихідної величини даного приладу прийняти переміщення стрілки на один інтервал (на одну поділку), то

$$S = \frac{1}{0{,}5\ \text{мВ}} = 2\ \text{мВ}^{-1}$$

Висновок: чутливість S і ціна поділки C є оберненими величинами, тобто

$$S = \frac{1}{C}$$

Задача 10. Амперметр з границею вимірювань $I_Г = 8А$ має клас точності 0,2. Визначити відносну похибку вимірювання сили струму $I = 2A$.

Розв'язок

1. Клас точності приладу позначений як 0,2. Це свідчить про те, що адитивна похибка приладу значно перевищує його мультиплікативну похибку і є сталою на всьому діапазоні вимірювань. Отже клас точності даного приладу визначається основною приведеною похибкою, тобто

$$\gamma = \pm\frac{\Delta I}{I_Г}\cdot 100\% = p \quad (\text{p – клас точності})$$

2. Звідси абсолютна похибка вимірювання

$$\Delta I = \pm\frac{\gamma \cdot I_Г}{100\%}$$

3. Тоді відносна похибка вимірювання дорівнює

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta I}{I}\cdot 100\% = \pm\frac{\gamma \cdot I_Г}{I \cdot 100\%}\cdot 100\% = \pm\frac{\gamma \cdot I_Г}{I} = \pm\frac{0{,}2\% \cdot 8A}{2A} = \pm\ 0{,}8\%$$

Слід мати на увазі, що будь-який, навіть самий точний прилад, має деяку похибку вимірювань. Але відносна похибка тим менша, чим ближче вимірювана величина до граничного значення приладу. Тому бажано використовувати такі прилади, у яких під час вимірювань покажчик буде знаходитися у другій половині шкали.

Задача 11. Амперметром класу точності 2.0 із шкалою (0…50) А виміряні значення струму 0; 5; 10; 20; 25; 30; 40; 50 А. Розрахувати залежності абсолютної, відносної і приведеної основних похибок від результата вимірювань. Результати представити у вигляді таблиці і графіків.

Розв'язок

Для запису результатів сформуємо таблицю 1, у стовпчики якої будемо записувати виміряні значення струму I, абсолютні ΔI, відносні ε та приведені γ похибки.

У перший стовпчик запишемо задані в умові задачі виміряні значення струму: 0; 5; 10; 20; 25; 30; 40; 50 А

Клас точності амперметра заданий числом без кружечка, отже приведена похибка, визначена у відсотках, у всіх точках шкали не повинна перевищувати за модулем класу точності, тобто $|\gamma| \le 2\%$.

При розв'язанні задачі розглянемо найгірший випадок $|\gamma| = 2\%$, коли приведена похибка приймає максимальне за абсолютною величиною значення, що відповідає $\gamma = +2\%$ і $\gamma = -2\%$.

Дані значення приведеної похибки заносимо у четвертий стовпчик таблиці 1.

Таблиця 1. Результати розрахунку значень похибок

I, A	ΔI, A	ε, %	γ, %
0	±1	±∞	±2
5	±1	±20	±2
10	±1	±10	±2
20	±1	±5	±2
25	±1	±4	±2
30	±1	±3,33	±2
40	±1	±2,5	±2
50	±1	±2	±2

Розрахуємо значення абсолютної похибки.

З формули

$$\gamma = \pm\frac{\Delta I}{I_N}\cdot 100\%$$

визначаємо абсолютну похибку

$$\Delta I = \pm\frac{\gamma \cdot I_N}{100\%}.$$

За нормуюче значення I_N приймаємо розмах шкали, тобто

$$I_N = |50\ \text{A} - 0\ \text{A}| = 50\ \text{A}$$

Абсолютна похибка $\Delta I = \pm\frac{2\% \cdot 50\ \text{A}}{100\%} = \pm 1\ \text{A}$ у всіх точках шкали приладу. Заносимо дане значення у другий стовпчик таблиці.

Значення відносної похибки будемо розраховувати за формулою

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta I}{I}\cdot 100\%$$

При $I = 0\text{A}$ отримуємо

$$\varepsilon = \pm\frac{1\ \text{A}}{0\ \text{A}}\cdot 100\% \rightarrow \pm\infty\ .$$

При $I = 5\text{A}$ отримуємо

$$\varepsilon = \pm\frac{1\ \text{A}}{5\ \text{A}}\cdot 100\% = \pm 20\%.$$

Значения відносної похибки для інших виміряних значень струму розраховуються аналогічно.

Отримані таким чином значення відносної похибки заносимо у третій стовпчик.

За даними таблиці 1, враховуючи, що похибки можуть бути як додатними, так і від'ємними, будуємо графіки залежностей абсолютної ΔI , відносної ε і приведеної γ похибок від результату вимірювань (рис. 1.1)

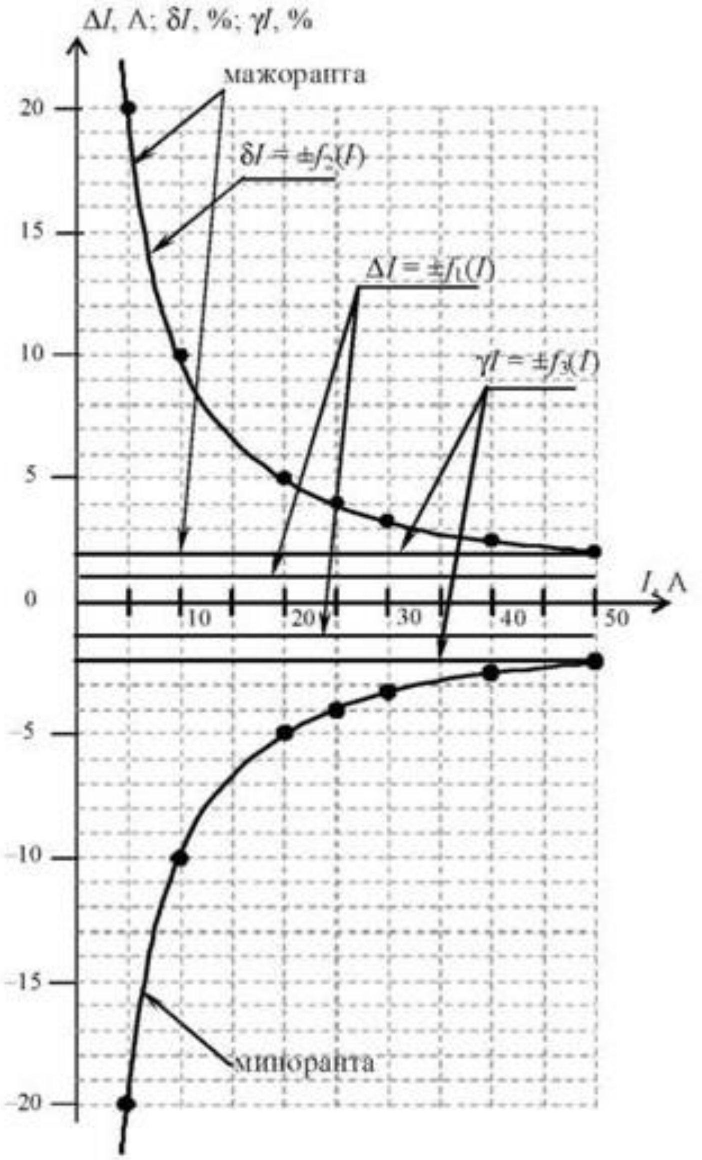


Рис. 1.1. Графики залежностей абсолютної ΔI , відносної ε і приведеної γ похибок від результату вимірювань для приладу з переважаючими адитивними похибками

Задача 12. Визначити максимальну абсолютну, відносну та приведену похибки і записати результат вимірювання напруги аналоговим вольтметром класу точності 1,5 з границею вимірювань 1 В для показа 0,87 В.

Розв'язок

Для аналогового вольтметра класу точності $p = 1{,}5$ приведена похибка дорівнює:

$$\gamma = \pm \frac{\Delta}{X_N} \cdot 100\% = p\ \% = 1{,}5\%,$$

де Δ - максимальна абсолютна похибка;

X_N – нормуюче значення, яке в даному випадку дорівнює границі вимірювання вольтметра $X_N = 1$ В.

p – класс точності вольтметра

Звідси максимальна абсолютна похибка дорівнює:

$$\pm\Delta = p \cdot \frac{X_N}{100} = 1{,}5 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}015 \text{ В} \quad (1.12)$$

Відносна похибка з урахуванням (1.12) визначається виразом:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{x} \cdot 100\% = p \cdot \frac{X_N}{x} = 1{,}5 \cdot \frac{1}{0{,}87} = 1{,}72\ \%$$

У відповідності з правилами заокруглення результат вимірювання має вигляд:

$$0{,}870 \pm 0{,}015 \text{ В.}$$

1.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Є три засоби вимірювань ЗВ1, ЗВ2, ЗВ3, класи точності яких відповідно – 1,0; 2,0 у колі; 0,1/0,05. Визначити для кожного з цих засобів вимірювань вирази граничних значень основної абсолютної, основної відносної та основної приведеної похибок. При цьому значення вимірюваної величини позначити як x, а нормуюче значення як X_N.

Задача 2. Амперметр має границю вимірювань $I_Г = 5А$. Максимальна абсолютна похибка приладу складає $\pm 0{,}05А$. Визначити клас точності приладу.

Задача 3. У коло з опором R = 100 Ом для вимірювання ЕРС (електрорушійної сили) включили вольтметр класу 0,2 з верхнею межею вимірювань 3 В і внутрішнім опором $R_В$= 1000 Ом. Визначити відносну методичну похибку ε вимірювання ЕРС.

Задача 4. Необхідно виміряти струм $I = 4А$. Є два амперметри: один класу точності 0,5 має верхню межу вимірювань 20А, другий – класу точності 1,5 має верхню межу вимірювань 5А. Визначити, у якого приладу менша границя допустимої основної відносної похибки і який прилад краще використовувати для вимірювання сили струму $I = 4А$.

Задача 5. Верхня границя вимірювань зразкового приладу може перевищувати верхню границю повіряємого приладу не більше, ніж на 25%. Перевірити правомірність вибору зразкового електровимірювального приладу, якщо його верхня границя вимірювань $X_{Nзразк.}$ перевищує верхню границю повіряємого приладу $X_{Nпов.}$ класу 2,5 ($К_п$= 2,5) в 2 рази.

Задача 6. Повіряється вольтметр класу точності 2,5 з границями вимірювань 0 ... 30 В методом порівняння з показами зразкового вольтметра класу точності 0,5. Заздалегідь відомо, що похибка зразкового приладу знаходиться в допустимих межах ($\pm$0,5% від верхньої границі вимірювань), але максимальна. Як виключити вплив цієї похибки зразкового приладу на результат повірки, щоб не забракувати хороший прилад.

Задача 7. Двома пружинними манометрами на 600 кПа виміряно тиск повітря в останній камері компресора. Один манометр має похибку 1% від верхньої границі вимірювань, другий – 4%. Перший показав 600 кПа, другий – 590 кПа. Назвати дійсне значення тиску в камері, оцінити істинне значення тиску, а також похибку вимірювання тиску другим манометром – абсолютну і відносну.

Задача 8. Похибка вимірювання однієї і тієї ж величини, виражена в долях цієї величини, складає: $1 \cdot 10^{-3}$ для одного приладу і $2 \cdot 10^{-3}$ - для другого. Який з цих приладів більш точний?

Задача 9. Визначити відносну похибку вимірювання на початку шкали (для 30 поділок) для приладу класу 0,5, що має шкалу на 100 поділок. Наскільки ця похибка більша за похибку на останній – сотій поділці шкали приладу?

Задача 10. Визначити дійсне значення струму $I_Д$ в електричному колі, якщо стрілка міліамперметра відхилилася на $\alpha_0 = 37$ поділок. Ціна поділки шкали міліамперметра С = 2 мА/под., а поправка для цієї точки Δ = - 0,3 мА.

Задача 11. Визначити клас точності мілівольтметра з кінцевим значенням діапазону вимірювання напруги V_k=15 мВ, якщо граничне значення абсолютної похибки вимірювань постійне і дорівнює $\Delta = \pm$ 0,015 мВ.

Задача 12. Визначити клас точності магнітоелектричного міліамперметра з кінцевим значенням шкали $I_К$= 2,5 мА для вимірювання струму I =0,5...1,5 мА так, щоб відносна похибка ε вимірювання струму не перевищила 2%.

Задача 13. Метрологічні дослідження виявили, що амперметр постійного струму з діапазоном вимірювання від -1 А до +1 А при вимірюванні сили струму в I_1 = 0,2 А дає відносну похибку ε_1 = 4%, а силу струму I_2= 0,9 А вимірює з відносною похибкою ε_2 = 2%. Оцінити клас точності приладу.

Задача 14. Визначити покази двох послідовно з'єднаних магнітоелектричних міліамперметрів з кінцевим значенням шкали $I_К$ = 500 мА (число поділок шкали - 100) і класами точності 1,5 і 1,0. Дійсне значення струму при вимірюванні $I_Д$=150 мА. Визначити найбільшу можливу різницю в показах двох міліамперметрів.

Задача 15. Визначити похибку, з якою виконано вимірювання ємності конденсатора С=200 нФ і опору резистора R=12.47 Ом. Основна похибка моста задана в вигляді двох складових: аддитивної і мультиплікативної ±(40/С+2)%, ±(15/R+3)%, де С - ємність, нФ; R - опір, Ом.

Задача 16. Визначити похибку, що виникає в результаті підключення амперметра з внутрішнім опором 2 Ом до ділянки кола, якщо виміряне значення струму дорівнює 1,5 А, а різниця потенціалів становить 10 В.

Задача 17. Для вимірювання спаду напруги на ділянці електричного кола з номінальним значенням опору R =50 Ом використали вольтметр з внутрішнім опором R_V= 1 кОм. Яку похибку внесло підключення вольтметра, якщо виміряне значення спаду напруги становило U_1=50 В?

Задача 18. Повірка показів амперметра $I_{пов}$ з межею вимірювань I_{max}= 5,0 А в метрологічній лабораторії за допомогою зразкового амперметра $I_{зр}$ дала наступні результати:

$I_{зр}$, А	0.0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
$I_{пов}$, А	0,085	1,090	2,096	3,097	4,099	5,103
Δ, А	0,085	0,09	0,096	0,097	0.099	0,103

Визначити клас точності амперметра, що повіряється, і проставити його на шкалі приладу.

Задача 19. Знайти відносну похибку вольтметра класу точності 1,0 з діапазоном вимірювань від 0 до 150 В, в точці шкали 50 В.

Задача 20. Є 3 вольтметра: класу точності 1,0 з номінальною напругою 300 В, класу 1,5 на 250 В і класу 2,5 на 150 В. Визначити, який з вольтметрів забезпечить більшу точність вимірювання напруги 130 В.

Задача 21. Визначити відносну похибку вимірювання на початку шкали (для 30 поділок) для приладу класу 0,5, що має шкалу на 100 поділок.

Задача 22. При вимірюванні напруги імпульсним вольтметром класу точності 2/0,2, з верхнім діапазоном вимірювання 220 В, его покази були рівними 100 В. Визначити відносну похибку вольтметра.

Задача 23. Чи можна визначити вимірювану величину, знаючи, з якою абсолютною і відносною похибкою вона виміряна?

Задача 24. Який з трьох аналогових вольтметрів з відповідними значеннями класів точності K_1 = 1,5; K_2 = 1,0; K_3 = 2,5 і границями шкали $U_{пр1}$ = 30 В; $U_{пр2}$ = 50 В; $U_{пр3}$ = 20 В забезпечує мінімальну похибку вимірювання напруги $U_{вим}$ = 15 В?

Задача 25. Які з чисел: 1,25; 0,25; 22,5; 0,225; 0,0025; 0,050; 0,15; 15; 4,5; 0,555; 3; 4; 6; 7; 7,5; 0,8; 0,333; 40; 3,14; 0; 1; 0,4, не можуть бути використані як позначення класу точності?

Задача 26. Струм 139 мА вимірюється цифровим амперметром з трьохрозрядним цифровим індикатором і амперметром класу точності 0,5 і границею шкали вимірювань 150 мА. Яким приладом струм буде виміряний точніше?

Задача 27. Які з простих дробів із знаменником від 1 до 40, записані в десятковій формі, можуть бути використані як позначення класу точності?

Задача 28. Скільки чисел в інтервалі від 1 до 100 можна використати як позначення класу точності

Задача 29. Вимірювана напруга U_0 визначається як різниця показів вольтметрів: U_1 = 15,5 В (границя шкали $U_{пр1}$ = 30 В, клас точності K_1 = 0,5) і U_2 = 6,7 В (границя шкали $U_{пр2}$ = 10 В). Яким має бути клас точності K_2 другого вольтметра, щоб відносна похибка вимірювання ε не перевищувала 5%?

Задача 30. Границя шкали вольтметра $U_{пр}$ = 200 В. Які будуть абсолютна і відносна похибки однократного вимірювання напруги U=500 В, якщо клас точності вольтметра К = 2,5? Яким повинен бути клас точності вольтметра, щоб відносна похибка вимірювання не перевищувала 1%?

Задача 31. Скільки чисел в інтервалі від 1 до50 можна використати як позначення класу точності?

Задача 32. Границя шкали аналогового амперметра $I_{пр}$=5 А. Якими будуть абсолютна і відносна похибки однократного вимірювання струму I=1,5 А, якщо клас точності амперметра K_A=1,5? Яким повинен бути клас точності амперметра,щоб відносна похибка вимірювання не перевищувала 1%?

Задача 33. Які з чисел: 3,25; 1,25; 2,5; 22,5; 12,5; 25; 250; 0,0025; 0,25; 0,225; 0,2; 20; 0,222; 1,2; 40; 45; 0,4; 0,45; 3; 0,3; 6; 8; 10; 60; 0; 1; 0,6, не можуть бути використані як позначення класу точності?

Задача 34. Границя шкали аналогового амперметра $I_{пр}$=5 А. Якими будуть абсолютна ΔI і відносна ε похибки однократного вимірювання постійного струму I=2,4 А, якщо клас точності амперметра для вимірювання постійного струму $K_{пст}$=2? Як зміняться ΔI і ε, якщо границя шкали приладу буде $I_{пр}$=10А?

Задача 35. Скільки чисел в інтервалі від 0,01 до 10 можна використати як позначення класу точності?

Задача 36. Вимірювана напруга U_0 визначається як різниця показів аналогового вольтметра: U_1 = 22,7 В з границею шкали $U_{пр1}$ = 30 В, і цифрового трьох розрядного вольтметра: U_2=19,3 В. Яке значення класу точності K_1 аналогового вольтметра забезпечує відносну похибку вимірювання ε не більше 5%?

Задача 37. Границя шкали аналогового вольтметра $U_{пр}$=100 В. Клас точності вольтметра для постійної напруги $K_{пст}$ = 1,5. Визначити значення абсолютної ΔU і відносної ε похибок вимірювання напруги U=53 В. Яке максимальне ціле числове значення класу точності забезпечить досягнення $\varepsilon \leq 1{,}5\%$?

Задача 38. Вимірювана напруга U_0 визначається як різниця показів U_1=22,2 В, U_2=7,9 В і U_3=8,8 В трьох однакових вольтметрів з границею шкали $U_{пр}$ = 30 В. Яким повинен бути клас точності вольтметрів, щоб відносна похибка ε однократного вимірювання не перевищувала 10%?

Задача 39. Вимірювана напруга U_0 визначається як різниця показів трьох вольтметрів: $U_0 = U_1 – U_2 – U_3$. Покази першого вольтметра U_1=20,5 В, границя його шкали $U_{пр1}$ = 30 В, клас точності K_1 = 1,5. Покази двох інших однакових вольтметрів з границею шкали $U_{пр2,3}$ = 15 В: U_2=5,5 В і U_3=7,6 В. Яким має бути клас точності другого і третього вольтметрів, щоб відносна похибка ε вимірювання напруги не перевищила 10%?

Задача 40. Якою буде відносна похибка вимірювання ε напруги U=11,6 В цифровим вольтметром з трьомя розрядами цифрового індикатора?

Яким повинен бути клас точності аналогового вольтметра з границею шкали U_{max}=15 В, щоб забезпечити таке ж значення ε ?

Задача 41. Які зпростих дробів із знаменником від10 до 100, записані в десятковій формі, можуть бути використані як позначення класу точності?

Задача 42. Вимірювана ємність C_0 визначається як різниця показів конденсаторів: C_2=306 пФ і C_1=162 пФ. Яка похибка вимірювання C_1 і C_2 допустима, щоб відносна похибка вимірювання C_0 не перевищувала 2,5%?

Задача 43. Як співвідносяться між собою адитивна і мультиплікативна похибки приладу, якщо його клас точності выражається одним числом?

Задача 44. Результат вимірювання діючого значення синусоїдальної напруги: U=15±0,15 В. Чому дорівнює клас точності вольтметра, якщо вимірювання виконувалося на приладі з границею шкали $U_{пр}$=30 В?

Задача 45. Які з дробів: 1/3; 1/8; 1/40; 3/7; 3/6; 2/5; 2/8; 1/50; 4/20; 15/40; 1/15; 24/40; 3/2; 7/2; 1/4; 5/2; 15/5; 1/25; 9/2; 10/2; 6/3; 4/3; 3/4; 1/6; 1/16; 18/3; 1/4000; 1/250, записані в десятковій формі можуть бути використані як позначення класу точності?

Задача 46. Вимірювана напруга U_0 визначається як різниця показів трьох вольтметрів: $U_0 = U_1 – U_2 – U_3$. Покази першого вольтметра U_1=14,5 В, границя його шкали $U_{пр1}$ = 20 В. Покази двох інших однакових вольтметрів з границею шкали $U_{пр2,3}$ = 10 В і класом точності K_{23}=1,5: U_2=6,3 В и U_3=4,2 В. Яке значення класу точності першого вольтметра забезпечує значення відносної похибки вимірювання $\varepsilon < 5\%$?

Задача 47. На шкалі омметра нанесено 76 основних позначок. Діапазон показів омметра від0 до 159 кОм. Знайти ціну поділки шкали засобу вимірювань.

Задача 48. Стрілочний вольтметр має два діапазони показів з верхнею границею 90 В і 240 В. Чому дорівнює ціна поділки на другому діапазоні, якщо на прешому вона дорівнює 3 В?

Задача 49. Міліамперметр має діапазон показів від 0 до 20 мА і діапазон вимірювань від1 до 20 мА. Визначити ціну поділки, якщо нанесені 21 основні позначкі.

РОЗДІЛ 2. ПОХИБКИ ВИМІРЮВАНЬ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

2.1. Теоретичні відомості

Вимірювання є одним із важливих шляхів пізнання навколишнього середовища, зв'язків між подіями, закономірностей явищ природи.

Вимірювання не є самоціллю, а мають певну область використання, тобто проводяться для досягнення деякого кінцевого результату відповідно до поставленого завдання.

Залежно від призначення вимірювань кінцевий результат в тому, або іншому виді відбиває необхідну інформацію про кількісні властивості об'єктів, явищ і процесів. Причому така інформація може бути отримана шляхом вимірювання.

Вимірювання – сукупність операцій по застосуванню технічного засобу, що зберігає одиницю фізичної величини, які полягають в порівнянні розміру вимірюваної величини з її одиницею з метою отримання значення фізичної величини в формі, найбільш зручній для використання.

Основним об'єктом вимірювання є фізичні величини.

Фізична величина - це властивість фізичного об'єкту (фізичної системи, явища або процесу), загальна в якісному відношенні для багатьох фізичних об'єктів, але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного з них.

Висока точність вимірювання і достовірність наукових результатів має велике значення, як в інженерній, так і науковій діяльності.

Результат вимірювання фізичної величини - це значення величини, отримане шляхом її вимірювання.

Види вимірювань класифікують за наступними ознаками:

1. за способом одержання числового значення вимірюваної величини:
   а) прямі;
   б) непрямі (опосередковані)
   в) сукупні;
   г) сумісні.
2. за точністю вимірювання числових значень вимірюваної величини:
   а) метрологічні вимірювання або вимірювання з максимально можливою точністю;
   б) контрольно-повірочні вимірювання;
   в) технічні вимірювання;
3. за умовами вимірювань:
   а) рівноточні;
   б) нерівноточні;
4. за кількістю вимірювань:
   а) однократні;
   б) багатократні;
5. за характером зміни вимірюваної величини в часі:
   а) статичні;

б) динамічні;

6. за способом представлення (відбиттям) результатів вимірювань:

а) абсолютні;

б) відносні.

7. за формою одержаного значення вимірюваної величини:

а) аналогові;

б) цифрові;

в) графічні.

9. за ступенем достатності:

а) необхідні;

б) надлишкові;

В процесі вимірювань експериментатор прагне отримати значення величини, яке відповідає тому чи іншому розміру величини. Таким значенням є **істинне значення фізичної величини**.

Істинне значення фізичної величини (стисло - істинне значення величини або істинне значення) - це числове значення, яке виражає істинний розмір величини в даних одиницях вимірювання, тобто значення, яке ідеально відображало б певну властивість об'єкта.

Однак внаслідок похибок засобів та методів вимірювань, які застосовуються, а також внаслідок коливань зовнішніх умов, які вносять в результат вимірювань додаткові похибки, отримане значення величини, строго кажучи, не буде дорівнювати істинному значенню. Істинне значення залишиться невідомим.

В результаті вимірювань отримують значення фізичної величини, близьке до істинного, яке називається **дійсним (умовно істинним) значенням фізичної величини.**

Дійсне значення фізичної величини - це числове значення величини, яке отримується в результаті вимірювання і настільки наближене до істинного значення, що його можна використати замість істинного для даної мети.

Результати вимірювання (РВ) будь-якої фізичної величини за допомогою засобів вимірювання являють собою приблизну оцінку її значення, оскільки результат вимірювання у загальному залежить від використаного методу та засобу вимірювань, від самої фізичної величини та експериментатора.

Якість результату вимірювання та якість засобів вимірювання (ЗВ) прийнято характеризувати показом їхніх похибок. У загальному, **похибка вимірювань – це критерій якості проведених вимірювань,** і являє собою відхилення результату вимірювання фізичної величини від її істинного значення.

Поняття похибки використовується для оцінки характеристик як засобів вимірювань, так і результатів вимірювання. **Похибка** – кількісна характеристика невизначеності, або неоднозначності, результату вимірювання.

Основні причини виникнення похибок: недосконаліcть методів та засобів вимірювання, зміна умов проведення експерименту, яка може впливати як на саму фізичну величину, так і на засоби вимірювання і самого експериментатора. Кожна з наведених причин виникнення похибок зумовлена впливом багатьох чинників, які формують основні складові загальної похибки вимірювання.

Оскільки не існує абсолютно точних приладів і методів вимірювань, то результат вимірювання $x_{вим}$ певною мірою відрізняється від істинного значення $x_{іст}$.

У першу чергу, потрібно відрізняти **похибку засобу вимірювання та похибку результату вимірювань.** Ці поняття неідентичні.

Похибка результату вимірювань $\Delta_{РВ}$ - це число, яке показує можливі межі невизначеності значення вимірюваної фізичної величини (ФВ), тобто, $\Delta_{РВ}$ оцінює відхилення результату $x_{вим}$ вимірювання ФВ певним ЗВ від її істинного $x_{іст}$ (чи дійсного $x_{дійсне}$**)** значення в об'єкті.

Похибка засобу вимірювання $\Delta_{ЗВ}$- це властивість ЗВ, вимірювати ФВ з наперед заданою межею невизначеності, і для визначення цієї властивості у ЗВ необхідно попередньо провести його метрологічні дослідження, використовуючи відповідні правила метрологічної атестації або повірки.

Процедура вимірювання складається із таких головних етапів: прийняття моделі об'єкта вимірювання, вибору методики, вибору ЗВТ, проведення експерименту з метою отримання числового значення результату вимірювання.

Кожному етапові притаманні недоліки, які спричиняють відмінність результату від істинного значення вимірюваної величини (похибки). Залежно від причини виникнення розрізняють:

1. **Методичні (методологічні) похибки** – це похибки моделі і методики, тобто неточність співвідношень між вимірюваною величиною і вихідним сигналом (недосконалість вибраного методу, вплив вимірювальної апаратури на вимірювану фізичну величину).

2. **Інструментальні похибки –** це похибки, зумовлені недосконалістю засобів вимірювальної техніки.

3. **Похибки, зумовлені впливом неконтрольованих зовнішніх причин**, внаслідок чого прилад працює не в нормальному режимі або не за тих умов, за яких здійснювалось його калібрування. Наприклад, при зважуванні тіла на аналітичних вагах на точність показань можуть впливати потоки повітря, електричні поля, порошини, що осідають на зважуване тіло і гирі.

4. **Суб'єктивні похибки –** це похибки, спричинені недосконалістю органів почуттів оператора, недостатнім досвідом, неуважністю при знятті відліків тощо.

Похибка результату вимірювання Δ**x** - це відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини.

Оскільки на практиці користуються дійсним значенням величини, яке заміняє істинне значення, то похибка вимірювання Δx знаходиться за формулою:

$$\Delta x = x_{вим} - x_{дійсне} \qquad (2.1),$$

де $x_{вим}$ - значення величини, отримане на основі вимірювань;

$x_{дійсне}$ - значення величини, прийняте за дійсне.

За дійсне значення при однократних вимірюваннях приймають значення, отримане за допомогою зразкового засобу вимірювань; при багатократних вимірюваннях - середнє арифметичне із значень окремих вимірювань, які входять в даний ряд.

Похибки вимірювань класифікують за наступними ознаками:

1. за характером прояву – систематичні, випадкові, грубі похибки і промахи;
2. за способом виразу – абсолютні, відносні;
3. за умовами зміни вимірюваної величини – статичні і динамічні;
4. за джерелом виникнення – методичні, інструментальні, суб'єктивні;
5. за способом обробки результатів вимірювань - середні арифметичні і середні квадратичні;
6. за повнотою охоплення вимірювальної задачі – часткові і повні;
7. по відношенню до одиниці фізичної величини – похибки відтворення одиниці, зберігання одиниці і передачі розміру одиниці.

В даному розділі нас цікавитимуть похибки за двома першими ознаками.

Систематична похибка вимірювань $\Delta_С$ – складова похибки результату вимірювання, яка залишається сталою або змінюється по певному закону (закономірно змінюється) при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини в тих самих умовах.

Систематичні похибки можуть бути настільки великими, що зовсім перекручують результати вимірювань. Тому облік і виключення систематичних похибок становлять важливу частину вимірювальної роботи. Як правило, **джерелом виникнення систематичних похибок результату вимірювань є систематичні похибки використовуваних засобів вимірювань.** Здебільшого вплив систематичних похибок на результати вимірювань може бути врахований. Ту частину похибки, що залишається після вживання заходів щодо усунення, прийнято називати **невиключною систематичною похибкою.**

Значення систематичної похибки звичайно пов'язується з поняттям правильності виміру. Чим менше систематична похибка, тим правильніше проведено вимірювання, а якщо систематична похибка відсутня, то результат вимірювання називається **виправленим**.

Систематичні похибки можуть бути вивчені і результат вимірювання може бути уточнений або шляхом внесення поправок або, використовуючи такі способи вимірювання, які дають можливість виключити вплив систематичних похибок без їх визначення.

Випадкова похибка вимірювань $\Delta_В$ – складова похибки результату вимірювання, яка змінюється випадковим чином (по знаку і значенню) при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини при одних і тих же умовах.

Випадкові похибки неминучі і головною їх особливістю є іхня непередбачуваність від одного вимірювання до іншого. Тому не завжди можна встановити причину їх виникнення. При повторних вимірюваннях вони не залишаються постійними, тому що виникають в результаті спільного впливу на процес вимірювання багатьох причин, кожна з яких проявляє себе по-різному і незалежна одна від одної.

Випадкові похибки проявляються як нерегулярні розходження результатів вимірювання в останніх двох-трьох значущих цифрах. Ці похибки виникають під дією багатьох незалежних чинників, кожний з яких здійснює незначний вплив на процес вимірювання. Чинники, які спричиняють випадкові похибки, з’являються нерегулярно і зникають несподівано, або проявляються з непередбачуваною інтенсивністю. Присутність випадкової похибки легко визначається при повторних вимірах незмінної ФВ і проявляється у вигляді деякого розкиду результатів вимірювань.

Незначну величину випадкових похибок засвідчує близькість результатів повторних вимірювань.

Випадкові похибки не можуть бути усунені з результатів вимірювань як систематичні похибки. Але випадкові похибки піддаються строгому математичному опису, що дозволяє зробити висновки про якість вимірювань, у яких вони наявні.

Теорія випадкових похибок, заснована на методах теорії ймовірностей і математичної статистики, дозволяє при проведенні певної кількості повторних вимірювань уточнити кінцевий результат. Внаслідок цього теорія випадкових похибок широко використовується для оцінки точності вимірювань і надійності роботи вимірювальних приладів.

Теорія похибок ґрунтується на двох положеннях, які підтверджує практика:

1. при великій кількості вимірювань випадкові похибки однакового числового значення, але різні за знаком, зустрічаються однаково часто;

2. великі (по абсолютному значенню) похибки зустрічаються рідкіше, ніж малі.

Однією із різновидностей **випадкової похибки** є **груба похибка (промах) – надмірна випадкова похибка.**

Грубими похибками і промахами називаються похибки, які суттєво перевищують систематичні або випадкові похибки.

Груба похибка або **промах** – це похибка окремого результату вимірювань, яке входить в ряд вимірювань, що за даних умов різко відрізняється від інших результатів цього ряду.

Причинами грубих похибок можуть бути: несправність вимірювальної апаратури, різка зміна умов вимірювань (короткочасна дія магнітного поля, зміна напруги живлення приладу тощо) та інші випадкові впливи.

Грубі похибки за своєю природою є випадковими. Вони звичайно виявляються при обробці результатів повторних вимірювань і з подальшого розгляду виключаються.

Грубі похибки, що з'являються внаслідок неправильних дій оператора, називають також **промахами**.

Грубі похибки і промахи не враховуються при обробці результатів вимірювань і, як правило. відкидаються.

Абсолютна похибка вимірювання Δx — це відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини:

$$\pm \Delta x = x_{вим} - x_{іст}, \qquad (2.2)$$

де $x_{вим}$ - результат вимірювання;

$x_{іст}$ – істинне значення вимірюваної величини.

Оскільки істинне значення величини невідоме, то на практиці використовують поняття дійсного значення величини ($x_{Д}$).

З урахуванням зазначеної обставини:

$$\pm \Delta x = x_{вим} - x_{дійсне}$$

Абсолютна похибка вимірювання Δx завжди виражається в одиницях вимірюваної величина.

Наприклад., Δx = 0,4В; Δx = 2,5 мкм.

Типова форма подання результату вимірювання наступна:

$$x_{іст} = x_{вим} \pm \Delta x .$$

Це означає, що істинне значення з досить високою ймовірністю перебуває в інтервалі

$$x_{вим} - \Delta x < x_{іст} < x_{вим} + \Delta x . \qquad (2.3)$$

Даний інтервал називається **інтервалом довіри** або **довірчим інтервалом.**

Абсолютна похибка не може в повній мірі використовуватись як показник точності проведених вимірювань, оскільки одне й теж її значення, наприклад, $\Delta x = 0.05$мм при $x_{дійсне} = 100$мм – відповідає відносно високій точності вимірювань, а в другому випадку при $x_{дійсне} = 1$мм – низькій.

Тому, для більш наглядної оцінки точності проведених вимірювань, введене поняття відносної похибки.

Відносна похибка вимірювання ε — це відношення абсолютної похибки вимірювання до дійсного значення вимірюваної величини:

$$\varepsilon = \frac{\pm(x_{вим.} - x_{д})}{x_{д}} = \frac{\pm \Delta x}{x_{д}} \qquad (2.4)$$

або

$$\varepsilon = \frac{\pm(x_{вим.} - x_{д})}{x_{д}} \cdot 100\,\% = \frac{\pm \Delta x}{x_{д}} \cdot 100\,\% \qquad (2.5)$$

де $x_{д}$ - дійсне значення вимірюваної величини.

Відносна похибка вимірювання виражається в процентах або долях вимірюваної величини.

Якість вимірювань, їх точність зручно характеризувати саме відносною похибкою. При використанні поняття відносної похибки високій точності вимірювань відповідає мале значення відносної

У процесі вимірювання значення фізичної величини, з урахуванням дії багатьох чинників проявляються одночасно обидві складові абсолютної похибки Δ вимірювання: як випадкова ($\Delta_{в}$) так і систематична (Δ_{c}), тобто $\Delta = \Delta_{c} + \Delta_{в}$. Випадкова похибка характеризує відхилення окремого результату вимірювання від певного центра її групування, а систематична – характеризує зміщення цього центру відносно істинного значення вимірюваної величини.

Методичні похибки - складові похибки вимірювання, які виникають через недосконаліcть методу вимірювання та граничну точність значень використаних фізичних констант і припущень в розрахункових формулах.

Інструментальні похибки - це складові похибки вимірювання фізичної величини, які залежать від похибки використаних засобів виміраювання.

Суб'єктивною називається похибка вимірювання, що є наслідком індивідуальних властивостей людини, обумовлених фізіологічними особливостями її організму, швидкістю реакції або укоріненими неправильними навичками.

Якщо відхилення результатів вимірювань від істинного значення вимірюваної величини відбувається як у бік збільшення, так і у бік зменшення результатів вимірювань, то **найбільш вірогідним значенням вимірюваної величини буде середнє арифметичне усіх зроблених вимірювань:**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (2.6)$$

де $\bar{x}$ - середнє арифметичне значення;

$x_1, x_2, ..., x_n$ - результати окремих вимірювань

x_i - результат і-того вимірювання;

n - кількість вимірювань.

Для характеристики міри наближення до істинного значення вимірюваної величини вводиться поняття **абсолютної похибки** – величини, яка показує наскільки знайдене (середнє арифметичне) значення може відрізнятися від істинного значення вимірюваної величини.

Для визначення абсолютної похибки спочатку треба знайти відхилення кожного окремого вимірювання від середнього арифметичного: $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$, де Δx_i - відхилення і-того вимірювання.

Випадкова середня арифметична похибка окремого вимірювання r визначається за формулою:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \bar{x} \right|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \Delta x_i \right|}{n} \qquad (2.7)$$

де $\left| \Delta x_i \right|$ - модулі відхилень кожного окремого вимірювання від середнього арифметичного значення.

З цієї формули і теорії ймовірностей випливає, що зі збільшенням числа вимірювань n випадкова похибка зменшуватиметься.

В якості **систематичної похибки** береться приладова похибка, що дорівнює половині ціни поділки шкали приладу. **Ціною поділки** шкали приладу називається відстань між двома сусідніми поділками шкали, виражена в одиницях вимірюваної величини.

У загальному випадку необхідно брати до уваги як випадкові, так і систематичні похибки вимірювань. Тому абсолютна похибка розраховується за формулою:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_c)^2 + (\Delta x_в)^2} \qquad (2.8)$$

де Δx_c - систематична похибка засобу вимірювань (приладу, інструменту);

$\Delta x_в$ - випадкова похибка вимірювань.

Зауваження: Якщо випадкова похибка набагато менше за систематичну, то для підвищення точності результату вимірювань немає сенсу збільшувати число вимірювань, а треба вжити заходів до зменшення систематичної похибки, наприклад, використати більш точніші прилади.

При виконанні вимірювань ми прагнемо досягти максимальної точності отриманих результатів.

Точність вимірювань – характеристика якості вимірювань, яка відбиває близькість до нуля похибки його результату (чим менша похибка вимірювання, тим більша точність результату вимірювання).

Точність вимірювань означає максимальну наближеність їх результатів до істинного значення вимірюваної величини. Чим ближче результат до істинного значення, тим точніше вимірювання. Спеціального кількісного визначення точність не має. Однак у деяких випадках точність визначається кількісно величиною, оберненою до модуля відносної похибки:

$$\gamma = \frac{1}{|\varepsilon|} \qquad (2.9)$$

де ε - відносна похибка вимірювання.

З цього виразу випливає: чим менша відносна похибка ε, тим вища точність вимірювань.

Розрізняють поняття «точність методу вимірювань» і «точність результату вимірювань».

Для характеристики точності методу вимірювань вводяться два параметри:

1. **Середнє квадратичне відхилення (СКВ)** σ окремого вимірювання, яке визначається за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}} \qquad (2.10)$$

Середнє квадратичне відхилення σ визначає **сходимість результатів вимірювань**

Сходимість (збіжність) результатів вимірювань – характеристика якості вимірювань, яка відбиває близькість один до одного результатів повторних вимірювань однієї і тієї ж величини, виконаних одним і тим же методом, одними і тими ж засобами вимірювань, одним оператором, в однакових умовах.

Похибка визначення СКВ σ визначається за формулою:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}} \ . \qquad (2.11)$$

2. **Розмах (розкид) результатів вимірювань** R_n, що характеризується величиною

$$R_n = x_{max} - x_{min}, \qquad (2.12)$$

де R_n - розмах результатів вимірювань;

x_{max} і x_{min} - відповідно максимальне і мінімальне значення з ряду результатів;

n - кількість вимірювань.

Для характеристики точності результату вимірювань вводиться параметр: **середня квадратична похибка середнього арифметичного значення** $\sigma_{\overline{x}}$, яка визначається за формулою:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n \cdot (n-1)}} \qquad (2.13)$$

Середня квадратична похибка середнього арифметичного $\sigma_{\overline{x}}$ є основним параметром для визначення **довірчого інтервалу,** тобто інтервалу значень вимірюваної величини, в який із заданою ймовірністю попадають результати вимірювань.

Довірчий інтервал дає змогу судити про **відтворюваність результатів вимірювань.**

Відтворюваність результатів вимірювань – характеристика якості вимірювань, яка відбиває близькість один до одного результатів вимірювань однієї і тієї ж величини, отриманих в різних місцях, різними методами і засобами, різними операторами, в різний час, але приведених до одних і тих же умов (температура, вологість, тиск та інші).

Похибка визначення СКВ $\sigma_{\overline{x}}$ визначається за формулою::

$$\Delta\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n(n-1)}} = \frac{\Delta\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (2.14)$$

2.2. Методичні вказівки до розв'язання задач

При розв'язанні задач цього розділу слід пам'ятати наступне:

1. Істинне значення вимірюваної фізичної величини завжди залишається невідомим внаслідок існування похибок вимірювання різного походження (інструментальних, методичних, похибок, зумовлених впливом зовнішніх чинників, суб'єктивних похибок). Тому на практиці завжди користуються дійсним значенням фізичної величини, тобто значенням, отриманим в результаті вимірювань.

2. Необхідно розрізняти похибку засобу вимірювання від похибки результату вимірювання. Остання включає в себе похибку засобу вимірювання як складову загальної похибки результату.

3. Основний вклад в похибку Δ результату вимірювання вносять систематичні $\Delta_с$ та випадкові $\Delta_в$ похибки вимірювання, тобто можна записати, що

$$\Delta = \Delta_с + \Delta_в .$$

4. Як правило джерелом виникнення систематичних похибок результату вимірювань є систематичні похибки використовуваних засобів вимірювань. Їх можна врахувати в кінцевому результаті, знаючи клас точності конкретного засобу вимірювань.

5. Випадкові похибки не можуть бути усунені з результатів вимірювань як систематичні похибки. Але можна зменшити їх вплив на кінцевий результат шляхом проведення багатократних вимірювань і застосовуючи при обробці результатів вимірювань методи теорії ймовірностей і математичної статистики.

6. Абсолютна похибка результату вимірювання визначається за формулою

$$\pm \Delta x = x_{вим} - x_{дійсне}$$

і в загальному випадку розраховується за формулою:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_с)^2 + (\Delta x_в)^2} ,$$

де $\Delta x_с$ - систематична похибка засобу вимірювань (приладу, інструменту);

$\Delta x_в$ - випадкова похибка вимірювань.

Відносна похибка результату вимірювання визначається за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\pm (x_{вим.} - x_д)}{x_д} \cdot 100\ \% = \frac{\pm \Delta x}{x_д} \cdot 100\ \%$$

7. Точність вимірювань – характеристика якості вимірювань, яка відбиває близькість до нуля похибки Δ його результату. За точність вимірювань приймається величина, обернена до модуля відносної похибки:

$$\gamma = \frac{1}{|\varepsilon|} .$$

Чим більше γ, тим вище точність вимірювань.

8. Розрізняють поняття «точність методу вимірювань» і «точність результату вимірювань».

9. Для характеристики **точності методу вимірювань** вводяться два параметри:

середнє квадратичне відхилення (СКВ) σ окремого вимірювання, яке визначається за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

і **розмах (розкид) результатів вимірювань** R_n, що характеризується величиною

$$R_n = x_{max} - x_{min},$$

де x_{max} і x_{min} - відповідно максимальне і мінімальне значення з ряду результатів;

n - кількість вимірювань.

Середнє квадратичне відхилення σ визначає **сходимість результатів вимірювань.**

10. Для характеристики **точності результату вимірювань** вводиться параметр: **середня квадратична похибка середнього арифметичного значення** $\sigma_{\bar{x}}$, яка визначається за формулою:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n\cdot(n-1)}}$$

Середня квадратична похибка середнього арифметичного $\sigma_{\bar{x}}$ визначає довірчий інтервал, який, в свою чергу дає змогу судити про **відтворюваність результатів вимірювань.**

11. Найбільш близьким до істинного значення вимірюваної величини буде середнє арифметичне усіх зроблених вимірювань:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

12. При оцінюванні результату вимірювань обчислюються:

а) абсолютна похибка, яка використовується для заокруглення результату і його правильного запису;

б) відносна та приведена похибка, яка застосовується для порівняння точності результату і приладу.

13. Результат точного вимірювання визначають двома числами: середнім арифметичним значенням і абсолютною похибкою:

$$x_{іст} = \bar{x} \pm \Delta x$$

Наприклад, R = (40,780 ± 0,015) Ом. Похибку зазвичай подають однією-двома значущими цифрами. Заокруглюють результат так, щоб він закінчувався десятковим знаком того ж розряду, що і похибка.

Отже, результати вимірювань та їх похибок в записі кінцевого результату необхідно представляти наближеним числом з певною кількістю значущих цифр.

14. Значущими цифрами називають усі цифри, включаючи 0, якщо він стоїть всередині або кінці числа.

15. **К**-та цифра наближеного числа називається **правильною** (вірною, істинною), якщо абсолютна похибка цього числа не перевищує половини одиниці k-го розряду (якщо це розряд одиниць, то при $\Delta \leq 0{,}5$; якщо це розряд десяткових, то при $\Delta \leq 0{,}05$ і т.д.). В противному випадку цифра k-го порядку називається **сумнівною** (якщо $\Delta \geq 0{,}5 \cdot 10^{k}$, k = 1, 0 -1, -2, -3, ...). Це накладає обмеження на вибір числа значущих цифр **при запису величини похибки** Δx.

16. Для задоволення цього способу визначення числа правильних знаків проводять заокруглення чисел. Нехай після заокруглення в числі повинно залишитись k значущих цифр.

Тоді користуються такими правилами:

- якщо k+1 цифра менше 5, то цифра k не змінюється;
- якщо k+1 цифра більше 5, то цифра k збільшується на 1;
- якщо k+1 цифра дорівнює 5, то можливі два випадки:

а) якщо серед цифр, що відкидаються, крім цифри 5, є відмінні від 0, то k-та цифра збільшується на 1.

б) але якщо ці цифри дорівнюють 0, то: k-ту цифру збільшують на 1, якщо вона непарна, і залишають без змін, якщо вона парна.

17. При заокругленні отриманого результату вимірювання й розрахованого значення похибки прийнято керуватися наступними правилами:

1. похибку результату вимірювання вказують двома значущими цифрами, якщо перша з них дорівнює 1 або 2, і однією, якщо перша дорівнює 3 і більше;
2. результат вимірювання заокруглюють до того ж десяткового розряду, яким закінчується значення абсолютної похибки;
3. зайві цифри у цілих числах замінюють нулями, а у дробових десяткових відкидають: наприклад, 732 $\approx$ 700, 2,213 $\approx$2,2.
4. заокруглення робиться лише в остаточній відповіді, а усі попередні обчислення - з одним - двома зайвими розрядами.

18. Виконуючи математичні операції з наближеними числами, необхідно дотримуватися **правила:** після виконання математичних операцій в кінцевому результаті необхідно залишити стільки значущих цифр після коми, скільки їх було в числі з найменшою кількістю таких значущих цифр. Зайві значущі цифри у цілих числах замінюють нулями, у десяткових дробах відкидають.

2.3. Приклади розв’язку задач

Задача 1. Одержано 12 виправлених результатів вимірювання зовнішнього діаметру труби d (мм): 8,58; 8,50; 8,55; 8,48; 8,53; 8,52; 8,49; 8,51; 8,46; 8,45; 8,47; 8,54. Обчислити розмах і похибки результатів вимірювань.

Розв’язок.

1. Знаходимо розмах результатів вимірювання

$$R_{12} = d_{max} - d_{min} = 8{,}58 - 8{,}45 = 0{,}13 \text{ мм.}$$

2. Знаходимо середнє арифметичне значення результатів вимірювань:

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{12} d_i}{12} = \bar{d} = \frac{8{,}58+8{,}50+...+8{,}54}{12} = \frac{102{,}08}{12} = 8{,}51\text{мм}$$

3. Абсолютна похибка i-того вимірювання, наприклад 1-го, дорівнює

$$\Delta d_1 = d_1 - \bar{d} = 8.58 - 8{,}51 = 0{,}07 \text{ мм}$$

4. Відносна похибка i-того вимірювання (наприклад, 1-го) дорівнює:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta d_1}{d_1} = \frac{0{,}07}{8{,}58} = 0{,}0082 \quad \text{або} \quad 0{,}82\%.$$

5. Для знаходження середньої арифметичної похибки окремого вимірювання, знайдемо абсолютні похибки всіх 12-ти результатів вимірювань:

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{12} \left| d_i - \bar{d} \right|}{n} =$$

$$= \frac{|0{,}07|+|-0{,}01|+|0{,}04|+|-0{,}03|+|0{,}02|+|0{,}01|+|-0{,}02|+|0|+|-0{,}05|+|-0{,}06|+|-0{,}04|+|0{,}03|}{12} = \pm\ 0{,}03\text{мм}$$

Окремі абсолютні похибки коливаються в межах від +0,07 до – 0,06 мм, але в середньому випадкова похибка окремого вимірювання $r = \pm\ 0{,}03$ мм

6. Знаходимо середню квадратичну похибку окремого вимірювання:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(0,07)^2 + (-0,01)^2 + (0,04)^2 + (-0,03)^2 + (0,02)^2 + (0,01)^2 + (-0,02)^2 + (-0,05)^2 + (-0,06)^2 + (-0,04)^2 + (0,02)^2}{11}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0,017}{11}} = \pm 0,039 \text{ мм}$$

Це значення отримано з похибкою:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0,039}{\sqrt{2 \cdot 11}} = \frac{0,039}{4,69} = \pm\, 0,008 \text{ мм}$$

7. Знаходимо середню квадратичну похибку середнього арифметичного:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,039}{\sqrt{12}} = \frac{0,039}{3,46} = \pm 0,0113 \text{ мм}$$

Аналогічно, це значення отримано з похибкою:

$$\Delta\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n(n-1)}} = \frac{\Delta\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,008}{3,46} = \pm\, 0,0023 \text{ мм}$$

Задача 2. Зроблено 5 вимірювань швидкості руху v деякого тіла у в'язкій рідині: 0,51; 0,54; 0,52; 0,56; 0,58 см/с. Обчислити СКВ середнього арифметичного та похибку його визначення.

Розв'язок.

1. Знаходимо $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^{5} v_i}{5} = \frac{0,51+0,54+0,52+0,56+0,58}{5} = 0,54 \ \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

2. Знаходимо середню квадратичну похибку (СКВ) окремого вимірювання:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(v_i - \bar{v})^2}{4}} = \sqrt{\frac{(-0,03)^2+(-0,02)^2+(0,02)^2+(0,04)^2}{4}} =$$

$$= 0,0278 \ \frac{\text{см}}{\text{с}} \approx 0,028 \ \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

3. Знаходимо середню квадратичну похибку середнього арифметичного:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(v_i - \bar{v})^2}{5\times 4}} = \pm 0{,}013 \text{ см/с}$$

4. Знаходимо похибку визначення $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\Delta\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm 0{,}004\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Задача 3. При вимірюванні деяких 4-х фізичних величин різними методами було проведено по 8 вимірювань і зроблені наступні записи усереднених результатів та їх похибок:

$\bar{x}_1 = 13{,}805$; $\bar{x}_2 = 8{,}7786$; $\bar{x}_3 = 11{,}53165$; $\bar{x}_4 = 0{,}7$;
$\Delta x_1 = 0{,}05157$; $\Delta x_2 = 0{,}00550$; $\Delta x_3 = 0{,}000249$; $\Delta x_4 = 0{,}147$.

Написати правильно результати вимірювань, а також суми і добутку одержаних наближених величин.

Розв'язок.

Дані похибок необхідно заокруглити, записавши доцільну кількість значущих цифр:

$\Delta x_1 = 0{,}05157$. Оскільки перша значуща цифра дорівнює 5, то в запису абсолютної похибки необхідно залишити одну значущу цифру, тобто потрібно записати $\Delta x_1 = 0{,}05$;

$\Delta x_2 = 0{,}00550$. Оскільки перша значуща цифра дорівнює 5, то в запису абсолютної похибки необхідно залишити одну значущу цифру, тобто потрібно записати потрібно писати: $\Delta x_2 = 0{,}006$; при цьому застосовано правило заокруглення, згідно якого, якщо цифра, що відкидається дорівнює 5, а наступні цифри дорівнюють 0, то попередня цифра збільшується на одиницю, якщо вона непарна, і залишається без зміни – якщо парна.

$\Delta x_3 = 0{,}000249$. Оскільки перша значуща цифра дорівнює 2, то в запису абсолютної похибки необхідно залишити дві значущі цифри, тобто потрібно записати: $\Delta x_3 = 0{,}00025$; при цьому застосовано правило заокруглення, згідно якого, якщо цифра, що відкидається більше за 5, то попередня цифра збільшується на одиницю.

$\Delta x_4 = 0{,}147$. Потрібно писати: $\Delta x_4 = 0{,}15$.

Середнє значення величин $\bar{x}$ також необхідно заокруглити, залишивши правильні і одну сумнівну цифри:

$\bar{x}_1 = 13{,}80$ - цифра 8 правильна, оскільки $\Delta x_1 = 0{,}05$, тому залишається ще сумнівна цифра 0, яка не збільшується на одиницю, оскільки є парною.
$\bar{x}_2 = 8{,}779$ - 8,7,7, - правильні цифри; 9 – сумнівна цифра.
$\bar{x}_3 = 11{,}53165$ - 1,1,5,3,1, 6 – правильні цифри; 5 - сумнівна
$\bar{x}_4 = 0{,}70$ - 7 –сумнівна цифра.

$x_{\sum} = 13{,}80 + 8{,}779 + 11{,}53165 + 0{,}70 = 34{,}81065 \approx 34{,}81$, оскільки згідно правила, після виконання математичних операцій в кінцевому результаті необхідно залишити стільки значущих цифр після коми, скільки їх було в числі з найменшою кількістю таких значущих цифр.

$$x_{\text{добутку}} = 13{,}80 \cdot 8{,}779 \cdot 11{,}53165 \cdot 0{,}70 = 977{,}9389524 \approx 977{,}94.$$

Задача 4. В результаті 10-ти вимірювань отримані наступні значення: 5304,5; 5305,2; 5304,3; 5304,9; 5304,8; 5305,0; 5304,6; 5305,1; 5304,7; 5304,9. Визначити СКВ окремих вимірювань та їх середнього арифметичного. Показати, що $\sum\limits_i \left(x_i - \bar{x}\right) = 0$ і $\sum\limits_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \min$.

Розв'язок.

1. Знаходимо відхилення від середнього для кожного вимірювання: $v_i = x_i - \bar{x}$.

Для цього спочатку знаходимо $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10} x_i}{10} = 5304{,}8$$

$$v_i = -0{,}3;\ 0{,}4;\ -0{,}5;\ 0{,}1;\ 0;\ 0{,}2;\ -0{,}2;\ 0{,}3;\ -0{,}1;\ 0{,}1.$$

2. Знаходимо

$\sum\limits_{i=1}^{10} v_i = \sum\limits_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}) = 0$ - довели першу властивість відхилення від середнього арифметичного.

3. Знаходимо

$$\sum_{i=1}^{10} v_i^2 = 0{,}70.$$

4. Знаходимо різницю

$$u_i = x_i - x_7 = x_i - 5304{,}7$$

$$u_i = -0{,}2;\ 0{,}5;\ -0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}3;\ -0{,}1;\ 0{,}4;\ 0;\ 0{,}2;$$

5. Знаходимо

$$\sum_{i=1}^{10} u_i^2 = 0{,}80.$$

Бачимо, що

$\sum\limits_i v_i^2 < \sum\limits_i u_i^2$ - довели другу властивість відхилення від середнього арифметичного.

6. Знаходимо СКВ окремого вимірювання:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})}{n\text{-}1}} = \sqrt{\frac{0{,}70}{9}} \approx \pm 0{,}29.$$

7. Знаходимо СКВ середнього арифметичного:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}70}{10 \cdot 9}} \approx \pm 0{,}088 \approx \pm 0{,}09.$$

Задача 5. Виміряне значення опору R =100,0 Ом. Границя допустимої відносної похибки вимірювання $\varepsilon_Г = 1{,}0\%$. Знайти інтервал $\Delta_Г$, в якому повинно знаходитися істинне значення опору $R_{іст}$.

Розв'язок

1. Абсолютна похибка вимірювання R визначається як:

$$\Delta = R - R_{іст};$$

Звідси

$$R_{іст} = R - \Delta; \quad \text{а отже,} \quad -\Delta_Г \le \Delta \le \Delta_Г$$

2. Таким чином

$$R - \Delta_Г \le R_{іст} \le R + \Delta_Г$$

3. Визначаємо інтервал $\Delta_Г$, в якому повинно знаходитися істинне значення опору. При цьому виходимо з того, що відносна похибка вимірювання визначається виразом:

$$\varepsilon_{Г} = \pm \frac{\Delta R}{R} 100\%$$

Звідси

$$\Delta R = \Delta_{Г} = \pm \frac{\varepsilon_{Г} R}{100\%} = \pm \frac{1{,}0\% \cdot 100{,}0}{100\%} = \pm 1{,}0 \text{ Ом}$$

Отже

$$R - \Delta_{Г} \leq R_i \leq R + \Delta_{Г}$$

$$99{,}0 \text{ Ом} \leq R_i \leq 101{,}0 \text{ Ом}$$

Задача 6. При вимірюванні величини x виникає систематична похибка, відносне значення якої ε залишається сталим у всьому діапазоні вимірювань. Вважаючи, що значення ε, відомо, вивести формулу для визначення скоригованого (тобто вільного від вказаної похибки) значення вимірюваної величини x'.

Розв'язок

1. Абсолютна похибка вимірюваної величини визначається як

$$\Delta = \pm(x - x')$$

2. З іншого боку відносна похибка визначається як

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta}{x'}$$

3. Звідси випливає, що

$$\varepsilon x' = x - x'.$$

4. Таким чином,

$$x = \varepsilon x' + x' = x'(1 + \varepsilon)$$

$$x' = \frac{x}{1 + \varepsilon}$$

Задача 7. При вимірюванні напруги джерела живлення отримані наступні результати, В: 9,78; 9,65; 9,83; 9,69; 9,74; 9,80; 9,68: 9,71; 9,81.Знайти результат вимірювань, абсолютну і відносну похибки вимірювань напруги. Записати результат у стандартній формі.

Розв'язок

1.Знаходимо середнє арифметичне значення і приймає його за результат вимірювання:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 9{,}74\text{В}$$

2. Визначаємо середнє квадратичне відхилення (СКВ) результату вимірювання:

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = 0{,}0215\text{В}$$

3. Таким чином, абсолютна похибка результату вимірювання дорівнює:

$$\Delta = \pm 0{,}0215 \text{ В} \approx \pm 0{,}022 \text{ В}.$$

Оскільки перша значуща цифра дорівнює 2, то в запису похибки залишаємо дві значущі цифри і здійснюємо заокруглення.

4. Результат вимірювання записується у наступному вигляді:

$$x_{іст} = \overline{x} \pm \Delta = 9{,}740 \pm 0{,}022 \text{ В}$$

5. Відносна похибка складає:

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta}{\overline{x}}100\% = \pm\frac{0{,}022}{9{,}743}100\% = \pm 0{,}2\%.$$

Задача 8. Результат вимірюваня тиску 1,0600 Па, похибка результату вимірювання Δ = 0,001 Па. Записати результат вимірювання тиску.

Розв'язок

1.Оскільки в запису похибки перша значуща цифра дорівнює 1, то в кінцевому запису похибки маємо залишити дві значущя цифри, тобто додаємо ще нуль:

$$\Delta = 0{,}0010 \text{ Па}.$$

2. Кінцевий результат вимірювання має вид:

$$P = (1{,}0600 \pm 0{,}0010) \text{ Па}$$

Задача 9. Відомі абсолютна і відносна похибки вимірювання деякої величини А. Чи можна визначити значення самої вимірюваної величини А?

Розв'язок

1. Абсолютна похибка вимірювання дорівнює:

$$\Delta = \pm \frac{\gamma \cdot A_N}{100\%} \qquad (2.15)$$

де γ - основна приведена похибка; A_N - нормуюче значення.

2. Відносна похибка вимірювання дорівнює:

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta A}{A_д} \cdot 100\% = \pm \frac{\gamma \cdot A_N}{A_д} \qquad (2.16)$$

де $A_д$ - дійсне значення вимірюваної величини.

3. Виходячи з (2.15) і (2.16) отримуємо:

$$100\ \% \cdot \Delta = \pm \gamma A_N; \qquad \varepsilon \cdot A_д = \pm\ \gamma \cdot A_N$$

Звідси

$$100\ \% \cdot \Delta = \varepsilon \cdot A_д .$$

Таким чином

$$A_д = \frac{100\ \% \cdot \Delta}{\varepsilon}$$

Наприклад, якщо ми виміряли деякий опір з Δ=10 Ом і ε= 10 %, то сам опір дорівнює

$$R = \frac{100\% \cdot 10\ Ом}{10\%} = 100\ Ом$$

Задача 10. При визначенні діаметра ведучого валу ручного годинника допущена похибка ± 5 мкм, а при визначенні відстані до Луни допущена похибка ± 5 км. Яке вимірювання точніше? Діаметр годинникового валу $d = 0{,}5$ мм, відстань до Луни $L = 4 \cdot 10^5$ км.

Розв'язок

1. Знаходимо відносну похибку вимірювання діаметру ведучого валу годинника:

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta d}{d} \cdot 100\% = \pm \frac{5 \cdot 10^{-6} м}{0{,}5 \cdot 10^{-3} м} \cdot 100\% = \pm 1\ \%$$

2. Знаходимо відносну похибку вимірювання відстані до Луни:

$$\varepsilon = \pm\ \frac{\Delta L}{L}\cdot 100\% = \pm\frac{5км}{4\cdot 10^{5}км}\cdot 100\% = \pm\ 1{,}2\cdot 10^{-3}\%\ \approx\ \pm 0{,}001\%$$

3. Точність вимірювання Y визначається як величина, обернена до модуля відносної похибки:

$$Y = \frac{1}{|\varepsilon|}.$$

Чим більше це відношення, тим точніше вимірювання.

4. Розраховуємо значення Y для двох вимірювань:
а). для вимірювання діаметру валу годинника

$$Y_1 = \frac{1}{|1|} = 1$$

б). для вимірювання відстані до Луни

$$Y_2 = \frac{1}{|0{,}001|} = 10^3$$

Отже, як видно, вимірювання відстані до Луни значно точніше за вимірювання діаметру валу годинника (на три порядки).

Задача 11. Число x = 14,75 знайдено з відносною похибкою 0,5%. Знайти абсолютну похибку.

Розв'язок

1. Відносна похибка визначається виразом:

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\%$$

2. Звідси абсолютна похибка дорівнює:

$$\Delta x = \pm\frac{\varepsilon x}{100\%} = \pm\frac{0{,}514{,}75}{100} = \pm 0{,}07373 \approx 0{,}07$$

У запису абсолютної похибки залишаємо одну значущу цифру, оскільки вона більша за 3.

3. Кінцевий результат записується у вигляді:

$$x_{іст.} = x \pm \Delta x = 14{,}75 \pm 0{,}07$$

2.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Знайти абсолютні та відносні похибки числа $e = 2,71828182...$ заданого двома і трьома цифрами після коми.

Задача 2. За сигналами точного часу маємо 12 год.00 хв. Годинник показує 12 год. 05 хв. Знайти абсолютну і відносну похибки.

Задача 3. Одержано 12 виправлених результатів вимірювання зовнішнього діаметру труби **d** (в мм): 8,58: 8,50; 8,55; 8,48; 8,53; 8,52; 8,49; 8,51; 8,46; 8,45; 8,47; 8,54.

Обчислити розмах і похибки результатів вимірювань.

Задача 4. Зроблено 5 вимірювань швидкості деякого тіла у в'язкій рідині: 0,51; 0,54; 0,52; 0,58; 0,56.

Обчислити СКВ середнього арифметичного та похибку його визначення.

Задача 5. При вимірюванні деяких 4-х фізичних величин різними методами було проведено по 8 вимірювань і зроблені наступні записи усереднених результатів і їх похибок: $X_1 = 13,805$, $X_2 = 8,7786$, $X_3 = 11,53165$; $X_4 = 0,7$; $\Delta x_1 = 0,05157$, $\Delta x_2 = 0,00550$, $\Delta x_3 = 0,000249$ $\Delta x_4 = 0,147$.

Написати правильно результати вимірювань, а також суми і добутки одержаних наближених величин.

Задача 6. Число 14,75 знайдено с відносною похибкою 0,5 %. Знайти абсолютну похибку заокруглення.

Задача 7. Заокруглити число $x = 4,45575650$ до шести, п’яти и т.д. десяткових знаків і до цілого числа.

Задача 8. Обчислити правильні значущі цифри чисел:

а) $x = 0,004507$, $\Delta = 0,00006$;
б) $x = 12,396$, $\Delta = 0,03$;
в) $x = 0,037862$, $\Delta = 0,007$.

Задача 9. Штангенциркулем (ціна поділки 0,05 мм) і лінійкою проведені вимірювання довжини деталі. Отримані результати 25,35 мм та 26 мм відповідно. Які вимірювання є більш точними?

Задача 10. На бензоколонці заливають бензин з абсолютною систематичною похибкою $\Delta = - 0,1$ л при кожній заправці. Обчисліть відносні похибки, що виникають при купівлі 16 л і 40 л бензину.

Задача 11. Використовуючи результати розв’язку задачі 10, визначити вигоду від придбання впродовж року 1360 літрів за ціною 18 грн/л при покупках по 16 л в порівнянні з купівлею по 40 л.

Задача 12. Амплітудний спектр послідовності прямокутних імпульсів із скважністю Q=2 (меандр) був виміряний слективним вольтметром. Результати вимірювань наведені в таблиці:

Частота, кГц	195	380	575	760	945	1130	1320	1510	1700
Амплітуда, мкВ	2210	23	740	21	540	19	325	18	190

Визначити амплітуду і частоту сигналу.

Задача 13. Використовуючи лінійку з максимальною довжиною 30 см, виміряли два об'єкти контролю: l_1 = 12 мм і l_2 = 255 мм. Вимірювання якого об'єкту є більш точним? Відповідь обгрунтуйте математичною нерівністю.

Задача 14. При випробувальному навантаженні резервуару допустиме відхилення від номінального тиску 300 МПа складає не більше 5 %. З якою абсолютною максимально допустимою похибкою необхідно вимірювати тиск при випробуваннях?

Задача 15. Який засіб вимірювання товщини виробу 0,035 мм є оптимальним для одноразового вимірювання: штангенциркуль (ціна поділки 0,05 мм) або мікрометр (ціна поділки 10 мкм)?

Задача 16. Визначити відносну похибку вимірювання напруги змінного струму вольтметром при положеннях перемикача роду роботи на постійному і змінному струмах, якщо прилад показує в першому випадку 128 В, в другому 120 В при напрузі 127 В.

Задача 17. Покази годинника у момент перевірки 12 г 03 хв. Дійсне значення часу 12 г. 00 хв. Визначити абсолютну і відносну похибки годинника.

Задача 18. Користуючись правилами заокруглення до цілих, записати результати наступних вимірювань: 3478,4 м; 4578,6 м; 5674,54 м; 1234,50 мм; 43210,500 с; 8765,50 кг; 232,5 мм; 450,5 с; 877,5 кг

Задача 19. Результат вимірювання тиску 1,0600 Па, похибка результату вимірювання Δ = 0,001 Па. Записати результат вимірювання тиску, користуючись правилами заокруглень.

Задача 20. Амплітудний спектр послідовності прямокутних імпульсів із скважністю Q=2 (меандр) був виміряний слективним вольтметром. Результати вимірювань наведені в таблиці:

Частота, кГц	76,5	149	222	299	373	453	526,5	602,5	672,5
Амплитуда, мкВ	1180	16	398	12	244	11	170	12	135

Визначити амплітуду і частоту сигналу.

Задача 21. За даними 20-ти рівноточних вимірювань знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0{,}12$. Знайти точність вимірювання з надійністю $\gamma = 0{,}99$.

РОЗДІЛ 3 . ВИПАДКОВІ ПОХИБКИ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПОХИБОК. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ.

3.1. Теоретичні відомості

При виконанні з однаковою старанністю і в однакових умовах повторних вимірювань однієї і тієї ж сталої величини ми отримуємо результати спостережень. Деякі з них відрізняється один від одного, а деякі співпадають.

Такі розходження в результатах вимірювань свідчать про наявність в них випадкових похибок.

Після усунення систематичних похибок та промахів результат вимірювання міститиме тільки віпадкові похибки, які дослідним шляхом усунити неможливо. Вплив випадкових похибок розраховують на підставі математичної обробки результатів багатьох вимірювань.

Для характеристики випадкової величини необхідно знати сукупність можливих значень цієї величини та ймовірність, з якою ці значення виникають.

Теорія ймовірностей дає математичні методи вивчення властивостей випадкових подій в великих сукупностях. Теорія похибок використовує математичний апарат теорії імовірностей і математичної статистики, і базується на розгляді появи випадкових похибок при багаторазових спостереженнях як випадкових подій.

Випадковою називається подія, яка при здійсненні певного комплекса умов може або відбутися або не відбутися.

В нашому випадку можна сказати, що при виконанні повторних спостережень (вимірювань) в однакових умовах кожна з численних можливих причин випадкових змін результатів може або з’явитися або не з’явитися. В результаті випадкові зміни при кожному вимірюванні можуть бути будь-якими як за величиною, так і за знаком.

Із теорії ймовірностей відомо:

1. За значної кількості вимірювань похибки, рівні за величиною, однак протилежні за знаком, трапляються однаково часто.

2. Малі похибки трапляються частіше, ніж великі. Дуже великі похибки не трапляються.

3. Випадкові похибки мають певний, найчастіше - нормальний закон розподілу.

Якщо внаслідок багаторазових вимірювань деякої величини отримали $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ результатів, то кожному з них відповідає ймовірність виникнення p_i. Співвідношення, яке встановлює зв’язок між можливими значеннями результату та ймовірностями їх появи називається **законом розподілу** випадкової величини.

Ймовірність події є кількісною оцінкою (характеристикою) об'єктивної можливості її появи. Ймовірність достовірної події дорівнює 1, а ймовірність неможливої події – 0. Ці події є **невипадковими**.

Події, ймовірності p появи яких більше нуля і менше одиниці ($0 < p < 1$), є подіями **випадковими.**

Події називаються **рівноімовірними**, якщо ймовірність їх настання однакова.

Події називаються **незалежними**, якщо ймовірність настання однієї з них не залежить від того здійснилась чи ні інша подія.

Події називаються **взаємно виключаючими**, якщо настання однієї події робить неможливим здійснення другої.

Якщо відомо, що із загальної кількості подій n поява бажаного результату А можлива m разів, то

$$P(A) = m/n, \qquad (3.1)$$

де P(A) – ймовірність настання події A.

Отже, для будь-якого досліду, в якому можливі результати відомі і рівноімовірні, можна безпосередньо розрахувати ймовірність появи того чи іншого результату.

Якщо є дві незалежні події A і B, ймовірності появи яких P(A) і P(B) відповідно, то ймовірність того, що відбудеться або подія A або подія B, визначається за формулою

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB), \qquad (3.2)$$

де

$$P(AB) = N_{AB} / N = P(A) \cdot P(B) \qquad (3.3)$$

ймовірність здійснення одночасно двох подій A і B.

Для взаємно виключаючих подій

$$P(AB) = 0. \qquad (3.4)$$

Формула (3.2) визначає теорему **додавання ймовірностей.**

Вираз (3.3) називається **множенням ймовірностей**. Він визначає ймовірність того, що відбудеться і подія A і подія B.

Якщо відомі ймовірності P_i всіх n можливих взаємно виключаючих подій в даній системі, то

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1. \qquad (3.5)$$

Вираз (3.5) називається **умовою нормування ймовірностей.**

3.2. Методичні вказівки до розв'язання задач

Будь-які вимірювання завжди містять похибки – систематичні і випадкові. Через це результат вимірювань завжди буде відрізнятися від істинного значення вимірюваної величини.

Систематичні похибки, як правило мають передбачуваний характер зміни: вони або залишаються сталими або змінюються по певному закону (який можна визначити) протягом часу виконання вимірювань. Тому в більшості випадків їх можна врахувати в кінцевому результаті шляхом введення поправок.

На відміну від систематичних, випадкові похибки неможливо врахувати в кінцевому результаті, оскільки вони мають непередбачуваний характер зміни і при кожному вимірюванні можуть бути будь-якими як за величиною, так і за знаком. Отже, випадкові похибки можна розглядати як випадкові події, і для аналізу можливості їх появи, а також зменшення негативного впливу на результат вимірювання, застосувати апарат теорії ймовірностей та математичної статистики.

У зв'язку з цим при розв'язанні задач даного розділу необхідно усвідомлювати і використовувати наступні основні поняття теорії ймовірностей:

1. Якщо необхідно знайти ймовірність P(A) появи деякої події A, то, в першу чергу, потрібно з'ясувати загальну кількість n будь-яких подій, а потім розрахувати кількість m сприятливих подій A. Тоді

$$P(A) = m/n.$$

2. Якщо в задачі ставиться завдання знайти ймовірності настання або події A або події B, то необхідно з'ясувати якими ці події є: незалежними, залежними або взаємно виключаючими. Виходячи з цього, потсупають таким чином.

А. Якщо події A і B – незалежні, то ймовірність того, що відбудеться або подія A або подія B, визначається за теоремою додавання ймовірностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

де P(A) – ймовірність настання події A;
P(B) – ймовірність настання події B;
P(AB) - ймовірність здійснення одночасно двох подій A і B.

Б. Якщо події A і B – незалежні, то ймовірність здійснення одночасно двох подій A і B визначається теоремою множення ймовірностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Відповідно, ймовірність одночасного здійснення n незалежних подій $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ визначається як

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot ... \cdot P(A_n)$$

де $P(A_1),\ P(A_2),\ P(A_3),\ \dots,\ P(A_n)\ -$ ймовірності настання подій $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \dots,\ A_n$ відповідно.

B. Якщо події A і B – взаємно виключаючи, то

$$P(AB) = 0.$$

3. Часто в задачах на знаходження ймовірностей настання певних подій корисно скористатися умовою нормування ймовірностей, яка для n можливих взаємно виключаючих має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

де P_i – ймовірність настання i –тої події.

4. Важливо також враховувати таку обставину: якщо p – це ймовірність того, що відбудеться певна подія A, то ймовірність q того, що подія A не відбудеться визначається як

$$q = 1 – p,$$

що явно випливає з умови нормування ймовірностей: p + q = 1.

3.3. Приклади розв'язку задач

Задача 1. Інтервал руху автобусів № 1, 2, 3 із пункту А в пункт В складає відповідно 5, 10 і 20 хвилин.

Знайти ймовірність від'їзду з пункту А автобусом № 1; № 2; № 3; № 1 або 2; № 1 або 3; № 2 або 3; № 1 або 2 або 3 протягом однієї години.

Розв'язок

1. Протягом години з пункту А в пункт В від'їжджає така кількість автобусів:

№ 1 = $\frac{60}{5} = 12$ автобусів; № 2 = $\frac{60}{10} = 6$ автобусів; № 3 = $\frac{60}{20} = 3$ автобуси.

Всього – 21 автобус.

2. Отже, ймовірність від'їхати автобусом № 1 дорівнює: $P_1 = \frac{12}{21}$;

автобусом № 2 - $P_2 = \frac{6}{21}$; автобусом № 3 - $P_3 = \frac{3}{21}$

3. Ймовірність від'їхати або автобусом № i або № j визначається за теоремою додавання ймовірностей:

$$P_{ij} = P_i + P_j.$$

де P_{ij} - ймовірність від'їзду або автобусом № i або автобусом № j;

P_i, P_j - відповідно ймовірності від'їзду автобусом № i та автобусом № j.

Задача 2. Газоподібний водень витікає у вакуум із тонкостінної посудини через отвори S_1 = 0,1 мм^2; S_2 = 0,1 мм^2; S_3 = 0,3 мм^2.

Знайти ймовірність появи у вакуумі довільної молекули водню:

а) через отвір S_1; S_2; S_3;

б) S_1 або S_2;

в) S_1 або S_3;

г) S_2 або S_3.

Розв'язок

1. Ймовірність появи молекули водню через будь який отвір визначається як

$$p_i = \frac{S_i}{S}$$

де S_i - площа i – того отвору;

S - загальна площа всіх отворів, яка дорівнює

$$S = S_1 + S_{2_3} + S_3 = 0,1 + 0,1 + 0,3 = 0,5 м,^2$$

2. Тоді ймовірність p_1 появи молекули водню через отвір S_1 дорівнює

$$p_1 = \frac{S_1}{S} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

Аналогічно $p_2 = \frac{S_2}{S} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2;$ $p_3 = \frac{S_3}{S} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$

3. Ймовірність p_{12} появи молекули водню або через отвір S_1 або отвір S_2 визначається за теоремою додавання ймовірностей:

$$p_{12} = p_1 + p_2 = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

Аналогічно

$$p_{13} = p_1 + p_з = 0,2 + 0,6 = 0,8$$

$$p_{23} = p_2 + p_3 = 0,2 + 0,6 = 0,8.$$

Задача 3. Знайти ймовірність того, що 2 мічені молекули водню (задача 2) покинуть посудину через отвір:

а) S_1; S_2; S_3;

б) S_1, S_2;

в) S_1, S_3;

г) S_2, S_3.

Розв'язок

1. Для розв'язку задачі необхідно застосувати теорему множення ймовірностей:

$$P_{ij} = P_i P_j,$$

де P_{ij} - ймовірність появи першої молекули через отвір S_i, а другої молекули - через отвір S_j;

P_i, P_j - відповідно ймовірності появи молекули через отвір S_i та S_j.

2. Виходячи з цієї теореми отримуємо:

$$P_{11} = P_1 P_1 = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$$

$$P_{22} = P_2 P_2 = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$$

$$P_{33} = P_3 P_3 = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$$

$$P_{12} = P_1 P_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$$
$$P_{13} = P_1 P_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$$
$$P_{23} = P_2 P_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$$

Задача 4. На картках записані натуральні числа: від 1 до 15. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що сума чисел, записаних на цих картках дорівнює 10?

Розв'язок

Для розв'язку задачі скористуємося формулами комбінаторики.

Кількість всіх можливих випадків — це кількість способів, якими можна (без врахування порядку) вибрати дві картки з п'ятнадцяти. Отже,

$$n = C_{15}^{2} = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105$$

Нас влаштовують такі набори (1;9), (2;8), (3;7), (4;6).

Отже, $m = 4$. Таким чином

$$p = \frac{m}{n} = \frac{4}{105} = 0{,}038.$$

Задача 5. Із урни, в якій 10 білих, 4 чорних та 5 синіх кульок, навмання вибирають три кульки. Знайти ймовірність того, що серед них будуть**:**

а) всі білі;

б) всі чорні;

в) 1 біла, 1 синя, 1 чорна.

Розв'язок

1. Ймовірність вибрати першу білу кульку становить:

$$p_1(\text{перша біла кулька}) = \frac{10}{19}$$

оскільки всього в урні 19 (10+4+5) кульок, а сприятливих подій може бути 10.

Ймовірність вибрати другу білу кульку становить вже:

$$p_2\ (\text{друга біла кулька}) = \frac{9}{18}$$

оскільки після витягання першої білої кульки в урні залишилося всього 18 кульок, з них білих – 9.

Аналогічно, ймовірність вибрати третю білу кульку становить вже:

$$p_3\ (\text{третя біла кулька}) = \frac{8}{17}$$

Оскільки ці події є незалежними, то ймовірність вибрати підряд три білі кульки визначається через теорему множення ймовірностей:

$$p\,(\text{три білі кульки}) =$$
$$= p_1(\text{перша біла})\cdot p_2(\text{друга біла})\cdot p_3(\text{третя біла}) = \frac{10}{19}\cdot\frac{9}{18}\cdot\frac{8}{17} = \frac{720}{5814} = 0{,}1238.$$

2. Подібним чином знаходимо:

$$p\,(\text{три чорні кульки}) =$$
$$=$$
$$p_1(\text{перша чорна})\cdot p_2(\text{друга чорна})\cdot p_3(\text{третя чорна}) = \frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{2}{17} = \frac{24}{5814} = 0{,}0041$$

3. Розмірковуючи аналогічно, знаходимо, що ймовірність витягнути навмання підряд 1 білу, 1 сину, 1 чорну кульки, дорівнює:

$$p\,(\text{біла, синя, чорна}) = p(\text{біла})\cdot p(\text{синя})\cdot p(\text{чорна}) = \frac{10}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17} = \frac{200}{5814} = 0{,}0344$$

Задача 6. Три стрілка роблять по одному пострілу по одній і тій же цілі. Вірогідність ураження цілей кожним стрілком дорівнює відповідно $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}7$.

Знайти ймовірності того, що:

а) всі три стрілка потрапляють у ціль;

б) тільки один з них потрапляє в ціль;

в) хоча б один стрілець влучає в ціль.

Розв'язок

Позначимо події наступним чином:

подія А - всі 3 стрілка потрапляють у ціль;

подія В - тільки один стрілець влучає в ціль;

подія С – всі 3 стрілка не потрапляють в ціль.

Ймовірність промахів дорівнює відповідно:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ – для першого стрілка;

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – для другого стрілка;

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ – для третього стрілка.

1. Для першого випадку А, оскільки події незалежні, то за теоремою множення ймовірностей отримуємо:

$P(A) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$

2. Для другого випадку В скористаємося теоремою множення ймовірностей і теоремою додавання ймовірностей:

$P(B) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 = 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,7 = 0,092.$

3. Для випадку С, коли всі 3 стрілка не потрапляють в ціль отримуємо:

$$P(C) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0,006.$$

4. Тоді, виходячи з умови нормування, ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить у ціль дорівнює:

$$P = 1 - P(C) = 1 - 0,006 = 0,994.$$

Задача 7. Багаторічні спостереження погоди в деякій місцевості показали, що 20% днів у листопаді є безхмарними, а в 20% хмарних днів іде дощ.

Знайти, скільки відсотків в листопаді складають дні, коли іде дощ і яка ймовірність того, що в наступний день буде дощ?

Розв'язок

1. Ймовірність безхмарного дня згідно умови складає $P_б = 0,2$. Отже, ймовірність хмарного дня складає: $P_х = 1 - P_б = 1 - 0,2 = 0,8$.

2. Дощовими можуть бути тільки хмарні дні, тобто ймовірність дощового дня за умовою задачі є **умовною:** $P(д/х) = 0,2$. (Ймовірність $P(д/б) = 0$).

3. Тому ймовірність того, що наступний день дощовий складає:

$$P(д) = P(х) \cdot P(д/х) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16$$

Звідси випливає, що дощові дні в листопаді складають 16%.

Задача 8. Знайти ймовірність того, що при підкиданні 2 гральних кубиків хоча б один раз на будь-якому кубику випаде 6 очок.

Розв'язок

Позначимо через А – подію, що полягає в появі 6 очок при підкиданні першого грального кубика, В – подію, що полягає в появі 6 очок при підкиданні другого грального кубика. Оскільки події А і В сумісні, то за теоремою додавання ймовірностей

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

де $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$;

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{36}$

Отже,

$$P(A+B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

3.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 1. У шухляді письмового столу лежать 12 олівців однакової форми і розмірів, з яких 4 олівці - кольорові, а інші - прості. Яка ймовірність того, що, відкривши шухляду, навмання взятий олівець буде простий?

Задача 2. В деякому об'ємі перебувають в хаотичному русі 10 молекул**.** Яка імовірність того, що в деякий момент часу всі ці молекули опиняться в одній половині об'єму ?

Задача 3. Яка ймовірність того, що при киданні двох гральних костей сума номерів граней, які припали, дорівнює семи?

Задача 4. В урні є $n = 10$ чорних і $m = 5$ білих куль, в іншому ідентичних між собою. Кулі добре перемішані. Знайти імовірності Р(ч) і Р(б**)** виймання чорної і білої кулі з ящика при одній спробі. Перевірити виконання умови нормування. Знайти імовірності послідовного виймання двох чорних, двох білих**,** чорної і білої, білої і чорної куль, якщо після першого виймання вийнята куля повертається в урну.

Задача 5. Імовірність складання іспиту студентом на п'ятірку дорівнює 0,3, четвірку — 0,45, двійку — 0,1; імовірність того, що він не з'явиться на іспит — 0,05. Яка ймовірність того, що студент отримає позитивну оцінку?

Задача 6. Вивчення роботи друкарки показало, що вона протягом 20% робочих днів в році робить менше чотирьох друкарських помилок, протягом 50% днів число помилок коливається від 5 до 10, а в інші 30% днів їх число перевищує 10. Визначити імовірність появи цих кількостей друкарських помилок у друкарки протягом середньорічного робочого дня.

Задача 7. Продавець обслуговує у магазині два відділи. Імовірність того, що певний час йому доведеться відпускати товар з І відділу, дорівнює 0,8, з ІІ - 0,7. Яка ймовірність того, що протягом певного часу продавець не буде відпускати товар?

Задача 8. Учасники жеребкування тягнуть з ящика жетони з номерами від 1 до 100. Яка ймовірність того, що номер навмання витягнутого жетона не містить цифри 5?

Задача 9. В урні 12 куль: 5 червоних, 4 зелених, і 3 білі. Яка ймовірність, що куля, довільним чином взята з урни буде кольоровою.

Задача 10. На клумбі ростуть 10 айстр – 6 білих і 4 рожевих. В темноті зривають 3 айстри. Знайти ймовірність того, що принаймні одна із зірваних – рожева.

Задача 11. В першій урні 3 білих і 7 чорних куль, в другій – 4 білих і 6 чорних. Яка ймовірність, що серед двох витягнутих по одній з урн куль принаймні одна біла.

Задача 12. Знайти ймовірність того, що витягнута карта або пікова, або червоний туз.

Задача 13. В лотереї 2000 білетів : 1 -100грн., 4 – 50грн., 10 – 20 грн. 20 - по 10 грн, 165 – по 5 грн. і 400 по 1 грн

Яка ймовірність виграти по одному білету щонайменше 10 грн.

Задача 14. В урні 5 куль 3 чорних і 2 білих. Двічі виймають по одній кулі. Визначити ймовірність того, що двічі виймається чорна куля в двох випадках

а) вийнята куля повертається в урну,

б) не повертається.

Задача 15. В урні 5 білих і 7 чорних куль. З урни навмання беруть шість куль. Знайти ймовірність того, що:

1) всі шість куль чорні (подія А);
2) чотири кулі чорні і дві білі (подія В).

Задача 16. У кошику 5 червоних і 7 зелених м’ячів. Із нього послідовно беруть два м’ячі. Знайти ймовірність того, що другий м’яч буде зеленим за умови, що перший м’яч був зеленим.

Задача 17. Студент прийшов на екзамен, підготувавши лише 40 із 75 питань. Екзаменатор поставив йому три питання. Яка ймовірність, що студент знає відповіді на всі ці питання?

Задача 18. Знайти ймовірність того, що навмання вибране з чисел від 9 до 100 ділиться на 4.

Задача 19. Замок містить 4 диски, на кожному з яких 10 цифр. Замок відімкнеться, якщо правильно набрано код із чотирьох цифр. Яка ймовірність того, що замок відімкнуть з першої спроби?

Задача 20. Підкинули дві монети. Розглядаються дві події: А – випав герб на першій монеті; В – випав герб на другій монеті. Знайти ймовірність А + В, АВ.

Задача 21. З двох гармат зроблено по одному пострілу. Ймовірність влучення з першої гармати – 0,9, з другої – 0,6. Знайти ймовірність:

а) одного влучення;

б) принаймні одного влучення.

Задача 22. З урни, в якій лежать 12 білих і 8 червоних кульок, беруть послідовно дві кульки. Відомо, що перша виявилася білою. Яка ймовірність того, що друга кулька виявиться:

а) білою;

б) червоною?

Задача 23. Монета кидається два рази. Яка ймовірність

1. випадання герба хоча б один раз (подія А);
2. двократного випадання герба (подія (В)?

Задача 24. Гральна кість кидається два рази. Яка ймовірність того, що сума випавших очок дорівнює 6 (подія А)?

Задача 25. В урні знаходяться 2 білих, 3 червоних і 5 синіх однакових за розміром шарів. Яка ймовірність того, що шар випадковим чином витягнутий з урни буде кольоровим (не білим)?

Задача 26. Ймовірність попадання в ціль першим стрілком (подія А) дорівнює 0,9, а ймовірність попадання в ціль другим стрілком (подія В) дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що ціль буде уражена хоча б одним стрілком (подія С)?

Задача 27. Математичне очікування і середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини Х дорівнюють відповідно 11 і 4. Знайти ймовірність того, що в результаті випробувань Х прийме значення, що знаходиться і в інтервалі від 19 до 23.

Задача 28. В урні 100 куль, позначених номерами 1, 2, 3, …, 100. Із урни навмання вийнято одну кулю. Яка ймовірність того, що номер вийнятої кулі:

а) містить цифру 5;

б) є однозначним?

Задача 29. В одній урні знаходяться кулі з номерами 1, 2, 3, 4, 5, а в другій – з номерами 6, 7, 8, 9, 10. З кожної урни вийнято по одній кулі. Яка ймовірність того, що сума номерів вийнятих куль:

а) дорівнює 11;

б) не менша 7?

Задача 30. Знайти ймовірність того, що навмання вибране з чисел від 9 до 100 ділиться на 4.

Задача 31. У пачці є 100 лотерейних білетів, один з яких виграшний. Яка ймовірність виграти, якщо купили 10 білетів?

РОЗДІЛ 4. ВИПАДКОВІ ПОХИБКИ. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ПОХИБОК.

4.1. Теоретичні відомості

Всі випадкові величини поділяються на дві великі групи – дискретні та неперервні.

1. Дискретною випадковою величиною називається величина, можливі значення якої уявляють собою **скінчену або нескінченну послідовність чисел.**

Наприклад, можливе число очок при киданні кубика, тобто 1,2,3,4,5,6; можливе число попадань в ціль при ста пострілах: 0,1,2,...99,100. і т.д.

Проміжки між значеннями дискретних величин **не заповнені**, тобто при киданні кубика не може випасти 2,5 або 3,25 і т.д.

2. Неперервною випадковою величиною називається величина, можливі значення якої утворюють **неперервний ряд чисел.**

Можливі значення неперервних величин заповнюють будь-який проміжок без розривів і скачків.

Наприклад, неперервними величинами є довжина відрізку лінії, проміжок часу, інтервал температури і т.д.

3. Розподіл дискретних величин

Для повної характеристики дискретної випадкової величини необхідно і достатньо знати можливі її значення і ймовірність появи кожного з цих значень.

Законом розподілу випадкових величин називається математичний вираз, який дає зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями їх появи.

Якщо випадкова величина x приймає ряд дискретних значень $x_1, x_2, x_3,..., x_n$, то найбільш проста форма такого закону розподілу – це завдання можливих значень величин ймовірностей для кожного дискретного значення випадкової величини:

$$p(x = x_1)\ ,\ p(x = x_2)\ ,\ p(x = x_3)\ ,\ ...,\ p(x = x_n)\ .$$

При цьому в загальному випадку x_i можуть набувати будь-яких значень, а на величину $p(x = x_i)$ накладаються два обмеження:

1). $0 \le p_i \le 1$

2). $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Закон розподілу дискретних випадкових величин, як правило, задається у вигляді таблиці, яка називається рядом розподілу:

x_1	x_2	x_3	x_4	. . .	x_n
p_1	p_2	p_3	p_4	. . .	p_n

Графічно розподіл дискретної випадкової величини має вигляд, наведений на рис.4.1.:

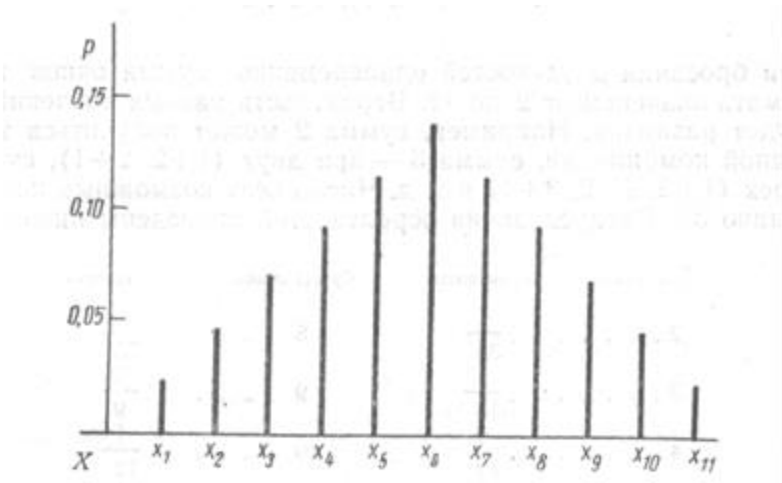


Рис. 4.1. Графік розподілу дискретної випадкової величини.

4. Розподіл неперервних випадкових величин

Найбільш універсальним способом опису неперервних випадкових величин є знаходження їх **інтегральних** або **диференціальних функцій розподілу.**

Під інтегральною функцією розподілу результатів вимірювань розуміють залежність ймовірності того, що результат вимірювання x_i в і–тому досліді буде меншим деякого значення х, від самої величини х:

$$F(x) = p(x_i \le x) = p(-\infty < x_i \le x)$$

Графік функції розподілу F(x) у загальному випадку є графіком неспадної функції і має наступний вигляд (рис.4.2).

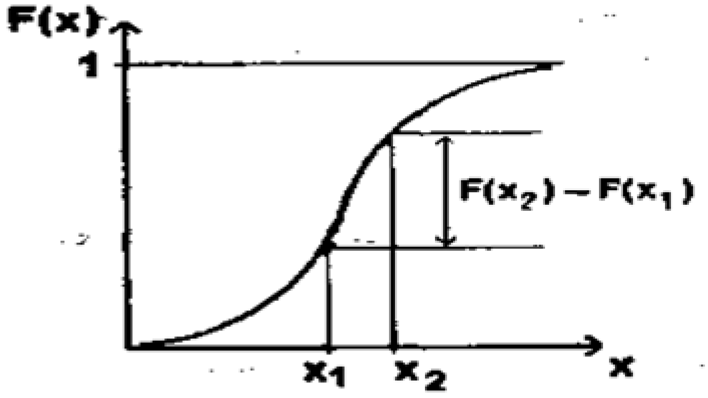


Рис. 4.2. Графік інтегральної функції розподілу

Основні властивості функції F(x):

1. $F(x) \geq 0$, тобто F(x) не може приймати від'ємні значення (як і будь-яка ймовірність).
2. Якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) > F(x_1)$,
3. $F(-\infty) = 0$,.
4. $F(+\infty) = 1$.

Для характеристики неперервних значень випадкової величини x поряд з функцією F(x) використовується і функція f(x), яка характеризує швидкість зміни F(x) при зміні величини x і визначається як

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Функція f(x) називається **густиною ймовірності** неперервної випадкової величини або **диференціальною функцією розподілу.**

Функція f(x) нормована на одиницю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

5. Найбільш поширеним законом розподілу випадкових величин **є закон нормального розподілу (розподіл Гауса)** який для будь-якої випадкової величини описується рівнянням:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left[x - M(x)\right]^2}{2\sigma^2}} \qquad (4.1)$$

де f(x) – густина ймовірності (функція x);
x – значення випадкової величини, для якої визначається f;
M(x) - математичне сподівання (очікування) результатів вимірювань;
σ - середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань;
σ^2 - дисперсія результатів вимірювань.

Графік нормального розподілу має вигляд (рис. 3.3.):

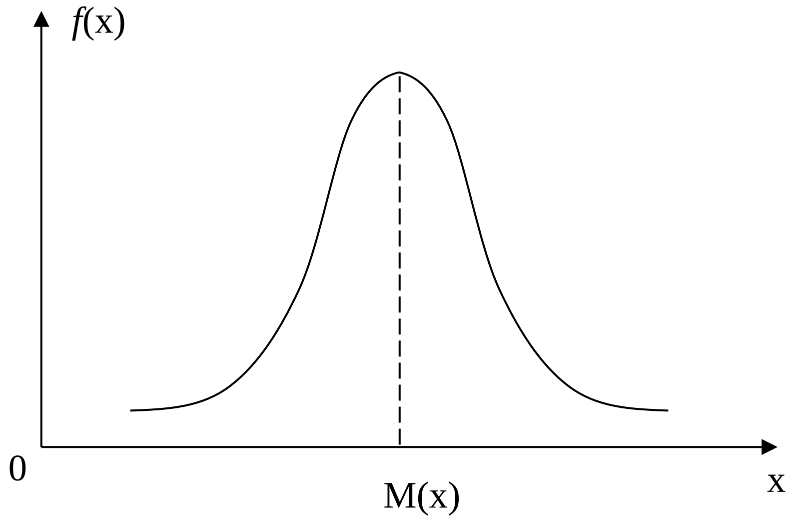


Рис. 4.3.Крива нормального розподілу випадкових величин.

По вісі абсцис відкладено результати спостережень над деякою величиною, яка містить випадкові похибки а по вісі ординат – густина ймовірності їх появи (результатів вимірювань).

Теорія дає наступній висновок: якщо систематичні похибки повністю виключені, то істинне значення вимірюваної величини дорівнює математичному очікуванню результатів спостережень.

Абсциса, яка відповідає математичному очікуванню, називається **центром розподілу**.

6. Якщо перенести початок координат на рис. 4.3 в центр розподілу, тобто в точку M(x), то по вісі абсцис буде відкладатися різниця $\Delta = x - x_{іст}$, де $x_{іст}$ – істинне значення вимірюваної величини. В результаті отримаємо криву, зображену на рис.4.4.

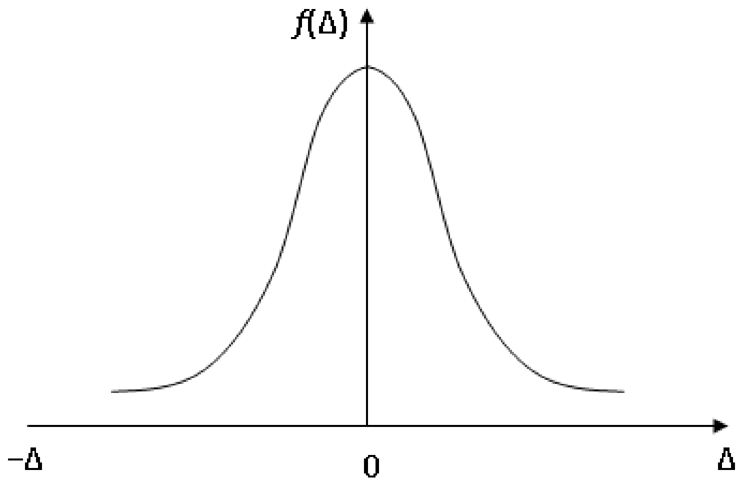


Рис. 4.4. Крива нормального розподілу випадкових похибок.

Отримана крива $f(\Delta)$ являє собою **криву розподілу випадкових похибок**. Її аналітичний вираз має вигляд

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

де $f(\Delta)$ - густина ймовірності для визначеного значення випадкової похибки;

σ - середнє квадратичне ряду вимірювань: $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - M[x])^2}{n}}$;

n – кількість вимірювань (n > 20) .

Крива розподілу має дзвоноподібну форму і симетрична відносно осі ординат. Максимальна величина ймовірності дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ і досягається у точці 0. Це означає, що найбільш ймовірні малі випадкові похибки. По мірі віддалення від точки 0 (вліво чи вправо) ймовірність $f(\Delta)$ зменшується і асимптотично наближається до нуля, тобто ймовірність виникнення великих випадкових похибок зменшується.

7. Основними характеристиками нормального розподілу є математичне очікування, дисперсія та середньоквадратичне відхилення

Математичне очікування випадкової величини – це таке її значення, навколо якого групуються результати окремих спостережень. Воно дорівнює середньому арифметичному значенню окремих результатів вимірювань.

Математичне очікування дискретної випадкової величини $\mathbf{M[x]}$ визначається за формулою:

$$M[x] = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i .$$

Математичне очікування неперервної випадкової величини визначається за формулою:

$$M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

8. При виконанні повторних вимірювань деякої величини певним методом ми отримуємо ряд результатів вимірювань. Деякі з них співпадають, деякі відрізняються один від одного. Якщо розрахувати середнє арифметичне знчення результатів вимірювань $\bar{x} = M(x)$, то виявиться, що похибки результатів окремих вимірювань $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ будуть розташовані в деякому інтервалі значень, симетричному відносно $\bar{x}$. Для характеристики міри розсіювання окремих результатів відносно $\bar{x}$ вводиться такий параметр як дисперсія результатів вимірювань D(x). Вона є характеристикою точності даного методу вимірювань, яка враховує наявність як систематичної, так і випадкової похибок. Це означає наступне: якщо для вимірювання однієї і

тієї ж величини використати більш точний метод, то дисперсія D(x) результатів вимірюваня даним методом буде менша.

Дисперсія D(x) для дискретних випадкових величин визначається за формулою:

$$D[x] = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \bar{x}]^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 p_i = \sigma^2$$

для неперервних випадкових величин – за формулою:

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{x}]^2 f(x)dx = \sigma^2$$

9. Оскільки дисперсія має розмірність квадрату одиниці вимірюваної величини, то на практиці для характеристики точності методу вимірювань зручніше користуватися середнім квадратичним відхиленням результатів вимірювань

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

Середнє квадратичне відхилення відповідає характерній точці кривої нормального розподілу. Абсцисам $+\sigma$, $-\sigma$ відповідають точки перегину кривої розподілу (рис.4.5). Ймовірність того, що випадкові похибки вимірювання не вийдуть за межі $\pm\sigma$ складає $0{,}6826 \approx 2/3$. На рис. 4.5 це відповідає попаданню в заштриховану площу, яка приблизно в 2 рази більша за незаштриховану.

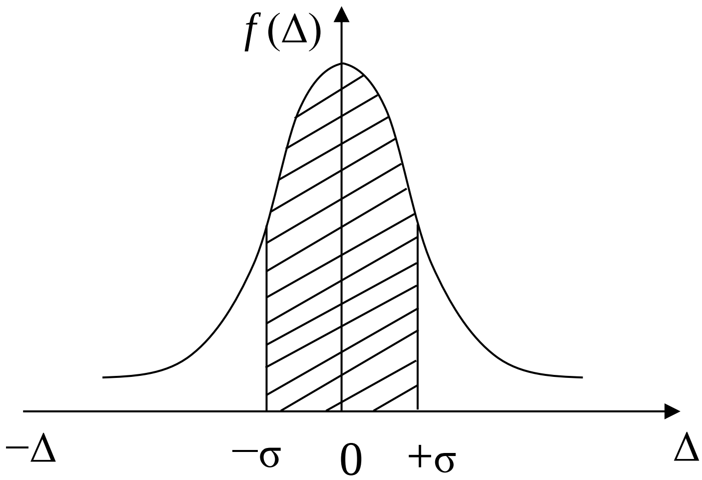


Рис.4.5. Крива нормального розподілу випадкових похибок і середня квадратична похибка $\pm\sigma$.

Як видно з рисунку, чим менша σ, тим більше ймовірність появи малих похибок і менша ймовірність появи великих похибок. Іншими словами, тим більша (або краща) **сходимість результатів.**

Сходимість результатів вимірювань – характеристика якості вимірювань, яка відбиває близькість один до одного результатів повторних вимірювань однієї і тієї ж величини, виконуваних одними і тими ж засобами вимірювань, одним і тим же методом, в однакових умовах.

4.2. Методичні вказівки до розв’язання задач

При розв’язанні задач на закони розподілу випадкових величин слід звернути увагу на наступне.

1. По-перше, необхідно з’ясувати, з якими випадковими величинами ми маємо справу: дискретними чи неперервними.

У зв’язку з цим необхідно пам’ятати:

А. якщо закон розподілу заданий у вигляді таблиці, то йдеться про дискретні випадкові величини;

Б. якщо ж закон розподілу заданий у вигляді математичного виразу, то мова йде про неперервні випадкові величини.

2. Для дискретних випадкових величини умова нормування ймовірностей має вид

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

а для неперервних випадкових величин

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

тобто при переході від дискретних величин до неперервних знак суми «∑» замінюється на знак інтегралу «∫». Змінюються також межі сумування та інтегрування.

3. Найбільш поширеним законом розподілу випадкової величини є нормальний закон (розподіл Гауса):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left[x - M(x)\right]^2}{2\sigma^2}}$$

де $f(x)$ – густина ймовірності (функція x);

x – значення випадкової величини, для якої визначається f;

$M(x)$ - математичне сподівання (очікування) результатів вимірювань;

σ - середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань;

σ^2 - дисперсія результатів вимірювань.

4. Математичне очікування $M(x)$ дорівнює середньому арифметичному результатів вимірювань, тобто:

$$M(x) = \bar{x}$$

5. Математичне очікування дискретної випадкової величини визначається за формулою:

$$M[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математичне очікування неперервної випадкової величини визначається за формулою:

$$M[x]=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

6. Дисперсія для дискретних випадкових величин визначається за формулою:

$$D[x] = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \bar{x}]^2 \cdot p_i = \sigma^2$$

для неперервних випадкових величин – за формулою:

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{x}]^2 f(x)dx = \sigma^2$$

Таким чином, при переході від дискретної до неперервної випадкової величини, окрім зазначеної вище заміни знаків $\sum \to \int$, здійснюється заміна:

$$x_i \to x\ ; \qquad p_i \to f(x)dx\ .$$

4.3 Приклади розв'язку задач

Задача 1. Функція розподілу ймовірності значень величини x має вид $f(x) = Ax$ при $0 \le x \le a$. Поза цим інтервалом f = 0. Тут A і a – постійні.

Вважаючи, що «a» задано, знайти:

1. значення функції f при x = a;
2. середнє значення $\bar{x}$ і $\overline{x^2}$.

Розв'язок

1. За умовою задачі:

$$f = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ Ax & \text{при } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{при } x > a \end{cases}$$

2. Умова нормування має вигляд:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

або $$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx = 1$$

3. Оскільки згідно умови

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0 \quad \text{і} \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx = 0,$$ то маємо:

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} Axdx = \frac{Ax^2}{2} = \frac{Aa^2}{2} = 1$$

звідки

$$A = \frac{2}{a^2}. \qquad \text{Отже} \quad f(x) = \frac{2}{a^2}x$$

4. Тоді $\quad f(a) = \frac{2}{a^2}a = \frac{2}{a}$

5. Середнє арифметичне дорівнює математичному очікуванню. А оскільки ми маємо справу з неперервною величиною, то математичне очікування визначається за формулою:

$$\bar{x} = \int_{0}^{a} xf(x)dx = \int_{0}^{a} Ax^2dx = \frac{Ax^3}{3} = \frac{2}{a^2}\frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a$$

Аналогічно

$$\overline{x^2} = \int_{0}^{a} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{a} x^2 Axdx = \frac{Ax^4}{4} = \frac{2}{a^2}\frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Задача 2. Розподіл ймовірності значень деякої величини x описується функцією f(x) = Ax(a - x) при 0< x < a. Поза цим інтервалом f = 0. Тут A і a – постійні.

Вважаючи, що «a» задано, знайти:

1. найбільш ймовірне значення x і відповідне значення функції f;
2. середнє значення $\overline{x}$ і $\overline{x^2}$.

Розв'язок

1. За умовою задачі:

$$f = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ Ax(a-x) & \text{при } 0 < x < a \\ 0 & \text{при } x > a \end{cases}$$

2. Умова нормування має вигляд:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

або $$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx = 1$$

3. Оскільки згідно умови

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0 \quad \text{і} \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx = 0, \text{ то маємо:}$$

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} Ax(a\text{-}x)dx = -\frac{Ax^3}{3} + \frac{Aax^2}{2} = \frac{Aa^3}{3} + \frac{Aa^3}{2} = \frac{1}{6}Aa^3 = 1$$

звідки

$$A = \frac{6}{a^3}. \qquad \text{Отже} \quad f(x) = \frac{6}{a^3}x(a - x)$$

3. Умова найбільш ймовірного значення має вигляд:

$$\frac{df}{dx} = 0$$

Звідси отримуємо:

$$A(a - x) - Ax = 0.$$

Використовуючи знайдене значення величини A, отримуємо найбільш ймовірне значення x:

$$x = \frac{a}{2}.$$

Тоді

$$f(\frac{a}{2}) = \frac{6}{a^3} \cdot \frac{a}{2}(a - \frac{a}{2}) = \frac{3}{2a^2}$$

4. Середні значення x та x^2 знаходимо користуючись виразом для знаходження математичного очікування неперервної випадкової величини:

$$\bar{x} = \int_0^a xf(x)dx = \int_0^a xAx(a-x)dx = \frac{6}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{6}{a^3}\cdot\frac{x^4}{4} = 2a - \frac{3}{2}a = \frac{a}{2}$$

$$\overline{x^2} = \int_0^a x^2 f(x)dx = \int_0^a x^2 Ax(a-x)dx = Aa\frac{x^4}{4} - A\frac{x^5}{5} = \frac{6}{a^3}\frac{a^5}{4} - \frac{6}{a^3}\frac{a^5}{5} =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 - \frac{6}{5}a^2 = \frac{3}{10}a^2$$

Задача 3. Деяка фізична величина x задана наступним законом розподілу

x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
p	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення величиних.

Розв’язок

1. Заданий закон розподілу свідчить про те, що ми маємо справу з дискретною величиною. Для дискретної величини середнє значення визначається математичним очікуванням, яке знаходиться за формулою:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{5} p_i x_i = 0,2\cdot 0,6 + 0,1\cdot 0,7 + 0,4\cdot 0,8 + 0,2\cdot 0,9 + 0,1\cdot 1,0 = 0,79$$

2.Дисперсія дискретної випадкової величини визначається за формулою:

$$D = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 p_i = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 p_i =$$

$$= (0,19)^2\cdot 0,2 + (0,09)^2\cdot 0,1 + (0,01)^2\cdot 0,4 + (0,11)^2\cdot 0,2 + (0,21)^2\cdot 0,1 = 0,15\cdot 10^{-1}$$

3. Середнє квадратичне відхилення за визначенням дорівнює:

$$\sigma = \sqrt{D} = 0.122$$

Задача 4. Розглянемо спін, рівний 1/2. Його магнітний момент μ з ймовірністю p може бути направлений по полю і з ймовірністю q = 1 – p – проти поля. В першому випадку проекція моменту на напрям поля дорівнює $\mu_1 = \mu_0$, в іншому вона дорівнює $\mu_2 = -\mu_0$.

Знайти, чому дорівнюють $\overline{\mu}$ та $\overline{\mu^2}$. Обчислити $\overline{(\Delta\mu)^2}$.

Розв'язок

1. Оскільки магнітний момент може приймати тільки певні значення, він є дискретною величиною. Для дискретної величини середнє значення визначають за математичним очікуванням за формулою:

$$\overline{\mu} = \sum_{i=1}^{2} \mu_i p_i = \mu_0 p + (-\mu_0) q = (p-q)\mu_0 = (p-1+p)\mu_0 = (2p-1)\mu_0$$

Аналогічно знаходимо $\overline{\mu^2}$:

$$\overline{\mu^2} = \sum_{i=1}^{2} \mu_i^2 p_i = \mu_0^2 p + (-\mu_0)^2 q = (p+q)\mu_0^2 = \mu_0^2$$

2. Подібним чином визначаємо $\overline{(\Delta\mu)^2}$:

$$\overline{(\Delta\mu)^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \Delta\mu_i^2 p_i = (\mu_1 - \overline{\mu})^2 p_1 + (\mu_2 - \overline{\mu})^2 p_2 = (\mu_1 - 2p\mu_0 + \mu_0)^2 p + (\mu_2 - 2p\mu_0 + \mu_0)^2 q =$$

$$= (\mu_0 - 2p\mu_0 + \mu_0)^2 p + (-\mu_0 - 2p\mu_0 + \mu_0)^2 (1-p) = \left[2\mu_0(1-p)\right]^2 p + \left[(-2p\mu_0)^2(1-p)\right] =$$

$$= 4\mu_0^2 q^2 p + 4\mu_0^2 p^2 q = 4\mu_0^2 pq(q+p) = 4\mu_0^2 pq$$

оскільки p + q = 1.

Задача 5. Ми вимірюємо відстань в 50 м, відкладаючи послідовно дерев'яний метр 50 разів. Ця операція пов'язана з похибками. Тому не можна гарантувати, що відстань між двома сусідніми мітками на землі буде в точності дорівнювати метру. Нам відомо, однак, що відстань між двома послідовними мітками з рівною ймовірністю лежить між 99,8 і 100,2 см і не виходить за ці межі. Повторюючи цю операцію 50 разів, ми прокладали дистанцію, середня величина якої дорівнює 50 м.

Знайти повну похибку, розрахувати стандартне відхилення у величині виміряної дистанції.

Розв'язок

1. Довжина метра – це стала величина, тобто можна записати, що відстань L між двома сусідніми мітками як функція довжини метра x є

$$L = f(x) = const.$$

Оскільки відстань є неперервною випадковою величиною то користуючись умовою нормування функції неперервної величини

$$\int_{-\infty}^{\infty} L dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

запишемо:

$$\int_{99,8}^{100,2} c dx = cx = 0,4c = 1$$

звідки $c = 2,5$.

2. Знаходимо середнє значення відстані між сусідніми мітками:

$$\bar{L} = \int_{99,8}^{100,2} xf(x)dx = \int_{99,8}^{100,2} 2,5x dx = 2,5\frac{x^2}{2} = 100 \text{ см}$$

3. Для визначення стандартного відхилення знаходимо дисперсію результатів вимірювань відстаней між послідовними сусідніми мітками:

$$D = \Delta x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)dx = \int_{99,8}^{100,2} 2,5(x-\bar{x})^2 dx = 2,5\int_{99,8}^{100,2} (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2)dx =$$

$$= 2,5\left(\frac{x^3}{3} - x^2\bar{x} + \bar{x}^2 x\right) = 2,5 \cdot 0,01 = 0,025 \text{ см}^2$$

Звідси стандартне відхилення σ дорівнює:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{0,025} = 0,16 \text{ см}$$

4. Дисперсія результату вимірювань повної відстані $L_{пов.}$, очевидно, дорівнює:

$$\Delta L_{пов.}{}^2 = N\Delta x^2,$$

де $N = 50$ - кількість послідовних відкладань метру.

Звідси повна похибка вимірювання відстані 50 м дорівнює:

$$\Delta L_{пов.} = \sqrt{N\Delta x^2} = \sqrt{50 \cdot 0,025} = \sqrt{1,25} = 1,12 \text{ см}$$

Задача 6. Результати влучень по мішені двох стрільців наведені в таблицях 1 і 2.

Таблиця 1.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

Таблиця 2.

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Хто є кращий?

Розв'язок

Кращий той, хто в середньому вибиває більше очок. Величина, яка дає таке середнє значення з урахуванням ймовірностей відповідних подій є математичне сподівання.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків її значень на відповідні ймовірності:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

В нашому прикладі про стрільців

$$M(x) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}10 + ... + 10 \cdot 0{,}20 = 5{,}36$$
$$M(y) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}03 + ... + 10 \cdot 0{,}02 = 5{,}36$$

Виявляється в середньому стрільці вибивають однакову кількість очок, хоча закони розполілу влучень у цих стрільців зовсім різні.

Задача 7. Випадкова величина x розподілена за нормальним законом і має густину розподілу

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$$

Знайти числові характеристики випадкової величини x і ймовірність її попадання в інтервал (1,7).

Розв'язок

З вигляду функції густини розподілу одразу маємо:

$$M(x) = 3,\ D(x) = 4,\ \sigma = 2\,.$$

Тоді

$$p(1 \le x \le 7) = \Phi\left(\frac{7-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1-3}{2}\right) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0,477 + 0,341 = 0,818$$

Задача 8. Виконується три незалежних постріли по мішені, ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,4. Випадкова величина X - кількість влучень. Визначити характеристики величини X: математичне сподівання, дисперсію, СКВ.

Розв'язок.

Ряд розподілу величини X має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Обчислимо характеристики величини X:
Математичне сподівання:

$$M(x) = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,064 = 1,2$$

Дисперсія:

$$D(x) = (0-1,2)^2 \cdot 0,216 + (1-1,2)^2 \cdot 0,432 + (2-1,2)^2 \cdot 0,288 + (3-1,2)^2 \cdot 0,064 = 0,72$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0,72} = 0,848.$$

Задача 9. Проводиться один дослід, в результаті якого може з'явитися або не з'явитися подія A, імовірність появи якої дорівнює p. Розглядається випадкова величина X - кількість появ події A. Визначити закон розподілу величини X та його характеристики: математичне сподівання, дисперсію,середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок.

Ряд розподілу величини має вигляд:

x_i	0	1
p_i	q	p

де $q = 1 - p$ - ймовірність того, що подія А не з'явиться.

За формулою математичного очікування величини Х знаходимо:

$$M(x) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Дисперсію величини Х визначимо за формулою:

$$D(x) = \sum_{i=1}^{2} \left[x_i - M(x) \right]^2 \cdot p_i = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = p \cdot q$$

звідки

$$\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{p \cdot q}$$

Задача 10. Відділ технічного контролю виявив 5 бракованих книг у партії з випадково відібраних 100 книг. Знайти відносну частоту появи бракованих книг.

Розв'язок

Позначимо через А – подію, яка полягає у появі бракованої книги. Тоді частота (ймовірність) появи бракованих книг визначається за виразом:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де $m = 5$ - кількість виявлених бракованих книг;
$n = 100$ - загальна кількість відібраних книг.

Отже

$$p(A) = \frac{5}{100} = 0{,}05.$$

4.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

x_i	-5	-3	-1	2	4	5
p_i	0.1	0,1	0,3	0.25	0.15	0.1

Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Задача 2. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x - 2 \\ \frac{\sqrt{x-2}}{2} & -2 < x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

обчислити математичне сподівання.

Задача 3. Визначити математичне очікування випадкової величини n - кількості попадань при трьох пострілах, якщо ймовірність попадання при кожному пострілі $P = 0,4$

Задача 4. У грошовій лотереї розігрується один виграш в 10 грн, десять виграшів по 5 грн і 30 виграшів по 1 грн при загальній кількості білетів 100. Знайти закон розподілу випадкової величини X - вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білета у вигляді таблиці.

Задача 5. Дискретна випадкова величина задана таблицею:

x	-2	0	1	3	4
p	0,15	0,2	0,1	0,3	p_5

Обчислити ймовірність $p_5 = P(x = 4)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. Дискретна випадкова величина приймає тільки два можливих значення x_1 та x_2, причому $x_1 > x_2$. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо $p_1 = 0,8 M(x) = 3,2 D(x) = 0,16$.

Задача 7. Знайти дисперсію середнього арифметичного n однаково розподілених незалежних випадкових величин, якщо дисперсія кожної з них дорівнює d.

Задача 8. Знайти математичне сподівання випадкових величин X та Y, знаючи закони їх розподілів (таблиці 1 і 2).

Таблиця 1.

X	-8	-4	-1	1	3	7
p	1/12	1/6	1/4	1/6	1/12	1/4

Таблиця 2.

Y	-2	-1	0	1	2	3
p	1/12	1/6	1/4	1/6	1/12	1/4

Задача 9. Дискретна випадкова величина розподілена за законом

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти дисперсію D(X).

Задача 10. Порівняти дисперсії випадкових величин, які задані наступними законами розподілу (таблиці 1 і 2).

Таблиця 1.

X	-1	1	2	3
p	0,48	0,01	0,09	0,42

Таблиця 2.

Y	-1	1	2	3
p	0,19	0,51	0,25	0,05

Задача 11. Знайти дисперсію випадкової величини X, знаючи закон її розподілу:

X	0	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Задача 12. Знайти математчине сподівання випадкової величини X, якщо закон її розподілу заданий таблицею

X	1	2	3	4
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Задача 13. Задано ряд розподілу дискретної випадкової величини:

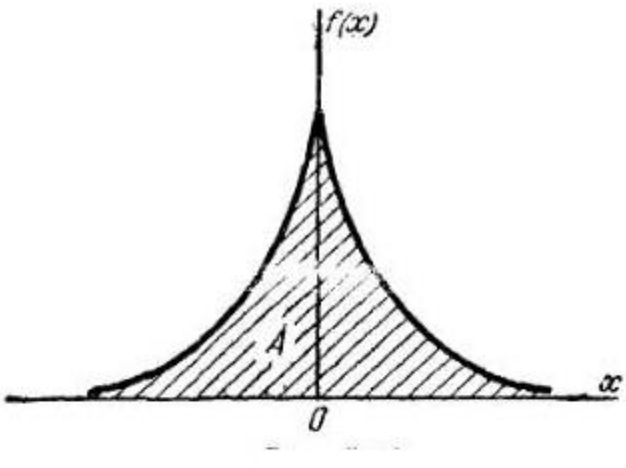
x_i	1	2	3
p_i	0,4	0,3	0,3

Знайти числові характеристики величини x.

Задача 14. Виконується три незалежних постріли по мішені. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,4. Випадкова величина X - кількість влучень. Визначити характеристики величини X – математичне сподівання, дисперсію, СКВ.

Задача 15. Неперервна випадкова величина X підпорядкована закону розподілу (рис.) із густиною:

$$f(x) = Ae^{-|x|}$$



Знайти коефіцієнт A. Визначити математичне сподівання, дисперсію, СКВ величини X.

Задача 16. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу числа влучень м'ячем у корзину при двох киданнях, якщо ймовірність влучення дорівнює 0,4.

Задача 17. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<2,\\ a(x-2)^2, & \text{якщо} \quad 2\le x<3,\\ 1, & \text{якщо} \quad x>3.\end{cases}$$

Знайти:
1) коефіцієнт a;
2) густину ймовірностей f(x)
3) ймовірність попадання величини X в інтервал (2,5; 3,5).

Задача 18. Дана дискретна випадкова величина

x	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$

Знайти: M(x), D(x), $\sigma(x)$

Задача 19. Випадкова величина x набуває трьох значень $x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=2$. Відомо, що M(x) = 0,2, $M(x^2)=0{,}8$. Знайти закон розподілу величини x.

Задача 20. Визначити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, розподіл ймовірностей якої задано таблицею:

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,18	0,26	0,32	0,20	0,04

Задача 21. Знайти математичне очікування для величини X, розподіленій неперервно з густиною $f(x)=12(x^2-x^3)$, при x, що знаходиться в інтервалі (0,1) і f(x) = 0 у всіх інших точках.

Задача 22. Дискретна випадкова величина задана таблицею розподілу

x	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Знайти функцію розподілу і побудувати її графік.

Задача 23. Знайти математичне очікування, дисперсію і середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини, заданої законом розподілу:

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Задача 24. Розрахувати математичне очікування і дисперсію дискретної випадкової величини X, заданої рядом розподілу

x	-1	2	5	10	20
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Задача 25. Математичне очікування нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює 5, середнє квадратичне відхилення дорівнює 2. Записати густину ймовірності X.

Задача 26. Математичне очікування і середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X дорівнюють відповідно 11 і 4. Знайти ймовірність того, що в результаті випробувань X прийме значення, що знаходиться і в інтервалі від 19 до 23.

Задача 27. Випадкова величина X набуває трьох значень $x_1 = -4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$. Відомо, що $M(X) = 0{,}4$, $M(X^2) = 0{,}8$. Знайти закон розподілу X.

РОЗДІЛ 5. ОБЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ПОПАДАННЯ ВИПАДКОВОЇ ПОХИБКИ В ЗАДАНИЙ ІНТЕРВАЛ. РІВЕНЬ ЗНАЧИМОСТІ.

5.1. Теоретичні відомості

Випадкова похибка, що має нормальний розподіл, може набувати довільних, в тому числі теоретично як завгодно великих значень (густина розподілу простягається від $-\infty$ до $+\infty$). Подібне характерно також і для інших розподів випадкових похибок. Оскільки густина розподілу при великих за модулем значеннях похибки зменшується, то ймовірність появи таких похибок також зменшується. Основна частина значень похибок групується у порівняно невеликих границях. При експериментальних дослідженнях важливо мати впевненість, що випадкова похибка не виходить певні границі, або що поява похибок, більших за допустимі значення, у цьому експерименті є мало ймовірною. Ця проблема вирішується застосуванням такої інтервальної характеристики випадкової похибки, як її **довірчі границі**.

Довірчі границі випадкової похибки – це верхня та нижня границі інтервалу, в який похибки потрапляють із заданою ймовірністю. Сам інтервал називається **довірчим інтервалом**, а ймовірність, яка його характеризує - **довірчою ймовірністю** $P_{ДОВ}$. Іноді її ще називають **вірогідністю**.

В попередньому розділі було показано, що ймовірність появи похибки Δ, яка не виходить за межі $\pm\sigma$, дорівнює 0,6826 (~ 2/3). В цьому випадку $+\sigma$ і $-\sigma$ розглядаються як границі інтервалу, в межах якого з імовірністю 0,6826 знаходяться значення випадкових похибок Δ. Отже, довірча ймовірність для інтервалу від $+\sigma$ до $-\sigma$ дорівнює 0,6826. Сам довірчий інтервал має вигляд $(\bar{x}-\sigma;\ \bar{x}+\sigma)$, де $\bar{x}$- середнє арифметичне значення результатів вимірювань.

Залежно від мети та точності вимірювань задаватися можуть будь- які границі довірчого інтервалу $+\boldsymbol{\varepsilon}$ і $-\boldsymbol{\varepsilon}$ (скорочено $\pm\boldsymbol{\varepsilon}$).

На рис. 5.1 наведені основні характеристики кривої нормального розподілу випадкових похибок. Ймовірність того, що випадкові похибки не вийдуть за межі (границі) будь-якого інтервалу $\pm\varepsilon$, визначається за площею, обмеженою кривою розподілу і цим інтервалом, відкладеним по вісі абсцис. Такий інтервал $\pm\varepsilon$ називається **довірчим інтервалом**, а відповідна йому ймовірність появи випадкової похибки (заштрихована площа) Ф(t) — **довірчою ймовірністю**.

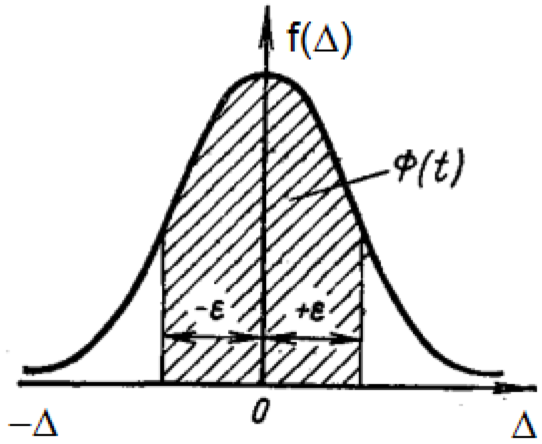


Рис. 5.1. Основні характеристики кривої нормального розподілу випадкових похибок

Довірчий інтервал дає змогу судити про **відтворюваність результатів вимірювань.**

Відтворюваність результатів вимірювань – характеристика якості вимірювань, яка відбиває близькість один до одного результатів повторних вимірювань однієї і тієї ж величини, отриманих в різних місцях, різними методами і засобами, різними операторами, в різний час, але приведених до одних і тих же умов (температура, вологість, тиск тощо).

Довірчий інтервал, що характеризує ступінь відтворюваності результатів вимірювання, може мати різні значення, причому при великому довірчому інтервалі отримується і більша довірча ймовірність.

Ймовірність попадання випадкової похибки Δ в симетричний інтервал $\pm\varepsilon$ при нормальному розподілі виражається формулою:

$$P\,[-\boldsymbol{\varepsilon} \le \Delta \le \boldsymbol{\varepsilon}] = P\,[\Delta \le |\boldsymbol{\varepsilon}|] = \Phi\,(t),$$

де

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{\Delta 2}{2}}\, d\Delta \qquad (\text{при } t > 0) \qquad (5.1)$$

Причому

$$\Phi\,(-t) = -\Phi\,(t);$$

Функція $\Phi(t)$ називається **інтегралом ймовірностей** (інтегралом Лапласа).

Ймовірність того, що випадкова похибка виявиться за межами інтервалу $\pm\varepsilon$, дорівнює

$$P[-\varepsilon > \Delta > +\varepsilon] = P[\Delta > |\varepsilon|] = 1 - \Phi(t)$$

і називається **рівнем значимості.**

З кривої нормального розподілу випливає, що при зменшенні σ крива нормального розподілу стискується уздовж осі Ох і витягується уздовж осі f(x). Результати вимірювання групуються навколо істинного значення $x_{іст}$ і тим тісніше, чим менше σ. Імовірність того, що результат вимірювання потрапить у довірчий інтервал ($x_{іст}$ - Δx, $x_{іст} + \Delta x$):

$$P = \int_{x_{іст}-\Delta x}^{x_{іст}+\Delta x} f(x)dx .$$

Для повноти опису випадкової похибки необхідно вміти зазначати ймовірність Р потрапляння результату вимірювання x_i в інтервал будь-якої заданої напівширини Δx, тобто в довірчий інтервал ε ($\varepsilon = \pm\Delta x$):

$$x_{іст} - \varepsilon \le x_i \le x_{іст} + \varepsilon , \qquad (5.2)$$

де ε зручно виражати через σ і певний множник t:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = t \cdot \sigma . \qquad (5.3)$$

Значення t визначається з виразу (5.3):

$$t = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma} , \qquad (5.4)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}$ - границя довірчого інтервалу.

Функція Ф(t), як зазначалося вище, називається **інтегралом ймовірностей** (інтегралом Лапласа). Ця функція табульована, її значення наведені в довідниках (додаток). Користуючись таблицями, за заданою Ф(t) знаходять t , а потім розраховують $\boldsymbol{\varepsilon} = t \cdot \sigma$. Можлива ї обернена задача, коли при заданому довірчому інтервалі, використовуючи (5.1), можна знайти довірчу ймовірність $\Phi(t)$.

5.2. Методичні вказівки до розв'язання задач

І. З теорії випливає, що для характеристики значення випадкової похибки необхідно мати дві величини - довірчий інтервал і довірчу ймовірність.

Тому при розв'язанні задач даного розділу можливі два випадки:

1. при вимірюванні задається довірчий інтервал і за ним визначатися довірча ймовірність,

2. або, навпаки, при вимірюванні задається довірча ймовірність і за нею розраховується довірчий інтервал.

Задачі першого типу розв'язуються наступним чином:

1.за умовою задачі заданий довірчий інтервал $\Delta = \varepsilon = t \cdot \sigma$;

2. визначаємо коефіцієнт $t = \dfrac{\varepsilon}{\sigma}$;

3. користуючись таблицею додатку 1 знаходимо довірчу ймовірність Ф(t), що відповідає визначеному значенню t.

Задачі другого типу розв'язуються в такій послідовності:

1. за умовою задачі задана довірча ймовірність $P_{ДОВ} = Ф(t)$

2. користуючись таблицею додатку 2 визначаємо коефіцієнт t, що відповідає заданій довірчій ймовірності;

3. знаючи t, знаходимо довірчий інтервал, що відповідає заданій довірчій ймовірності за формулою $\Delta = \varepsilon = t \cdot \sigma$.

Довірчі ймовірності і довірчі інтервали визначаються за допомогою таблиць значень інтеграла імовірностей Ф(t) і Ф(- t) = - Ф(t). В довідковій літературі та посібниках з метрології наведено таблицю значень Ф(t) при різних t (додаток 1) та таблицю значень t при заданих значеннях Ф(t) (додаток 2).

Слід мати на увазі, що ймовірність $P_{ДОВ}(t)$ змінюється від 0 до 1 при зміні t від 0 до ∞. При t = 1 ймовірність $P_{ДОВ}(1) = 0{,}68$; при t = 2 ймовірність $P_{ДОВ}(2)$ = 0,95, а при t = 3 маємо $P_{ДОВ}(3)$ = 0,997. Імовірність 0,997 означає, що з 1000 вимірювань у середньому 997 потраплять в інтервал від $x_{іст}$ - 3σ до $x_{іст}$ + 3σ і тільки три вимірювання будуть мати відхилення більше 3σ. Тому величину $\Delta x = 3\sigma$ називають **граничною похибкою вимірювання**.

Отже, при нормальному розподілі похибок з ймовірністю 0,68, випадкові похибки Δ знаходяться у довірчих межах $\pm 1\sigma$; з ймовірністю 0,95 — у межах подвійної середньої квадратичної похибки $\pm 2\sigma$; з ймовірністю 0,997 — у межах $\pm 3\sigma$.

Для звичайних технічних вимірювань, коли не вимагається високий ступінь надійності та точності, довірча ймовірність береться у межах 0,9—0,95.

ІІ. Другий важливий момент, на який необхідно звернути увагу, - це кількість вимірювань n. Тут розрізняють два випадки: $n \geq 30$ та $n < 30$.

а). Якщо $n \geq 30$, то розрахунок довірчої ймовірності $\Phi(t)$ та довірчого інтервалу $\Delta = t \cdot \sigma$ базуються на нормальному законі розподілу випадкових величин. В цьому випадку алгоритм розв'язку задач як першого, так і другого типу повністю співпадає з наведеною вище послідовністю дій.

б). Якщо $n < 30$, то розрахунок довірчої ймовірності $\Phi(t)$ та довірчого інтервалу $\Delta = t \cdot \sigma$ базуються на законі розподілу Стьюдента, який для малої кількості вимірювань дає більш точні результати. При цьому коефіцієнт t у виразі $\Delta = t \cdot \sigma$ залежить не тільки від довірчої ймовірності $\Phi(t)$, але і від кількості вимірювань n. Тому він позначається як t_c і називається коефіцієнтом Стьюдента: $\Delta = t_c \cdot \sigma$.

В цьому випадку задачі першого типу на знаходження довірчої ймовірності за заданим довірчим інтервалом розв'язуються таким чином:

1. за умовою задачі заданий довірчий інтервал $\Delta = \varepsilon = t_c \cdot \sigma$;

2. визначаємо коефіцієнт $t_c = \dfrac{\varepsilon}{\sigma}$;

3. користуючись таблицею додатку 3 знаходимо довірчу ймовірність $\Phi(t)$, що відповідає визначеному значенню t_c і заданій кількості вимірювань n.

Задачі другого типу на знаходження довірчого інтервалу ймовірності за заданою довірчою ймовірностю розв'язуються в такій послідовності:

1. за умовою задачі задана довірча ймовірність $P_{ДОВ} = \Phi(t)$

2. користуючись таблицею додатку 4 визначаємо коефіцієнт t_c, що відповідає заданій довірчій ймовірності і кількості вимірювань n;

3. знаючи t_c, знаходимо довірчий інтервал Δ , що відповідає заданій довірчій ймовірності за формулою $\Delta = \varepsilon = t_c \cdot \sigma$.

ІІІ. Якщо в задачі не вказана кількість n виконаних вимірювань, то вважається, що розподіл випадкових величин є нормальним, тобто вважається, що $n \geq 30$.

5.3 Приклади розв'язку задач

Задача 1. Для відомої кількості вимірювань величини x отримані відповідно значення $\bar{x} = 1,27$ і $\Delta x = 0,025$ (Δx -випадкова похибка). Визначити імовірність того, що випадкова похибка окремого вимірювання x_i не вийде за межі вибраного довірчого інтервалу $\varepsilon = \pm 0,01$, тобто має місце нерівність $1,26 < x_i < 1,28$.

Розв'язок.

За формулою

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

знаходимо

$$t = \frac{0,01}{0,025} = 0,4$$

Довірчу імовірність $\Phi(t)$ знаходимо за таблицею додатку 1:

$$\Phi\ (t = 0,4) = 0,31$$

Таким чином, біля 30% загальної кількості вимірювань будуть мати випадкову похибку Δx, яка не перевищує $\pm 0,01$.

Задача 2. Визначити границі довірчого інтервалу похибки вимірювання температури, розподіленій по нормальному закону. З імовірністю 0,95 при великій кількості вимірювань було отримано $\bar{x} = 145,6\ ^0C$, а дисперсія $D = 81\ (^0C)^2$.

Розв'язок.

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{D} = \pm\ 9\ ^0C$$

Для імовірності 0,95 за таблицею додатку 2 знаходимо:

$$t = 1,96\ \left[\Phi(t) = 0,95 \Rightarrow t = 1,96\right].$$

Отже, половина ширини довірчого інтервалу ε дорівнює

$$\varepsilon = 1,96 \cdot \sigma = 1,96 \cdot 9\ ^oC = 17,64\ ^oC\ (t = \frac{\varepsilon}{\sigma} \Rightarrow \varepsilon = t \cdot \sigma)$$

Тоді границі довірчого інтервалу:

$$T_{0,95} = \left[(\bar{x} - \varepsilon); (\bar{x} + \varepsilon)\right] = (128; 163,2)\ ^{o}C.$$

Задача 3. Для даного методу вимірювання СКВ дорівнює 0,2% (σ = 0,002). Визначити імовірність того, що випадкова похибка вимірювання буде лежати в межах довірчого інтервалу з границями:

а). ± 0,5 %;

б). ± 0,6 %.

Розв'язок.

1). границі інтервалу $\varepsilon = \pm\ 0,005$. Звідси

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{0,005}{0,002} = 2,5.$$

По таблиці $\Phi(t)$ знаходимо довірчу імовірність $\Phi(t)$, що відповідає $t = 2,5$. Вона дорівнює 0,9876. Рівень значимості: $1 - \Phi(t) = 0,0124$ або 1,24%.

Отже можна очікувати, що похибка, яка перевищує 0,5 % буде зустрічатися 1,24 рази на 100 вимірювань або один раз на кожні 81 вимірювання.

2). $\varepsilon = \pm\ 0,006$.

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{0,006}{0,002} = 3$$

$$\Phi(t) = 0,9973$$

$$1\text{-}\Phi(t) = 0,0027 \text{ або } 0,27\%.$$

Задача 4. Визначити, якого значення може досягти випадкова похибка Δ одиничного вимірювання, якщо відомо, що для даного метода вимірювання $\sigma = 0,01$, а похибки перевищують значення Δ в середньому 1 раз на 100 вимірювань.

Розв'язок.

На мові теорії імовірностей умова задачі виглядає так: визначити границі довірчого інтервалу при σ = 0,01, якщо задана довірча імовірність 0,99 (рівень значимості 1 %).

Знаходимо по таблиці залежності t від $\Phi(t)$, що для $\Phi(t) = 0,99$ значення $t = 2,576$.

Тоді границі довірчого інтервалу:

$$\pm\,\varepsilon = \pm\, t \cdot \sigma = 2,576 \cdot \sigma = \pm\, 2,576 \cdot 0,01 \approx \pm\, 0,026,$$

або ± 2,6 % вимірюваної величини (± 0,026 від вимірюваної величини).

Задача 5. Знайти імовірність того, що випадкова похибка середнього з 49 вимірювань при $\sigma = 0{,}03$ не перевищує довірчого інтервалу:

а). Е =0,3 %;

б). Е = 1,2 %.

Розв'язок.

1. Визначимо спочатку СКВ середнього арифметичного значення за формулою:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}03}{\sqrt{49}} = \frac{0{,}03}{7} = 0{,}004\,.$$

2. Границі довірчого інтервалу Е = 0,003. Звідси за виразом

$$E = t \cdot \sigma_{\overline{x}} = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = t \cdot \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}}{\sqrt{n\,(n-1)}}$$

знаходимо

$$t = \frac{E}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{0{,}003 \cdot 7}{0{,}03} = 0{,}7$$

3. За таблицею додатку 1 знаходимо для $t = 0{,}7$ значення довірчої імовірності $\Phi(t) = 0{,}5161$ або ≈ 52 %.

4. Знаходимо коефіцієнт для довірчого інтервалу Е = 1,2 %:

$$t = \frac{E}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{0{,}012 \cdot 7}{0{,}03} = 2{,}8$$

За таблицею додатку 1 знаходимо для $t = 2{,}8$ значення довірчої імовірності $\Phi(t) = 0{,}9949$ або 99,49 %.

Задача 6. Знайти довірчий інтервал для середнього значення 64-х вимірювань при $\sigma = 0{,}04$ при заданих значеннях довірчої імовірності:

а). $\Phi(t) = 90$ %;

б). $\Phi(t) = 99{,}8$ %.

Розв'язок.

1. Знаходимо середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}04}{\sqrt{64}} = 0{,}005$$

2. Для $\Phi(t) = 0,90$ за таблицею додатку 2 знаходимо $t = 1,645$. Тоді границі довірчого інтервалу

$$E = \pm\, \sigma_{\bar{x}} \cdot t = \pm\, 1,645 \cdot 0,005 \approx \pm\, 0,008.$$

3. Для $\Phi(t) = 0,998$ за тією ж таблицею знаходимо $t = 3,09$. Звідси

$$E = \pm\, \sigma_{\bar{x}} \cdot t = \pm\, 0,005 \cdot 3,09 \approx \pm\, 0,015.$$

Задача 7. При практичному вивченні метода, яке проводилося шляхом 20 вимірювань постійної величини, були отримані результати вимірювань, приведені в таблиці:

x	$v_i = x_i - \bar{x}$	$v_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$	x	$v_i = x_i - \bar{x}$	$v_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$
238,39	0.83	0,6889	237,56	0	0
238,12	0,56	0,3136	237,55	-0,01	0,0001
237.92	0,36	0,1296	237.54	-0,02	0.0004
237,80	0,24	0,0576	237,51	-0,05	0,0025
237,71	0,15	0,0225	237,48	-0,08	0,0064
237,65	0,09	0,0081	237,39	-0,17	0,0289
237,61	0,05	0,0025	237,28	-0,28	0,0784
237,59	0,03	0,0009	237,16	-0,40	0,1600
237,58	0,02	0.0004	237,04	-0,52	0,2704
237.57	0,01	0,0001	236,75	-0,81	0,6561
			$\bar{x} = 237,56$	$\sum_{i=1}^{20} v_i = 0$	$\sum_{i=1}^{20} v_i^2 = 2,43$

Визначити:

1. придатний чи ні цей метод для однократних вимірювань із встановленою допустимою похибкою ± 0,5 % при довірчій імовірності $\Phi(t) = 0,9973$?

2. для яких вимірювань придатний цей метод при однократних вимірюваннях і довірчій імовірності $\Phi(t) = 96$ % ?

3. якого значення набуває довірчій інтервал середнього при 10–кратних вимірюваннях і довірчій імовірності, рівній 99,9 ?

4. скільки вимірювань необхідно виконати даним методом, щоб похибка середнього з довірчою імовірністю $\Phi(t) = 99$ % не перевищила 0,1 %?

Розв'язок.

1. Знаходимо середнє квадратичне відхилення окремого результату вимірювання σ.

Для цього визначимо відхилення результатів окремих вимірювань від середнього ($v_i = x_i - \bar{x}$) і суму квадратів цих відхилень $\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$.

2. Визначаємо середнє квадратичне відхилення окремого результату вимірювання:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{2{,}43}{19}} \approx 0{,}36$$

3. Для $\Phi(t) = 0{,}9973$ знаходимо за таблицею інтегралу ймовірностей (додаток 2) коефіцієнт t: $t = 3$.

Границя довірчого інтервалу:

$$\pm\varepsilon = \pm t \cdot \sigma = \pm(3 \cdot 0{,}36) = \pm 1{,}08,$$

що по відношенню до $\bar{x}_{20} = 237{,}56$ становить ±0,454 %. Оскільки 0,454 < 0,5, то метод можна вважати придатним для даних вимірювань

4. Для $\Phi(t) = 0{,}96$ знаходимо за таблицею інтегралу ймовірностей коефіцієнт t: $t = 2{,}054$.

Границі довірчого інтервалу:

$$\pm\varepsilon = \pm t \cdot \sigma = \pm(2{,}054 \cdot 0{,}36) \approx \pm 0{,}722,$$

або ±0,3 % від $\bar{x}_{20}$.

Отже метод придатний для вимірювань, для яких похибка з довірчою імовірністю 96% не перевищує 0,3%.

5. Визначимо СКВ середнього значення з 10 –ти вимірювань:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}36}{\sqrt{10}} \approx 0{,}114$$

Для $\Phi(t) = 0{,}999$, $t = 3{,}291$. Отже, границі довірчого інтервалу:

$$\pm E = \pm \sigma_{\bar{x}} \cdot t = \pm(0{,}114 \cdot 3{,}291) \approx \pm 0{,}374$$

Для того, щоб виразити границі довірчого інтервалу в процентах від вимірюваної величини, необхідно обчислити середнє значення з 10-ти вимірювань. Нехай $\bar{x}_{10} = 237$. Тоді $\pm E = 0,16\%$ з імовірністю 99,9%.

6. Визначимо кількість вимірювань, яку необхідно виконати даним методом, щоб похибка середнього $\bar{x} = 200$ з довірчою імовірністю 99% не перевищувала 0,1%.

Для $\Phi(t) = 0,99$ маємо $t = 2,576 \approx 2,6$.

Визначимо границі заданого довірчого інтервалу 0,1% (0,001) при $\bar{x} = 200$ (отриманого по результатам другого ряду вимірювань тим же методом):

$$\pm E = \pm(\bar{x} \cdot 0,001) = \pm(200 \cdot 0,001) = \pm 0,2.$$

7. Знаходимо СКВ для середнього арифметичного:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{E}{t} = \frac{0,2}{2,6} = 0,077.$$

Оскільки $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, то $n = \left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{\bar{x}}}\right)^2 = \left(\dfrac{0,36}{0,077}\right)^2 \approx 22$.

де $S_n = 0,36$.

Отже для даного випадку необхідно виконати 22 вимірювання.

Задача 8. Похибка вимірювання напруги ΔU розподілена по нормальному закону, причому систематична похибка $\Delta U_C = 0$, а $\sigma = 50$ мВ.

Знайти ймовірність того, що результат вимірювання U відрізняється від істинного значення напруги U_i не більше, ніж на 120 мВ.

Розв'язок

1. За умовою задачі заданий довірчий інтервал $\varepsilon = \pm 120$ мВ. Він пов'язаний з середньою квадратичною похибкою σ виразом:

$$\varepsilon = t \cdot \sigma \quad (1)$$

2. З виразу (1) знаходимо коефіцієнт t:

$$t = \pm \frac{\varepsilon}{\sigma} = \pm \frac{120}{50} = 2,4$$

3. Довірча ймовірність визначається виразом:

$$P_{дов} = P(-\varepsilon \le \Delta \le \varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\Phi(\frac{\varepsilon - \Delta_c}{\sigma}) + \Phi(\frac{\varepsilon + \Delta_c}{\sigma})\right]$$

де $\Delta = U - U_i$

При $\Delta_c = 0$ даний вираз набуває вигляду:

$$P_{дов} = P(|\Delta| \le \varepsilon) = \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = \Phi(t)$$

4. Користуючись таблицею інтегралу ймовірностей Ф(t) (додаток 1) знаходимо, що при $t = 2{,}4$ довірча ймовірність $P_{дов} = 0{,}984$. Отже, маємо

$$P_{дов} = P(\left|U - U_i\right| \le 120) = \Phi(\frac{120}{50}) = 0{,}984.$$

Задача 9. Похибка вимірювання напруги ΔU розподілена по нормальному закону, причому систематична похибка $\Delta U_c = 30$ мВ, а $\sigma = 50$ мВ.

Знайти ймовірність того, що результат вимірювання U відрізняється від істинного значення напруги U_i не більше, ніж на 120 мВ.

Розв'язок

1. За умовою задачі заданий довірчий інтервал $\varepsilon = \pm\ 120$ мВ. Він пов'язаний з середньою квадратичною похибкою σ виразом:

$$\varepsilon = t \cdot \sigma \quad (1)$$

2. Якщо в результат вимірювання ввести поправку на систематичну похибку, то

$$U_{виправлене} = U - \Delta U_c$$

3. Тоді ймовірність того, що результат вимірювання U відрізняється від істинного значення напруги U_i не більше, ніж на 120 мВ визначається виразом:

$$P_{дов} = P(|\Delta| \le \varepsilon) = \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = \Phi(t)$$

де $\Delta = U_{виправлене} - U$;

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{120}{50} = 2{,}4$$

4. Користуючись таблицею інтегралу ймовірностей Ф(t) (додаток 1) знаходимо, що при $t = 2{,}4$ довірча ймовірність $P_д = 0{,}984$. Отже, маємо

$$P_Д = P(\left|U_{виправлене} - U_i\right| \le 120) = \Phi(\frac{120}{50}) = 0{,}984.$$

Задача 10. Похибки результатів вимірювань, виконаних за допомогою амперметра, розподілені по нормальному закону. Середнє квадратичне відхилення σ = 20 мА. Систематичною похибкою можна нехтувати.

Скільки незалежних вимірювань n необхідно зробити, щоб хоча б для одного з них похибка не перевищувала ±5 мА з ймовірністю 0,95 ?

Розв'язок

1. Ймовірність того, що при одному вимірюванні похибка не перевищить ±5 мА, дорівнює:

$$P = P(|\Delta| \le \varepsilon) = P(|\Delta| \le 5) = \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}),\ \text{оскільки } \varepsilon = \pm 5\ \text{мА}$$

тобто

$$P(|\Delta| \le 5) = \Phi(\frac{5}{20})$$

По таблиці значень інтегралу ймовірностей (додаток 1) знаходимо, що значенню $t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{5}{20} = 0{,}25$ відповідає довірча ймовірність Р = 0,1974.

2. Тоді ймовірність того, що при одному вимірюванні похибка перевищить ±5 мА, визначається як рівень значимості, тобто

$$1 - P = 1 - 0{,}1974 = 0{,}8026 \approx 0{,}803.$$

3. Ймовірність того, що при n незалежних вимірювань ні для одного з них похибка вимірювання не буде менше ±5 мА визначається як

$$(1-P)^n = 0{,}803^n$$

Отже,

$$0{,}803^n \le 0{,}05 \qquad (5.5)$$

за умовою задачі.

4. Звідси число вимірювань n для якого виконується умова (1) визначається наступним чином:

Логарифмуємо вираз (5.5)

$$n \lg 0{,}803 \le \lg 0.05$$

Звідси

$$n \le \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}803} = 13{,}6 = 14$$

оскільки число вимірювань n може бути тільки цілим числом.

Отже при n ≤ 14 ні для одного з вимірювань похибка не буде менше ±5 мА. Для того, щоб хоча б для одного з них похибка не перевищувала

±5 мА з ймовірністю 0,95 необхідно, щоб кількість вимірювань задовольняла умові

$$n > 14.$$

Задача 11. В результаті повірки амперметра встановлено, що 70% похибок результатів вимірювань, виконаних за його допомогою, не перевищує ±20 мА. Вважаючи, що похибки розподілені по нормальному закону з нульовим математичним очікуванням, визначити середню квадратичну похибку.

Розв'язок

З умови задачі випливає, що заданими є довірча ймовірність P = 0,7 та довірчий інтервал ε = ± 20 мА. Необхідно визначити $\sigma = \pm\frac{\varepsilon}{t}$ (оскільки ε = t·σ).

1. Користуючись виразом

$$P = P\left[|\Delta| \le \varepsilon\right] = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \Phi(t)$$

отримуємо (в нашому випадку ε = ± 20 мА):

$$P\left[|\Delta| \le 20\right] = \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0{,}7$$

2. За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знаходимо значення t, що відповідає P = 0,7: t = 1,04.

Звідси, виходячи з того, що $t = \pm\frac{\varepsilon}{\sigma}$ отримуємо:

$$\sigma = \pm\frac{\varepsilon}{t} = \pm\frac{20}{1{,}04} = \pm 19{,}2 \approx \pm 19 \text{ мА}$$

5.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Для $n = 6$ вимірювань середнє арифметичне значення вимірюваної величини $\bar{x} = 35{,}4$, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0{,}25$. Визначити довірчу імовірність $P_S(t)$, якщо $\bar{x}$ відрізняється від істинного значення $x_{іст.}$ на величину довірчого інтервалу $\varepsilon = \pm 0{,}2$, тобто має місце нерівність $35{,}2 \le x_{іст.} \le 35{,}6$.

Задача 2. Визначити, якого значення може досягти випадкова похибка Δ одиничного вимірювання, якщо відомо, що для даного метода вимірювання $\sigma = 0{,}01$, а похибки перевищують значення Δ в середньому 1 раз на 100 вимірювань.

Задача 3. Шестикратне зважування виробу з цінного матеріалу дало слідуючи результати: 72,361; 72,357; 72,352; 72,346; 72,344; 72,340г. Визначити довірчій інтервал для середнього при довірчій імовірності 0,99.

Задача 4. При 10-ти вимірюваннях довжини металічного стержня отримані наступні результати: 358,59; 358,53; 358,52; 358,51; 358,49; 358,48; 358,46; 358,45; 358,42; 358,43 мм.

Визначити імовірність того, що похибка середнього значення не вийде за границі ± 0,05 мм.

Задача 5. Скільки вимірювань потрібно зробити за допомогою приладу, що має випадкову похибку $\sigma(x) = 0{,}45$ мм, щоб при довірчій ймовірності $P_{дов} = 0{,}90$ границі довірчого інтервалу не перевищували $\Delta = \pm 0{,}1$ мм.

Задача 6. Виконано $n = 10$ вимірювань напруги електричної мережі і знайдені значення $U = 18{,}56$ В, $\sigma(U) = 0{,}33$ В; закон розподілу випадкової похибки – нормальний. Систематична похибка виключена до початку вимірювань.

Знайти границі довірчого інтервалу з ймовірністю $P_{дов} = 0{,}95$. Коефіцієнт розподілу Стьюдента $t_c = 2{,}662$.

Задача 7. Границі довірчого інтервалу вимірювань не повинні перевищувати $\Delta = \pm 0{,}15$ мм з довірчою ймовірністю $P_{дов} = 0{,}95$.

З якою випадковою похибкою необхідно взяти прилад, щоб ці умови виконувалися при кількості вимірювань $n = 6$?

Задача 8. В результаті 30 вимірювань температури знайдено середньоквадратичне відхилення 8,7ºС. Припускаючи нормальний закон розподілу, знайти випадкову похибку з ймовірністю 0,99.

Задача 9. Результат вимірювання струму містить випадкову похибку, розподілену по нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням σ = 4 мА. Систематична похибка відсутня. Яка ймовірність p того, що похибка перевищить за абсолютною величиною ε = 12 мА.

Задача 10. Похибка вимірювання опору розподілена по нормальному закону,причому середня квадратична похибка σ = 0,04 Ом. Знайти ймовірність того, що результат вимірювання опору відрізняється від істинного значення опору не більше, ніж на 0,07 Ом, якщо систематична похибка $\Delta_c = 0$.

Задача 11. Виміряні значення опору розподілені по нормальному закону, причому в інтервал 50…64 Ом попадає 99,7% виміряних значень. З якою ймовірністю виміряне значення буде дорівнювати $R_{вим}$ = 57±4 Ом?

Задача 12. Виміряні значення опору розподілені по нормальному закону, причому в інтервал 150…190 Ом попадає 95,5% виміряних значень. З якою ймовірністю виміряне значення попаде в 5-відсотковий інтервал від середнього значення 170 Ом?

Задача 13. Виміряні значення опору розподілені по нормальному закону із середньоквадратичнм відхиленням 6,25 Ом. З якою ймовірністю результат вимірювань попаде в 10-відсотковий інтервал від середнього значення 120 Ом? Який відсоток опорів попаде в інтервал 120±5 Ом?

Задача 14. Виміряні значення напруги елементів живлення розподілені по нормальному закону з дисперсією 0,15 $В^2$ і середнім значенням 9,2 В. З якою ймовірністю напруга елементу живлення не менша за номінальне значення 9 В? Який відсоток елементів живлення видає напругу в інтервалі 9…9,3 В?

Задача 15. Виміряні значення ємності конденсаторів номіналу 1200 пФ розподілені по нормальному з дисперсією 20 $пФ^2$ і середнім значенням 1195 пФ. Який відсоток конденсаторів має значення ємності від 1190 до 1210 пФ? З якою ймовірністю значення ємності конденсаторів перевищить номінальне?

Задача 16. Виміряні значення ємності конденсаторів в одній партії розподілені по нормальному, причому 99,7% значень попадає в інтервал 535…570 пФ. Яка ймовірність того, що ємність конденсатора перевищує 550 пФ?

Задача 17. Визначити довірчий інтервал і записати результат вимірювання нарпуги 37,86 В при СКВ однократного вимірювання 0,14 В, якщо число вимірювань дорівнює 5, довірча ймовірність 0,93.

Задача 18. Похибка вимірювання напруги розподілена по нормальному закону, причому систематична похибка дорівнює нулю, а середньоквадратична похибка $\sigma = 40$ мВ . Знайти ймовірність P того, що результат вимірювання відрізняється від істинного значення не більше, ніж на $\varepsilon = \pm 90$ мВ .

Задача 19. Результат вимірювання струму містить випадкову похибку, розподілену по нормальному закону із середньоквадратичним відхиленям $\sigma = 4$ мА. Систематична похибка відсутня. Яка ймовірність P того, що похибка перевищить за абсолютною величиною $\varepsilon = \pm 12$ мА?

Задача 20. Результат вимірювання потужності містить випадкову похибку, розподілену по нормальному закону із середньоквадратичним відхиленям $\sigma = 100$ мВт. Систематична похибка $\Delta_c = -50$ мВт. Знайти ймовірність P того, що результат вимірювання (невиправлений) перевищить істинне значення потужності.

Задача 21. В результаті повірки амперметра встановлено, що 70 % похибок результатів вимірювань, виконаних за його допомогою, не перевищують $\varepsilon = \pm 20$ мА. Вважаючи, що похибки розподілені по нормальному закону з нульовим математичним очікуванням, визначити середньоквадратичну похибку σ.

Задача 22. Контрольна повірка ЕРС нормального елемента показала, що 60% похибок не виходить за межі $\varepsilon = \pm 10$ мкВ. Вважаючи, що похибки розподілені по нормальному закону, визначити

Задача 23. В результаті повірки амперметра встановлено, що 80 % похибок результатів вимірювань, виконаних за його допомогою, не перевищують $\varepsilon = \pm 20$ мА. Вважаючи, що похибки розподілені по нормальному закону з нульовим математичним очікуванням, знайти ймовірність P того, що похибка вимірювання перевищує $\varepsilon = \pm 40$ мА .

Задача 24. В задачі 23 знайти симетричний довірчий інтервал, ймовірність попадання в який P = 0,5.

Задача 25. Дисперсія випадкової похибки частотоміра була розрахована заздалегідь і склала D = 100 Гц^2. Визначити, скільки незалежних вимірювань n необхідно зробити, щоб похибка потрапила в довірчий симетричний інтервал $\varepsilon = \pm 2$Гц з довірчою ймовірністю $P = 0{,}955$, вважаючи закон розподілу похибок нормальним.

Задача 26. Похибки результатів вимірювань, виконаних за допомогою амперметра, розподілені по нормальному закону з $\sigma = 20$ мА; систематична похибка відсутня. Скільки незалежних вимірювань n необхідно зробити, щоб хоча б для одного з них похибка не перевищила $\varepsilon = \pm 5$ мА з ймовірністю P = 0,95?

Задача 27. Похибка результата вимірювання струму розподілена по нормальному закону. Значення випадкових похибок $\Delta_1 = 2$ мА, $\Delta_2 = -2$ мА, середньоквадратичне відхилення $\sigma = 0{,}8$ мА. Визначити ймовірність P виходу похибки за межі довірчого інтервалу для двох випадків:

1. систематична похибка $\Delta_c = 0$;
2. систематична похибка $\Delta_c = 1$ мА.

Задача 28. Похибка результату вимірювання опору розподілена по нормальному закону, причому середньоквадратична похибка $\sigma = 0{,}04$ Ом. Знайти ймовірність того, що результат вимірювання опору відрізняється від істинного значення опору не більше, ніж на 0,07 Ом, якщо:

1. систематична похибка $\Delta_c = 0$;
2. систематична похибка $\Delta_c = 0{,}02$ Ом.

Задача 29. Похибка результату вимірювання напруги розподілена по нормальному закону із середньоквадратичною похибкою $\sigma = 0{,}8$ мВ. Довірчі границі похибки $\varepsilon = \pm 2$мВ. Знайти ймовірність того, що похибка не вийде за межі довірчого інтервалу для двої випадків:

1. систематична похибка $\Delta_c = 0$;
2. систематична похибка $\Delta_c = 1$ мВ.

Задача 30. Для відомого числа вимірювань величини X отримані відповідно значення середнього арифметичного $\overline{X}$ = 127 і середньої квадратичної похибки (СКВ) $\sigma = 0{,}025$. Знайти ймовірність P того, що випадкова похибка окремого вимірювання X_i не вийде за межі довірчого інтервалу $\varepsilon = \pm 0{,}01$, тобто має місце нерівність $1{,}26 < X < 1{,}28$ при нормальному законі розподілу похибок.

Задача 31. Для роботи схеми необхідний резистор з опором R > 10 кОм. Прилад має нормально розподілену випадкову похибку з дисперсією 0,1 $кОм^2$ (систематичною похибкою нехтувати) і показує, що даний опір дорівнює 8,00 кОм. Яка ймовірність того, що деталь не можна використовувати?

Задача 32. Випадкова величина X розподілена нормально з відомим середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 3$. Знайти інтервал довіри з надійністю $\gamma = 0{,}95$ для оцінки невідомого математичного сподівання M(X), якщо вибіркове середнє $\overline{x}$ =25,02 знайдене за даними вибірки обсягу n =36.

Задача 33. Ознака X генеральної сукупності розподілена нормально. За вибіркою обсягу n =17 знайдено вибіркове середнє $\overline{x} = 26{,}2$ і виправлене середнє квадратичне відхиленням σ = 0,8 Оцінити невідоме математичне сподівання M(X) за допомогою інтервалу довіри з надійністю
$\gamma = 0{,}95$.

Задача 34. Знайти мінімальний обсяг вибірки, на підставі якої можна було б оцінити математичне сподівання випадкової величини з похибкою, яка не перевищує 0,2, і надійністю 0,98, якщо випадкова величина розподілена нормально з $\sigma = 4$.

Задача 35. За даними 9-ти незалежних вимірювань фізичної величини, здійснених за допомогою одного приладу, знайдено середнє арифметичне результатів окремих вимірювань $\overline{x} = 53{,}320$ і виправлене середнє квадратичне відхилення σ = 5,0. Оцінити істинне значення вимірюваної величини з надійністю $\gamma = 0{,}95$.

Задача 36. Знайти інтервал довіри з надійністю $\gamma = 0{,}95$ для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини X, якщо відомі її середнє квадратичне відхилення $\sigma = 4$, вибіркове середнє $\overline{x} = 16$ та обсяг вибірки n=16.

Задача 37. Знайти довірчий інтервал з надійністю $\gamma = 0{,}8$ для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини X із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$ вибірковим середнім $\overline{x} = 20$ та обсягом вибірки n =25.

Задача 38. За даними вибірки обсягу n=25 знайдено незміщене значення вибіркового середнього квадратичного відхилення $\sigma = 3$ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти з надійністю $\gamma = 0{,}99$ довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення випадкової величини.

РОЗДІЛ 6. СИСТЕМАТИЧНІ ПОХИБКИ. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ ОДНОКРАТНИХ ВИМІРЮВАНЬ.

6.1. Теоретичні відомості

Опрацювання результатів вимірювань включає в себе сукупність обчислювальних процедур для одержання результату вимірювань й інтервалу, в якому з певною ймовірністю перебуває дійсне значення вимірюваної фізичної величини. Результат вимірювання є повноцінним за умови, що він супроводжується оцінкою його точності.

Опрацювання результатів вимірювань може проводитися різними методами. Вибір методу залежить від багатьох причин, основними з яких є наступні: число проведених відліків у процесі вимірювань (однократні, багатократні вимірювання) та їх статистичний розподіл; вид вимірювань (прямі, непрямі тощо); умови вимірювань; вимоги щодо точності вимірювань; властивості використовуваних ЗВ; наявна інформація про систематичні та випадкові похибки вимірювання; попередня інформація про джерело й характер похибок; вид розподілу похибок вимірювань тощо. Наявність цих даних забезпечує можливість порівняння результатів вимірювань, виконаних за однаковими чи різними методиками, різними засобами, в різних установах.

Методи обробки експериментальних даних суттєво залежать від виду вимірювань – прямі, непрямі, сукупні, сумісні Лише при прямих разових вимірюваннях отриманий результат спостереження може бути результатом вимірювання (за умови, що систематичні похибки вимірювання не коригують). В інших вимірюваннях обробка може здійснюватись за стандартизованими методиками (наприклад, статистичними методами), або вимагати створення спеціальних алгоритмів. У сукупних і сумісних вимірюваннях обов'язковим є розв'язування систем рівнянь найчастіше методом найменших квадратів.

Методика виконання прямих одноразових вимірювань і вимоги щодо обробки їх результатів визначені Державним стандартом ДСТУ.1.0-93 «Державна система Стандартизації України. Основні положення».

З погляду обробки результатів спостережень, **пряме вимірювання** - це вимірювання однієї величини, в якому її значення отримують безпосередньо за показом відповідного приладу без необхідних для знаходження значення вимірюваної величини додаткових обчислень. Приклади прямих вимірювань: вимірювання сили струму - амперметром, довжини - лінійкою, інтервалу часу - годинником, температури - термометром тощо.

Значення вимірюваної величини вважається знайденим прямо, коли шкала вимірювального засобу проградуйована прямо у відповідних значеннях вимірюваної величини або безпосередньо через таблицю чи графік.

Разові вимірювання виконують за умови невеликих випадкових похибок, коли **переважаючими є систематичні похибки.** При цьому зазвичай виконують декілька вимірювань (3-4), щоб переконатись у стабільності результатів. Як результат вибирають один з них, не виконуючи якогось опрацювання. Основне рівняння такого вимірювання (залежність результату вимірювання y від результату спостереження x)

$$y = c \cdot x,$$

де c - відомий коефіцієнт, наприклад, масштабний.

Систематична похибка вимірювань Δ_C – складова похибки результату вимірювання, яка залишається сталою або змінюється по певному закону (закономірно змінюється) при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини в тих самих умовах.

Систематичні похибки можуть бути настільки великими, що зовсім перекручують результати вимірювань. Тому облік і виключення систематичних похибок становлять важливу частину вимірювальної роботи. Здебільшого вплив систематичних похибок на результати вимірювань може бути врахований.

Якщо єдиним правильним методом аналізу випадкових похибок є математична статистика, то систематичні похибки необхідно вивчати в кожному конкретному випадку окремо.

Систематичні похибки прийнято класифікувати в залежності від причин їх виникнення і за характером їх прояву при вимірюваннях.

В залежності від причин виникнення виділяють чотири види систематичних похибок:

1. Похибки методу, або теоретичні похибки, що виникають внаслідок помилковості або недостатньої розробки прийнятої теорії вимірювань в цілому або допущених спрощень при виконанні вимірювань.

Похибки методу виникають також при екстраполяції властивості, виміряної на обмеженій ділянці об’єкта, на весь об’єкт, якщо останній не володіє однорідністю виміряної властивості. Так, вважаючи діаметр циліндричного валу рівним результату, отриманому в одному перерізі і в одному напрямку, ми припускаємося систематичної похибки, обумовленої відхиленнями форми досліджуваного валу. Другий приклад: при визначенні густини речовини за вимірюваннями маси і об’єму деякої проби виникає систематична похибка, якщо проба містила деяку кількість домішок, а результат вимірювання приймається за характеристику даної речовини в цілому.

До похибок методу слід віднести також ті похибки, які виникають внаслідок впливу вимірювальної апаратури на вимірювані властивості об'єкту. Подібні явища виникають, наприклад, при вимірюванні довжин, коли вимірювальне зусилля використовуваних приладів досить велике, при реєстрації швидкоплинних процесів недостатньо швидкодіючою апаратурою, при вимірах температур рідинними або газовими термометрами тощо.

2. Інструментальні похибки, які залежать від похибок застосовуваних засобів вимірювання. Серед інструментальних похибок в окрему групу виділяють похибки схеми, не пов'язані з неточністю виготовлення засобів виміру і зобов'язані своїм походженням самій структурній схемі засобів вимірювань. Дослідження інструментальних похибок є предметом спеціальної дисципліни - теорії точності вимірювальних пристроїв.

3. Похибки, зумовлені неправильною установкою і взаємним розташуванням засобів вимірювання у, що є частиною єдиного комплексу, неузгодженістю їх характеристик, впливом зовнішніх температурних, гравітаційних, радіаційних та інших полів, нестабільністю джерел живлення, неузгодженістю вхідних і вихідних параметрів електричних ланцюгів приладів тощо.

4. Суб'єктивні похибки, зумовлені індивідуальними особливостями спостерігача. Такого роду похибки викликаються, наприклад, запізненням або випередженням при реєстрації сигналу, неправильним відліком десятих долей поділки шкали, асиметрією, що виникає при установці штриха посередині між двома рисками.

Систематичні похибки є детермінованими величинами, тому в принципі завжди можуть бути визначені і виключені з результатів вимірюванв. Після виключення систематичних похибок отримуємо виправлені середні арифметичні значення і виправлені відхилення результатів спостережень, які дозволяють оцінити міру розсіювання результатів.

Результат вимірювання має цінність тільки тоді, коли можна оцінити його інтервал невизначеності та степінь довіри до нього. У відповідності із стандартом будь-який результат вимірювання обов'язково повинен приводитися з показом його похибок. Для оцінки похибки прямого одноразового вимірювання необхідно по можливості встановити всі складові похибки, оцінити характеристики кожної і, використовуючи їх, знайти характеристики сумарної похибки.

Модель похибки вимірювання Δx містить складові інструментальної методичної і особистої (суб'єктивної) похибок експериментатора:

$$\Delta x = \Delta_i + \Delta_M + \Delta_C,$$

де Δ_i — інструментальна похибка (похибка засобу вимірювань);

Δ_M — методична похибка;

Δ_C — суб'єктивна (особиста) похибка, яка зумовлена зчитуванням показу зі шкали аналогового приладу (під час вимірювання цифровими приладами ця складова похибки відсутня).

Систематичні похибки можуть бути визначені експериментально. Іноді їх можна розрахувати на основі характеристик вимірювальних пристроїв, які використовуються для вимірювань. І в першому, і в другому випадках результат покращують шляхом введення поправок.

Поправку можна ввести шляхом віднімання із результату вимірювання систематичної похибки, множення на коефіцієнт поправки тощо. В цьому випадку значення вимірюваної величини, найбільш близьке до істинного, визначають в 3 етапи:

1. проводять вимірювання, результат якого завідомо містить систематичну похибку;
2. визначають систематичну похибку;
3. вносять в результат вимірювання поправку.

Поправка ∇ у цьому випадку буде дорівнювати виявленій систематичній похибці Δ, взятій із протилежним знаком, тобто

$$\nabla = -\Delta .$$

Результат вимірювання визначається виразом:

$$x_{іст} = x_{вим} + \nabla ,$$

де $x_{вим}$ - виміряне значення величини x.

Слід зауважити, що усунути повністю систематичну похибку вимірювання неможливо. Таким чином, в кінцевому результаті вимірювання завжди залишається певна систематична похибка, яку часто називають **невиключеним залишком систематичної похибки** або просто **невиключеною систематичною похибкою**

Невиключені систематичні похибки можуть складатися з невиключених систематичних похибок методу, засобів вимірювань, експериментатора, а також складових, обумовлених впливом зовнішніх впливаючих фізичних величин і компонентів, що заважають.

До їх числа відносяться:

- похибки визначення поправок;
- похибки, що залежать від точності вимірювання впливаючих величин, що входять у формули для визначення поправок;
- похибки, пов'язані з коливаннями впливаючих величин (температури довкілля, напруги живлення тощо).

Перераховані погрішності малі і поправки на них не вводяться.

Опрацювання результатів одноразових вимірювань проводиться на основі попередньо отриманої інформації про складові похибки та їхні закони розподілу. Вважається, що закон розподілу випадкових складових має нормальний характер, а невиключені систематичні похибки розподіляються за рівномірним законом. Довірча ймовірність приймається, як правило, рівною 0,95.

Похибка результату прямого одноразового вимірювання залежить від багатьох факторів, але в першу чергу вона визначається похибкою ЗВ, який використаний для вимірювання (інструментальна похибка). Тому в першому наближенні похибку результатів вимірювання можна прийняти рівною похибці, якою в даній точці діапазону вимірювання характеризується використаний ЗВ.

Інструментальна похибка має як систематичну, так і випадкову складову. Співвідношення між ними може бути неоднаковим для різних приладів (зазначається в паспорті приладу), однак частіше переважає систематична похибка. Інструментальну похибку можна встановити при порівнянні показань даного приладу з показаннями більш точного. У цьому випадку можна одержати таблицю або графік виправлень, використання яких підвищує точність приладу.

Оскільки похибка ЗВ може змінюватись по діапазону, то повинна розраховуватися як абсолютна похибка, яка необхідна для округлення результату та його правильного запису, так і відносна похибка, яка необхідна для однозначної порівняльної характеристики точності результату вимірювань.

Абсолютна похибка, в свою чергу, повністю визначається класом точності засобу вимірюваня.

6.2. Методичні вказівки до розв'язання задач

Результати однократних вимірювань не потребують особливої обробки. Точність їх отримання визначається, головним чином, систематичною похибкою використовуваних засобів вимірювань. Ця похибка, в свою чергу залежить від класу точності засобу вимірювань. Цим питанням був присвячений перший розділ даного посібника.

Що стосується невиключених систематичних похибок, то у вимірювальній практиці зустрічаються наступні випадки оцінювання похибок прямих одноразових вимірювань.

Випадок 1. Є m невиключених систематичних похибок, і кожна із них задана своїми межами Δ_{ci}

У цьому випадку довірча границя сумарної невиключеної систематичної похибки результату вимірювання $\Delta_c(P)$ оцінюється за формулою:

$$\Delta_c(P) = K\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Delta_{ci}^2} \qquad (6.1)$$

де K - поправочний коефіцієнт, що залежить від довірчої ймовірності P_i числа m складових Δ_{ci}.

При довірчій імовірності P = 0,9 коефіцієнт K = 0,95; при P = 0,95 – K = 1,1.

При P = 0,99 поправочний коефіцієнт K приймається рівним 1,45, якщо число сумованих складових m > 4. Якщо m = 4, то K = 1,4; при m = 3 K ≈ 1,4. Більш точні значення K при P = 0,99 можна знайти з графіків $K = \varphi\,(m, l)$, де $l = \frac{\Delta_{c1}}{\Delta_{c2}}$ Δ_{c1} - максимальна границя; Δ_{c2} - границя, найближча до Δ_{c1}.

Випадок 2. Є m невиключених систематичних похибок. Кожна з відомих похибок задана довірчими межами з різними довірчими ймовірностями (у тому числі й розрахованими за формулою (6.1). У цьому випадку:

$$\Delta_c(P) = K\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_{ci}^2(P_i)}{K_i^2}} \qquad (6.2)$$

де $\Delta_{ci}(P_i)$ - довірча межа i-тої невиключеної систематичної похибки, що відповідає довірчій імовірності P_i;

K і K_i - коефіцієнти, що відповідають довірчим імовірностям P і P_i відповідно.

Значення коефіцієнтів K і K_i визначаються за тими ж правилами, що і у формулі (6.1).

Випадок 3. Є тільки випадкові складові похибок, задані середніми квадратичними відхиленнями (СКВ), взятими, наприклад, з технічної документації ЗВ.

У цьому випадку СКВ результату одноразового вимірювання σ оцінюють за наступною формулою:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2} \qquad (6.3)$$

де σ_i - СКВ випадкових складових похибок вимірювання;

m - число випадкових складових похибок вимірювання.

Довірчі межі випадкової похибки результату вимірювання знаходять за формулою:

$$\Delta(P) = t(P) \cdot \sigma = t(P) \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2} \qquad (6.4)$$

де $t(P)$ - аргумент функції Лапласа для відповідної довірчої ймовірності

Випадок 4. Є тільки випадкові складові, що задаються СКВ, отриманими експериментально при числі вимірювань $n < 30$. Для цього випадку

$$\Delta(P) = t(P, n) \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2} \qquad (6.5)$$

де $t(P, n)$ - коефіцієнт Стьюдента, обумовлений заданим P і числом n.

Випадок 5. Є тільки випадкові складові похибки, які задаються довірчими межами $\Delta_i(P)$, що відповідають однаковій довірчій ймовірності. Значення довірчих меж результату вимірювання розраховується за формулою:

$$\Delta(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^2(P)} \qquad (6.6)$$

Випадок 6. Є тільки випадкові складові похибки, які задаються довірчими межами $\Delta_i(P)$ із різними довірчими ймовірностями. Для цього випадку

$$\Delta(P) = t(P) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^2(P_i)}{t^2(P_i)}} = t(P) \cdot \sigma \qquad (6.7)$$

де $t(P)$, $t(P_i)$ - аргументи функції Лапласа.

Випадок 7. Є систематичні Δ_C й випадкові Δ_B складові похибки. У цьому випадку порядок визначення похибки результату вимірювання залежить від співвідношення $\frac{\Delta_C(P_i)}{\sigma}$.

Якщо $\frac{\Delta_C(P_i)}{\sigma} < 0{,}8$, то як похибка результату вимірювання приймаються довірчі межі випадкових похибок.

Якщо $\frac{\Delta_C(P_i)}{\sigma} > 8$, то як похибка результату вимірювання приймаються межі невиключних систематичних погрішностей.

Якщо $\frac{\Delta_C(P_i)}{\sigma} \le 8$, то довірчу межу похибки результату вимірювання обчислюють за формулою:

$$\Delta(P) = K_1|\Delta_C(P) + \Delta_B(P)| = K_1|\Delta_C(P) + t(P)\cdot\sigma| \qquad (6.8)$$

Значення K_1 для довірчих імовірностей 0,95 і 0,99 представлені в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1. Вибір коефіцієнта K_1 для різних значень $\frac{\Delta_C(P_i)}{\sigma}$ та довірчих ймовірностей 0,95 і 0,99.

$\frac{\Delta_C(P_i)}{\sigma}$	0,8	1	2	3	4	5	6	7	8
K(0,95)	0,76	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
K(0,99)	0,84	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

У всіх розглянутих випадках форма подання результатів одноразових вимірювань повинна відповідати стандарту. При симетричній довірчій погрішності результат одноразового виміру подається формулою:

$$A_1;\ \pm\Delta;\ P \quad \text{або} \quad A_1 \pm \Delta;\ P\ ,\ ,$$

де A_1 - результат одноразового вимірювання.

6.3. Приклади розв'язку задач

Задача 1. Вимірювання напруги U_X проводилося на резисторі $R = 10$ Ом при температурі повітря в приміщенні 30°С вольтметром, що має рівномірну шкалу від 0 до 15 В і вхідний опір 2000 Ом. Похибка приладу визначається за формулою:

$$\pm(0{,}2 + \frac{0{,}8}{U_X})\ \%$$

Стрілка приладу зупинилася на поділці 2 В. Визначити результат вимірювання.

Розв'язання.

1. Основна відносна похибка

$$\varepsilon = \pm(0{,}2 + \frac{0{,}8}{2}) = \pm 0{,}6\%$$

що в абсолютній формі складає ± 0,072 В.

2. Додаткова температурна похибка, визначена за паспортним даними приладу складає $\varepsilon_T = \pm 0{,}1\%$

3. При довірчій імовірності $P = 0{,}95$ і $m = 2$ отримаємо К = 1,1. Отже, інструментальна похибка:

$$\Delta_i = 1{,}1\sqrt{0{,}6^2 + 0{,}1^2} = \pm 0{,}61\%$$

що в абсолютній формі складає ±0,012 В.

4. Методична похибка визначається співвідношенням опору ділянки ланцюга $(R = 10\ \text{Ом})$ і вхідного опору вольтметра $(R_V = 2000\ \text{Ом})$

$$\Delta_M = -\frac{RU_X}{R + R_V} = -\frac{10 \cdot 2}{10 + 2000} = -\ 0{,}01\text{В}$$

5. З урахуванням методичної похибки у вигляді поправки $(\nabla = 0{,}01\text{В})$ отримуємо результат вимірювання:

$$U_X = (2{,}00\ \pm\ 0{,}01)\text{В}, \qquad P = 0{,}95.$$

Задача 2. У мілівольтметра з рівномірною шкалою й верхньою межею вимірювання 50 мВ при вимірюванні напруги стрілка зупинилася на оцінці 20 мВ. Вимірювання проводилося при температурі 22°С і напруженості магнітного поля 380 А/м. Середнє квадратичне відхилення складає одну третину основної похибки. Основна похибка (приведена) дорівнює 1%

верхньої межі вимірювального приладу. Методична похибка відсутня. Визначити результат вимірювання.

Розв'язання

1. Основна абсолютна інструментальна похибка:

$$\Delta_{oi} = \frac{\gamma x_N}{100} = \frac{1\% \cdot 50}{100\%} = \pm 0{,}5 \text{ мВ}$$

2. Основна відносна інструментальна похибка:

$$\varepsilon_o = \frac{\Delta}{x} \cdot 100\% = \frac{0{,}5}{20} \cdot 100\% = \pm 2{,}5\%$$

3. Додаткова похибка внаслідок впливу зовнішнього магнітного поля визначена за паспортним даними приладу й складає $\varepsilon_M = \pm\ 0{,}5\%$. Сумарна відносна невиключена інструментальна систематична похибка при довірчій імовірності P = 0,9 :

$$\varepsilon_0(P) = 0{,}95\sqrt{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_M^2} = 0{,}95\sqrt{2{,}5^2 + 0{,}5^2} = \pm\ 2{,}42\%$$

В абсолютній формі $\Delta_c(P) = \pm\ 0{,}48$ В.

4. Довірчі границі випадкової складової похибки для довірчої ймовірності P = 0,9 :

$$\Delta_B(P) = \pm\, t(P) \cdot \sigma = \pm\ 1{,}65 \cdot 0{,}17 = \pm\ 0{,}28 \text{ мВ}$$

5. Розраховуємо відношення:

$$\frac{\Delta_c(P)}{\sigma} = \frac{0{,}48}{0{,}17} = 2{,}82$$

6. Похибка результату вимірювання:

$$\Delta(P) = K_1 \left| \Delta_c(P) + \Delta_B(P) \right| = \pm\ 0{,}95(0{,}48 + 0{,}28) = \pm\ 0{,}72 \text{ мВ}$$

7. Результат вимірювання:

$$U_X = (20 \pm 0{,}72) \text{ мВ}; \quad P = 0{,}9.$$

Задача 3. Результат вимірювання сили струму $I = 49{,}9$ А, а його дійсне значення $I_Д = 50{,}0$ А. Визначте поправку, яку слід ввести в результат вимірювання, а також відносну похибку вимірювання.

Поправка – це абсолютна похибка, взята з оберненим знаком.

Розв'язок

1. Визначаємо абсолютну похибку вимірювання

$$\Delta I = I - I_Д = 49{,}9 - 50{,}0 = -0{,}1\ А$$

Отже поправка, яку слід ввести в результат вимірювання, дорівнює $-\Delta = 0{,}1\ А$, тобто

$$I_{іст} = I + (-\Delta) = I + 0{,}1А = (49{,}9 + 0{,}1)\ А = 50\ А$$

2. Відносна похибка вимірювання за визначенням:

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{I_Д}\ 100\ \% = -\frac{0{,}1}{50}\ 100\ \% = -0{,}2\ \%$$

Задача 4. До клем (зажимів) елементів з Е = 10 В і r = 1 Ом під'єднаний вольтметр з опором $R_В$ = 100 Ом. Визначити покази вольтметра і абсолютну похибку його показів, виникнення яких зумовлено тим, що вольтметр має не нескінченно великий опір. Класифікуйте похибку .

Розв'язок

1. При підключенні вольтметра струм, що проходить через вольтметр визначається виразом:

$$I_В = \frac{E}{R_В + r}$$

2. При цьому падіння напруги на вольтметрі дорівнює:

$$U_В = I_В \cdot R_В = \frac{E}{R_В + r} \cdot R_В$$

3. Воно відрізняється від значення Е на величину:

$$E - U_В = E - \frac{R_В}{R_В + r} \cdot E$$

Після перетворень отримуємо:

$$E - U_В = E \cdot \left(1 - \frac{R_В}{R_В + r}\right) = E \cdot \frac{r}{R_В + r},$$

звідки

$$U_В = E - E \cdot \frac{r}{R_В + r} = E \cdot \left(1 - \frac{r}{R_В + r}\right) = 10\left(1 - \frac{1}{100+1}\right) \approx 9{,}9\ В$$

4. Якщо $R_В = \infty$, то $\frac{r}{R_В + r} = 0$ і $U_В = E = 10$ В

5. Абсолютна похибка показів вольтметра дорівнює:

$$\Delta U = U_{виміряне} - E = (9{,}9 - 10)\ В = -0{,}1В.$$

Задача 5. У електричне коло з опором $R = 49$ Ом і джерелом струму $E = 10$ В та $R_{внутр.} = 1$ Ом включили амперметр з опором $R_1 = 1$ Ом. Визначити покази амперметра I та його відносну похибку ε, яка виникає внаслідок того, що амперметр має певний опір, відмінний від нуля. Класифікуйте похибку.

Розв'язок

1. Струм, що протікає в колі визначається виразом:

$$I = \frac{E}{R_{внутр.} + R + R_1} = \frac{10}{1+49+1} = 0{,}166\ \text{А} \approx 0{,}17\text{А}.$$

1. Якщо опір амперметра $R_1 = 0$, то сила струму дорівнює:

$$I_0 = \frac{E}{R_{внутр.} + R} = \frac{10}{1+49} = 0{,}2\text{А}$$

2. Абсолютна похибка показів амперметра визначається як

$$\Delta I = I - I_0 = (0{,}17 - 0{,}2)\ \text{А} = -\ 0{,}03\ \text{А}$$

3. Таким чином, відносна похибка, зумовлена тим, що амперметр має певний опір дорівнює:

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta I}{I_0} \cdot 100\% = -\ \frac{0{,}03}{0{,}2} 100\% = -\ 15\%.$$

Задача 6. У коло з опором R = 100 Ом для вимірювання ЕРС Е включили вольтметр класу точності 2,0 з верхнею межею вимірювання 3 В і внутрішнім опором $R_в = 1000$ Ом. Визначити абсолютну систематичну і відносну методичну похибки вимірювання ЕРС.

Розв'язок

1. Струм, що протікає в колі визначається як

$$I = \frac{E}{R + R_в}$$

2. Напруга, яку вимірює вольтметр визначається за формулою:

$$U_в = IR_в = \frac{E}{R + R_в} R_в$$

3. Абсолютна систематична методична похибка вимірювання E визначається виразом:

$$\Delta = U_в - E = -\frac{ER}{R+R_в}.$$

Таким чином, поправка, що дорівнює абсолютній похибці, взятій з оберненим знаком дорівнює:

$$\nabla = -\Delta = \frac{ER}{R+R_в}$$

4. Відносна методична похибка E дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{U_в - E}{E}100\% = -\frac{R}{R+R_в}100\% = -\frac{100}{1000+100}100\% = -9{,}1\%$$

Задача 7. В процесі однократного вимірювання ємності конденсатора отримано значення C = 1,246 нФ. Попередньо оцінені СКВ вимірювання ємності $\sigma_{\overline{C}}$ = 0,037 нФ і границі невиключених двох складових систематичної похибки Δ_{c_1} = 0,012 нФ і Δ_{c_2} = 0,016 нФ. Визначити довірчі границі сумарної похибки результату вимірювання ($P_{дов} = 0{,}95$).

Розв'язок

1. Розраховуємо довірчі границі випадкової похибки вимірювання:

$$\Delta_в = \pm t \cdot \sigma_{\overline{C}} = \pm 2 \cdot 0{,}037 = \pm 0{,}074 \text{ нФ}$$

де t – коефіцієнт Стьюдента $t = 2$ при довірчій ймовірності P=0,95.

2. Визначаємо довірчі границі невиключених систематичних похибок:

$$\Delta_C = K \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \Delta_{c_i}^2} = 1{,}1 \cdot \sqrt{\Delta_{c_1}^2 + \Delta_{c_2}^2} = 1{,}1 \cdot \sqrt{(0{,}012)^2 + (0{,}016)^2} = 0{,}022 \text{ нФ}.$$

Коефіцієнт K приймається рівним 1,1 для довірчої ймовірності P=0,95 і кількості невиключених систематичних похибок $m < 4$ (в даному випадку $m = 2$).

3. Знаходимо суму невиключених систематичних похибок:

$$\Delta'_C = \sum_{i=1}^{2} \Delta_{c_i} = 0{,}012 + 0{,}016 = 0{,}028 \text{ нФ}.$$

Для m ≤ 4 за оцінку границь невиключеної систематичної похибки приймається менше із значень Δ_C и Δ'_C:

$$\Delta_C = 0{,}022 \text{ нФ}.$$

4. Для оцінки довірчих границь сумарної похибки прямих однократних вимірювань необхідно обчислити відношення:

$$\mu = \frac{\Delta_c}{\sigma_{\overline{C}}} = \frac{0{,}022}{0{,}037} = 0{,}59$$

Тоді

$$\Delta = 0{,}8 \cdot (\Delta_C + \Delta_B) = 0{,}8 \cdot (0{,}022 + 0{,}074) = 0{,}077 \text{ (нФ)},$$

оскільки μ лежить в інтервалі від 0,5 до 8. В даному випадку коефіцієнт 0,8 враховує малу ймовірність того, що Δ_C і Δ_B будуть одночасно мати свої граничні значення.

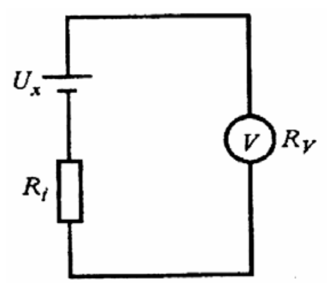
Якщо $\mu < 0{,}5$, то можна нехтувати систематичними похибками Δ_C і тоді $\Delta = \Delta_B$.

Якщо $\mu > 8$, то можна нехтувати Δ_B і тоді $\Delta = \Delta_C$.

5. Результат вимірювання записуємо у вигляді:

$$C = (1{,}246 \pm 0{,}077) \text{ нФ}, \qquad P = 0{,}95.$$

Задача 8. Оцінити систематичну похибку вимірювання напруги U_X джерела, обумовлену наявністю внутрішнього опору вольтметра (рис.).



Внутрішній опір джерела напруги R_i = 50 Ом; опір вольтметра R_V = 5 кОм; покази вольтметра $U_{ВИМ}$ = 12,2 В.

Розв’язок

1. Напруга, що вимірює вольтметр, дорівнює:

$$U_{вим} = \frac{U_x}{R_v + R_i} R_v.$$

2. Відносна систематична похибка визначається виразом:

$$\varepsilon = \frac{\Delta U}{U_x} = \frac{U_{вим} - U_x}{U_{вим}} 100\% = -\frac{R_i}{R_v + R_i} 100\% = -0{,}99\%.$$

3. Абсолютна похибка вимірювання дорівнює:

$$\Delta = \frac{\varepsilon U_{вим}}{100\%} = -\frac{0{,}99\% \ \cdot 12{,}2}{100\%} = \ -0{,}12 \text{ В}$$

Це досить значна похибка і її слід врахувати введенням поправки. Поправка ∇ дорівнює абсолютній похибці Δ, але з оберненим знаком:

$$\nabla = -\Delta = 0{,}12 \text{ В}.$$

4. Таким чином напруга джерела U_x дорівнює:

$$U_x = 12{,}20 + 0{,}12 = 12{,}32 \text{ В}$$

Зазначимо, що отримана оцінка систематичної похибки має деяку похибку внаслідок похибок визначення R_v і R_i, а також внаслідок наявності інструментальної похибки вольтметра. Ця похибка при введенні поправки не виключається і називається невиключеною систематичною похибкою.

Задача 9. При однократному вимірюванні фізичної величини отриманий показ засобу вимірювань x = 10. Визначити, чому дорівнює значення вимірюваної величини, якщо експериментатор володіє наступною інформацією про засіб вимірювання і умови проведення вимірювань: клас точності засобу вимірювань 4,0; границі вимірювань 0…50; значення адитивної поправки $\theta_a = 0{,}5$; СКВ $\sigma = 0{,}1$.

Розв’язок

1. Проаналізуємо отриману інформацію: клас точності засобу вимірювань, адитивна поправка, СКВ.

2. При вимірюванні отримано значення: x = 10.

3. За границі невиключеної систематичної похибки приймаємо границі найбільшої абсолютної похибки приладу, які знаходимо з виразу:

$$\Delta = \pm\frac{X_N \cdot \gamma}{100} = \pm\frac{50 \cdot 4{,}0}{100} = \pm 2$$

де X_N - нормуюче значення, що дрівнює в даному випадку діапазону вимірювання засобу вимірювання $X_N = 50$;
γ – приведена похибка, яка визначається класом точності засобу вимірювання $\gamma = 4{,}0$ %.

Таким чином, $\Delta = \pm 2$.

4. Знаходимо границі випадкової складової похибки вимірювання:

$$\Delta(P) = t_p \cdot \sigma = 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1.$$

Оскільки в задачі не задана довірча ймовірність, то за замовчуванням мається на увазі Р =0,68, що відповідає коефіцієнту $t_p = 1$.

5. Визначаємо сумарну похибку результату вимірювання. Так як $\Delta > 8\,\sigma$, то за границі сумарної похибки приймаємо границі невиключеної систематичної похибки $\Delta = \pm 2$.

6. Визначаємо граничні значення результату вимірювання:

$$x_1 = x - \Delta = 10 - 2 = 8\ ,$$
$$x_2 = x + \Delta = 10 + 2 = 12\quad .$$

7. Вносимо в результат вимірювання поправку:

$$X_1 = x_1 + \theta_a = 8 + 0{,}5 = 8{,}5,$$
$$X_2 = x_2 + \theta_a = 12 + 0{,}5 = 12{,}5$$

8. Результат вимірювання має вигляд:

$$X_1 \le X \le X_2;\quad 8{,}5 \le X \le 12{,}5$$

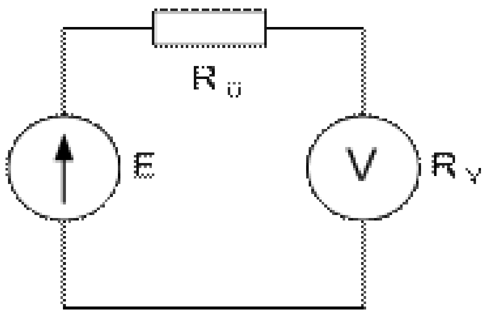
Задача 10. Оцінити інструментальні складові похибки приладу класу точності 1,0/0,5, якщо покази приладу склали 150 мА на діапазоні з верхнею межею вимірювання 200 мА.

Розв'язок

Визначимо основну складову інтсрументальної похибки :

$$\varepsilon_{осн} = \left[c + d\left(\frac{I_{max}}{I} - 1\right)\right] = \pm\left[1{,}0 + 0{,}5\left(\frac{200}{150} - 1\right)\right]\% = \pm 1{,}17\%$$

Задача 11. Для вимірювання ЕРС E = 2,5 В джерела з внутрішнім опором $R_0 = 10\ \text{Ом}$ використаний вольтметр з внутрішнім опором $R_v = 1000\ \text{Ом}$ (рис.). Визначити абсолютну і відносну похибки методу вимірювання.



Розв'язок

1. Покази вольтметра згідно рисунку дорівнюють:

$$U_v = \frac{ER_v}{R_v + R_0}$$

3. Отже, при цьому виникає методична похибка, абсолютне значення якої визначається за формулою:

$$\Delta_\text{м} = U_v - E = \frac{ER_v}{R_v + R_0} - E = -\frac{ER_0}{R_v + R_0} = -\frac{2{,}5 \cdot 10}{1000 + 10} = -0{,}025\ \text{В}$$

4. Відносна похибка методу розраховується за формулою:

$$\varepsilon_\text{м} = \frac{\Delta_\text{м}}{E} \cdot 100\% = -\frac{R_0}{R_v + R_0} \cdot 100\% = -1\%$$

6.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Визначити інструментальну похибку вимірювання опору R_x = 200 кОм за допомогою комбінованого приладу, якщо він має клас точності 4,0, довжину робочої частини шкали L = 80 мм, позначці 200 кОм відповідає довжина шкали l = 40 мм.

Задача 2. Визначити границі інструментальних абсолютної і відносної похибок вимірювання струму I = 6,8 мА, якщо вимірювання виконувалися магнітоелектричним міліамперметром з нулем посередині шкали, класом точності 2,5 і границями вимірювання A = ±10 мА.

Задача 3. Оцінити інструментальні похибки вимірювання напруги двома магнітоелектричними вольтметрами з класом точності 0,2 і 1,5 і вказати, який з результатів отриманий з більшою точністю, а також чи можуть покази U_1 =21,7 В и U_2 =20,8 В відрізнятися так, як задано в умові? Вольтметры мають нулі на початку шкали і границі A_1 =75 В и A_2 =25 В.

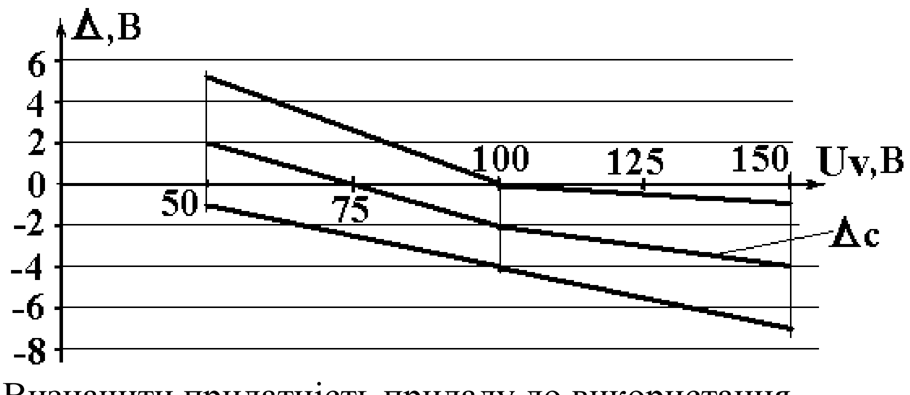
Задача 4. В процесі повірки вольтметра зразковим засобом вимірювання була виявлена систематична похибка і складена таблиця поправок

1 В	2 В	3 В	4 В	5 В	6 В	7 В	8 В	9 В	10 В
-0,2 В	-0,13 В	-0,1 В	0,05 В	0 В	0,06 В	0,12 В	0,16 В	0,18 В	0,22 В.

Записати результати вимірювань з врахуванням таблиці поправок.

Задача 5. Оцінка середньоквадратичного відхилення випадкової складової похибки результату вимірювання напруги при 200–х спостереженнях склала 0,075%. Чи можна цим засобом вимірювання виконувати однократні вимірювання напруги, випадкова похибка яких з ймовірністю 0,95 не перевищує 2,5%?

Задача 6. За результаттами повірки вольтметра класу точності 4,0 х кінцевим значенням шкали 150 В побудовані графіки систематичної похибки Δ_c и границь похибки приладу Δ при довірчій ймовірності 0,997.



Визначити придатність приладу до використання.

Задача 6. Визначити відносну методичну похибку вимірювання ЕРС вольтметром з вхідним опором 1000 Ом, якщо внутрішній опір джерела ЕРС дорівнює 10 Ом.

Задача 7. Відомі абсолютна і відносна похибки вимірювання – 5 Ом і 10% відповідно. Визначити виміряний опір і записати результат вимірювання.

Задача 8. Виконано вимірювання напруги за допомогою вольтметра класу точності 0,5 в нормальних умовах. Показ вольтметра на шкалі в 1,5 В склав 1,025 В, внутрішній опір джерела вимірюваної напруги дорівнює 1,5 Ом, вхідний опір вольтметра 1500 Ом.Оцінити методичну похибку вимірювання.

Задача 9. Клас точності імпульсного вольтметра 2/0,2. Оцінити абсолютну і відносну похибки вимірювання двох значень напруги 52 В і 97 В на шкалі 100 В в нормальних умовах.

Задача 10. Амперметр класу точності 1,5 має кінцеве значення шкали 300 мкА. Визначити діапазон значень струму, в якому відносна похибка вимірювань не перевищує 5%.

Задача 11. Результат вимірювання напруги мілівольтметром в нормальних умовах має вид: U = 40 В ± 10 %. Визначити границю шкали, на якій було виконано вимірювання. Записати результат вимірювання з врахуванням границь абсолютної похибки.

Задача 12. Методом порівняння визначені покази зразкового вольтметра 2 В і повіряємого вольтметра 1,95 В. Визначити абсолютну систематичну похибку і поправку для повіряємого засобу вимірювання, якщо випадкова складова похибки дорівнює нулю.

Задача 13. У коло з послідовним включенням опору 100 Ом і джерела з ЕРС = 10 В і внутрішнім опором 2 Ом включили амперметр, опір якого 0,5 Ом. Визначити покази амперметра, розрахувати похибку, зумовлену відмінністю опору амперметра від нуля.

Задача 14. До джерела ЕРС 10 В з внутрішнім опором 2 Ом під’єднаний вольтметр з вхідним опором 100 Ом. Визначити покази вольтметра, класифікувати та оцінити похибку вимірювання, зумовлену наявністю внутрішнього і вхідного опорів.

Задача 15. На підставі попередніх вимірювань напруги відомо середньоквадратичне відхилення результату вимірювання $\sigma_{\overline{U}} = 0{,}51$ В; границі невиключених чотирьох складових систематичної похибки

$\Delta_{c_1} = 0{,}39$ В; $\Delta_{c_2} = 0{,}81$ В; $\Delta_{c_3} = 0{,}24$ В; $\Delta_{c_4} = 0{,}55$ В. Визначити довірчі границі похибки вимірювання напруги U=81,48 В з однократним спостереженням. Довірча ймовірність P = 0,95.

Задача 16. Для вимірювання ЕРС Е у колі використаний вольтметр класу точності 0,2 з верхнею границею вимірювання 3 В і внутрішнім опором R_v= 1000 Ом. Визначити відносну методичну похибку вимірювання ЕРС, якщо опір проводів з'єднання R =100 Ом.

Задача 17. За умовами задачі 16 визначити границю допустимої відносної похибки приладу і порівняти її з відносною методичною похибкою вимірювання, якщо ЕРС джерела Е = 1,5 В.

Задача 18. При вимірюванні напруги на навантажувальному резисторі вольтметр показав 13,5 В. Знайти абсолютну і відносну методичні похибки вимірювання, якщо опір резистора 7 Ом, ЕРС джерела 14,2 В, його внутрішній опір 0,1 Ом.

Задача 19. Цифровим вольтметром виміряна напруга постійного струму 15 В на шкалі 20 В. Внутрішній опір джерела 10 кОм. Основна відносна похибка приладу

$$\varepsilon = \pm\left[0{,}25 + 0{,}1\left(\frac{U_{гр}}{U_x} - 1\right)\right]$$

Вхідний опір приладу $1{,}3 \cdot 10^6$ Ом. Вимірювання виконується при нормальний умовах. Розрахуйте інструментальну і методичну похибку вимірювання

Задача 20. Визначити відносну методичну похибку вимірювання струму амперметром, внутрішній опір якого 14 Ом, включеного послідовно в коло з джерелом постійного струму, що має ЕРС 12 В і внутрішній опір 40 Ом; опір навантаження 0,450 Ом.

Задача 21. Основна приведена похибка показів магнітоелектричного приладу 0,5%. Знайти найбільші відносні похибки вимірювання при відхиленні стрілки на 75, 25 і 5% його шкали.

Задача 22. Визначити, в якому випадку відносна похибка вимірювання струму I=10 мА менше, якщо для вимірювання використані два прилади, які мають відповідно шкали на 15 мА (клас точності приладу 0,5) і 100 мА (клас точності приладу 0,1).

Задача 23. Електричне коло складається з послідовно включених джерела ЕРС Е = 100 мВ і резистора з опором R = 100 Ом. Для вимірювання струму в коло включений міліамперметр з внутрішнім опором R_A = 7,5 Ом.

Визначити відносну і абсолютну похибки методу вимірювання, зумовлену включенням міліамперметра.

Задача 24. Порівняти відносні похибки вимірювань тиску 100 кПа пружинними манометрами класів точності 0,2 і 1,0 з границями вимірювань на 600 и 100 кПа відповідно.

Задача 25. Розрахувати відносну похибку вимірювання швидкості вітру, якщо границя допустимої основної похибки анемометра, яким виконуються вимірювання, складає $\Delta = \pm(0{,}1 + 0{,}05V)$ м/с, а виміряне значення склало 2 м/с.

Задача 26. Мікроамперметр на 100 мкА має шкалу в 200 поділок і клас точності 1,0. Визначити ціну поділки. Розрахувати можливу допустиму похибку в мкА. Розрахувати відносну похибку приладу при виміряному значенні, що дорівнює 50 мкА.

Задача 27. Вказівник відлікового пристрою вольтметра з діапазоном вимірювання від 0 до 200 В класу точності 0,5 показує 150 В. Чому дорівнює виміряна напруга з урахуванням похибки приладу?

Задача 28. Вказівник відлікового пристрою ампервольтметра класа точності 0,02/0,01 із шкалою від – 50 до + 50 А показує 10 А. Чому дорівнює виміряна сила струму з урахуванням похибки приладу?

Задача 29. Розрахувати відносну похибку вимірювання швидкості вітру, якщо границя допустимої основної похибки у анемометра, яким виконуються вимірювання, складає $\Delta = \pm(0{,}1 + 0{,}05V)$ м/с, а виміряне значення склало 5 м/с.

Задача 30. Клас точності деякого приладу позначений як 6,0. Якій похибці відповідає ця форма запису?

Задача 31. Клас точності деякого приладу позначений як 6,0/1,0. Якій похибці відповідає ця форма запису?

Задача 32. Результат вимірювання струму містить випадкову похибку, розподілену по нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = \pm 4$ мА. Систематична похибка відсутня. Яка ймовірність q того, що похибка перевищить за абсолютною величиною $\varepsilon = \pm 12$ мА ?

Задача 33. Похибка вимірювання напруги розподілена по нормальному закону, причому систематична похибка дорівнює нулю, а середня квадратична похибка $\sigma = \pm 4$ мВ . Знайти ймовірність P того, що результат вимірювання відрізняється від істинного значення не більше, ніж на $\varepsilon = \pm 90$ мВ .

Задача 34. Оцінити похибку однократного вимірювання напруги U = 4 В на опорі $R_1 = 4$ Ом, виконаного вольтметром класу точності К = 0,5 з верхнею границею вимірювань $U_{гр}$ = 12В і внутрішнім опором R_V = 1 кОм. Відомо, що додаткові похибки показів вольтметра внаслідок впливу магнітного поля і температури не перевищують відповідно $\varepsilon_{мп}=\pm 0{,}75\%$ і $\varepsilon_T=\pm 0{,}3\%$ допустимої граничної похибки.

Задача 35. В результаті повірки амперметра встановлено, що 70 % похибок результатів вимірювань, виконаних за його допомогою, не перевищують $\varepsilon = \pm 20$ мА. Вважаючи, що похибки розподілені по нормальному закону з нульовим математичним очікуванням, визначити середню квадратичну похибку σ.

Задача 36. Контрольна повірка ЕРС нормального елемента показала, що 60% похибок не виходить за межі $\varepsilon = \pm 10$ мкВ. Вважаючи, що похибки розподілені по нормальному закону, визначити середню квадратичну похибку σ.

Ответ: $\sigma \approxeq 12$ мкВ.

Задача 37. В результаті повірки амперметра встановлено, що 80 % похибок результатів вимірювань, виконаних за його допомогою, не перевищують $\varepsilon_1 = \pm 20$ мА. Вважаючи, що похибки розподілені по нормальному закону з нульовим математичним очікуванням, знайти ймовірність Р того, що похибка вимірювання перевищить $\varepsilon_2 = \pm 40$ мА.

РОЗДІЛ 7. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ, ВІЛЬНИХ ВІД СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ БАГАТОКРАТНИХ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ.

7.1. Теоретичні відомості

Процес вимірювання прийнято розподіляти на три етапи:

1. підготовка до вимірювань;
2. проведення вимірювань;
3. обробка результатів вимірювань.

На першому етапі при підготовці до вимірювань треба уважно поставитися до вибору засобу вимірювання (ЗВ), що забезпечує задану точність вимірювань. При цьому, як правило, виникає потреба вирішувати суперечливе завдання вибору компромісу між точністю результату вимірювань й економічними витратами. Необґрунтовано високі вимоги за точністю можуть зробити вимірювальне завдання невиправдано складним й дорогим.

На другому етапі процесу вимірювань особливу увагу треба приділити усуненню відомих систематичних погрішностей. Розгляду цього питання присвячений шостий розділ.

На третьому етапі після проведених вимірювальних експериментів здійснюють опрацювання результатів первинних вимірювань (спостережень) для знаходження остаточного результату вимірювання - основної мети вимірювання. Основна мета обробки експериментальних даних – одержання результата вимірювання і оцінка його похибки.

Під час опрацювання результатів розв'язують дві задачі:

1. знаходять значення вимірюваної величини;
2. оцінюють характеристики точності результату вимірювання.

У загальному випадку обробка результатів вимірювань передбачає такі етапи:

1. попередній аналіз результатів спостережень (первинних вимірювань), їх систематизація, відкидання явно недостовірних результатів;
2. усунення (корекція) впливу систематичних похибок (вивчення умов вимірювань, розрахунок і внесення поправок);
3. аналіз впливу випадкових похибок, перевірка гіпотез про їх розподіл, вибір найкращих оцінок шуканих величин;
4. оцінка характеристик точності числового алгоритму, його стійкості;
5. виконання розрахунків згідно з вибраним алгоритмом;
6. аналіз отриманих результатів;
7. подання результатів вимірювань та характеристик їх точності за відповідною формою.

Вибір методу залежить від багатьох причин, основними з яких є наступні: число проведених відліків у процесі вимірювань (однократні, багатократні вимірювання) та їх статистичний розподіл; вид вимірювань (прямі, непрямі тощо); умови вимірювань; вимоги щодо точності вимірювань.

Рівноточними називаються повторні вимірювання фізичної величини виконані одним і тим же методом, одним і тим же засобом, в незмінних умовах, одним оператором. Формальною ознакою рівноточності може бути рівність середньоквадратичних похибок σ всіх серій вимірювань.

Методика виконання прямих багаторазових вимірювань і основні положення щодо обробки результатів багатократних спостережень встановлені Державним стандартом ДСТУ.1.0-93 «Державна система Стандартизації України. Основні положення».

Виконавши декілька вимірювань, ми отримаємо ряд числових значень вимірюваної величини. Ці значення відрізняються одне від одного, але всі вони заслуговують однакової довіри, оскільки отримані в однакових умовах і з однаковою ретельністю.

Практично число спостережень (вимірювань) завжди обмежене, а це означає, що одержаний набір значень випадкової величини невеликий: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; в більшості експериментів n < 100. Сукупність обмеженої кількості значень випадкової величини називається **вибіркою із генеральної сукупності**, а кожне конкретне значення x_i, що належить до вибірки – **елементом вибірки**.

Генеральна сукупність – це повний набір всіх значень, які може в принципі приймати випадкова величина.

Основним методом зменшення впливу випадкових похибок є проведення вимірювань **з багаторазовими спостереженнями** і подальше статистичне опрацювання отриманих результатів. Методика статистичного опрацювання залежить від статистичних властивостей випадкових похибок, зокрема, їх розподілу, корельованості тощо. В переважній більшості на практиці приймають **модель нормального розподілу** випадкових похибок, що дає можливість застосовувати для обробки результатів добре теоретично обгрунтовані статистичні методи.

Найбільш ефективним методом зменшення впливу на результат вимірювання нормально розподілених випадкових похибок є **усереднення результатів.**

Приступаючи до довірчої оцінки випадкових похибок, відзначимо, що довірчий інтервал, у якому випадкова похибка вимірювання перебуває із заданою ймовірністю, є показником точності виміру. Для його знаходження насамперед проводиться перевірка гіпотези про відповідність експериментальних даних нормальному закону розподілу.

Якщо в будь-якому конкретному вимірюванні заздалегідь невідомий розподіл випадкових похибок, то необхідно провести детальні дослідження на предмет встановлення форми розподілу. При цьому застосовують відповідні статистичні критерії і для досягнення заданого рівня впевненості про вид розподілу необхідно виконати великий обсяг вимірювальних експериментів, навіть кілька сотень і більше. Найчастіше на основі експериментальних даних спочатку будують гістограму і за її формою роблять попередній висновок про вид розподілу. Далі на основі певних критеріїв (критерій χ^2 Пірсона, критерій ω^2 Мізеса-Смірнова, критерій Колмогорова тощо) перевіряють гіпотезу на приналежність даного розподілу до вибраного модельного.

Слід зауважити, що ніякий критерій не дає гарантії про підпорядкованість сукупності експериментальних даних тому чи іншому розподілу, лише отримується відповідь, що з певною ймовірністю такий розподіл не суперечить експериментальним результатам. Але найбільш поширеною як в теоретичних дослідженнях, так і при практичному опрацюванні результатів вимірювань є модель нормального розподілу випадкових похибок.

Прийнято вважати, що кількість спостережень при багаторазових вимірюваннях не менша за 4 - 5 ($n \geq 4$-5) В результаті почергових вимірювань даної величини отримують набір результатів $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, де n – кількість вимірювань.

Для зменшення впливу нормально розподілених випадкових похибок застосовується усереднення результатів вимірювань, тобто за результат вимірювання приймається їх середнє арифметичне значення:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

де $\bar{x}$ - середне арифметичне значення;

x_i – результат i - тового вимірювання;

n – кількість вимірювань.

При цьому припускається, що результати вимірювань вільні від систематичних похибок.

Середнє значення $\bar{x}$ вимірюваної величини x показує центр розподілу, біля якого групуються результати окремих вимірювань.

Для характеристики точності отриманого результату $\bar{x}$ необхідно визначити довірчий інтервал Δ, в який із заданою довірчою ймовірністю $P_{дов}$ потрапляє значення $\bar{x}$. Це потребує знаходження середнього квадратичного відхилення $\sigma_{\bar{x}}$ середнього арифметичного значення $\bar{x}$, а також за таблицями інтеграла ймовірностей коефіцієнта t у виразі абсолютної похибки вимірювання Δ :

$$\Delta = t \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

Кінцевий результат вимірювання представляється у вигляді:

$$x_{іст} = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm t \cdot \sigma_{\bar{x}} \quad \text{при } P = P_{дов}$$

7.2. Методичні вказівки до розв'язання задач

При розв'язанні задач даного розділу необхідно звернути увагу на наступні моменти:

1. При обробці результатів багатократних вимірювань слід розрізняти два випадки:

а. рівноточні багатократні вимірювання;

б. нерівноточні багатократні вимірювання

Даний розділ присвячений обробці результатів рівноточних багатократних вимірювань.

Рівноточними називаються почергові вимірювання фізичної величини незмінним методом, незмінними засобами, в незмінних умовах, одним оператором. Формальною ознакою рівноточності може бути рівність середньоквадратичних похибок σ всіх серій вимірювань.

2. Результати рівноточних багатократних вимірювань обробляються по- різному в залежності від кількості n виконаних вимірювань:

- при $n \geq 30$ для знаходження довірчого інтервалу Δ користуються таблицями інтегралу ймовірностей Ф(t), розрахованими на основі нормального розподілу (таблиці додатків 1 і 2). Причому параметр t залежить тільки від заданої довірчої ймовірності $P_{дов}$ і не залежить від кількості вимірювань n. Абсолютну похибку вимірювань (довірчий інтервал) в цьому випадку знаходять за формулою:

$$\pm\Delta = t \cdot \sigma_{\overline{x}}$$

- при $n < 30$ для знаходження довірчого інтервалу Δ користуються таблицями, розрахованими на основі розподілу Стьюдента (таблиці додатків 3 і 4). В даному випадку параметр t залежить як від значення довірчої ймовірності $P_{дов}$, так і від кількості n виконаних вимірювань, і позначається через t_c. Абсолютну похибку вимірювань (довірчий інтервал) знаходять за формулою:

$$\pm\Delta = t_c \cdot \sigma_{\overline{x}}, \qquad (7.1)$$

де t_c – коефіцієнт Стьюдента.

3. Обробка результатів прямих рівноточних багатократних вимірювань виконується в наступній послідовності:

1). Вихідними даними для розрахунку є серія із n результатів рівноточних спостережень $x_1, x_2, ..., x_n$, а також довірча ймовірність $P_{дов}$.

2). Оцінка наявності і, при необхідності, виключення відомої систематичної похибки з результатів спостереження. Вона грунтується на знанні властивостей використовуваного ЗВ, методу вимірювань й умов вимірювань.

3). Визначається середнє арифметичне значення результатів спостережень, яке є оцінкою істинного значення вимірюваної величини :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (7.2)$$

4). При нормальній функції розподілу середнє арифметичне значення $\bar{x}$ є найбільш наближеним до істинногозначення вимірюваної величини. Отже похибка кожного і-того спостереження буде визначатися формулою:

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$$

5). Обчислюється середнє квадратичне відхилення (СКВ) результату окремого вимірювання σ. Значення середньоквадратичної похибки даного ряду вимірювань знаходимо за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (7.3)$$

6). Перевіряється нормальність розподілу результатів спостережень. При цьому застосовують відповідні статистичні критерії і для досягнення заданого рівня впевненості про вид розподілу необхідно виконати великий обсяг вимірювальних експериментів, навіть кілька сотень і більше. Найчастіше на основі експериментальних даних спочатку будують гістограму і за її формою роблять попередній висновок про вид розподілу. Далі на основі певних критеріїв (критерій χ^2 Пірсона, критерій ω^2 Мізеса-Смірнова, критерій Колмогорова тощо) перевіряють гіпотезу на приналежність даного розподілу до вибраного модельного.

7). Визначається наявність грубих похибок, які відповідають умові $\Delta \geq 3\sigma$. Результати з грубими похибками відкидають і проводять обчислення для меншого числа спостережень з попередньою послідовністю.

8). При скінченому числі спостережень середнє арифметичне, знайдене за формулою (7.1), відрізняється від істинного середнього арифметичного, тобто $\bar{x}$ також є випадковою величиною. Тому існує середньоквадратичне відхилення середнього арифметичного значення. На цьому етапі здійснюється оцінка СКВ середнього значення результатів вимірювань $\sigma_{\bar{x}}$, що характеризує ступінь розкиду $\bar{x}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (7.4)$$

Оскільки $\bar{x}$ виступає оцінкою істинного значення вимірюваної величини $x_{іст}$ тобто є кінцевим результатом виконуваних вимірювань, то $\sigma_{\bar{x}}$ називають також середньою квадратичною похибкою результату вимірювань.

Як видно із (7.4), при збільшенні числа спостережень точність збільшується пропорційно $\sqrt{n}$. У загальному випадку число спостережень необхідно збільшувати доти, поки $\sigma_{\bar{x}}$ не стане меншим від систематичної похибки приладу.

9). При підтвердженні гіпотези про нормальність закону розподілу обчислюють межі довірчого інтервалу випадкової складової похибки, виходячи з вибраної довірчої ймовірності $P_{дов}$.

Якщо число спостережень $n \geq 30$, то значення інтегралу ймовірностей $\Phi(t)$ необхідно обчислювати через функцію Лапласа. Для заданих значень $P_{дов}$ за табульованими значеннями функції Лапласа $\Phi(t) = P_{дов}$ (додаток 1) знаходять значення $t(P_{дов})$, а враховуючи, що $t(P_{дов}) = \dfrac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}}$, верхня $x_в$ і нижня $x_н$ межі довірчого інтервалу визначають за формулами:

$$x_в = \bar{x} + t(P_{дов}) \cdot \sigma_{\bar{x}} = \bar{x} + \Delta$$
$$x_н = \bar{x} - t(P_{дов}) \cdot \sigma_{\bar{x}} = \bar{x} - \Delta \qquad (7.5)$$

де $x_в$ - верхня границя довірчого інтервалу;

$x_н$ - нижня границя довірчого інтервалу

Тобто істинне значення вимірюваної величини з імовірністю $P_{дов}$ знаходиться в межах:

$$\bar{x} - t\sigma_{\bar{x}} \leq x_{іст} \leq \bar{x} + t\sigma_{\bar{x}} \qquad (7.6)$$

Інтервал, в якому похибка вимірювання знаходиться із заданою ймовірністю $P_{дов}$, є показником точності вимірювання

Якщо кількість результатів вимірювань $n < 30$, але судження про нормальність розподілу залишається справедливим, то використовують розподіл Стьюдента. Для заданих значень $P_{дов}$ і n за таблицями розподілу Стьюдента (додаток 3) знаходять коефіцієнт $t(n, P_{дов})$, а потім обчислюють верхню й нижню межі довірчого інтервалу:

$$x_в = \bar{x} + t(n, P_{дов}) \cdot \sigma_{\bar{x}} = \bar{x} + \Delta$$
$$x_н = \bar{x} - t(n, P_{дов}) \cdot \sigma_{\bar{x}} = \bar{x} - \Delta \qquad (7.7)$$

10). Якщо в задачі не вказується значення довірчої ймовірності, то за замовчуванням мається на увазі довірча ймовірність $P = 0{,}68$, що відповідає довірчому інтервалу $\pm\sigma_{\bar{x}}$.

11). Результат вимірювання записується у вигляді:

$$x_{іст} = \bar{x} \pm \Delta \quad \text{при} \quad P = P_{дов}$$

7.3 Приклади розв'язку задач

Задача 1. У процесі вимірювання отримано 10 відліків вимірюваної величини (рівень сигналу в дБ):

x_1= 72.36; x_2= 72,35; x_3= 72,35; x_4= 72,35; x_5= 72,33;
x_6= 72,37; x_7= 72,36; x_8= 72,35; x_9= 72,35; x_{10}= 72,36.

Визначити результат вимірювання, якщо $P_{дов}$= 0,95. Систематичною похибкою знехтувати. Розподіл результатів відліків вважати нормальним.

Розв'язок

1. Знаходимо середнє арифметичне значення результатів вимірювань:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10}}{10} = 72{,}352$$

2.Обчислюємо середнє квадратичне відхилення окремого вимірювання:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0{,}011$$

3. Обчислюємо середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного значення

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}011}{\sqrt{10}} = 0{,}003$$

4. Оскільки кількість вимірювань $n < 30$ ($n = 10$), то скористаємося розподілом Стьюдента для знаходження коефіцієнта $t\,(n, P_{дов})$. За таблицею додатка 1 знаходимо, що $P_{дов}$ = 0,95 відповідає коефіцієнт

$$t\,(n, P_{дов}) = t\,(10;\,0{,}95) = 2{,}26$$

5. Абсолютна похибка дорівнює:

$$\Delta = \pm t(n, P_{дов})\sigma_{\bar{x}} = 2{,}26 \cdot 0{,}003 = 0{,}007$$

6. Визначаємо межі довірчого інтервалу:

$$x_н = \bar{x} - t(n, P_{дов}) = 72{,}350 - 0{,}007 = 72{,}343;$$
$$x_в = \bar{x} + t(n, P_{дов}) = 72{,}350 + 0{,}007 = 72{,}357;.$$

7. Таким чином кінцевий результат вимірювання має вид:

$$x_{іст} = \bar{x} \pm t(n, P_{дов}) = 72{,}350 \pm 0{,}007, \quad P_{дов} = 0{,}95$$

Увага! Оскільки в запису похибки Δ перша значуща цифра дорівнює 7, то в кінцевому запису похибки залишаємо одну значущу цифру. Запис результату вимірювання згідно правил має закінчуватися цифрою того ж розряду, що і похибка. Тому $\bar{x} = 72{,}350$, а не 72,35.

Задача 2. Значення опору R було виміряно 8 разів. При цьому отримані наступні результати:

$R_1 = 116{,}2$ Ом; $R_2 = 118{,}2$ Ом; $R_3 = 118{,}5$ Ом; $R_4 = 117{,}0$ Ом; $R_5 = 118{,}2$ Ом; $R_6 = 118{,}4$ Ом; $R_7 = 117{,}8$ Ом; $R_8 = 118{,}1$ Ом.

Визначте інтервал, в якому знаходиться значення вимірюваного опору, з довірчою ймовірністю P = 0,99.

Розв'язок

1. Знаходимо середнє арифметичне значення опору

$$\bar{R} = \frac{R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+R_6+R_7+R_8}{8} =$$

$$= \frac{116{,}2+118{,}2+118{,}5+117{,}0+118{,}2+118{,}4+117{,}8+118{,}1}{8} = 117{,}8 \text{ Ом}$$

2. Визначаємо абсолютні похибки окремих вимірювань

$\Delta_1 = R_1 - \overline{R} = -1{,}6$ Ом; $\Delta_2 = R_2 - \overline{R} = 0{,}4$ Ом;

$\Delta_3 = 0{,}7$ Ом; $\Delta_4 = -0{,}8$Ом; $\Delta_5 = 0{,}4$Ом; $\Delta_6 = 0{,}5$ Ом; $\Delta_7 = 0{,}0$ Ом; $\Delta_8 = 0{,}3$Ом

3. Визначаємо середню квадратичну похибку результату вимірювань (середню квадратичну похибку середнього арифметичного)

$$S_{\overline{R}} = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \Delta_5^2 + \Delta_6^2 + \Delta_7^2 + \Delta_8^2}{n(n-1)}} =$$

$$\sqrt{\frac{(-1{,}6)^2 + 0{,}4^2 + 0{,}7^2 + (-0{,}8)^2 + 0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 0{,}0^2 + 0{,}3^2}{8 \cdot 7}} = 0{,}29 \text{ Ом}$$

4. Для того, щоб визначити інтервал, в якому знаходиться значення виміряного опору з довірчою ймовірністю 0,99 (тобто довірчий інтервал), по

таблиці додатку 3 знаходимо коефіцієнт Стьюдента для P = 0,99 та n = 8. Він дорівнює $t_n = 3{,}5$.

5. Отже кінцевий результат має вигляд:

$$R = \overline{R} \pm t_n \cdot S_{\overline{R}} = 117{,}8 \text{ Ом} \pm 3{,}5 \cdot 0{,}29 \text{ Ом} = 117{,}8 \pm 1{,}0 \text{ Ом}, \; P = 0{,}99$$

6. Визначимо довірчий інтервал при довірчій ймовірності P = 0.5 та n = 8. Коефіцієнт Стьюдента для P = 0,5 та n = 8 дорівнює $t_n = 0{,}71$.

Отже довірчий інтервал складає

$$\varepsilon_R = \pm t_n \cdot S_{\overline{R}} = \pm\ 0{,}71 \cdot 0{,}29 = \pm\ 0{,}21 \text{ Ом}$$

і кінцевий результат має вид:

$$R = \overline{R} \pm t_n \cdot S_{\overline{R}} = 117{,}80 \pm 0{,}21 \text{ Ом}, \quad P = 0.5.$$

Задача 3. Виконано 10 послідовних вимірювань діаметра отвору і отримані наступні значення (в мм): 29,947; 29,968; 30,076; 30,052; 29,940; 29,962; 29,995; 30,015; 30,055; 30,060. Визначити істинне значення діаметра отвору для довірчої ймовірності 0,95.

Розв’язок

1. Знаходимо середнє арифметичне значення діаметра отвору:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{29{,}947 + 29{,}968 + 30{,}076 + 30{,}052 + 29{,}940 + 29{,}962 + 29{,}995 + 30{,}015 + 30{,}055 + 30{,}060}{10} =$$

$$= 30{,}007$$

2. Знаходимо відхилення окремих вимірювань від середнього арифметичного:

$$\Delta x_i = x_i - \overline{x}$$

$$\Delta x_1 = -0{,}060; \Delta x_2 = -0{,}039; \Delta x_3 = 0{,}069; \Delta x_4 = 0{,}045; \Delta x_5 = -0{,}067; \Delta x_6 = -0{,}045;$$
$$\Delta x_7 = -0{,}012; \Delta x_8 = 0{,}008; \Delta x_9 = 0{,}048; \Delta x_{10} = 0{,}053.$$

3. Знаходимо квадрати відхилень:

$$\Delta x_1^2 = 3{,}60 \cdot 10^{-3}; \Delta x_2^2 = 1{,}52 \cdot 10^{-3}; \Delta x_3^2 = 4{,}76 \cdot 10^{-3}; \Delta x_4^2 = 2{,}02 \cdot 10^{-3}; \Delta$$
$$x_5^2 = 4{,}49 \cdot 10^{-3}; \Delta x_6^2 = 2{,}02 \cdot 10^{-3}; \Delta x_7^2 = 0{,}14 \cdot 10^{-3}; \Delta x_8^2 = 0{,}06 \cdot 10^{-3};$$
$$\Delta x_9^2 = 2{,}30 \cdot 10^{-3}; \Delta x_{10}^2 = 2{,}81 \cdot 10^{-3}.$$

4. Знаходимо середню квадратичну похибку середнього арифметичного:

$$S_0 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(3,60+1,52+4,76+2,02+4,49+2,02+0,14+0,06+2,30+2,81)\cdot 10^{-3}}{10\cdot 9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{23,72\cdot 10^{-3}}{90}} = \sqrt{2,64\cdot 10^{-2}} = 0,0162$$

5. Для довірчої ймовірності P = 0,95 за таблицею розподілу Стьюдента знаходимо $t = 2,26$. Отже, границі довірчого інтервалу дорівнюють:

$$\varepsilon = \pm t\cdot S = \pm 2,26\cdot 0,0162 = 0,037$$

6. Істинне значення діаметра отвору визначається виразом:

$$x_{іст.} = \bar{x} \pm \varepsilon = 30,007 \pm 0,037 \quad \text{при } P = 0,95$$

або

$$29,970\,мм \le x_{іст.} \le 30,044\,мм \ \text{ при } P = 0,95.$$

Задача 4. При вимірювані напруги джерела живлення отримані наступні результати, В: : 9,78; 9,65; 9,83; 9,69; 9,74; 9,80; 9,68: 9,71; 9,81. Знайти результат і похибку вимірювання і записати у стандартній формі, якщо систематична похибка відсутня, а випадкова розподілена по нормальному закону.

Розв'язок

1. Знаходимо середнє арифметичне значення напруги і приймаємо його за результат вимірювання:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi = 9,7433\,В$$

де n = 9.

2. Визначаємо середнє квадратичне відхилення (СКВ) результату вимірювання:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} = 0,0215\ В$$

3. Визначаємо довірчий інтервал похибки вимірювання. Оскільки в даній задачі кількість вимірювань n < 30, то довірчий інтервал визначається коефіцієнтом Стьюдента t(n,p).

Оскільки в задачі не вказано довірчу ймовірність, то за замовчуванням мається на увазі, що вона дорівнює Р = 0,68, що відповідає коефіцієнту Стьюдента t(n,p) = 1 і довірчому інтервалу

$$\Delta = \pm\, \sigma_{\bar{x}} = \pm\ 0{,}021\ \text{В}.$$

4. Результат вимірювання згідно вимог стандарту записуємо у вигляді:

$$x_{іст} = 9{,}740 \pm 0{,}021\ \text{В}; \quad P = 0{,}68$$

5. Якщо задати довірчу ймовірність Р = 0,95, то за таблицею додатку 3 знаходимо значення коефіцієнта Стьюдента t(n,p) = 2,31. Отже, границі довірчого інтервалу в цьому випадку дорівнюють:

$$\Delta = \pm\, t\sigma_{\bar{x}} = \pm\, 0{,}0215 \cdot 2{,}31 = \pm\, 0{,}0496 \approx \pm\, 0{,}05\ \text{В}.$$

6. Записуємо результат вимірювання згідно стандарту у формі:

$$x_{іст} = 9{,}74 \pm 0{,}05\ \text{В}; \quad P = 0{,}95$$

Задача 5. При багаторазових вимірюваннях температури Т у виробничому приміщенні отримані значення в градусах Цельсія: 20,4; 20,2; 20,0; 20,5; 19,7; 20,3; 20,4; 20,1. Знайти довірчі границі істинного значення температури в приміщенні з ймовірністю Р = 0,95.

Розв'язок

1.За формулою (7.2) знаходимо середнє значення температури $\bar{T}$:

$$\bar{T} = \frac{20{,}4+20{,}2+20{,}0+20{,}5+19{,}7+20{,}3+20{,}4+20{,}1}{8} = 20{,}2^{0}\text{C}$$

2. За формулами (7.3) і (7.4) знаходимо середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(20{,}2-20{,}4)^2+(20{,}2-20{,}2)^2+(20{,}2-20{,}0)^2+(20{,}2-20{,}5)^2+(20{,}2-19{,}7)^2+}{8(8-1)}}$$

$$\sqrt{\frac{+(20{,}2-20{,}3)^2+(20{,}2-20{,}4)^2+(20{,}2-20{,}1)^2}{}} = 0{,}09$$

3. По таблице додатку 3 знаходимо значення коефіцієнта Стьюдента $t(n,P)$ довірчій ймовірності Р = 0,95 и n = 8:

$$t(n, P) = 2{,}36$$

4. Довірчі границі істинного значення температури у приміщенні з ймовірністю Р =0,95 розраховуємо за формулою (7.1):

$$\bar{T} - t(n, P) \cdot \sigma_{\bar{x}} < T_{іст} < \bar{T} + t(n, P) \cdot \sigma_{\bar{x}}$$
$$20{,}2 - 2{,}36 \cdot 0{,}09 < T_{іст} < 20{,}2 + 2{,}36 \cdot 0{,}09$$

5.Кінцевий результат вимірювання температури Т у приміщенні записується у виді:

$$20.0\ ^0C < T_{іст} < 20{,}4\ ^0C; \quad P = 0{,}95$$

Задача 6. Виконаний ряд незалежних спостережень напруги:

№ спостереження …	1	2	3	4	5
U, мВ……………	3790	3805	3832	3781	3842

Припускаючи, що систематичною похибкою можна нехтувати, визначити оцінку істинного значення виміряної напруги U і середні квадратичні похибки методу вимірювання σ та результату вимірювання. Записати результат вимірювання.

Розв'язок

1. Скориставшись формулою

$$x_{іст} \approx \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

отримаємо

$$U_{іст} = \bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^{5} U_i}{5} = \frac{3790 + 3805 + 3832 + 3781 + 3842}{5} = 3810\ мВ$$

2. Для розрахунку середньої квадратичної похибки методу вимірювання використаємо формулу

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(U_i - \bar{U})^2}{n-1}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(3790-3810)^2 + (3805-3810)^2 + (3832-3810)^2 + (3781-3810)^2 + (3842-3810)^2}{5-1}}$$
$$= 26{,}3\ мВ$$

3. Для розрахунку середньої квадратичної похибки результату вимірювання скористаємося формулою:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{26{,}3}{\sqrt{5}} = 11{,}7\ \text{мВ} \approx 12\ \text{мВ}$$

4. За замовчуванням довірча ймовірність P =0,68. Отже, $t(n, P)$ = 1,0 і результат вимірювання записується у вигляді:

$$U_{іст} = \bar{U} \pm \Delta\, U = 3810\ \pm 12\ \text{мВ}; \quad P = 0{,}68$$

Задача 7. Для трьох вимірювань випадкової величини отримані наступні результати:

середньоквадратичне відхилення: $\sigma_1 = 003;\ \sigma_2 = 0{,}02;\ \sigma_3 = 0{,}015;$

довірча ймовірність $P_1 = 0{,}95;\ \ P_2 = 0{,}97;\ \ P_3 = 0{,}99.$

Визначити, для якого з трьох вимірювань буде найменший довірчий інтервал

Розв'язок

1. Значення довірчого інтервалу визначається наступним виразом:

$$\varepsilon = \pm\, t_i \cdot \sigma_i$$

2. Для наведених в умові задачі даних, скориставшись таблицею додатку 3, отримуємо :

$$t_1 = 1{,}96;\ \ t_2 = 2{,}17;\ t_3 = 2{,}58$$

3. Використовуючи отримані значення, визначаємо відповідні довірчі інтервали:

$$\varepsilon_1 = \pm t_1 \cdot \sigma_1 = \pm 1{,}96\ \cdot 0{,}03\ =\ \pm 0{,}0588$$
$$\varepsilon_2 = \pm t_2 \cdot \sigma_2 = \pm 2{,}17\ \cdot 0{,}03\ =\ \pm 0{,}0434$$
$$\varepsilon_3 = \pm t_3 \cdot \sigma_3 = \pm 2{,}58\ \cdot 0{,}03\ =\ \pm 0{,}0387$$

Бачимо, що найменший довірчий інтервал отримується для третього вимірювання

Задача 8. При 10-ти вимірюваннях довжини металічного стержня отримані слідуючи результати: 358,59; 358,53; 358,52; 358,51; 358,49; 358,48; 358,46; 358,45; 358,42; 358,43 мм.

Визначити імовірність того, що похибка середнього значення не вийде за границі ± 0,05 мм.

Розв'язок.

1. Знаходимо

$$x_{іст} \approx \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 358{,}50 \text{ мм}$$

2. Знаходимо

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 0{,}023$$

3. Знаходимо СКВ середнього арифметичного значення:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{n\,(n-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}023}{10 \cdot 9}} \approx 0{,}016$$

4. Користуючись виразом для довірчого інтервалу:

$$\varepsilon = t_c \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

де t_c - коефіцієнт Стьюдента для заданої кількості вимірювань n і заданій довірчій ймовірності P, знаходимо його значення

$$t_c = \frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{0{,}05}{0{,}016} \approx 3$$

5. Користуючись таблицею додатку 4, знаходимо для $n = 10$ і $t_c = 3$, ймовірність того, що похибка середнього значення не вийде за границі $\pm$ 0,05 мм:

$$P = 0{,}985$$

Задача 9. Виконано 5 вимірювань діаметру D циліндричного стрижня за допомогою штангенциркуля. Отримані наступні результати, в мм: 34,50; 34,65; 34,30; 34,70; 34,55. Визначити похибки вимірювання та записати результат вимірювання.

Розв'язок

1. Визначаємо середнє арифметичне значення діаметру:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} = \frac{34{,}50 + 34{,}65 + 34{,}30 + 34{,}70 + 34{,}55}{5} = 34{,}54 \text{ мм}$$

Отримане значення дає найбільш ймовірне значення діаметру D.

2. Для визначення випадкової похибки $\Delta D_{вип.}$ знайдемо середню квадратичну похибку середнього арифметичного з 5-ти вимірювань:

$$\Delta D_{вип.} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(16+121+576+256+1)\cdot 10^{-4}}{5\cdot 4}} = \sqrt{\frac{970\cdot 10^{-4}}{20}} =$$

$$= 0{,}069 \approx 0{,}070\,\text{мм}$$

3. Ціна поділки шкали штангенциркуля дорівнює 0,05 мм. Отже, систематична похибка дорівнює половині поділки шкали: $D_{сист.}$ = 0,0025 мм

4. Таким чином, повна абсолютна похибка вимірювання діаметру стрижня визначається виразом:

$$\Delta D = \sqrt{\Delta D^2{}_{вип.} + \Delta D^2{}_{сист.}} = \sqrt{(0{,}070)^2 + (0{,}0025)^2} = 0.070 \text{ мм}$$

5. Результат вимірювання записується у вигляді:

$$D = \overline{D} \pm \Delta D = (34{,}54 \pm 0{,}07)\,\text{мм}$$

6. Відносна похибка дорівнює:

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta D}{\overline{D}} = \frac{0{,}07}{34{,}54} = \pm 0{,}004$$

Відносна похибка є безрозмірною величиною. Вона показує, яку частину вимірюваної величини складає абсолютна похибка

Часто відносну похибку визначають у відсотках:

$$\varepsilon = \frac{\Delta D}{\overline{D}} 100\,\% = \pm 0{,}004\cdot 100\,\% = 0{,}4\,\%$$

Задача 10. Значення опору R було виміряно 8 разів. При цьому отримані наступні результати:

R_1= 116,2 Ом; R_2= 118,2 Ом; R_3= 118,5 Ом; R_4= 117,0 Ом; R_5 = 118,2 Ом; R_6= 118,4 Ом; R_7 = 117,8 Ом; R_8 = 118,1 Ом.

Визначте інтервал, в якому знаходиться значення вимірюваного опору, з довірчою ймовірністю P = 0,99.

Розв'язок

1. Знаходимо середнє арифметичне значення опору

$$\overline{R} = \frac{R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+R_6+R_7+R_8}{8} =$$

$$= \frac{116{,}2+118{,}2+118{,}5+117{,}0+118{,}2+118{,}4+117{,}8+118{,}1}{8} = 117{,}8 \text{ Ом}$$

2. Визначаємо абсолютні похибки окремих вимірювань

$\Delta_1 = R_1 - \overline{R} = -1{,}6$ Ом; $\Delta_2 = R_2 - \overline{R} = 0{,}4$ Ом;
$\Delta_3 = 0{,}7$ Ом; $\Delta_4 = -0{,}8$Ом; $\Delta_5 = 0{,}4$Ом; $\Delta_6 = 0{,}5$ Ом; $\Delta_7 = 0{,}0$ Ом; $\Delta_8 = 0{,}3$Ом

3. Визначаємо середню квадратичну похибку результату вимірювань (середню квадратичну похибку середнього арифметичного)

$$\sigma_{\overline{R}} = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \Delta_5^2 + \Delta_6^2 + \Delta_7^2 + \Delta_8^2}{n(n-1)}} =$$

$$\sqrt{\frac{(-1{,}6)^2 + 0{,}4^2 + 0{,}7^2 + (-0{,}8)^2 + 0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 0{,}0^2 + 0{,}3^2}{8 \cdot 7}} = 0{,}29 \text{ Ом}$$

4. Для того, щоб визначити інтервал, в якому знаходиться значення виміряного опору з довірчою ймовірністю 0,99 (тобто довірчий інтервал), по таблиці знаходимо коефіцієнт Ст'юдента для $P = 0{,}99$ та $n = 8$. Він дорівнює $t_n = 3{,}5$.

5. Отже кінцевий результат має вигляд:

$$R = \overline{R} \pm t_n \cdot S_{\overline{R}} = 117{,}8 \text{ Ом} \pm 3{,}5 \cdot 0{,}29 \text{ Ом} = 117{,}8 \pm 1{,}0 \text{ Ом}$$

6. Визначимо довірчий інтервал при довірчій ймовірності $P = 0.5$ та $n = 8$. Коефіцієнт Ст'юдента для $P = 0{,}5$ та $n = 8$ дорівнює $t_n = 0{,}71$.

Отже довірчий інтервал складає

$$\varepsilon_R = \pm t_n \cdot S_{\overline{R}} = \pm\ 0{,}71 \cdot 0{,}29 = \pm\ 0{,}2 \text{ Ом.}$$

7.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 1. При багатократному вимірюванні сили F отримані значення в Н: 403; 408; 410; 405; 406; 398; 496; 404. Знайти довірчі межі істинного значення сили з ймовірністю Р = 0,95.

Задача 2. При багатократному вимірюванні сили електричного струму отримані значення в А: 0,8; 0,85; 0,8; 0,79; 0,82; 0,78; 0,79; 0,8; 0,84. Знайти довірчі межі істинного значення сили струму з ймовірністю Р = 0,99.

Задача 3. В результаті 30 рівноточних вимірювань температури знайдено середньоквадратичне відхилення 8,7 ºС. Припускаючи нормальний закон розподілу, знайти випадкову похибку з ймовірністю 0,99.

Задача 4. При багатократному вимірюванні довжини балки L отримані значення в мм: 90,3; 90; 89,8; 89,9; 90,4; 90; 90,3; 89,1; 90,5; 90,4; 90. Знайти довірчі межі істинного значення довжини з ймовірністю Р = 0,95.

Задача 5. Оцінити випадкову похибку вимірювання опору з довірчою ймовірністю 99,5 %, якщо при рівноточних вимірюваннях були отримані наступні результати: 46,43; 46,49; 46,42; 46,52; 46,38; 46,40; 46,51 Ом. Розподіл випадкової похибки вважати нормальним.

Задача 6. При багатократному вимірюванні температури об’єкта були отримані наступні значення в °С: 40,4; 41,0; 40,2; 40,0; 43,5; 42,7; 40,3; 40,4; 40,8 °С. Знайти довірчі межі істинного значення температури з ймовірністю Р = 0,99.

Задача 7. Прилад для вимірювання довжини хвилі атестується за стандартним джерелом λ = 546,07 нм. Прилад при трьох вимірюваннях дав покази: 546,01 нм, 542,20 нм, 546,30 нм. Оцінити випадкову складову похибки при вимірюванні цим приладом з рівнем значимості 0,1.

Задача 8. При багатократному вимірюванні напруги електричного струму отримані результати в В: 263; 268; 273; 265; 267; 261; 266; 264; 267 В. Знайти довірчі межі істинного значення напруги з ймовірністю Р = 0,95.

Задача 9. Шестикратне зважування виробу з цінного матеріалу дало слідуючи результати: 72,361; 72,357; 72,352; 72,346; 72,344; 72,340г. Визначити довірчій інтервал для середнього при довірчій імовірності 0,99.

Задача 10. Для перевірки міцності сталі однієї плавки проводять випробування стандартних зразків на розтягування до руйнування. Відома дисперсія міцності зразків однієї плавки $\sigma_x^2 = 45$ МПа^2.

Скільки зразків необхідно використати у випробуваннях, щоб з довірчою ймовірністю 0,68 похибка цих випробувань не перевищила 2 МПа?

Задача 11. Вимірювання напруги десяти елементів живлення з однієї партії дали наступні результати U(В) = 9,2; 9,3; 9,1; 9,0; 9,4; 9,0; 8,9; 9,5; 9,1; 8,9. Визначити середнє значення напруги, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, середньоквадратичну похибку середнього арифметичного. Вважаючи, що напруги елементів живлення в одній партії розподілені по нормальному закону, визначити довірчий інтервал, в який попадають напруги елементів живлення з ймовірністю 0,8.

Задача 12. За результатами 11-ти вимірювань довжини було отримано середнє арифметичне значення. Визначити довірчий інтервал, в якому знаходиться істинне значення довжини, якщо СКВ результатів вимірювань $\sigma = 3{,}74$ мм, довірча ймовірність P = 0,9%.

Задача 13. Для $n = 6$ вимірювань середнє арифметичне значення вимірюваної величини $\bar{x} = 35{,}4$, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0{,}25$. Визначити довірчу імовірність $P_S(t)$, якщо $\bar{x}$ відрізняється від істинного значення $x_{іст.}$ на величину довірчого інтервалу $\varepsilon = \pm\, 0{,}2$, тобто має місце нерівність $35{,}2 \leq x_{іст.} \leq 35{,}6$.

Задача 14. При багатократному вимірюванні об’єму тіла отримані наступні значення в м^3: 0,3; 0,35; 0,3; 0,29; 0,32; 0,28; 0,29; 0,3; 0,34. Визначити довірчі границі істинного значення об’єму з імовірностю P = 0,95.

Задача 15. Визначити границі довірчого інтервалу, якщо задана довірча ймовірність P = 0,997 і середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0{,}003$.

Задача 16. Вимірювання пробивної напруги напівпровідникових діодів однієї партії дали наступні результати: $U_{проб}$ (В) = 270, 282, 294, 261, 275, 255, 289, 272, 280, 265, 276, 252, 285, 290, 260.

Розрахувати середнє значення пробивної напруги, його дисперсію, середньоквадратичне відхилення, середньоквадратичну похибку середнього арифметичного $\sigma_{\bar{x}}$. Як зміниться $\sigma_{\bar{x}}$, якщо прийняти до розгляду тільки перші десять результатів вимірювань?

Считая, что $U_{проб}$ распределено по нормальному закону, рассчитайте вероятность того, что $U_{проб}$ на 10% превышает паспортное значение U_0=250В.

Задача 17. Для оцінки партії гир із неї зробили вибірку обсягом n = 30 гир. При цьому в результаті вимірювань середнє значення їх маси дорівнювало X = 2000 г, а середнє квадратичне відхилення σ = ±4 г.

Скількм відсотків гир в партії буде забраковано при суцільній перевірці?

Задача 18. Виміряні значення опору розподілені по нормальному закону в інтервалі 155…165 Ом. З якою ймовірністю виміряне значення складе $R_{\text{вим}} = 160{\pm}2{,}5$ Ом?

Задача 19. Вимірювання крутизни вихідних ВАХ польових транзисторів із однієї партії дало наступні результати: S(мА/В)=1065; 1090; 1030; 1035; 1070; 1075; 1025; 1105; 1055; 1040.

Розрахувати середнє значення S, його дисперсію, середньоквадратичне відхилення. Вважаючи, що значення S розподілені по нормальному закону, номінальне значення крутизни S_0=1000, розрахувати передбачувану кількість транзисторів в партії з 10000 штук, у яких $S<S_0$.

Задача 20. При багатократному вимірюванні рівня рідини L в технологічному резервуарі отримані значення в м: 64; 64,25; 64,3; 64,4; 65; 64,5; 64,9; 63,7; 64,8. Знайти довірчі межі істинного значення рівня з ймовірністю P = 0,99.

Задача 21. Вимірювання опорів резисторів одного типономіналу дало наступні результати: R_i (кОм) = 14,4; 14,7; 14,5; 14,9; 14,7; 14,5; 14,2; 14,8; 14,6; 14,2; 14,5; 14,4; 14,8; 14,1; 14,3.

Розрахувати середнє значення опору, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, середню квадратичну похибку середнього арифметичного для всій серії вимірювань і для перших десяти значень. Порівняти між собою розраховані параметри. Вважаючи, що значення R_i розподілені по нормальному закону, визначити ймовірність знаходження R_i в інтервалі 14,3... 14,7 кОм.

Задача 22. Відомий результат вимірювання: 15.32 В ± 0.2% при кількості вимірювань 11, ймовірності 0,98 і нормальних умовах. Визначити середньоквадратичне відхилення результату вимірювання.

Задача 23. Вимірювання опорів резисторів одного типономіналу дало наступні результати: R(Ом)=135,5; 136,0; 134,5; 136,5; 136,0; 135,5; 137,0; 135,0; 136,5; 136,0.

Розрахувати середнє значення опору, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, середню квадратичну похибку середнього арифметичного. Вважаючи, що опори резисторів$_i$ розподілені по нормальному закону, визначити довірчий інтервал, в який попадають виміряні значення з ймовірністю P=0,95.

Задача 24. Чи належить результат вимірювання 0,16 мВ до ряду з 14-ти вимірювань з ймовірністю 0,95, в мВ: : -0,14; -0,12; -0,1; -0,08; -0,06; -0,04; -0,02; 0,00; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,10; 0,12 ?

Задача 25. Результат вимірювань в нормальних умовах дорівнює: 225,3 ± 1,5 мВ, довірча ймовірність0,95, число спостережень 19, умови вимірювання нормальні. Визначити середньоквадратичне відхилення результату вимірювання.

Задача 26. При вимірюванні опору резистора отриманий результат вимірювання 254,68 ± 0,93 Ом , P=0,96 , n=16, умови вимірювання нормальні. Оцінити границі похибки результату вимірювання цим же методом при 4-ох спостереженнях і при тій же ймовірності, якщо вважати, що похибка спричинена випадковими факторами і розподілена по нормальному закону.

Задача 27. Індуктивність зразкової котушки дорівнює: 2500 ± 2 мкГн, P=0,997. Виконаний ряд вимірювань індуктивності цієї котушки мостом, мГн: 2,515; 2,500; 2,520; 2,510; 2,515; 2,525; 2,520; 2,530; 2,515.

Визначити систематичну складову похибки моста і оцінити ступінь довіри до цього результату з ймовірністю 0,95.

Задача 28. Результат вимірювання ємності конденсатора має вид: C=26,54±0,28 нФ; P=0,98; F=1000 Гц; N=9; умови вимірювання нормальні. Визначити, з якою ймовірністю випадкова складова похибки буде знаходитися в межах ±0,5 нФ при кількості вимірювань, що дорівнює 3.

Задача 29. При повірці аналогового вольтметра за допомогою цифрового встановлювали на шкалі повіряємого приладу показ 10 В, і отримали ряд результатів: 10,50 В; 10,60 В; 10,30 В; 10,45 В; 10,75 В. Визначити систематичну складову похибки вимірювання аналогового засобу вимірювання.

Задача 30. В результаті двох паралельних визначень були отримані дані, що характеризують вміст хрому в еталоні: 4,50% и 4,70%. Оцінити істинний вміст хрому в еталоні. Надійність P=0,9.

Задача 31. При багатократному вимірюванні сили F отримані значення в Н: 403; 408; 405; 399; 410; 405; 406; 398; 406. Знайти довірчі границі істинного значення сили з ймовірністю P = 0,99.

Задача 32. При багатократному вимірюванні сили електричного струму I отримані значення в мА: 22,4; 22,1; 22,3; 22,2; 21,5; 21,7; 22,3; 21,4; 22,1. Знайти довірчі границі істинного значення сили струму з ймовірністю P = 0,99.

Задача 33. При багатократному вимірюванні тиску насосної станції отримані наступні результати: 12,38; 12,43; 12,32; 12,32; 12,48; 12,74; 12,45; 12,46 МПа. Припускаючи нормальний закон розподілу, визначити наявність «грубої» похибки в результатах вимірювань з рівнем значимості 0,01.

Задача 34. В результаті вимірювання опорів отримані наступні результати: R1 =200 Ом; R2 =100 Ом; R3 =600 Ом; R4 =500 Ом. Середньоквадратичні відхилення виміряних опорів відповідно дорівнюють 0,3; 0,2; 0,6; 0,3 Ом. Визначити середньоквадратичне відхилення опору R, якщо R = R1 + R2 + R3 + R4.

Задача 35. Виконано п’ять незалежних вимірювань однієї і тієї ж напруги U: U_1 =1944 мВ, U_2= 1961 мВ, U_3 =1951 мВ, U_4 =1955 мВ, U_5 =1967 мВ, $\Delta U = \pm 40$ мВ.

Знайти результат вимірювання $U_{іст}$ і довірчу ймовірність P того, що абсолютна похибка вимірювання не перевищує по модулю ΔU. Систематичною похибкою нехтувати.

Задача 36. Яке співвідношення необхідної кількості вимірювань повинно бути у приладів, якшо перший з них має СКВ $\sigma = \pm 1{,}5$ мм, а другий - $\sigma = \pm 0{,}5$ мм, щоб випадкова складова похибки результату багатократних вимірювань була однаковою?

Задача 37. Виконано 8 вимірювань маси і знайдено значення m = 24,137 г, $\sigma(x)$ = 0,02 г) та систематична похибка Δc = 0,08 г. Випадкова похибка розподілена по нормальному закону. Знайти виправлене значення m та його випадкову похибку.

Задача 38. В нормальних умовах отриманий ряд результатів із п’яти спостережень: 10 В; 10,5 В; 9,25 В; 9,6 В; 10,1 В. Визначити результат вимірювання, середнє квадратичне відхилення результату вимірювання і довірчий інтервал результату вимірювання при довірчій ймовірності 0,95.

РОЗДІЛ 8. ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ

8.1. Теоретичні відомості

У більшості випадків на практиці неможливо визначити шукану фізичну величину безпосередньо за приладами. У цьому випадку вдаються до непрямих вимірювань.

Непрямі вимірювання - це вимірювання, при яких значення вимірюваної величини Y визначають за результатами прямих вимірювань інших фізичних величин, наприклад, $x_1, x_2, ..., x_n$, з якими вона пов'язана відомою функціональною залежністю:

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (8.1)$$

Прикладом опосередкованого вимірювання є визначення опору R за результатами прямих вимірювань напруги U вольтметром, та струму I амперметром за законом Ома

$$R = \frac{U}{I}.$$

Для непрямих вимірювань вихідними даними є формула зв'язку та результати прямих вимірювань величин – аргументів. Цей зв'язок повинен бути відомим експериментаторові. Крім даних прямих вимірювань, параметрами (8.1) можуть виявитися інші величини, точно задані або отримані в інших вимірюваннях, – вони становлять набір вихідних даних.

Вираз (8.1), записаний у явному вигляді, називають **робочою формулою** і використовують як для оцінювання результату непрямого вимірювання Y, так і для оцінювання похибки вимірювання ΔY.

Для запису результату вимірювання необхідно оцінити похибку його визначення.

Похибка непрямого вимірювання залежить не тільки від похибок прямих вимірювань величин $x_1, x_2, ..., x_n$, але і від виду тієї математичної формули, за якою знаходиться фізична величина.

Це положення дійсне як для випадкових, так і для систематичних похибок.

Якщо вважати, що систематичні похибки вимірювань величин $x_1, x_2, ..., x_n$ виключені, а величини $x_1, x_2, ..., x_n$ виміряні з абсолютними похибками $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, то результат непрямого вимірювання величини $Y_{іст}$ також буде містити похибку ΔY, тобто матиме вигляд:

$$Y_{іст} = \bar{Y} \pm \Delta Y = f(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n) \qquad (8.2)$$

де $\bar{Y}$ - результат непрямого вимірювання (середнє значення вимірюваної величини Y);

$x_1, x_2, ..., x_n$ - результати вимірювання аргументів;

Δx_i - абсолютні похибки вимірювань цих аргументів.

При багаторазових прямих вимірюваннях за найбільш ймовірне (істинне, дійсне) значення вимірюваної фізичної величини необхідно приймати середнє арифметичне значення результатів ряду вимірювань.

Відповідно при багаторазових непрямих (опосередкованих) вимірюваннях, найбільш достовірний результат можна отримати, якщо у формулу зв'язку, будуть підставлені середні арифметичні значення цих аргументів. Тобто за істинне значення вимірюваної величини Y приймається її середнє значення:

$$\bar{Y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \qquad (8.3)$$

де $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$, ... – середні арифметичні (дійсні) значення величин – аргументів, що вимірюються прямо.

З виразу (8.2) випливає, що абсолютна похибка ΔY непрямого вимірювання дорівнює різниці:

$$\Delta Y = Y_{іст} - \bar{Y} = f(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

Виходячи з умови $\Delta x_1 \ll \bar{x}_1, \Delta x_2 \ll \bar{x}_2, \dots, \Delta x_n \ll \bar{x}_n$ функція f може бути із високою точністю задана, в межах точки із координатами істинних значень аргументів, розкладом у ряд Тейлора, в якому враховані тільки складові першої степені. Тоді істинний результат вимірювання дорівнює:

$$Y_{іст} = \bar{Y} \pm \Delta Y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \qquad (8.4)$$

де $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$, ... – середні арифметичні (дійсні) значення величин – аргументів, що вимірюються прямо;

Δx_i - відхилення результату вимірювання і-того аргументу від середнього його значення $\bar{x}_i$ яке приймається за дійсне (істинне) тобто, абсолютна похибка вимірювання і-того аргументу.;

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \cong \Delta Y$ – абсолютна похибка загального результату вимірювання;

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ - часткова похідна від функції f по x_i-тому аргументу;

В реальних умовах ця формула (8.4) дає дещо завищене значення похибки ΔY, оскільки при додаванні складових похибок можлива їхня часткова взаємна компесація. Кращі результати дає середньоквадратичне підсумовування похибок:

$$\Delta Y \cong \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2}\,, \qquad (8.5)$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$ - часткова похибка результату непрямого вимірювання.

Однак варто твердо пам'ятати, що при безпосередніх розрахунках у вираз (8.5) необхідно підставляти похибки $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, знайдені для того самого значення довірчої ймовірності $P_{дов}$. Похибка непрямого вимірювання $\bar{Y}$ також буде відповідати цьому значенню довірчої ймовірності.

Відносна похибка опосередкованого (непрямого) вимірювання як випливає з (8.4) дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{\Delta Y}{\bar{Y}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)}{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)} \qquad (8.6)$$

8.2. Методичні вказівки до розв'язання задач

Опрацювання результатів непрямих вимірювань виконується в наступній послідовності.

1. Оскільки при непрямих вимірюваннях шукана фізична величина Y визначається через результати прямих вимірювань інших фізичних величин $x_1, x_2, ..., x_n$, функціонально пов'язаних з Y, то в першу чергу необхідно опрацювати результати прямих вимірювань величин $x_1, x_2, ..., x_n$. Процес обробки результатів прямих вимірювань був детально розглянутий у розділах 6 та 7. Основні його етапи наступні:

А). знаходимо середні арифметичні значення $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ результатів вимірювань величин $x_1, x_2, ..., x_n$ за формулою:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Б). визначаємо середні квадратичні відхилення середнього арифметичного $\sigma_{\bar{x}}$ кожної з величин $x_1, x_2, ..., x_n$ за формулою:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

2. Знаходимо абсолютні похибки результатів прямих вимірювань величин $x_1, x_2, ..., x_n$ за формулою:

$$\Delta x = t \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

де коефіцієнт t визначається за таблицею додатку 1, виходячи зкількості виконаних вимірювань n і заданої довірчої ймовірності $P_{дов}$.

3. Знаходимо середнє арифметичне значення $\bar{Y}$ через середні арифметичні значення $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ величин $x_1, x_2, ..., x_n$, користуючись рівнянням зв'язку

$$\bar{Y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n).$$

Отримане значення $\bar{Y}$ приймаємо за результат непрямого вимірювання. Але для повної характеристики результату вимірювання необхідно знайти довірчий інтервал Δ, в якому із заданою довірчою ймовірністю $P_{дов}$ знаходиться істинне значення вимірюваної величини $Y_{іст}$.

4. Для знаходження довірчого інтервалу необхідно спочатку знайти середньоквадратичну похибку результату непрямого вимірювання за формулою:

$$\sigma_{\bar{Y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{dx_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dx_2}\Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{dx_n}\Delta x_n\right)^2}$$

де $\frac{\partial f}{dx_1}, \frac{\partial f}{dx_2}, \ldots, \frac{\partial f}{dx_n}$ – часткові похідні функції f по прямо виміряним величинам $x_1, x_2, ..., x_n$;

$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ – абсолютні похибки вимірювань величин $x_1, x_2, ..., x_n$ відповідно.

5. Знаходимо довірчий інтервал Δ результату вимірювання величини Y за формулою:

$$\Delta Y = t \cdot \sigma_{\overline{Y}}$$

де коефіцієнт t визначається за таблицею додатку 1 при заданій довірчій ймовірності $P_{дов}$.

6. Кінцевий результат непрямого вимірювання величини Y записується у вигляді:

$$Y_{іст} = \overline{Y} \pm \Delta Y; \quad P = P_{дов}$$

або

$$\overline{Y} - \Delta Y \leq Y_{іст} \leq \overline{Y} + \Delta Y \quad \text{при } P = P_{дов}$$

6.Відносна похибка непрямог вимірювання визначається за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\Delta Y}{\overline{Y}}$$

або

$$\varepsilon = \frac{\Delta Y}{\overline{Y}} \cdot 100\%.$$

7. Часто в умові задачі задаються середні арифметичні значення прямо виміряних величин $x_1, x_2, ..., x_n$ та їх абсолютні похибки $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. В такому випадку пункти 1 і 2 виключаються із розгляду, і одразу переходять до наступних пунктів обробки результату вимірювання.

Отримання робочої формули для похибки непрямих вимірювань іноді пов'язане з громіздкими перетвореннями, які можна суттєво спростити в тих випадках, коли функцію зв'язку можна прологарифмувати. Тоді для знаходження похибок непрямих вимірювань зручно скористатися правилами диференціального обчислення, а саме:

1. Нехай вид функціональної залежності визначається формулою $Y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, де Y - результат непрямого вимірювання, $x_1, x_2, ..., x_n$ - результати прямих вимірювань.

2. За визначенням відносна похибка дорівнює

$$\varepsilon = \frac{\Delta Y}{Y}$$

З іншого боку $\mathrm{dln(Y)} = \frac{\Delta Y}{Y}$.

Так як похибка ΔY завжди набагато менше вимірюваної величини Y, ($\Delta Y \ll Y$), то похибки можна вважати малими величинами. Це дає можливість заміни знака диференціала d на знак абсолютної похибки Δ. Тобто, можна записати:

$$\Delta \ln(Y) = \frac{\Delta Y}{Y}.$$

3. Із зіставлення наведених формул випливає, що

$$\varepsilon = \Delta \ln(Y),$$

тобто **відносну похибку непрямого вимірювання** можна знайти наступним шляхом:

1) логарифмування вихідного виразу $\ln Y = \ln f(x_1, x_2, ..., x_n)$;

2) подальше диференціювання $\mathrm{dln}Y = \mathrm{dln}f(x_1, x_2, ..., x_n)$;

3) заміна знака диференціала d на знак абсолютної похибки Δ;

4) заміна всіх знаків «мінус» на знаки «плюс» перед знаками абсолютних похибок Δ.

Абсолютна похибка визначається як $\Delta Y = \varepsilon Y$.

Приклад.

Для визначення густини циліндричного тіла застосовується формула:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h},$$

де m - маса тіла, D - діаметр, h - висота. Величини m, D, h визначаються в результаті прямих вимірювань. Густина ρ визначається з непрямих вимірювань. Для знаходження відносної похибки, виконуємо наступні дії:

1) знаходимо натуральний логарифм вихідного виразу $\rho = \frac{4m}{\pi D^2 h}$

$$\ln\rho = \ln 4 + \ln m - \ln\pi - 2\ln D - \ln h$$

2) виконуємо диференціювання: $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - 2\frac{dD}{D} - \frac{dh}{h}$,

3) замінюємо знак d на знак Δ: $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta D}{D} - \frac{\Delta h}{h}$,

4) перед усіма знаками Δ ставимо знаки плюс $\varepsilon = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h}$.

Далі можна знайти абсолютну похибку: $\Delta Y = \varepsilon \overline{Y}$,

де ΔY - абсолютна похибка непрямого вимірювання, $\overline{Y}$ - середнє значення шуканої величини, ε - відносна похибка.

Іноді в залежності від розрахункової формули зручніше спочатку знайти абсолютну похибку безпосередньо, не пов'язуючи її з відносною похибкою. Для цього використовують наступне правило для знаходження абсолютної похибки при непрямому вимірюванні:

1) диференціюють вихідний вираз;
2) замінюють знак диференціала d на знак похибки Δ ;
3) перед усіма знаками Δ ставлять знаки плюс.

Приклад. $A = a + b - c$

1) $dA = da + db - dc$
2) $\Delta A = \Delta a + \Delta b - \Delta c$,
3) $\Delta A = \Delta a + \Delta b + \Delta c$.

При запису результату непрямого вимірювання необхідно дотримуватися таких правил:

1. Величину абсолютної похибки ΔY необхідно заокруглити до двох значущих цифр, якщо перша з них одиниця або двійка, , і до однієї в усіх інших випадках (значущими цифрами називаються всі цифри, крім нулів, що стоять попереду числа зліва). Нулі всередині числа і в кінці є значущими.

2. Середнє арифметичне значення вимірюваної величини $\overline{Y}$ слід записати таким чином, щоб результат закінчувався в тому ж розряді, що і абсолютна похибка.

8.3. Приклади розв'язку задач

Задача 1. Визначити похибку сумарного опору 12-ти катушок опору, граничні похибки яких відомі:

2 катушки по 100±0,1 Ом

4 катушки по 10±0,05 Ом

6 катушок по 1±0,02 Ом.

Розв'язок.

1. В задачі приведені середні арифметичні значення окремих опорів, а також їх абсолютні похибки. Тому одразу переходимо до визначення сумарного опору:

$$R = 2R_1 + 4R_2 + 6R_3 = 2\cdot 100 + 4\cdot 10 + 6\cdot 1 = 246 \text{ Ом}.$$

2. Знаходимо середню квадратичну похибку непрямого вимірювання опору R:

$$\sigma_R(\Delta R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\sigma_{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\sigma_{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_3}\sigma_{R_3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(2\cdot 0{,}1)^2 + (4\cdot 0{,}05)^2 + (6\cdot 0{,}02)^2} \approx 0{,}3 \text{ Ом}$$

3. Отже $R = 246{,}0 \pm 0{,}3$ Ом;

4. Відносна похибка непрямого вимірювання:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_R}{R} = \frac{0{,}3}{246{,}0} \approx 0{,}0012 \text{ або } 0{,}12\ \%.$$

Задача 2. Знайти значення електричної енергії і середню квадратичну похибку її визначення по результатам вимірювання сили струму, опору і часу, для яких дано похибки вимірювань:

$$I = 10{,}230 \pm 0{,}015 \text{ А}$$
$$r = 11{,}68 \pm 0{,}01 \text{ Ом}$$
$$t = 405{,}2 \pm 0{,}1 \text{ с}$$

Розв'язок.

1. Для обчислення електричної енергії використаємо формулу:

$$A = I^2\, r\, t$$

2. Обчислимо СКВ результата непрямого вимірювання енергії А:

$$\sigma_A(\Delta A) = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial I}\sigma_I\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial r}\sigma_r\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\sigma_t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(2Irt\cdot\sigma_I\right)^2 + \left(I^2t\cdot\sigma_r\right)^2 + \left(I^2r\cdot\sigma_t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{A^2\left(\frac{2}{I}\cdot\sigma_I\right)^2 + A^2\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + A^2\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2} = A\sqrt{\left(\frac{2}{I}\cdot\sigma_I\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2} =$$

$$= A\sqrt{\left(\frac{2\cdot 0,015}{10,23}\right)^2 + \left(\frac{0,01}{11,68}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{405,2}\right)^2} = A\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt{943} \approx A\cdot 0,003$$

3. Тоді результат непрямого вимірювання енергії А має вигляд:

$$A = I^2r\,t \pm I^2r\,t\cdot 0,003 = I^2r\,t\,(1 \pm 0,003) =$$
$$= (10,230^2\cdot 11,68\cdot 405,2)\cdot(1 \pm 0,003) = 495300 \pm (495300\cdot 0,003) =$$
$$= 495300 \pm 1485\ \text{Дж} \approx 495,3 \pm 1,5\ \text{кДж}$$

Задача 3. Визначити місткість циліндричного баку і похибку його визначення по середнім результатам вимірювання його зовнішнього периметра $P_{\text{зовн.}}$, товщини стінок Δ і внутрішньої висоти циліндра $h_{\text{внутр.}}$:

$P_{\text{зовн.}} = 543,3 \pm 0,2$ см
$\Delta = 4 \pm 0,1$ мм $= 0,4 \pm 0,01$ см
$h_{\text{внутр.}} = 200 \pm 0,1$ см

Розв'язок.

1. Для розв'язку задачі скористуємося наступними формулами:

$$W = \frac{h\,\pi\,d^2_{\text{внутр.}}}{4} \qquad (W = h\pi R^2)$$

Для визначення внутрішнього діаметра:

$$d_{\text{внутр.}} = d_{\text{зовн.}} - 2\Delta = \frac{P_{\text{зовн.}}}{\pi} - 2\Delta.$$

2. Обчислимо похибку непрямого визначення внутрішнього діаметра за формулою:

$$\sigma_d(\Delta d) = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \cdot (0{,}2)^2 + 2^2 \cdot (0{,}01)^2} = \pm\, 0{,}067 \text{ см} \approx \pm\, 0{,}07 \text{ см}$$

Для внутрішнього діаметра отримаємо

$$d_{внутр.} = \left(\frac{543{,}3}{3{,}14} - 0{,}8\right) \pm 0{,}067 \approx 172{,}22 \pm 0{,}07 \text{ см}$$

3. Середня квадратична похибка визначення місткості визначається за формулою:

$$\sigma_W = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial h} \cdot \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial d_{внутр.}} \cdot \sigma_d\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi\, d^2_{внутр.}}{4} \cdot \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{2h\, \pi\, d_{внутр.}}{4} \cdot \sigma_d\right)^2} =$$

$$= \sqrt{W^2\left(\frac{1}{h} \cdot \sigma_h\right)^2 + W^2\left(\frac{2}{d_{внутр.}} \cdot \sigma_d\right)^2} = W\sqrt{\left(\frac{0{,}1}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{172{,}22} \cdot 0{,}07\right)^2} =$$

$$= 0{,}00095\, W \approx 0{,}001\, W$$

4. Таким чином місткість баку складає:

$$W = \frac{200 \cdot \pi\, (172{,}22)^2}{4}(1 \pm 0{,}001) = 27114 \pm 27 \text{ см}^3.$$

5. Відносна похибка непрямого вимірювання:

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{W} \cdot 100\% = \frac{0{,}001W}{W} \cdot 100\% = 0{,}1\%$$

Задача 4. Визначити абсолютну ΔR і відносну $\frac{\Delta R}{R}$ похибки непрямих вимірювань опору $R = \frac{U}{I}$ резистора, якщо покази вольтметра $U = 10\,В$, міліамперметра $I = 100$ мА. Границя вимірювання вольтметра 15В, клас точності 1,0; границя вимірювання міліамперметра 150 мА, клас точності 1,5.

Розв'язок.

1. Визначаємо опір R:

$$R = \frac{U}{I} = 100\,\text{Ом}$$

2. Визначаємо абсолютну похибку непрямого вимірювання R:

$$\Delta R = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\Delta I\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 \Delta U^2 + \left(\frac{U}{I^2}\right)^2 \Delta I^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{I^2 \cdot \Delta U^2 + U^2 \cdot \Delta I^2}{I^4}} = \sqrt{\frac{\left(100\cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot (0,15)^2 + 10^2 \cdot (2,25\cdot 10^{-3})^2}{\left(100\cdot 10^{-3}\right)^4}} = 2,7\ \text{Ом}$$

3. Результат напрямого вимірювання опору R резистора має вигляд:

$$R = 100,0 \pm 2,7\ \text{Ом}$$

4. Визначаємо відносну похибку:

$$\varepsilon_R = \pm\frac{\Delta R}{R}\cdot 100\% = \pm\frac{2,7}{100}\cdot 100\% = \pm\ 2,7\%$$

Задача 5. Сторони прямокутника a = 3,3 см і b = 5,2 см виміряні з абсолютною похибкою $\Delta(a) = \Delta(b) = 0,1$ см.

Знайти:

1. абсолютну похибку периметру та площі прямокутника.
2. відносну похибку периметру
3. записати результати визначення периметру та площі прямокутника..

Розв'язок

1. Визначаємо периметр прямокутника:

$$p = 2(a + b) = 2(3,3 + 5,2) = 17,0\ \text{см}$$

та площу прямокутника:

$$S = ab = 3,3\cdot 5,2 = 17,2\ \text{см}^2$$

2. Визначаємо абсолютну похибку розрахованого периметру:

$$\Delta p = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial b}\Delta b\right)^2} = \sqrt{2(0,1+0,1)} = \sqrt{2\cdot 0,2} = \sqrt{0,4} = 0,6\,\text{см}$$

та абсолютну похибку розрахованої площі:

$$\Delta S=\sqrt{(\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a)^2+(\frac{\partial S}{\partial b}\Delta b)^2}=\sqrt{(b\Delta a)^2+(a\Delta b)^2}=S\sqrt{(\frac{\Delta a}{a})^2+(\frac{\Delta b}{b})^2}=$$

$$=17{,}16\sqrt{(\frac{0{,}1}{3{,}3})^2+(\frac{0{,}1}{5{,}2})^2}=17{,}2\sqrt{0{,}0009+0{,}0004}=$$

$$=17{,}16\sqrt{0{,}0013}=17{,}2\cdot 0{,}04=0{,}69\ \text{см}^2\approx 0{,}7\text{см}^2$$

3. Визначаємо відносну похибку визначення периметру:

$$\varepsilon_p=\pm\frac{\Delta p}{p}\cdot 100\%=\pm\frac{0{,}6}{17{,}0}\cdot 100\%=\pm 3{,}5\%$$

та відносну похибку визначення площі:

$$\varepsilon_S=\pm\frac{\Delta S}{S}\cdot 100\%=\pm\frac{0{,}7}{17{,}2}\cdot 100\%=\pm 4{,}1\%.$$

4. Результат визначення периметру має вигляд:

$$p_{\text{іст.}}=p\pm\Delta p=(17{,}0\pm 0{,}6)\ \text{см}$$

площі:

$$S_{\text{іст.}}=S\pm\Delta S=(17{,}2\pm 0{,}7)\ \text{см}^2$$

Задача 6. Ребра прямокутного паралелепіпеда a = 4,3 см, b = 1,6 см, c = 2,8 см виміряні з абсолютною похибкою $\Delta a=\Delta b=\Delta c=0{,}1$ см. Визначити абсолютну та відносну похибки розрахунку об’єму паралелепіпеду.

Розв’язок

1. Визначаємо об’єм паралелепіпеду:

$$V=abc=4{,}3\cdot 1{,}6\cdot 2{,}8=19{,}3\ \text{см}^3$$

2. Визначаємо абсолютну похибку розрахунку об’єму паралелепіпеду:

$$\Delta V=\sqrt{(\frac{\partial V}{\partial a}\Delta a)^2+(\frac{\partial V}{\partial b}\Delta b)^2+(\frac{\partial V}{\partial c}\Delta c)^2}=\sqrt{(bc\Delta a)^2+(ac\Delta b)^2+(ab\Delta c)^2}=$$

$$=V\sqrt{(\frac{\Delta a}{a})^2+(\frac{\Delta b}{b})^2+(\frac{\Delta c}{c})^2}=19{,}264\sqrt{(\frac{0{,}1}{4{,}3})^2+(\frac{0{,}1}{1{,}6})^2+(\frac{0{,}1}{2{,}8})^2}=$$

$$=19{,}264\cdot\sqrt{0{,}0005+0{,}0039+0{,}0013}=19{,}3\cdot 0{,}08=1{,}5\ \text{см}^3$$

3. Визначаємо відносну похибку:

$$\varepsilon_V = \pm\frac{\Delta V}{V}\cdot 100\% = \pm\frac{1{,}5}{19{,}3}\cdot 100\% = \pm 7{,}8\%$$

4. Кінцевий результат має вигляд:

$$V_{іст.} = V \pm \Delta V = (19{,}3 \pm 1{,}5)\ см^3$$

Задача 7. При визначенні прискорення вільного падіння g за допомогою математичного маятника використовується формула:

$$g = \frac{4\pi^2 n^2 l}{t^2}$$

де l – довжина математичного маятника, яка вимірюється міліметровою лінійкою;

n – число коливань маятника;

t – час десяти коливань маятника, який визначається секундомером;

Після прямих вимірювань часу і довжини отримані наступні дані:

t = 14,72с; 14,74с; 14,75с; 14,73с 14,76с;

n = 10;

$l = 54{,}2\ см = 54{,}2\cdot 10^{-2}\ м$

Визначити результат вимірювання g.

Розв'язок

1. Визначаємо абсолютну випадкову похибку прямих вимірювань часу. Для цього знаходимо середнє арифметичне 5-ти вимірювань часу:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5} = \frac{14{,}72+14{,}74+14{,}75+14{,}73+14{,}76}{5} = 14{,}74с$$

2. Далі знаходимо випадкові абсолютні похибка окремих вимірювань часу:

$$|\Delta t_1| = |\bar{t} - t_1| = 14{,}74 - 14{,}72 = 0{,}02\ с$$

$$|\Delta t_2| = |\bar{t} - t_2| = 14{,}74 - 14{,}74 = 0\ с$$

$$|\Delta t_3| = |\bar{t} - t_3| = 14{,}74 - 14{,}75 = 0{,}01\ с$$

$$|\Delta t_4| = |\bar{t} - t_4| = 14{,}74 - 14{,}73 = 0{,}01\ с$$

$$|\Delta t_5| = |\bar{t} - t_5| = 14{,}74 - 14{,}76 = 0{,}02\ с$$

3. Знаходимо середню абсолютну випадкову похибку 5-ти вимірювань часу:

$$\Delta t_{вип.} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta t_i\right|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\left|\Delta t_i\right|}{5} = \frac{0{,}02+0+0{,}01+0{,}01+0{,}02}{5} = 0{,}01 \text{ с}$$

4. Оскільки час вимірюється секундоміром необхідно врахувати систематичну похибку $\Delta_{сист.}$, яка вноситься секундоміром. Вона дорівнює половині поділки шкали секундоміра:

$$\Delta_{сист.} = 0{,}005 \text{ с}$$

5. Таким чином абсолютна похибка вимірювання часу визначається як:

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_{вип.}^2 + \Delta t_{сист.}^2} = \sqrt{(0{,}01)^2 + (0{,}005)^2} = \sqrt{100 \times 10^{-6}} = 10 \cdot 10^{-3} = 0{,}01 \text{ с}$$

Отже

$$t = \bar{t} \pm \Delta t = (14{,}74 \pm 0{,}01) \text{ с}$$

6. Визначаємо абсолютну похибку вимірювання довжини маятника. Оскільки вимірювання довжини виконувалися один раз, за абсолютну похибку приймається похибка лінійки, тобто половина поділки її шкали:

$$\Delta l = \Delta l_{сист.} = \frac{1\text{мм}}{2} = 0{,}5\text{мм} = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}05 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Отже $$l_{іст.} = l \pm \Delta l_{сист.} = (54{,}20 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-2}\text{м}$$

7. Визначаємо середнє арифметичне значення g:

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 n^2 \bar{l}}{\bar{t}^2} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 10^2 \cdot 54{,}20 \cdot 10^{-2}}{14{,}74^2} = \frac{2137{,}56}{217{,}27} = 9{,}84 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

8. Визначаємо відносну похибку непрямого вимірювання g. Для цього беремо натуральний логарифм виразу $g = \dfrac{4\pi^2 n^2 l}{t^2}$:

$$\ln g = \ln 4 + 2\ln\pi + 2\ln n + \ln l - 2\ln t$$

Далі виконуємо диференціювання:

$$\frac{dg}{g} = 2\frac{d\pi}{\pi} + \frac{dl}{l} - 2\frac{dt}{t}$$

Замінюємо знак d на знак Δ:

$$\frac{\Delta g}{g} = 2\frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} - 2\frac{\Delta t}{t}$$

Знак „ – „ замінюємо на знак „ + „ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{g} = 2\frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta t}{t}$$

9. Визначаємо складові відносної похибки.

Число π = 3,141593... . Якщо обмежитися значенням π = 3,14, то відносна похибка

$$\varepsilon_\pi = \frac{\Delta\pi}{\pi}\cdot 100\% = \frac{3{,}141593\text{-}3{,}14}{3{,}14}\cdot 100\% = 0{,}05\%$$

Отже,

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{g}\cdot 100\% = (2\frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta t}{t})\cdot 100\% = (2\cdot 0{,}0005 + \frac{0{,}05}{54{,}20} + 2\frac{0{,}01}{14{,}74})\cdot 100\% =$$
$$= (0{,}001 + 0{,}0009 + 0{,}0014)\cdot 100\% = 0{,}33\%$$

10. Знаходимо абсолютну похибку вимірювання g:

$$\Delta g = \pm\frac{\varepsilon g}{100\%} = \pm\frac{0{,}339{,}84}{100\%} = \pm 0{,}032\frac{м}{с^2}$$

Заокруглюємо отриманий результат до однієї значущої цифри: $\Delta g = 0{,}03\frac{м}{с^2}$

Кінцевий результат має вигляд:

$$g = \bar{g} \pm \Delta g = (9{,}84 \pm 0{,}03)\frac{м}{с^2}$$

Задача 8. Опір резистора R вимірюється за допомогою міліамперметра та вольтметра. Результати прямих вимірювань напруги U та струму I:

U = (1,030 $\pm$ 0,050) В, P = 1

I = (10,35 $\pm$ 0.25) мА, P = 1

Опір вольтметра R_V = (10,0 $\pm$ 0.1) кОм. Записати результат непрямого вимірювання опору R.

Розв'язок

1. Визначаємо опір R:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1{,}030}{10{,}35\cdot 10^{-3}} = 0{,}099517\cdot 10^3 = 99{,}517\,Ом$$

2. В даному випадку маємо 3 складові похибки непрямого вимірювання опору R:
1. похибка прямого вимірювання напруги U;
2. похибка прямого вимірювання сили струму I;
3. похибка від взаємодії вольтметра з об'єктом вимірювання, тобто з резистором R. Ця похибка зумовлена тим, що підключення вольтметра змінює струм, який протікає через резистор R

3. Знаходимо граничні відносні похибки результатів прямих вимірювань напруги U та струму I:

$$\varepsilon_U = \pm\frac{\Delta U}{U}100\% = \pm\frac{0{,}050}{1{,}030}100\% = \pm 4{,}85\,\%$$

$$\varepsilon_I = \pm\frac{\Delta I}{I}100\% = \pm\frac{0{,}25}{10{,}35}100\% = 2{,}42\,\%$$

4. До підключення вольтметра струм, що протікає через резистор R дорівнює:

$$I_R = \frac{U}{R}$$

Підключення вольтметра зменшує струм, що протікає через резистор, який зараз визначається як

$$I'_R = I_R - I_V = \frac{U}{R} - \frac{U}{R_V} = \frac{UR_V - UR}{RR_V} = \frac{UR_V(1 - \frac{R}{R_V})}{RR_V} = \frac{U}{R}(1 - \frac{R}{R_V})$$

де I'_R - струм через резистор R після підключення вольтметра;
Отже, відносна похибка у визначенні сили струму I, зумовлена підключенням вольтметра, дорівнює:

$$\varepsilon_V = -\frac{R}{R_V}100\,\% = -\frac{99{,}517}{10^4}100\,\% = -0{,}995\,\%$$

Знак «-» означає зменшення сили струму через резистор.
З іншого боку:

$$\varepsilon_V = \pm\frac{\Delta R}{R}100\,\%$$

звідки абсолютна похибка визначення R, зумовлена підключенням вольтметра дорівнює:

$$\Delta R = \frac{\varepsilon_V R}{100\%} = -\frac{0{,}995 \cdot 99{,}517}{100\%} = -0{,}990 \text{ Ом}$$

Ця похибка є систематичною, і її можна виключити шляхом введення поправки в результат з протилежним знаком:

R = 99,517 + 0,990 = 100,507 Ом.

4. Відносна похибка, зумовлена відхиленням опору R_V вольтметра від номінального значення складає:

$$\varepsilon_{R_V} = \pm\frac{\Delta R_V}{R_V}100\% = \pm\frac{0,1}{10}100\% = 0,01\%$$

оскільки за умовою задачі $R_V = (10,0 \pm 0,1)$ кОм.

5. Таким чином, загальна відносна похибка непрямого вимірювання R має вигляд:

$$\varepsilon_R = \varepsilon_U + \varepsilon_I + \varepsilon_{R_V} = \mp\frac{\Delta R}{R}100\,\%$$

Звідси визначаємо ΔR:

$$\Delta R = \pm\frac{\varepsilon_R R}{100\%} = \pm\frac{(\varepsilon_U + \varepsilon_I + \varepsilon_{R_V})R}{100\%} = \pm\frac{(4,85 + 2,42 + 0,01)\cdot 99,517}{100\%} \approx \pm 7,24 \text{ Ом}$$

Отже, результат непрямого вимірювання опору R можна представити у вигляді:

R = (100,51 ± 7,24) Ом   при P = 1.

Задача 9. Опір R складається з паралельно включених опорів R_1 та R_2, математичні очікування і середні квадратичні похибки яких відомі:

$m_1 = 12$ Ом; $\sigma_1 = 1$ Ом

$m_2 = 15$ Ом; $\sigma_2 = 0,5$ Ом

Знайти математичне очікування m_R та середню квадратичну похибку σ_R опору R .

Розв'язок

1. При паралельному з'єднанні:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

2. Математичне очікування:

$$m_R = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{12\cdot 15}{12 + 15} = 6,67 \text{ Ом}$$

3. Оскільки вимірювання непрямі, то середня квадратична похибка σ_R опору R визначається за формулою:

$$\sigma_R = \sqrt{(\frac{\partial R}{\partial R_1}\sigma_1)^2 + (\frac{\partial R}{\partial R_2}\sigma_2)^2}$$

Знаходимо часткові похідні:

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = (\frac{R_2}{R_1 + R_2})^2 = (\frac{m_2}{m_1 + m_2})^2 = (\frac{15}{12+15})^2 = 0{,}31$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = (\frac{R_1}{R_1 + R_2})^2 = (\frac{m_1}{m_1 + m_2})^2 = (\frac{12}{12+15})^2 = 0{,}20$$

4. Таким чином, отримуємо:

$$\sigma_R = \sqrt{(\frac{\partial R}{\partial R_1}\sigma_1)^2 + (\frac{\partial R}{\partial R_2}\sigma_2)^2} = \sqrt{(0{,}31 \cdot 1)^2 + (0{,}20 \cdot 0{,}5)^2} = \sqrt{0{,}096 + 0{,}01} =$$
$$= \sqrt{0{,}106} = 0{,}33 \text{ Ом}$$

5. Отже, кінцевий результат має вигляд:

$$R_{іст.} = R \pm \sigma_R = (6{,}67 \pm 0{,}33) \text{ Ом}$$

Задача 10. Опір R виміряний за допомогою моста і розрахований за формулою:

$$R = \frac{R_2 R_3}{R_4}.$$

Знайти відносну середню квадратичну похибку ε_R результату вимірювання, якщо відносні середні квадратичні похибки $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ опорів R_2, R_3 та R_4 відповідно дорівнюють 0,02; 0,01 та 0,01%.

Розв'язок

1. Відносна середня квадратична похибка окремого опору R_i визначається виразом:

$$\varepsilon_i = \pm \frac{\sigma_i}{R_i} \cdot 100\%.$$

де σ_i - середня квадратична похибка вимірювання опору R_i.

2. Середня квадратична похибка результату непрямих вимірювань визначається виразом:

$$\sigma_R = \sqrt{(\frac{\partial R}{\partial R_2}\sigma_2)^2 + (\frac{\partial R}{\partial R_3}\sigma_3)^2 + (\frac{\partial R}{\partial R_4}\sigma_4)^2}$$

Знаходимо часткові похідні:

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{R}{R_2}; \qquad \frac{\partial R}{\partial R_3} = \frac{R_2}{R_4} = \frac{R}{R_3}; \qquad \frac{\partial R}{\partial R_4} = -\frac{R_2 R_3}{R_4^2} = -\frac{R}{R_4}$$

3. Таким чином маємо:

$$\sigma_R = \sqrt{(\frac{R}{R_2}\sigma_2)^2 + (\frac{R}{R_3}\sigma_3)^2 + (-\frac{R}{R_4}\sigma_4)^2} = R\sqrt{(\frac{\sigma_2}{R_2})^2 + (\frac{\sigma_3}{R_3})^2 + (\frac{\sigma_4}{R_4})^2} =$$

$$= \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2}$$

Звідси отримуємо:

$$\varepsilon_R = \pm\frac{\sigma_R}{R}\cdot 100\% = \pm\sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2} = \pm\sqrt{(0{,}02)^2 + (0{,}01)^2 + (0{,}01)^2} =$$

$$= \pm\sqrt{4\cdot 10^{-4} + 2\cdot 10^{-4}} = 0{,}025\%$$

Задача 11. При вимірюванні площі прямокутної деталі із сторонами А і В отримані наступні результати: $\overline{A}$ = 35,2 мм; $\overline{B}$ = 57,4 мм. Середні квадратичні похибки визначення сторін: $S_{\overline{A}}$ = 0,06 мм; $S_{\overline{B}}$ = 0,05 мм. Границі невиключених систематичних похибок, які мають рівномірний розподіл, складають $\theta_A = \theta_B = \pm$ 0,05 мм. Кількість вимірювань кожної зі сторін більше 30. Розподіл випадкової похибки не суперечить нормальному розподілу.

Визначити результат непрямих вимірювань та систематичну складову похибки вимірювання і записати результат вимірювання при довірчій ймовірності Р = 0,95.

Розв'язок

1. Визначаємо середнє значення площі, отримане в результаті непрямого вимірювання:

$$\overline{\Pi} = \overline{A}\,\overline{B} = 35{,}2\cdot 57{,}4 = 2020{,}48 \text{ мм}^2$$

2. Визначаємо середню квадратичну похибку результату непрямого вимірювання:

$$S_{\overline{\Pi}} = \sqrt{(\frac{\partial \Pi}{\partial A} \cdot S_{\overline{A}})^2 + (\frac{\partial \Pi}{\partial B} \cdot S_{\overline{B}})^2} = \sqrt{(\overline{B} \cdot S_{\overline{A}})^2 + (\overline{A} \cdot S_{\overline{B}})^2} =$$

$$= \Pi \sqrt{(\frac{S_{\overline{A}}}{\overline{A}})^2 + (\frac{S_{\overline{B}}}{\overline{B}})^2} = 2020{,}48 \sqrt{(\frac{0{,}06}{35{,}2})^2 + (\frac{0{,}05}{57{,}4})^2} =$$

$$= 2020{,}48 \sqrt{2{,}89 \cdot 10^{-6} + 0{,}81 \cdot 10^{-6}} = 2020{,}48 \cdot 1{,}92 \cdot 10^{-3} = 3{,}88\,\text{мм}^2$$

3. Визначимо невиключну систематичну похибку за формулою:

$$\theta(P) = k\sqrt{(\frac{\partial \Pi}{\partial A})^2 \theta_A^2 + (\frac{\partial \Pi}{\partial B})^2 \theta_B^2} = 1{,}4\sqrt{(\overline{B}\theta_A)^2 + (\overline{A}\theta_B)^2} = \, =$$

$$= 1{,}4\sqrt{(57{,}4 \cdot 0{,}05)^2 + (35{,}2 \cdot 0{,}05)^2} = 1{,}4\sqrt{11{,}33} = 4{,}72\,\text{мм}^2$$

Оскільки довірча ймовірність P = 0,99, число невиключних систематичних похибок m = 2, границі цих похибок однакові (l = 1) то у відповідності з графіком k = k(m, l) і таблиці П15 коефіцієнт k = 1,4.

4. За формулою

$$\Delta(P) = K[\varepsilon(P) + \theta(P)]$$

визначимо довірчий інтервал, який враховує випадкову та систематичну складові похибки вимірювання.

Оскільки

$$\varepsilon(P) = t_{0,99} \cdot S_{\overline{\Pi}} = 2{,}75 \cdot 3{,}88 = 10{,}67\,\text{мм}^2, \quad \lambda = \frac{\theta(P)}{S_{\overline{\Pi}}} = 1{,}22,$$

то

$$\Delta(0{,}99) = 0{,}82 \cdot [10{,}67 + 1{,}22 \cdot 3{,}88] = 0{,}82 \cdot 15{,}40 = 12{,}631\,\text{мм}^2$$

де коефіцієнт К = 0,82 взятий з таблиці.

5. Кінцевий результат можна записується у вигляді:

$$\Pi = \overline{\Pi} \pm \Delta\Pi = (2020{,}48 \pm 12{,}63)\,\text{мм}^2 \text{ при } P = 0{,}99.$$

8.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Визначити сумарний опір двох послідовно з’єднаних катушок опору при

a). $r_1 = 10 \pm 0{,}05$ Ом; $r_2 = 1 \pm 0{,}02$ Ом; $r = r_1 + r_2 = 11$ Ом
b). $r_1 = r_2 = 10 \pm 0{,}05$ Ом; $r = 2r_1 = 20$ Ом

Задача 2. Визначити сумарний опір двох паралельно з’єднаних котушок опору при
a). $r_1 = 10 \pm 0{,}05$ Ом; $r_2 = 1 \pm 0{,}02$ Ом;
b). $r_1 = r_2 = 10 \pm 0{,}05$ Ом;

Задача 3. Визначити похибку непрямого вимірювання радіуса R на універсальному мікроскопі УІМ-23 за результатами вимірювання довжини хорди a і стрілки сегмента B. Радіус R розрахувати за формулою

$$R = \frac{0{,}125\, a^2}{B} + 0{,}5\, B.$$

Задача 4. Опір R виміряний за допомогою моста і розрахований за формулою:

$$R = \frac{R_2 R_3}{R_4}.$$

Знайти відносну систематичну похибку $\varepsilon_{\text{сист.}}$ результату вимірювання, якщо відносні систематичні похибки $\varepsilon_{\text{сист.2}}$, $\varepsilon_{\text{сист.3}}$, $\varepsilon_{\text{сист.4}}$ опорів R_2, R_3 та R_4 відповідно дорівнюють 0,02; 0,01 та - 0,01%.

Задача 5. Складений резистор набраний з різного типу резисторів у відповідності до формули

$$R = 2R_1 + 3R_2 + 2R_3 + 4R_4$$

Попередні вимірювання дозволили встановити наступні середні значення опорів резисторів:

$$\overline{R}_1 = 10{,}0 \text{ Ом}, \quad \overline{R}_2 = 20{,}0 \text{ Ом}, \quad \overline{R}_3 = 15{,}0 \text{ Ом}, \quad \overline{R}_4 = 5{,}0 \text{ Ом}.$$

Середні квадратичні похибки всіх аргументів однакові і дорівнюють $S_0 = 0{,}1$ Ом, а границі невиключених систематичних похибок, розподілених рівномірно і симетрично навколо середнього значення опору, однакові і дорівнюють $\theta_0 = 0{,}2$ Ом. Число вимірювань кожного аргументу $n = 11$.

Визначити результат вимірювання составного резистора, випадкову і систематичну похибки та записати результат вимірювання при довірчій ймовірності P = 0,99.

Задача 6. Задано функцію $Y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$. Визначити середню квадратичну похибку та дисперсію результату непрямих вимірювань. Результати прямих вимірювань та їх похибки незалежні. Середні квадратичні похибки результатів вимірювань аргументів відомі і дорівнюють $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_m$.

Задача 7. Загальний опір ряду послідовно з'єднаних між собою резисторів визначається за формулою:

$$R_{\sum} = 2R_1 + 4R_2 + 6R_3.$$

Номінальні значення опорів резисторів та границі допустимих відхилень від них наступні:

$R_1 = 100{,}00$ Ом; $\Delta_1 = \pm\, 0{,}03$Ом

$R_2 = 10{,}00$ Ом; $\Delta_2 = \pm\, 0{,}02$Ом

$R_3 = 1{,}00$ Ом; $\Delta_3 = \pm\, 0{,}01$Ом

Відомо також, що розподіл дійсних значень опорів добре апроксимується (описується) нормальним розподілом, а вказані границі допустимих відхилень відповідають ймовірності P = 0,98.

Визначити загальний опір і довірчі границі з ймовірністю 0,98.

Задача 8. Для визначення об'єму паралелепіпеда зроблено n =10 вимірювань кожної з його сторін. Отримані наступні середні результат та середні квадратичні похибки (в мм):

$\bar{a} = 4{,}31; \quad S_a = 0{,}11$

$\bar{b} = 8{,}07; \quad S_b = 0{,}13$

$\bar{c} = 5{,}33; \quad S_c = 0{,}09$

Визначити похибку вимірювання.

Задача 9. Формула непрямих вимірювань $Y = (\frac{A}{B}) + C$. В результаті великої кількості вимірювань кожного з аргументів отримані настуnі дані:

$\overline{A} = 20{,}00; \quad \sigma_{\overline{A}} = 0{,}03; \quad \theta_A(P = 0{,}9) = 0{,}2$

$\overline{B} = 10{,}0; \quad \sigma_{\overline{B}} = 0{,}02; \quad \theta_B(P = 0{,}95) = 0{,}05$

$\overline{C} = 3{,}00; \quad \sigma_{\overline{C}} = 0{,}01; \quad \theta_C(P = 0{,}99) = 0{,}3$

де θ_A, θ_B, θ_C - невиключні систематичні похибки, визначені в своїх довірчих границях та симетрично розташовані навколо нуля.

Вважаючи, що розподіл результатів непрямих вимірювань не суперечить нормальному розподілу, визначити результат непрямих вимірювань, випадкову та систематичну похибки результату вимірювання та записати результат вимірювання при довірчій ймовірності Р = 0,95.

Задача 10. Розрахувати похибку $\Delta\rho$ при визначенні густини циліндра згідно формули $\rho = \dfrac{4m}{\pi \cdot h \cdot d^2}$.

Задача 11. Вимірювана величини W знаходиться за допомогою співвідношення $W = A\dfrac{x^4}{\sqrt{y}}$, А – константа.

Визначити похибку вимірювання величини W.

Задача 12. Вимірювання потужності Р в активному навантаженні опором R = 100 Ом ± 5 Ом визначається за допомогою вольтметра класу точності $\gamma = 1{,}5$ з границям вимірювання $U_V = 300\,В$.

Оцінити виміряну потужність та похибку, якщо прилад показав U = 240 В.

Задача 13. Обчислити абсолютну інструментальну похибку вимірювання опору R за результатами прямих вимірювань струму і напруги, якщо покази вольтметра U = 120 В, а амперметра I = 0,5 А. Верхні границі вимірювання вольтметра 250 В, амперметра 2 А. Клас точності вольтметра 1,0, амперметра 0,5.

Задача 14. В умовах задачі 13 обчислити методичну складову похибки результату вимірювання, вважаючи засоби вимірювання неідеальними. Внутрішеій опір амперметра менше 5 Ом, а вольтметра дорівнює 100 кОм.

Задача 15. Прикладаючи декалька разів лінійку з максимальною довжиною 1 м, отримали результат вимірювання довжини кімнати 7,54 м. Оцінити похибку вимірювання, нехтуючи інструментальною складовою.

Задача 16. Знайти об’єм деталі та його похибку, якщо вимірювання ребер прямокутного паралелепіпеда дали наступні результати:

х = (58,3 ± 0,5) мм

у = (14,2 ± 0,5) мм

z = (44,4 ± 0,5) мм

Задача 17. Визначити результат і похибку непрямого вимірювання потужності за результатами прямих вимірювань струму і опору з незалежними випадковими похибками, розподіленими по нормальному закону: I =(15,0±0,02) A; P=0,99; R=(10,0±0,8) Ом; P=0,9.

Результат записати у стандартній формі для P= 0,96.

Задача 18. При багатократних вимірюваннях незалежних величин напруги U та струму I отримані 18 результатів спостережень. Ці результати після внесення поправок наведені у таблиці. Визначити електричний опір R = f (U, I), якщо R = U/I.

Результати вимiювань U и I:

Напруга U, мВ

U1 U2 U3 U4 U5 U6 U7 U8 U9 U10 U11 U12 U13 U14 U15 U16 U17 U18
483 484 484 485 485 482 484 484 483 485 485 485 484 484 483 481 481 494

Струм I, мкА

I1 I2 I3 I4 I5 I6 I7 I8 I9 I10 I11 I12 I13 I14 I15 I16 I17 I18
482 483 483 483 483 482 482 484 483 486 485 484 484 484 483 484 484 493

Задача 19. Опір ділянки кола вимірювався методом амперметра-вольтметра. Покази вольтметр класа точності K_V =1,5 і границею вимірювань $U_{гр}$ = 15 В склали U = 9,5; 9,2; 9,4; 9,9; 10,0; 9,7 В. Відповідні покази амперметра: I =14,9; 15,5; 15,2; 14,5; 14,1; 15,0 мА. Клас точності амперметра K_A = 0,5, границя шкали $I_{гр}$ = 20 мА. Розрахувати середнє значення опору, відносні похибки вимірювання струму, напруги иа опору.

Задача 20. Потужність постійного струму вимірювалася методом амперметра-вольтметра. Покази вольтметра і амперметра склади відповідно:
U(В)=6,4; 6,2; 6,3; 6,5; 6,4; 6,3;
I(мА)=125; 129; 140; 135; 133; 130.

Розрахувати середнє значення потужності і відносні похибки вимірювання струму, напруги і потужності.

Задача 21. Визначити значення споживаної електричної енергії у колі, оцінити похибку її вимірювання і записати результат, якщо струм у колі дорівнює (10,230 ± 0,015) А; опір складає (11,08 ± 0,01) Ом; час дорівнює(405,2 ± 0,1) с. Границі похибки вказані для ймовірності 0,95 при нормальних умовах.

Задача 22. На базі прямих вимірювань струму і напруги отримані результати: 0,50 ± 0,02 А; 150 В ± 5% при довірчій ймовірності 0,95 в нормальних умовах вимірювання. Визначити споживану потужність і записати результат вимірювання.

Задача 23. Для визначення частои використаний вимірювач періоду. Оцінити абсолютну і відносну похибки вимірювання частоти, якщо період дорівнює 25 мкс, а абсолютна похибка його вимірювання дорівнює ± 1 мкс при довірчій ймовірності 0,997 і нормальних умовах вимірювань. Записати результат у відповідності до стандарту.

Задача 24. За допомогою вольтметра в нормальних умовах виконали вимірювання добротності згідно виразу $Q = U_2 / U_1$, де U_2 = 230 В, U_1 = 1 В. Оцінити абсолютну і відносну похибки вимірювання добротності, якщо установка вхідної напруги U_1 здійснена з відносною похибкою, границя якої дорівнює 2,5 %, а вимірювання вихідної напруги в контурі при резонансі U_2 виконано з абсолютною похибкою ± 4 В в нормальних умовах з ймовірністю 0,997.

Задача 25. Потужність постійного струму P вимірювалася непрямим методом, шляхом багатократних вимірювань напруги U і струму I з урахуванням залежності P=U·I. Струм I і напруга U вимірювалися прямим методом n = 15 разів. В процесі обробки результатів прямих вимірювань отримані: середні арифметичні значення $\bar{U}$ = 25,2 В и $\bar{I}$= 2,837 мА; оцінка середніх квадратичних відхилень $\sigma_{\bar{U}}$ = 0,38 В і $\sigma_{\bar{I}}$ = 0,028 мА.

Визначити випадкову похибку результату непрямого вимірювання з довірчою ймовірністю $P_д$ = 0,95 і записати результат вимірювання згідно стандарту.

Задача 26. Опір резистора R_x визначався шляхом багатократних вимірювань падіння напруги на ньому U_x та падіння напруги U_o на послідовно з'єднаному з ним зразковому резисторі R_0=5 кОм з наступним розрахунком за формулою $R_x = R_0 \frac{U_x}{U_0}$. При обробці результатів прямих вимірювань U_x та U_o отримані середні арифметичні значення $\overline{U}_X$=32,5 В, $\overline{U}_0$=2 В; оцінка середніх квадратичних відхилень $\sigma_{\overline{U}X}$ = 0,19 В и $\sigma_{\overline{U}0}$ = 0,036 В. Кількість прямих вимірювань n=40.

Оцінити випадкову похибку результату непрямого вимірювання опору з довірчою ймовірністю $P_Д$ = 0,99 і записати результат вимірювання згідно стандарту.

$\sigma_{\bar{U}_з}$

Задача 27. Напруга в електричному колі U визначається шляхом багатократних вимірювань U_1, U_2, U_3 на ділянках цього кола з наступним розрахункам за формулою $U = U_1 + U_2 + U_3$. Скориставшись результатами обробки прямих вимірювань напруги, наведеними в таблиці, продовжити обробку результатів непрямого вимірювання U і, оцінивши його випадкову похибку. Записати результат вимірювання.

n	U_1, B	U_2, B	U_3, B	$\sigma_{\overline{U}_1}$,B	$\sigma_{\overline{U}_2}$, B	$\sigma_{\overline{U}_3}$, B	$R_{дов}$
35	12,45	0,347	5,320	0,30	0,023	0,085	0,95

n – число спостережень кожної з величин в процесі прямих вимірювань.

Задача 28. Потужність постійного струму P виміряно непрямим методом шляхом багатократних вимірювань напруги U і струму I з наступним розрахунком за формулою $P=U\cdot I$. Скориставшись результатами обробки прямих вимірювань, наведеними в таблиці, продовжити обробку результатів непрямого вимірювання P, оцінивши його випадкову похибку. Записати результат вимірювання.

n	U, B	I, мА	$\sigma_{\overline{U}}$,B	$\sigma_{\overline{I}}$, мА	$R_{дов}$
15	8,46	0,521	0,14	0,021	0,95

n – число спостережень кожної з величин в процесі прямих вимірювань.

Задача 29. Метод визначення масовоъ долы золи W(%) заснований на мінералізації (сжиганні) навески проби масою m_0 у тиглі при температурі (825±25) °С.

Вміст золи знаходять за формулою

$$W = \frac{m_1 - m_2}{m_0} \cdot 100\%,$$

де m_1 – маса тиглю із золою, г; m_2 – маса порожнього тиглю, г.

Знайти W і похибку визначення вмісту золи ΔW, якщо відомі результати зважування m_1 = 23,3046 г, m_2, m_3 = 26,3882 (маса тигля с пробою), похибки $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3 = \Delta m = 0{,}1$ мг.Маса порожнього тигля $m_2 =$ 23, 2446 г. Мас навески m_0 отримана з виразу $m_0 = m_3 - m_2$.

Задача 30. Для визначення потужності, споживаної нагріваючим приладом, виконали вимірювання напруги U = 205 В та опору R = 37,6 Ом електричного кола приладами з допустимою похибкою ε = ±1,5 %. Знайти потужність Р, абсолютну ΔР і відносну ε_P похибки результату непрямого вимірювання.

Задача 31. Визначити величину максимальної абсолютної похибки для кількості теплоти, що виділяється на опорі при пропусканні через нього стуму. Величина опору R=1800 Ом; клас точності 5; сила струму I=(100,0±1) мА; час пропускання струму t=100 с; похибка секундоміра 0,5 с.

Задача 32. Знайти абсолютну похибку визначення опору резистору методом двох приладів, якщо покази вольтметра дорівнюють 40 В при границі вимірювань 50 В і класу точності приладу 4,0; покази міліамперметра – 200 мА при границі вимірювань 300 мА і класу точності 1,0.

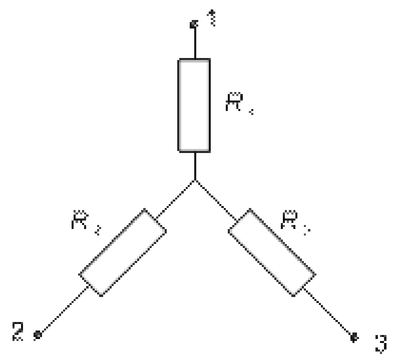
Задача 33. Визначити величину похибки для напруги на ділянці кола у відповідності з формулою U = U1+U2 – R·I, якщо U1 = (150 ± 1) В; U2 = (80 ± 0,5) В; R = (500 ± 10) Ом; I = (50 ± 1) мА.

Задача 34. Для визначення опорів R_1 та R_2 виміряли опір при їх послідовному $R_{пос}$ = 10 кОм і при паралельному $R_{пар}$ = 2,5 кОм включенні. Чому дорівнюють опори R_1 та R_2 і до якого виду відносяться ці вимірювання?

Задача 35. Відрізок дроту довжиною l = 1м і діаметром d = 0,1мм має електричний опір R = 51 Ом. З якого матеріалу виготовлений дріт і до якого виду належать ці вимірювання?

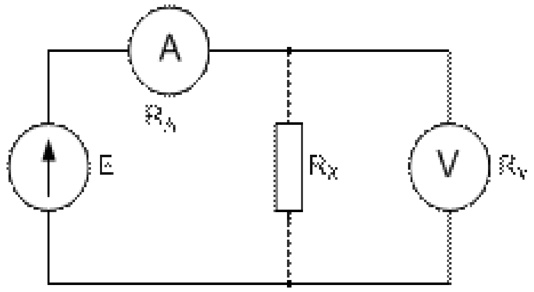
Задача 36. Для ідентифікації матеріалу, з якого виготовлений циліндр, штангенциркулем виміряли його діаметр d = 1 см і висоту h = 5 см. З якого матеріалу зроблений циліндр, якщо його маса, визначена зважуванням, дорівнює m = 0,0349 кг? До якого виду належать ці вимірювання?

Задача 37. Для визначення опору обмоток електродвигуна, включених зіркою (рис), були виміряні опори між зажимами обмоток $R_{12} = R_{23} = R_{31} =$ $= 10$ Ом.

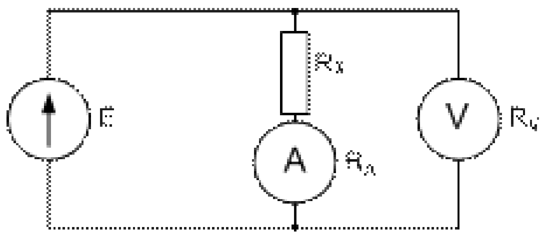


Чому дорівнюють опори обмоток R_1, R_2, R_3 і до якого виду належать ці вимірювання?

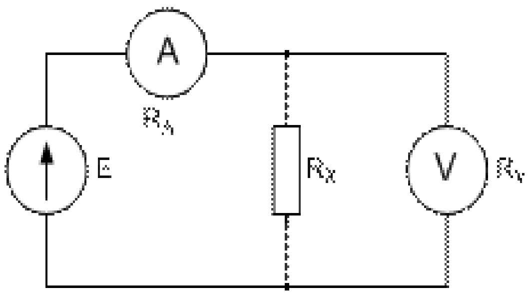
Задача 38. При непрямому вимірюванні опору R_x сталому струму (рис.) отримані покази амперметра I_A = 130,4 мА і вольтметра U_V = 52,3 В. Визначити відносну і абсолютну похибки методу, якщо вольтметр має вхідний опір R_V = 10 кОм.



Задача 39. При непрямому вимірюванні опору постійному струму R_x (рис.) покази амперметра і вольтметра відповідно дорівнюють I_A = 345 мА, U_v = 5,45 В. Визначити абсолютну і відносну похибки методу, якщо амперметр має опір R_A = 0,35 Ом.



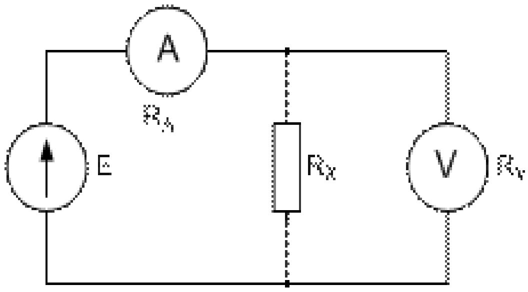
Задача 40. При непрямому вимірюванні потужності P_x, що споживається навантаженням R_x на постійному струмі, використовується схема, показана на рисунку.



Покази приладів, отримані при вимірюванні U_V = 34,5 В, I_A = 210 мА. Визначити абсолютну і відносну похибки методу, якщо опори приладів відповідно дорівнюють: вольтметра R_V= 4000 Ом, амперметра R_A = 2,5 Ом.

Задача 41. Необхідно виміряти опір R_X = 10 Ом за допомогою вольтметра з опором R_V = 100 Ом і амперметра з опором R_A = 1 Ом. Яку схему з наведених на рис.1та рис.2 потрібно вибрати, щоб отримати меншу похибку методу?

Задача 42. За допомогою наведеної схеми методом амперметра-вольтметра визначається опір R . Параметри амперметра: границя шкали I_{max} = 0,2 А; клас точності γ_A =2,0; покази амперметра I =0,12 А. Параметри вольтметра: границя шкали U_{max} =20 В; клас точності γ_V =1,5; покази вольтметра U =15 В. Розрахувати абсолютну і відносну похибки визначення опору.



Задача 43 Знайти вираз для обчислення абсолютної і відносної похибки наступних величин:

а) $f = a(mb + nc)^3 + кас$;

б) $f(x,y,z) = \dfrac{2x^2 + 3y}{7z} + 6xy$;

в) $F = b + \dfrac{ka - nc^4}{mab}$; k,m,n - постійні, a, b, c -величини, що виміряні з похибками Δa, Δb і Δc відповідно.

Задача 44. Знайти вираз для обчислення абсолютної і відносної похибки величини w = f(x,y,z), яка зв'язана з величинами x, y, z співвідношенням:

1) $w = axy^3 + bz^4$;

2) $w = \dfrac{ax^2z}{cy^2}$;

3) $w = bx^5 = - c\sqrt{y}$;

4) $w = axyz$;

5) $w = \dfrac{axy}{z}$

a, b, c - постійні, x, y, z виміряні з похибками Δa, Δb і Δc відповідно.

Задача 45 Обробити експериментальні дані при визначенні прискорення вільного падіння, використовуючи формулу шляху рівноприскореного руху: $g = \dfrac{2h}{t^2}$

де t - час падіння кульки, h - висота, які повинні пути експериментально визначені.

В результаті прямих вимірювань отримано наступні дані:

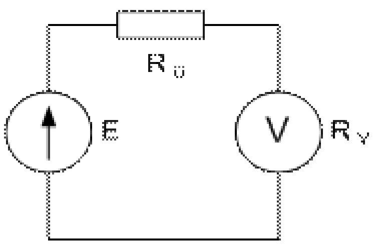
h_1 = 209,8 см. h_2 = 210,2 см, h_3 = 210,1 см. h_4 = 209.9 см.

t_1 = 0.653 с, t_1 == 0.655с, t_1 = 0.652 с, t_1 =0,663 с, t_1 = 0.653 с, t_6 = 0.640 с, t_7 = 0.648 с.

Невиключені систематичні похибки θ_h = l мм. θ_t = 0.002 с.

Задача 46. Знайти середнє значення та обчислити похибку визначення швидкості течії рідини в циліндричній трубі по вимірюванням її діаметру d та часу t заповнення деякого об'єму V згідно формули $v = \dfrac{4V}{\pi d^2 t}$. Результати прямих вимірювань представлені у виді: $\bar{V}$ = 500ñì ^{3}; S($\bar{V}$) = 0.034 ñì ^{3}; n=5; θ_V = 0,5 ñì ^{3}; D = 1 см, S(D) = 0,05 см, n = 10, θ_d = 0,1 мм; t=25 с, S(t)=0.13 с, n=5; θ_t =0,1с.

Задача 47. Для вимірювання ЕРС E =2,5 В джерела з внутрішнім опором R_0 = 10 Ом використаний вольтметр внутрішнім опором R_v = 1000 Ом. Визначити абсолютну і відносну похибки методу вимірювання.



Задача 48. Електричне коло складається з послідовно включених джерела ЕРС E = 100 мВ і резистора з опором R = 100 Ом. Для вимірювання струму в коло включений міліамперметр з внутрішнім опором R_A = 7,5 Ом.

Визначити абсолютну і відносну похибки методу вимірювання, спричинені включенням міліамперметра. Намалюйте схему вимірювання.

Задача 49. Для визначення потужності в колі постійного струму були виміряні напруга мережі U=200 В вольтметром класу точності 1.0 з границею вимірювань U_m=300В, струм I=250 А амперметром класу точності 1,0 з границею вимірювань I_m=30А. Визначити потужність, споживану приймачем, а також відносну і абсолютну похибки її визначення.

РОЗДІЛ 9. ОЦІНКА РЕЗУЛЬТАТІВ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ.

9.1. Теоретичні відомості

Вище було розглянуто ряд рівноточних вимірювань, в якому ми однаково довіряли результату будь-якого одиничного вимірювання.

Нерівноточними називаються ряд вимірювань будь-якої величини, виконаних різними по точності засобами вимірювань, різними методами, різними операторами і (або) в різних умовах.

Групи вимірювань називаються нерівноточними, якщо характеристики похибок цих груп різні $(\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq ... \neq \sigma_n)$.

На практиці не завжди можна забезпечити повну відтворюваність умов повторних вимірювань. Буває так, що при виконанні декількох серій вимірювань, деякі з них виявляються менш надійними.

В усякому разі при розгляді результатів однієї серії вимірювань і співставленні їх з результатами другої серії виявляється, що результати останньої в більшій степені відрізняються один від одного (тобто мають більший розкид). Результати цих вимірювань при обробці не слід відкидати. Їх можна врахувати, зменшивши їх роль, їх “вагу” в сукупності результатів всіх вимірювань.

Кожну групу результатів вимірювань, що належать однаковим умовам (даний прилад, даний експериментатор), необхідно оцінити з точки зору ступеня довіри, тобто визначити їх „вагу” в загальній сукупності всіх результатів, які підлягають обробці. Це необхідно для одержання значення вимірюваної величини, найбільш близького до істинного. При спільній обробці результатів вимірювань декількох нерівноточних груп необхідно знайти статистичну вагу, що відповідає кожній групі.

Таким чином поняття “вага” визначає ступінь довіри до результату вимірювання. Чим більша ступінь довіри до результату, тим більша його вага, тим більше число, що виражає цю вагу.

Вага результату вимірювання (p^*) (вага вимірювання або просто вага) – додатнє число, яке виражає оцінку довіри до того чи іншого окремого результату вимірювання, що входить в ряд (сукупність) нерівноточних вимірювань.

В цьому випадку значення вимірюваної величини, найбільш близьке до її істинного значення, визначається за формулою:

$$\bar{x}_{зв} = \frac{\bar{x}_1 p_1^* + \bar{x}_2 p_2^* + ... + \bar{x}_m p_m^*}{p_1^* + p_2^* + ... + p_m^*} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i p_i^*}{\sum_{i=1}^{m} p_i^*} \qquad (9.1)$$

де m - кількість груп вимірювань;

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m$ – середні значення для окремих груп вимірювань, отримані тим чи іншим способом;

$p_1^*, p_2^*, ... p_m^*$ – їх вага.

Значення $\bar{x}_{зв}$, визначене за виразом (9.1) **називається середнім зваженим**.

Середнє зважене значення – середнє значення величини, одержане на основі ряду нерівноточних вимірювань із врахуванням ваги окремих результатів, прийнятих до обробки.

Існують два методи визначення ваги результату вимірювання.

Перший метод.

В тих випадках, коли відомі середньоквадратичні відхилення $\sigma_{\bar{x}_1}, \sigma_{\bar{x}_2}, ..., \sigma_{\bar{x}_m}$ кожної групи результатів вимірювань, вага відповідної групи вимірювань вважається обернено пропорційною $\sigma^2_{\bar{x}_i}$ (i = 1,2, …. m), тобто $p_i^* = \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_i}}$. Звідси випливає наступна тотожність:

$$p_1^* : p_2^* : p_3^* : ... : p_m^* = \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_1}} : \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_2}} : \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_3}} : ... : \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_m}} \quad (9.2)$$

Другий метод.

У випадках, коли значення $\sigma_{\bar{x}_i}$ невідомо, а відоме число вимірювань n у кожній групі, критерієм для визначення ваги результату вимірювань є кількість вимірювань n в кожній групі. При цьому виконується умова:

$$p_1^* : p_2^* : p_3^* : ... : p_m^* = n_1 : n_2 : n_3 : ... : n_m \quad (9.3)$$

Підставляючи ці значення у формулу (8.51) отримуємо, що в даному випадку середнє зважене значення $\bar{x}_{зв}$ розраховується за формулою:

$$\bar{x}_{зв} = \frac{\bar{x}_1 p_1^* + \bar{x}_2 p_2^* + ... + \bar{x}_m p_m^*}{p_1^* + p_2^* + ... + p_m^*} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + ... + \bar{x}_m n_m}{n_1 + n_2 + ... + n_m} \quad (9.4),$$

і дорівнює середньому зі всіх вимірювань, які розглядаються як один ряд.

Для визначення середньої квадратичної похибки середнього зваженого користуються формулою:

$$\sigma_{\bar{x}_{зв}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^* u_i^2}{m(m-1)\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^*}} \tag{9.5}$$

де p_i^* - вага кожного результату $\bar{x}_i$;

$u_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{зв}$ ($\bar{x}_{зв}$ – середнє зважене);

m – кількість груп вимірювань (результатів вимірювань);

$\sum\limits_i p_i^*$ - сума ваг всіх результатів.

9.2. Методичні вказівки до розв'язання задач

Якщо є декілька серій (в загальному випадку m серій) повторних вимірювань однієї і тієї ж величини, виконаних в різних місцях, в різний час, різними методами або засобами, різними дослідниками, але в однакових умовах (температура, тиск, вологість тощо), то це є той випадок, коли ми маємо справу з нерівноточними вимірюваннями. Причому в кожній із серій може бути виконана різна кількість вимірювань, в загальному випадку $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$.

При обробці результатів нерівноточних вимірювань слід поступати наступним чином:

1. В першу чергу потрібно знайти середнє арифметичне значення кожної серії вимірювань, а саме: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_m$. Часто в задачах ці значення наводяться.

2. Оскільки характеристикою методу вимірювання є середнє квадратичне відхилення σ окремого результату даної серії вимірювань, то необхідно для кожного метода визначити цю характеристику, тобто знайти $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3}, \dots, \sigma_{x_m}$.

3. Характеристикою точністі результату, отриманого в кожній серії вимірювань, є середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного значення даної серії. Тому наступним кроком є визначення $\sigma_{\bar{x}_1}, \sigma_{\bar{x}_2}, \sigma_{\bar{x}_3}, \dots . \sigma_{\bar{x}_m}$.

4. Кінцевим наслідком обробки результатів нерівноточних вимірювань є отримання значення вимірюваної величини, найбільш близького до істинного значення – середнього зваженого $\bar{x}_{зв}$. Це значення визначається за формулою:

$$\bar{x}_{зв} = \frac{\bar{x}_1 p_1^* + \bar{x}_2 p_2^* + \dots + \bar{x}_m p_m^*}{p_1^* + p_2^* + \dots + p_m^*} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{x}_i p_i^*}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^*}$$

де m - кількість серій вимірювань;

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ – середні значення для окремих серій вимірювань;

$p_1^*, p_2^*, \dots p_m^*$ – їх вага результатів окремих серій вимірювань.

5. Для знаходження $\bar{x}_{зв}$ потрібно визначити вагу результатів кожної серії вимірювань $p_1^*, p_2^*, \dots p_m^*$

Тут можливі два випадки:

1). якщо відомі середньоквадратичні відхилення $\sigma_{\bar{x}_1}, \sigma_{\bar{x}_2}, \sigma_{\bar{x}_3}, \dots . \sigma_{\bar{x}_m}$ кожної групи результатів вимірювань, то вага відповідної групи вимірювань розраховується за формулою:

$$p_i^* = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_i}^2}$$

2). якщо значення $\sigma_{\bar{x}_i}$ невідомі, а відоме число вимірювань n у кожній серії, то вага відповідної групи вимірювань приймається рівною кількості вимірювань у даній групі: $p_i^* = n_i$.

6. Середню квадратичну похибку середнього зваженого визначають за формулою:

$$\sigma_{\bar{x}_{зв}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^* u_i^2}{m(m-1)\sum_{i=1}^{m} p_i^*}}$$

де $u_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{зв}$.

9.3. Приклади розв’язку задач

Задача 1. Були виконані три групи вимірювань трьома операторами. Після обробки кожного ряду вимірювань були отримані наступні результати:

$\bar{x}_1 = 20000{,}45; \quad \sigma_{\bar{x}_1} = \pm\, 0{,}05$

$\bar{x}_2 = 20000{,}15; \quad \sigma_{\bar{x}_2} = \pm\, 0{,}20$

$\bar{x}_3 = 20000{,}60; \quad \sigma_{\bar{x}_3} = \pm\, 0{,}10$

Знайти середнє зважене значення $\bar{x}_0$. Визначити СКВ середнього зваженого.

Розв’язок.

1. Знаходимо відношення „ваг”:

$$p_1^* : p_2^* : p_3^* = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_1}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_2}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_3}^2} = \frac{1}{(0{,}05)^2} : \frac{1}{(0{,}20)^2} : \frac{1}{(0{,}10)^2} =$$

$$= \frac{1}{0{,}0025} : \frac{1}{0{,}04} : \frac{1}{0{,}01} = 400 : 25 : 100 = 16 : 1 : 4$$

Отже $p_1^* = 16$; $p_2^* = 1$; $p_3^* = 4$

2. Середнє зважене дорівнює:

$$\bar{x}_{зв} = \frac{\bar{x}_1 \cdot p_1^* + \bar{x}_2 \cdot p_2^* + \bar{x}_3 \cdot p_3^*}{p_1^* + p_2^* + p_3^*} = \frac{20000{,}45 \cdot 16 + 20000{,}15 \cdot 1 + 20000{,}60 \cdot 4}{16 + 1 + 4} =$$

$= 20000{,}46$

3. Визначаємо СКВ середнього зваженого:

$$\sigma_{\bar{x}_{зв}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^* u_i^2}{m\,(m-1)\sum_{i=1}^{m} p_i^*}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 0{,}01^2 + 1 \cdot 0{,}31^2 + 4 \cdot 0{,}14^2}{3 \cdot 2 \cdot 21}} = \pm 0{,}037 \approx \pm 0{,}04$$

$u_1 = 20000{,}45 - 20000{,}46 = -\,0{,}01$

$u_2 = -\,0{,}31$

$u_3 = 0{,}14$

$\sum_{i=1}^{3} p_i^* = 16 + 1 + 4 = 21 \ (m = 3)$

4. Кінцевий результат записується у вигляді:

$$x_{іст} = \bar{x}_{зв} \pm \sigma_{\bar{x}_{зв}} = 20000{,}46 \pm 0{,}04.$$

Задача 2. Було проведено три групи вимірювань з різною кількістю вимірювань в кожній групі. Відомі середні арифметичні значення, отримані в результаті вимірювань в кожній групі і кількість виконаних вимірювань:

$\bar{x}_1 = 999{,}9425$; $n_1 = 36$
$\bar{x}_2 = 999{,}9420$; $n_2 = 24$
$\bar{x}_3 = 999{,}9419$; $n_3 = 60$

Знайти середнє зважене значення і СКВ середнього зваженого.

Розв'язок.

1. Знаходимо відношення ваг:

$$p_1^* : p_2^* : p_3^* = n_1 : n_2 : n_3 = 36 : 24 : 60 = 3 : 2 : 5$$

Отже, значення ваги кожного ряду вимірювань дорівнюють:

$$p_1^* = 3;\ p_2^* = 2;\ p_3^* = 5$$

2. Знаходимо середнє зважене:

$$\bar{x}_{зв} = \frac{\bar{x}_1 \cdot p_1^* + \bar{x}_2 \cdot p_2^* + \bar{x}_3 \cdot p_3^*}{p_1^* + p_2^* + p_3^*} = 999{,}9421$$

3. Знаходимо СКВ середнього зваженого:

$$\sigma_{\bar{x}_{зв}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^* u_i^2}{m\,(m-1)\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^*}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 16 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot 10^{-8} + 5 \cdot 4 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 2 \cdot 10}} \approx \pm\, 0{,}0001$$

$u_1 = 999{,}9425 - 999{,}9421 = 0{,}0004$

$u_2 = -\ 0{,}0001$

$u_3 = -\ 0{,}0002$

$\sum_{i=1}^{3} p_i^* = 3 + 2 + 5 = 10$

4. Кінцевий результат записується у вигляді:

$$x_{іст} = \bar{x}_{зв} \pm \sigma_{\bar{x}_{зв}} = 999{,}9421 \pm 0{,}0001.$$

Задача 3. Є три серії даних вимірювання однієї і тієї ж величини:

1). 22,5; 22,4; 21,4; 22,3; 22,2
2). 22,6; 22,4; 22,5
3). 22,43; 22,45; 22,44; 22,46; 22,43; 22,47

Знайти середнє значення вимірюваної величини і СКВ середнього значення.

Розв'язок.

1. Знаходимо середнє арифметичне значення кожної серії вимірювань $\bar{x}_i$:

$$\bar{x}_1 = 22{,}16 \approx 22{,}2;\ \bar{x}_2 = 22{,}5;\ \bar{x}_3 = 22{,}45.$$

2. Знаходимо СКВ окремого вимірювання в кожній серії вимірювань:

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x}_1)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{(0{,}3)^2 + (0{,}2)^2 + (-0{,}8)^2 + 0}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}64 + 0{,}01}{4}} = \sqrt{\frac{0{,}78}{4}} = \pm\ 0{,}44 \approx \pm\ 0{,}4$$

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{\frac{(0{,}1)^2 + (-0{,}1)^2}{2}} = \pm\ 0{,}10$$

$$\sigma_{x_3} = \sqrt{\frac{(0{,}02)^2 + (0{,}01)^2 + (0{,}01)^2 + (0{,}02)^2 + (0{,}02)^2}{5}} = \sqrt{\frac{3\cdot(0{,}02)^2 + 2\cdot(0{,}01)^2}{5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}0012 + 0{,}0002}{5}} = \pm\, 0{,}016$$

3. Знаходимо СКВ середнього арифметичного кожної групи вимірювань:

$$\sigma_{\bar{x}_1} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n\,(n-1)}} = \frac{S_1}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{5}} = \pm\, 0{,}179 \approx \pm\, 0{,}18$$

$$\sigma_{\bar{x}_2} = \frac{0{,}1}{\sqrt{3}} = \pm\, 0{,}058 \approx \pm\, 0{,}06$$

$$\sigma_{\bar{x}_3} = \frac{0{,}016}{\sqrt{6}} = \pm\, 0{,}0065 \approx \pm\, 0{,}006$$

4. Знаходимо вагу результату кожної групи вимірювань:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_1}} : \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_2}} : \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_3}} = 31 : 278 : 27778$$

Звідси:

$p_1 = 31$

$p_2 = 278$

$p_3 = 27778$

5. Знаходимо середнє зважене трьох груп вимірювань:

$$\bar{x}_{зв} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\bar{x}_i \cdot p_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3}\bar{x}_i \cdot p_i}{\sum\limits_{i=1}^{3} p_i} = \frac{22{,}2\cdot 31 + 22{,}5\cdot 278 + 22{,}45\cdot 27778}{31 + 278 + 27778} =$$

$$= \frac{688{,}2 + 6255 + 623616{,}1}{28087} = \frac{630529{,}3}{28087} = 22{,}45$$

6. Знаходимо СКВ середнього зваженого:

$$\sigma_{\bar{x}_{зв}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \cdot u_i^2}{m\,(m-1)\sum\limits_{i=1}^{m} p_i}} = \sqrt{\frac{31\cdot(0{,}25)^2 + 278\cdot(0{,}05)^2 + 27778\cdot 0}{3\cdot 2\cdot 28087}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}938 + 0{,}695}{168522}} = \sqrt{0{,}0000156} = \pm\, 0{,}00395 \approx \pm\, 0{,}004$$

7. Кінцевий результат має вид:

$$x_{іст} = \bar{x}_{зв} \pm \sigma_{\bar{x}_{зв}} = 22{,}450 \pm 0{,}004$$

Зауваження: дану задачу можна розв'язати іншим шляхом, використовуючи співвідношення:

$$p_1^* : p_2^* : p_3^* = n_1 : n_2 : n_3$$

Задача 4. Три колективи експериментаторів за допомогою різних методів отримали наступні значення прискорення вільного падіння:

$$g_1 = (981{,}9190 \pm 0{,}0014)\frac{см}{с^2}$$

$$g_2 = (981{,}9215 \pm 0{,}0016)\frac{см}{с^2}$$

$$g_3 = (981{,}923 \pm 0{,}002)\frac{см}{с^2}$$

В дужках наведені середні квадратичні відхилення результатів вимірювання в кожному з рядів.

Визначити результат вимірювання прискорення вільного падіння.

Розв'язок

1. Оскільки вимірювання нерівно точні, то за результат вимірювання необхідно взяти середнє зважене результатів, отриманих в різних групах:

$$\bar{x}_{зв} = \frac{\bar{x}_1 p_1^* + \bar{x}_2 p_2^* + ... + \bar{x}_m p_m^*}{p_1^* + p_2^* + ... + p_m^*} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i p_i^*}{\sum_{i=1}^{m} p_i^*}$$

2. В цьому виразі нам невідома вага результатів вимірювань, отриманих в кожній групі, p_1^*, p_2^*, p_3^*. Для їх визначення скористаємося методом, згідно з яким $p_i^* = \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_i}}$

Отже, маємо:

$$p_1^* = \frac{1}{\sigma_1^2} = \frac{1}{(0{,}0014)^2} = 50 \cdot 10^4$$

$$p_2^* = \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{1}{(0{,}0014)^2} = 40 \cdot 10^4$$

$$p_3^* = \frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{(0{,}0014)^2} = 25 \cdot 10^4$$

3. Використаємо співвідношення (9.2), згідно якого

$$p_1^* : p_2^* : p_3^* = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_1}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_2}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_3}^2} = 50 \cdot 10^4 : 40 \cdot 10^4 : 25 \cdot 10^4$$

Після скорочення отримуємо:

$$p_1^* : p_2^* : p_3^* = 10:8:5$$

Отже,

$$p_1^* = 10,\ p_2^* = 8,\ p_3^* = 5$$

4. Підставляючи у формулу для визначення $\bar{x}_{зв}$ надані в умові задачі середні арифметичні значення результатів вимірювань у кожній групі, а також розраховані значення ваги результатів вимірювань, отримуємо:

$$\bar{x}_{зв} = \bar{g}_{зв} = 981{,}9207\,\frac{см}{с^2}$$

5. Знаходимо середню квадратичну похибку середнього зваженого за формулою

$$\sigma_{\bar{x}_{зв}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^* u_i^2}{m(m-1)\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^*}}$$

Для цього спочатку знаходимо:

$$u_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_{зв}) = (981{,}9190 - 981{,}9207) = -0.0017$$
$$u_2 = (\bar{x}_2 - \bar{x}_{зв}) = (981{,}9215 - 981{,}9207) = 0{,}0008$$
$$u_3 = (\bar{x}_3 - \bar{x}_{зв}) = (981{,}9230 - 981{,}9207) = 0{,}0023$$

Підставляючи всі відомі величини у формулу для визначення $\bar{\sigma}$, отримуємо:

$$\sigma_{\bar{x}_{зв}} = \sigma_{\bar{g}_{зв}} = 0{,}0007\ \frac{см}{с^2}$$

6. Кінцевий результат записуємо у вигляді:

$$g = \bar{g}_{зв} \pm \sigma_{\bar{g}_{зв}} = 981{,}9207 \pm 0{,}0007\ \frac{см}{с^2}$$

В задачі відсутні відомості про кількість вимірювань в кожній групі, але відомі середні квадратичні відхилення кожної групи вимірювань

Задача 5 Дано результати двох груп вимірювань:

$$\bar{x}_1 = 8{,}392; \ \sigma_1 = 0{,}023; \quad n = 5$$
$$\bar{x}_2 = 8{,}364; \ \sigma_2 = 0{,}032; \quad n = 10$$

Визначити середнє вагове значення результатів двох груп вимірювань та середнє квадратичне відхилення середнього вагового результату, а також записати результат при довірчій ймовірності P = 0,95.

Розв'язок

1. В умові даної задачі наведені значення як середньоквадратичних відхилень σ, так і кількості вимірювань n у кожній групі. Тому для знаходження ваги результатів вимірювань, отриманих у кожній групі, можна скористатися як формулою $p_i^* = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_i}^2}$, так і виразом $p_i^* = n_i$.

2. Визначимо вагу результатів вимірювань скориставшись другим виразом. Тоді отримуємо, що $p_1^* = 5$, $p_2^* = 10$, або скоротивши на 5:

$$p_1^* = 1, \ p_2^* = 2$$

3. Знаходимо середнє зважене результатів вимірювань за формулою:

$$\bar{x}_{зв} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i p_i^*}{\sum_{i=1}^{m} p_i^*} = 8{,}373$$

4. Визначаємо середнє квадратичне відхилення середнього зваженого за формулою:

$$\sigma_{\bar{x}_{зв}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^* u_i^2}{m(m-1)\sum_{i=1}^{m} p_i^*}} = 0{,}009$$

6. Кінцевий результат має вигляд:

$$x = \bar{x}_{зв} \pm \sigma_{\bar{x}_{зв}} = 8{,}373 \pm 0{,}009$$

9.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 1. При вимірюваннях одного і того ж плоского кута α різними операторами отримано значення, приведені в таблиці.

α_i	Число вимірювань
24°36'26"	4
24°36'15"	6
24°36'20"	8
24°36'23"	12
24°36'18"	18

Знайти величину кута та похибку його визначення.

Задача 2. Зроблені різними дослідниками за допомогою монохроматора вимірювання довжини хвилі деякої спектральної лінії випромінювання розжареного газу дали наступні результати (в нм): λ_1= 588+5 (n_1=10), λ_2 = 595±17(n_2= 5), λ_3= 580±18(n_3= 4), λ_4 = 585+13 (n_4= 5), λ_5 = 581+8 (n_5= 7). Визначити усереднений результат вимірювання довжини хвилі та його похибку при довірчій імовірності Р = 0,98.

Задача 3. Висота телевізійної вишки визначена по геометричній побудові через вимірювання відстані d до її основи і кута зору α від вершини до площини горизонту. Знайти довірчий інтервал визначення висоти для Р = 0,95, якщо відомо такі результати трьох серій вимірювань: d_1= (100+2) м, α_1 = 10°10', n = 3; d_2= (101±1) м, α_2= 30°20' n = 6; d_3 = (100+1) м, α_3= 30°05' n = 12.

Задача 4. Вимірювання зовнішнього dl і внутрішнього d2 діаметрів та товщини h декількох партій однотипних феритових кілець дали такі результати з відповідними статистичними вагами р : $d1_1$,= 32,41, $d2_1$, = 15,75, h_1= 7,57, p_1 = 1; dl_2= 32,58, $d2_2$=15,71, h_2= 7,35, p_2= 2; dl_3= 32,73, $d2_3$=15,63, h_3 = 7,47, p_3= 3; dl_4 = 32,65, $d2_4$=15,67, h_4 = 7,31, p_4 = 4; dl_5=32,51, $d2_5$ =15,74, p_5=6. Розміри dl, d2 і h приведено в міліметрах.

Оцінити витрати маси на 1000 виробів, обчислити середню квадратичну похибку, якщо густина феритової шихти р =1,2 г/см^3.

Задача 5. Є три серії даних вимірювання однієї і тієї ж фізичної величини: 1) 22,5; 22,4; 21,4; 22,3; 22,2; 2) 22,6; 22,4; 22,5; 3) 22,43; 22.45; 22,44; 22,46; 22,43; 22,47.

Визначити $\bar{\sigma}_{зв}$ і $\Delta\bar{\sigma}_{зв}$.

Задача 6. В результаті вимірювань отримані наступні значення електричних опорів, включених паралельно:

$R_1 = \overline{R}_1 \pm \Delta R_1 = (240{,}0 \pm 1{,}0)$Ом при $n_1 = 4$ та ймовірності $P_1 = 0{,}9$

$R_2 = \overline{R}_2 \pm \Delta R_2 = (300{,}0 \pm 0{,}8)$Ом при $n_2 = 9$ та ймовірності $P_2 = 0{,}7$.

Припускаючи, що результати вимірювання розподілені по нормальному закону та статистично незалежні, знайти:

1. Результат вимірювання;
2. Середнє квадратичне відхилення результату вимірювання;
3. Довірчі границі при P = 0,95.

Задача 7. При вимірюванні однієї і тієї ж напруги в двох серіях вимірювань отримані результати:

U_1(В)= 13,3; 13,7; 14,0; 14,4; 15,0; 15,5; 15,9; 16,3; 16,7; 16,9.

U_2(В)= 13,5; 14,0; 14,4; 15,0; 15,5; 16,0; 16,5; 17,0.

Яка серія вимірювань забезпечує достовірніший результат?

Задача 8. При вимірюванні потужності постійного струму в двох серіях вимірювань отримані результати:

P_1 (В)=1,40; 1,44; 1,48; 1,52; 1,56; 1,60.

P_2 (В)=1,40; 1,45; 1,45, 1,50; 1,50; 1,55; 1,55; 1,60.

Результат якої серії вимірювань більш достовірний?

Задача 9. У двох серіях вимірювань постійного струму отримані наступні результати:

I_1(А)=16,60; 16,92; 16,95; 17,11; 17,45; 17,46; 17,80; 17,90.

I_2 (А)=16,6; 16,9: 17,2; 17,3; 17,4; 17,5; 17,7; 17,9.

Результат якої серії вимірювань більш достовірний?

Задача 10. У двох серіях вимірювань постійної напруги отримані наступні результати:

U_1 (мВ)=510; 530; 550; 570; 590.

U_2 (мВ)=510; 510; 550; 530; 570; 510; 590; 550; 570; 590.

Результат якої серії вимірювань більш достовірний?

Задача 11. У двох серіях вимірювань індуктивностей одного типономіналу різними вимірювальними приладами отримані результати:

L_1(мГн) =1390; 1410; 1460; 1435; 1440; 1405; 1430; 1425.

L_2(мГн) =1400,7; 1391,2; 1409,3; 1414,0; 1449,1; 1456,8; 1441,1; 1460,2.

У якій серії вимірювань середнє значення індуктивності буде визначено з більшою достовірністю?

Задача 12. При багатократних вимірюваннях однієї і тієї ж величини отримані дві серії по n = 16 результатів вимірювань в кожній. Ці результати після внесення поправок наведені у таблиці. Обчислити результат багатоткратних вимірювань.

Серія m = 1

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16
563	564	565	562	564	563	565	565	564	563	561	574	565	564	563	564

Серія m = 2

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
564,02	564,06	564,03	564,04	564,08	564,06	564,05	564,04	564,05	564,06

x11	x12	x13	x14	x15	x16
564.05	573,01	564,09	564,06	564,07	564,07

Задача 13. Пробивна напруга напівпровідникових діодів з однієї партії вимірювалася незалежно на двох установках з подальшим розрахунком середнього значення. Отримані результати:

$U_{\text{проб1}}$(В)=115; 127; 125; 130; 123; 135; 120; 125.

$U_{\text{проб2}}$(В)= 116,2; 115,1; 120,4; 122,3; 128,0; 129,9; 133,1; 134,7.

У якій серії вимірювань отриманий більш достовірний результат?

Задача 14. В трьох серіях вимірювань мережевої змінної напруги отримані результати:

U_1(В)=210, 210, 230, 210;230, 230, 210, 230.

U_2(В)=230, 210, 210, 230, 210, 210, 230, 230,230,210.

U_3(В)=200, 210, 220, 220, 220. 230,220. 220. 240, 220.

У якій серії вимірювань отриманий більш достовірний результат?

Задача 15. При багатократних вимірюваннях однієї і тієї ж величини отримані дві серії по n = 18 результатів вимірювань в кожній. Ці результати після внесення поправок наведені у таблиці. Обчислити результат багатоткратних вимірювань.

Серія m = 1

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18
483	484	484	485	485	482	484	484	483	485	485	485	484	484	483	481	481	494

Серія m = 2

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18
482	483	483	483	483	482	482	484	483	486	485	484	484	484	483	484	484	493

Задача 16. Три серії вимірювань частоти зрізу фільтру нижніх частот дали наступні результати:

$f_{ср1}$(кГц)=211; 219; 210; 221; 229; 230; 220.

$f_{ср2}$(кГц)=215; 225; 215; 225; 225; 215; 225; 215.

$f_{ср3}$(кГц)=225; 210; 215; 230; 220; 220.

Результат якої серії вимірювань найбільш достовірний?

Задача 17. Вимірювання одного і того ж робочого еталону опору виконано на трьох магазинах опорів і отримані наступні середні значення та середні квадратичні відхилення середнього:

$$R_1 = (100{,}145 \pm 0{,}005)\,\text{Ом}$$

$$R_2 = (100{,}105 \pm 0{,}200)\,\text{Ом}$$

$$R_3 = (100{,}165 \pm 0{,}010)\,\text{Ом}$$

Використовуючи результати вимірювань розрахувати середнє вагове значення опору робочого еталону та зробити оцінку значення цього опору.

РОЗДІЛ 10. ОЦІНКА РЕЗУЛЬТАТІВ , ЩО МІСТЯТЬ ГРУБІ ПОХИБКИ

10.1. Теоретичні відомості

Грубою похибкою (промахом) називається похибка, що істотно перевищує значення очікуваної похибки за даних умов проведення вимірювального експерименту. Зазвичай груба похибка є наслідком значної раптової зміни умов експерименту: стрибка струму джерела електроживлення; не врахована експериментатором зміна температури довкілля (при тривалому експерименті); неправильний відлік показів через відвернення уваги експериментатора та ін.

Наявність грубих похибок у вибірці результатів вимірювань може сильно спотворити середнє значення вибірки і як наслідок довірчий інтервал. Тому виявлення і виключення результатів, що містять промах, є обов'язковим.

Зазвичай результат вимірювання, що містить грубу похибку, одразу видно у ряді виміряних значень, але у кожному конкретному випадку це необхідно довести. Якщо при одноразових вимірюваннях є підозри на промахи, то їх можна усунути шляхом проведення декількох повторних вимірювань. При багаторазових вимірюваннях питання щодо наявності грубих похибок вирішується методами перевірки статистичних гіпотез на підставі статистичних критеріїв.

Приклади статистичних гіпотез :

1) дана вибірка (чи її окремий результат) належить генеральній сукупності;

2) генеральна сукупність розподілена за нормальним законом;

3) дисперсії двох нормальних сукупностей рівні між собою.

Разом з висуненою гіпотезою розглядають і гіпотезу, що суперечить їй. Нульовою (основною) називають висунену гіпотезу. А конкуруючою (альтернативною) називають ту, яка суперечить нульовій.

При висуненні і прийнятті гіпотези можуть мати місце наступні чотири випадки:

1) гіпотеза приймається, причому і насправді вона правильна;

2) гіпотеза вірна, але помилково відкидається. Помилку, що виникає при цьому, називають помилкою першого роду, а ймовірність її появи називають рівнем значимості і позначають q;

3) гіпотеза відкидається, причому насправді вона невірна;

4) гіпотеза невірна, але помилково приймається. Помилку, що виникає при цьому, називають помилкою другого роду, а ймовірність її появи позначають β.

Величину $1-\beta$, т. е. ймовірність, що гіпотеза буде відкинута, коли вона помилкова, називають **потужністю критерію**.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез формулюється таким чином: якщо спостережуване (експериментальне) значення критерію належить критичній області - гіпотезу відкидають, якщо спостережуване значення критерію належить області прийняття гіпотези - гіпотезу приймають.

Формальним критерієм аномальності результату спостережень при цьому служить межа, віднесена від центру розподілу (середнього арифметичного значення) на величину tσ, тобто:

$$\left|x_{\text{іпідозрілий}} - \bar{x}\right| \geq t\sigma \,,$$

де $x_{\text{іпідозрілий}}$ - результат спостереження, що перевіряється на наявність грубої похибкиі;

t - коефіцієнт, що залежиить від виду і закону розподілу, об'єму вибірки n, рівня значимості q.

Таким чином, межі похибки залежать від виду розподілу, об'єму вибірки і вибраної довірчої ймовірності.

При обробці вже наявних результатів спостережень довільно відкидати окремі результати не слід, оскільки це може привести до фіктивного підвищення точності результату вимірювань. Група результьатів вимірювань (вибірка) може містити декілька грубих похибок і їх виключення роблять послідовно, по одному.

Усі методи виключення грубих похибок (промахів) можуть бути розділені на два основні типи:

а) методи виключення при відомому генеральному СКВ

б) методи виключення при невідомому генеральному СКВ.

У першому випадку $\bar{x}$ і СКВ обчислюється за результатами усієї вибірки, в другому випадку з вибірки перед обчисленням видаляються підозрілі результати.

Після виключення промахів операції по визначенню оцінок центру розподілу і СКВ результатів спостережень необхідно повторити.

Оскільки на практиці частіше зустрічаються вимірювання при невідомому СКВ (обмежене число спостережень), в посібнику розглянуті наступні критерії перевірки підозрілих (з точки зору грубих похибок) результатів спостережень: Ірвина, Романівського, варіаційного розмаху, Діксона, Смирнова, Шовене.

Слід зазначити наступне: оскільки критеріальні вимоги (коефіцієнти), що визначають границю, за якою знаходяться "грубі" (у сенсі похибок) результати спостережень у різних авторів різні, то перевірку слід виконувати одразу за декількома критеріями (рекомендується використати не менше трьох критеріїв). Остаточний висновок про приналежність " підозрілих" результатів сукупності спостережень, що розглядається, слід робити по більшості критеріїв.

1. Критерій Ірвина

Для отриманих експериментальних даних визначають коефіцієнт за формулою:

$$\lambda = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{\sigma}$$

де x_{n+1}, x_n- найбільші значення випадкової величини;

σ - середнє квадратичне відхилення, обчислене по усіх значеннях вибірки.

Потім цей коефіцієнт порівнюється з табличним значенням λ_q, можливі значення якого приведені в таблиці 10.1

Таблиця 10.1. Критерій Ірвина λ_q.

Число вимірювань n	Рівень значимості q	
	q = 0,05	q = 0,01
1	2	3
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

Якщо $\lambda > \lambda_q$, то гіпотеза не підтверджується, тобто результат - помилковий, і він має бути виключений з подальшої обробки результатів спостережень

2. Критерій Романівського

Конкуруюча гіпотеза про наявність грубих похибок в підозрілих результатах підтверджується, якщо виконується нерівність:

$$\left|x_{\text{іпідозрілий}} - \bar{x}\right| \geq t_c\sigma,$$

де t_c - коефіцієнт Стьюдента при заданій довірчій ймовірності і кількості вимірювань n. Значення коефіцієнтів t_c для розподілу Стьюдента наведені в таблиці 10.4.

Оцінки розподілу $\bar{x}$ і СКВ σ результатів спостережень обчислюється без урахування k_n підозрілих результатів спостережень.

3.Критерій варіаційного розмаху

Є одним з простих методів виключення грубої похибки вимірювань (промаху). Для його використання визначають розмах варіаційного ряду впорядкованої сукупності спостережень $(x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq \cdots \leq x_n)$

$$R_n = x_n - x_1$$

Якщо будь-який член варіаційного ряду, наприклад x_k, різко відрізняється від усіх інших, то роблять перевірку, використовуючи наступну нерівність:

$$\bar{x} - zR_n < x_k < \bar{x} + zR_n \quad (3.7)$$

де $\bar{x}$- вибіркове середнє арифметичне значення, обчислене після виключення передбачуваного промаху;

z – значення критерію.

Нульову гіпотезу (про відсутність грубої похибки) приймають, якщо вказана нерівність виконується. Якщо x_kне задовольняє наведеній умові, то цей результат виключають з варіаційного ряду.

Коефіцієнт z залежить від числа членів варіаційного ряду n, що представлено в таблиці 10.2.

Таблиця 10.2. Критерій варіаційного розмаху

n	5	6	7	8-9	10-11	12-15	16-22	23-25	26-63	64-150
z	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

4. Критерій Діксона

Критерій грунтується на припущенні, що похибки вимірювань розподілені по нормальному закону (попередньо потрібна побудова гістограми результатів спостережень і перевірка гіпотези про приналежність до нормального закону розподілу). При використанні критерію обчислюють коефіцієнт Діксона r (експериментальне значення критерію) для перевірки найбільшого або найменшого екстремального значення залежно від числа вимірювань. Розраховані для вибірки коефіцієнти Діксона r порівнюють з табличним значенням критерію Діксона r_q.

Нульова гіпотеза про відсутність грубої похибки виконується, якщо виконується нерівність $r < r_q$.

Якщо $r > r_q$, то результат визнається грубою похибкою і виключається з подальшого розгляду

Потрібно первинне впорядкування результатів вимірювань (об'єму вибірки). Критерій застосовується, коли вибірка може містити більше за одну грубу погрішність.

5. Критерій "3σ ", критерій Райта

Критерій "правило трьох сигм" є одним з простих для перевірки результатів, що розподілені по нормальному закону. Сутність правила трьох сигм: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного очікування не перевищує потрійного середнього квадратичного відхилення.

На практиці правило трьох сигм застосовують так: якщо розподіл випадкової величини, що вивчається, невідомий, але умова, вказана в приведеному правилі, виконується, то є підстави припускати, що величина, що вивчається, розподілена нормально; в противному випадку вона не розподілена нормально. З цією метою для вибірки (включаючи підозрілий результат) обчислюється центр розподілу $\overline{x}$ і оцінка СКВ результату спостережень σ. Результат, який задовольняє умові

$$\left|x_{\text{іпідозрілий}} - \overline{x}\right| \geq 3\sigma ,$$

вважається таким, що має грубу похибку і вилучається, а раніше обчислені характеристики розподілу уточнюються.

Цьому критерію аналогічний критерій Райта, заснований на тому, що якщо похибка більше чотирьох сигм, то цей результат вимірювання є грубою похибкою і має бути виключений з подальшої обробки.

Обидва критерії надійні при числі вимірювань більше 20...50. Їх слід застосовувати, коли відома величина генерального середньоквадратичного відхилення (σ).

Може виявитися, що при нових значеннях $\overline{x}$ і σ інші результати потраплять в категорію аномальних. Проте, двічі використовувати критерії грубої похибки не рекомендується.

6. Критерій Смірнова

Критерій Смірнова використовується при об'ємах вибірки $n \geq 25$ або при відомих значеннях генеральних середнього і СКВ. Він встановлює менш жорсткі межі грубої похибки. Для реалізації цього критерію обчислюються коефіцієнти розподілу β (спостережуване значення критерію) за формулою:

$$\beta = \frac{\left|x_{\text{іпідозрілий}} - \overline{x}\right|_{\max}}{\overline{\sigma}}$$

Знайдене значення порівнюється з критеріальним β_k, приведеним таблиці 10.3.

Таблиця 10.3. Коефіцієнти розподілу β_k

Об'єм вибірки n	Граничне значення β_k при рівні значимості q				
	0,100	0,050	0,0010	0,005	0,001
1	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090
2	1,632	1,955	2,575	2,807	3,290
3	1,818	2,121	2,712	2,935	3,403
4	1,943	2,234	2,806	3,023	3,481
5	2,036	2,319	2,877	3,090	3,540
6	2,111	2,386	2,934	3,143	3,588
7	2,172	2,442	2,981	3,188	3,628
8	2,224	2,490	3,022	3,227	3,662
9	2,269	2,531	3,057	3,260	3,692
10	2,309	2,568	3,089	3,290	3,719
15	2,457	2,705	3,207	3,402	3,820
20	2,559	2,799	3,289	3,480	3,890
25	2,635	2,870	3,351	3,539	3,944

30	2,696	2,928	3,402	3,587	3,988
40	2,792	3,015	3,480	3,662	4,054
50	2,860	3,082	3,541	3,716	4,108
100	3,076	3,285	3,723	3,892	4,263
250	3,339	3,534	3,946	4,108	4,465
500	3,528	3,703	4,108	4,263	4,607

7. Критерій Шовене

Критерій Шовене застосовується для законів, що не суперечать нормальному, і будується на визначенні числа очікуваних результатів спостережень $n_{\text{очік}}$, які мають такі ж великі похибки, як і підозрілий. Гіпотеза про наявність грубої похибки приймається, якщо виконується умова:

$$n_{\text{очік}} \leq 0{,}5$$

Порядок перевірки гіпотези наступний:

1) обчислюються середнє арифметичне $\bar{x}$ і СКВ σрезультатів спостережень для усієї вибірки;

2) з таблиці нормованого нормального розподілу (додаток 1 - інтегральна функція нормованого нормального розподілу) за величиною

$$z = \frac{\left|x_{\text{іпод}} - \bar{x}\right|}{\sigma}$$

визначається ймовірність появи підозрілого результату в генеральній сукупності чисел n:

$$P(z \cdot \sigma < \left|x_{\text{іпод}} - \bar{x}\right|)$$

3) число очікуваних результатів $n_{\text{очік}}$ визначається за формулою:

$$n_{\text{очік}} = n \cdot P$$

де n - кількість вимірювань;

P – довірча ймовірність.

10.2. Методичні вказівки до розв'язання задач

Наявність в ряду вимірювань декількох результатів з грубими відхиленнями повинно занепокоїти оператора і потребує аналізу причин їх виникнення. При цьому під сумнів може бути поставлений увесь ряд вимірювань.

Для визначення результату, що містить грубу похибку використовується ряд прийомів, розглянутих вище, але найбільш часто використовуваними є наступні.

1. Правило 3σ

При великій кількості результатів вимірювань ($n \geq 20$), які розподілені по нормальному закону, іноді використовується правило 3σ (трьох сигм).

Суть його полягає в тому, що результат вимірювань x_i, ймовірність появи якого $q \leq 0{,}03$ (q – рівень значимості), можна вважати промахом, якщо $\left|\bar{x} - x_i\right| > 3\sigma$.

Процес виявлення грубої похибки при цьому містить такі етапи:

1). Знаходять середнє арифметичне значення результатів вимірювань/

2). Визначають середнє квадратичне відхилення σ даного ряду.

3). Знаходять різницю $\left|x_i - \bar{x}\right|$, де x_i - результат, який викликає сумнів.

4). Якщо $\left|x_i - \bar{x}\right| \geq 3\sigma$, то результат x_i містить грубу похибку іпідлягає відкиданню.

5). Якщо $\left|x_i - \bar{x}\right| < 3\sigma$, то результат x_i вважають таким, що заслуговує на довіру, і подальший процес обробки результатів вимірювань проводять з урахуванням даного результату.

2. Критерій Романовського

Даний критерій базується на розподілі Стьюдента і застосовується при малій кількості вимірювань ($n < 20$)

Послідовність обробки результатів вимірювання в цьому випадку наступна:

1). Результат, що викликає сумнів позначають як x_{n+1}.

2). Знаходять середнє арифметичне значення для результатів від x_1 до x_n, тобто без урахування результату x_{n+1}:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

3). Знаходять середнє квадратичне відхилення (СКВ) окремого вимірювання:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

4). Виходячи зі ступеня вірогідності, який повинен бути забезпечений, задаються рівнем значимості (ймовірністю) $q = 1 - P$ того, що значення $(x_{n+1} - \bar{x})$ не перевищує деякого значення ε^*, яке потрібно визначити, тобто $\left|x_{n+1} - \bar{x}\right| \le \varepsilon^*$.

5). Знаходять допустиме значення інтервалу ε^*(довірчий інтервал) з виразу:

$$\varepsilon^* = t' \cdot \sigma$$

де t' - коефіцієнт, що визначається за таблицею 10.4, в якій наведено значення t' для різних q і n

Таблиця 10. 4 .

Значення коефіцієнта t' для різних значень ймовірності q та кількості вимірювань n.

n	t' при q, рівному			
	0.05	0.02	0.01	0.005
2	15.56	38.97	77.96	779.7
3	4.97	8.04	11.46	36.5
4	3.56	5.08	6.53	14.46
5	3.04	4.10	5.04	9.43
6	2.78	3.64	4.36	7.41
7	2.62	3.36	3.96	6.37
8	2.51	3.18	3.71	5.73
9	2.43	3.05	3.54	5.31
10	2.37	2.96	3.41	5.01
11	2.33	2.89	3.31	4.79
12	2.29	2.83	3.23	4.62
13	2.26	2.78	3.17	4.48
14	2.24	2.74	3.12	4.37
15	2.22	2.71	3.08	4.28
16	2.20	2.68	3.04	4.20
17	2.18	2.66	3.01	4.13
18	2.17	2.64	3.00	4.07
19	2.16	2.62	2.95	4.02
20	2.145	2.60	2.93	3.98
∞	1.96	2.33	2.58	3.29

6). Якщо $\left|x_{n+1} - \bar{x}\right| > \varepsilon^*$, то результат x_{n+1} містить грубу похибку і підлягає виключенню з ряду результатів вимірювань.

7) Якщо $\left|x_{n+1} - \bar{x}\right| < \varepsilon^*$, то результат x_{n+1} не містить грубої похибки, і всі обчилення необхідно провести спочатку з урахуванням даного результату.

3. Статистичний критерій визначення грубих похибок

В цьому випадку використовують рівень значимості β, який визначається рівністю

$$\beta = \frac{\left|\bar{x} - x_{min/max}\right|}{\sigma}$$

де $x_{min/max}$ - результат вимірювання, підозрілий на вміст грубої похибки (x_{min} - найменший результат вимірювання у ряді виміряних значень, x_{max}- найбільший результат вимірювання у ряді виміряних значень);

σ - статистичне середнє квадратичне відхилення (СКВ)

Послідовність визначення наявності грубої похибки в результатах спостережень за даним методом наступна:

1). упорядковують результати спостережень, тобто записують у вигляді: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$;

2). обчислюють середнє значення $\bar{x}$ і середнє квадратичне відхилення σ;

3). знаходять відхилення:

$$\beta_n = \frac{\left|x_n - \bar{x}\right|}{\sigma}, \quad \beta_1 = \frac{\left|x_1 - \bar{x}\right|}{\sigma}$$

4). результати порівнюють із граничним відхиленням β_T для даного розподілу випадкової величини, яке береться з довідкових даних для конкретного числа спостережень n і прийнятого рівня значимості q (таблиця додатку 5).

5). при $\beta_n \ge \beta_T (\beta_1 \ge \beta_T)$ результат $x_n(x_1)$ вважають грубою похибкою і виключають.

10.3. Приклади розв'язку задач

Задача 1. При вимірюванні напруги U (мВ) одержано такі результати: 1,07; 1,10; 1,15; 1,16; 1,17; 1,20; 1,39; 1,37; 1,13; 1,12; 1,08. Перевірити чи не містить значення U_{max} =1,39 мВ грубу похибку.

Розв'язок.

Використаємо статистичний критерій визначення грубої похибки.

1. Впорядкуємо результати вимірювань в порядку зростання їх значень:

1,07; 1,08; 1,10; 1,12; 1,13; 1,15; 1,16; 1,17; 1,20; 1,37; 1,39.

2. Обчислимо середнє арифметичне значення

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^{11} U_i}{11} = 1{,}18 \text{ мВ}$$

3. Обчислимо СКВ експериментальних результатів:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{11}\left(U_i - \bar{U}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}1067}{10}} = 0{,}103 \text{ мВ}.$$

3. Знаходимо

$$\beta_{max} = \frac{\left|U_{max} - \bar{U}\right|}{\sigma} = \frac{0{,}21}{0{,}103} = 2{,}04.$$

4. Покладемо P =0,95, тоді q =0,05. За таблицею додатку 5 при n =11 і q =5% знаходимо значення β_T = 2,46.

5. Оскільки $\beta_{max} < \beta_T$ (2,04 < 2,46), то експериментальне значення 1,39 мВ не містить грубу похибку і його треба враховувати.

6. Якщо покладемо P =0,90, тоді q = 0,1. За таблицею додатку 5 при n =11 і q =10% знаходимо β_T =2,34. І знову $\beta_{max} < \beta_T$.

Отже і при q =10% значення 1,39 мВ треба враховувати.

Використаємо критерій Романовського для розв'язку цієї задачі, оскільки при малій кількості n вимірювань критерій Романовського дає більш точні результати :

1. $\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^{10} U_i}{10} = 1{,}16$ мВ; $\sigma = 0{,}086$.

2. Задаємо імовірність $p_k = 0{,}05$ того, що значення $\left|U_{max} - \bar{U}\right|$ не перевищує $\varepsilon^* = t' \cdot \sigma$.

3. По таблиці знаходимо, що для $n = 10$ і $p_k = 0{,}05$, $t' = 2{,}37$. Отже

$$\varepsilon^* = 2{,}37 \cdot 0{,}086 = 0{,}204 \text{ мВ}$$

4. Знаходимо

$$\left|U_{max} - \bar{U}\right| = 1{,}39 - 1{,}16 = 0{,}23 \text{ мВ}$$

5. Виходить, що

$$\left|U_{max} - \bar{U}\right| > \varepsilon^*.$$

Отже значення $U = 1{,}39$ мВ підлягає виключенню.

Задача 2. Виконано 16 вимірювань деякої фізичної величини x і отримані наступні результати:

789; 791;792; 794; 795; 796; 797; 798; 800; 801; 803; 804; 806; 807; 809. 772.

Перевірити чи не містить значення $x_{16} = 772$ грубу похибку.

Розв'язок

Використаємо критерій Романовського для розв'язку цієї задачі.

1. Знаходимо середнє арифметичне значення результатів вимірювань за виключенням значення $x = 772$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = 798{,}8 \approx 799$$

2. Знаходимо різницю

$$\left|x_{16} - \bar{x}\right| = 27$$

2. Знаходимо середнє квадратичне відхилення σ даного ряду результатів 15 –ти вимірювань:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2}{15 - 1}} = 6.13$$

3. Задамося імовірністю $p_k = 0.05$ і знаходимо по таблиці 10.2 для $n = 15$, $t' = 4.28$. Звідси

$$\varepsilon^* = t' \cdot \sigma = 4.28 \cdot 6.13 \approx 26.24.$$

4. Виходячи із співвідношення

$$\left|x_{16} - \bar{x}\right| > \varepsilon^*$$

робимо висновок, що результат $x_{16} = 772$ містить грубу похибку і підлягає виключенню з ряду результатів.

Задача 3. При вимірюванні миттєвого значення напруги шуму U_M у відсутності корисного сигналу отримані наступні результати: - 4,2; 0,3; 5,7; - 7,2; 3,9; 2,2; - 0,1; 1,4 мВ. Потужність електричного шуму, яка виділяється на опорі R = 1 Ом, дорівнює W = 4 мВт.

Визначити наявність грубих похибок в отриманих результатах.

Розв'язок

1. Результат U_4 -7,2 мВ здається таким, що містить грубу похибку. Для перевірки цієї гіпотези застосуємо правило трьох сигм.

2. Знаходимо середнє арифметичне значення результатів вимірювань:

$$\overline{U_M} = \frac{\sum_{i=1}^{8} U_i}{8} = 0{,}25 \text{ мВ}$$

3. Визначаємо вираз:

$$|U_4 - \overline{U_M}| = |7{,}20 - 0{,}25| = 6{,}95 \text{ мВ}$$

3. Середнє квадратичне відхилення миттєвого значення напруги шуму визначаємо з виразу:

$$W = \frac{\sigma^2}{R}$$

оскільки потужність визначається за формулою $W = \frac{U^2}{R}$. Звідси отримуємо

$$\sigma^2 = WR = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ В}$$

Отже, $\sigma = 2$ мВ, тобто миттєве значення напруги шуму дорівнює 2 мВ.

4. За «правилом трьох сигм» результати вимірювань миттєвих значень напруги шуму не повинні перевищувати 6 мВ, тобто $\Delta(U) \leq 6\text{мВ}$

5. В експериментальному ряду значень напруги результат U_4 -7,2 мВ є таким, що містить грубу похибка, оскільки

$$\Delta(U) > 6\text{мВ} \text{ тобто } 6{,}95 \text{ мВ} > 6\text{мВ}$$

Отже, цей результат потрібно виключити з подальшого розгляду

Задача 4 Проведено 10 відліків рівня сигналу: 72,36; 72,35; 72,35: 72,34; 72,33; 72,37; 72,36; 72,35; 72,35; 72,36 (дБ). Перевірити, чи містить результат вимірювання грубу похибку, якщо довірча ймовірність $P_{ДОВ} = 0{,}9$.

Розв'язок

Використаємо статистичний критерій визначення результатів, що містять грубі похибки.

1. Результати вимірювань запишемо у вигляді зростаючого ряду: 72,33; 72.34; 72,35; 72,35; 72,35; 72,35; 72,36; 72,36; 72,36; 72,37.

2. Знайдемо середнє значення $\bar{x}$ і середньоквадратичне відхилення σ:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 72{,}352; \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n\text{-}1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0{,}011$$

3. Визначимо відхилення:

$$\beta_1 = \frac{|x_1 - \bar{x}|}{\sigma} = 2{,}0$$

$$\beta_{10} = \frac{|x_{10} - \bar{x}|}{\sigma} = 1{,}63$$

4. Значення β_{10} і β_1 порівнюємо із граничним відхиленням β_T, взятим з довідкових даних (таблиця додатку 5).

При $q = 1 - P_{ДОВ} = 0{,}1$, $n = 10$ знаходимо $\beta_T = 2{,}29$

5. Висновок: $\beta_{10} < 2{,}29$ і , $\beta_1 < 2{,}29$, отже грубих похибок немає.

10.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 1. При вимірюванні струму в нормальних умовах проведений ряд спостережень, в мА: 10,07; 10,08; 10,10; 10,12; 10,15; 10,16; 10,17; 10,20; 10,40. Є підозра, що результат спостереження 10,40 мА містить грубу похибку. Перевірити, використовуючи правило "трьох сигм", чи можна його відкинути як анормальний результат.

Задача 2. При багатократному вимірюванні напруги електричного струму за допомогою цифрового вольтметра отримані значення у В: 10,38; 10,37; 10,39; 10,38; 10,39; 10,44; 10,41; 10,5; 10,45; 10,39; 11,1; 10,45. Перевірити отримані результати вимірювань на наявність грубої похибки з ймовірністю P = 0,95.

Задача 3. Багатократні вимірювання опору котушки індуктивності з підвідними провідниками було здійснено компенсаційним методом. Одержана вибірка R_i (в Ом): 4,55; 4,65; 4.72; 4,69; 4,67; 4,70; 4,66; 4,65; 4,69; 4,54; 1.73: 4.95; 4,70; 4,71; 4.73; 4.68; 4.70: 4,72; 4,74; 4,64. Перевірити дані на наявність грубої похибки при рівні значимості q = 0,l.

Задача 4. Було виконано 12 вимірювань деякої фізичної величини і одержано вибірку: 28, 25, 27, 26, 26, 27, 26, 26, 22, 26, 26, 27. Розподіл даних належить нормальному. При якому рівні значимості q ці вимірювання можна вважати такими. що не містять грубої похибки? Обчислити результат вимірювання для рівня значимості q = 10%, знайти середню та середню квадратичну похибку вимірювання, зробити необхідні заокруглення результатів обчислень.

Задача 5. При діагностуванні паливної системи автомобіля результати n = 5 вимірювань витрати палива склали:

22, 24, 26, 28, 30 л на 100 км.

Результат Z=5 викликає сумнів. Перевірити за критерієм Романовського при рівні значимості q = 0,01 чи не є він промахом.

Задача 6. При багатократному вимірюванні напруги U отриманий ряд значень:

U, В 4,25; 4,21; 4,23; 4,21; 4,25; 4,23; 4,26; 4,22; 4,21; 4,23; 4,86; 4,21; 4,25; 4,24; 4,26; 4,22

Використовуючи критерій Романовського перевірити отримані результати вимірювань на наявність грубої похибки з ймовірністю P = 0,90.

Задача 7. Здійснити обробку результатів вимірювань, дані яких представлені в таблиці, на наявність грубих похибок при рівні значимості q = 0,05.

Результати вимірювань

	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	36,008	– 0,001	0,000001
2	36,008	– 0,001	0,000001
3	36,008	– 0,001	0,000001
4	36,008	– 0,001	0,000001
5	36,010	0,001	0,000001
6	36,009	0	0
7	36,012	0,003	0,000009
8	36,009	0	0
9	36,011	0,002	0,000004
10	36,007	– 0,002	0,000004
11	36,012	0,003	0,000009

Задача 8. Було проведено п'ять вимірювань напруги електромережі. Були отримані наступні результати:

127,1; 127,2; 126,9; 127,2; 127,6 В.

Результат Z=5 (127,6 В) істотно (на перший погляд) відрізняється від інших. Перевірити на рівні значимості q =0,05, чи не є він промахом.

Задача 9. За допомогою оптиметра виконані 10 послідовних вимірювань калібру - пробки і отримані вказані в таблиці значення x_i :

i	x_i
1	29,947
2	29,968
3	30,076
4	30,052
5	29,940
6	29,962
7	29,995
8	30,015
9	30,055
10	30,060

Перевірити результат x= 30,076 на наявність грубої похибки.

Задача 10. Прецизійне шестикратне спостереження частоти в нормальних умовах дало наступні результати в Гц: 172,361; 172,357; 172,352; 172,346; 172,344; 172,340. Перевірити чи не містить результат 172,361 Гц грубу похибку при рівні значимості q = 0,05.

Задача 11. При багатократних вимірюваннях тиску маслонасосної станції отримані наступні значення: 12,38; 12,43; 12,32; 12,32; 12,48; 12,74; 12,45; 12,46 МПа. Припускаючи нормальний закон розподілу, перевірте наявність " грубої" похибки в результатах вимірювань з рівнем значимості q = 0,01.

Задача 12. Для дослідження зносу шийки колінчастого валу провели n = 17 вимірювань його діаметру і отримали наступні результати:

56,586; 56,588; 56,590; 56,607; 56,590; 56,593; 56,588; 56,597; 56,602; 56,592; 56,598; 56,597; 56,601; 56,593; 56,597; 56,603; 56,597.

Визначити наявність грубої похибки при рівні значимості q = 0,07.

Задача 13. Оцінити випадкову похибку вимірювання опору з довірчою ймовірністю 99,5 %%, якщо при рівноточних вимірюваннях були отримані наступні результати: 46,43; 46,49; 46,42; 46,52; 46,38; 46,40; 46,51 Ом. Розподіл випадкової погрішності вважати нормальним. Перевірити результати 46,38 і 46,52 на наявність грубої похибки.

Задача 14. При багатократному вимірюванні опору R отриманий ряд значень:

R, кОм 7,36; 7,32; 7,34; 7,32; 7,36; 7,97; 7,34; 7,37; 7,33; 7,32; 7,34; 7,32; 7,36; 7,38; 7,37; 7,33

Використовуючи критерій Романовського перевірити отримані результати вимірювань на наявність грубої похибки з ймовірністю Р = 0,95.

Задача 15. При перевірці роботи генератора електричного струму легкового автомобіля отримали наступні результати вимірювання напруги бортової мережі: 14,0; 14,7; 14,2; 13.9; 14.3; 15,6; 14.4; 14,5; 14,6 В. Визначити за наявність " промахів" в результатах вимірювань з рівнем значимості q = 0,01.

Задача 16. При вимірюванні напруги джерела живлення отримані наступні результати, В: 9,78; 9,65; 9,83; 9,69; 9,74; 9,80; 9,68: 9,71; 9,81. Визначити наявність грубих похибок в результатах вимірювань з рівнем значимості q = 0,05.

Задача 17. Обробити ряд результатів спостережень Хі (таблиця), отриманий за результатами багатократних прямих вимірювань опору, і оцінити випадкову похибку вимірювання, вважаючи результати виправленими і рівноточними. Визначити наявність грубих похибок. Довірчу ймовірність прийняти Р = 0,95.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_i	32,700	32,744	32,786	32,578	32,848	32,593	32,588	32,519	32,603
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X_i	32,627	32,635	32,970	32,754	32,702	32.879	32.799	32.775	32.690

i	19	20	21	22	23	24	25
X_i	32,671	32,645	32,701	32,688	32,676	32,685	32,826

Задача 18. При багатократних вимірюваннях маси m отриманий ряд значень:

m, кг 0,7; 0,74; 0,38; 0,69; 0,72; 0,68; 0,68; 0,7; 0,71; 0,5; 0,74; 0,7; 0,69; 0,72; 0,68; 0,69; 0,72; 0,68; 0,68

Використовуючи критерій Романовського перевірити отримані результати вимірювань на наявність грубої похибки з ймовірністю Р = 0,90.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Значення інтегралу ймовірностей $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

при заданому значенні t.

t	Ф(t)	t	Ф(t)	t	Ф(t)	t	Ф(t)
0,00	0,0000	0,95	0,6579	1,85	0,9357	2,75	0,9940
0,05	0,0399	1,00	0,6827	1,90	0,9426	2,80	0,9949
0,10	0,0797	1,05	0,7063	1,95	0,9488	2,85	0,9956
0,15	0,1192	1,10	0,7287	2,00	0,9545	2,90	0,9963
0,20	0,1585	1,15	0,7499	2,05	0,9596	2,95	0,9968
0,25	0,1974	1,20	0,7699	2,10	0,9643	3,0	0,99730
0,30	0,2358	1,25	0,7887	2,15	0,9684	3,1	0,99806
0,35	0,2737	1,30	0,8064	2,20	0,9722	3,2	0,99862
0,40	0,3108	1,35	0,8230	2,25	0,9756	3,3	0,99904
0,45	0,3473	1,40	0,8385	2,30	0,9786	3,4	0,99932
0,50	0,3829	1,45	0,8529	2,35	0,9812	3,5	0,99954
0,55	0,4177	1,50	0,8664	2,40	0,9836	3,6	0,99968
0,60	0,4515	1,55	0,8789	2.45	0,9857	3,7	0,99978
0,65	0,4843	1,60	0,8904	2,50	0,9876	3,8	0, 99986
0,70	0,5161	1,65	0,9011	2,55	0,9892	3,9	0,99990
0,75	0,5467	1,70	0,9109	2,60	0,9907	4,0	0,999936
0,80	0,5763	1,75	0,9199	2,65	0,9920	4,5	0,999994
0,85	0,6047	1,80	0,9281	2,70	0,9931	5,0	0,9999994
0,90	0,6319						

Додаток 2.

Значення t при заданих значеннях інтегралу ймовірностей $\Phi(t)$

.

Ф(t)	1 – Ф(t)	t	Ф(t)	1 – Ф(t)	t
0,50	0,50	0,675	0,992	0,008	2,652
0,60	0,40	0,842	0,993	0,007	2,697
0,70	0,30	1,036	0,994	0,006	2,748
0,75	0,25	1,150	0,995	0,005	2,807
0,80	0,20	1,282	0,996	0,004	2,878
0,85	0,15	1,440	0,997	0,003	2,968
0,90	0,10	1,645	0,998	0,002	3,090
0,95	0,05	1,960	0,999	0,001	3,291
0,96	0,04	2,054	0,9995	$5\cdot10^{-4}$	3,481
0,97	0,03	2,170	0,9999	$1\cdot10^{-4}$	3,891
0,98	0,02	2,326	0,99999	$1\cdot10^{-5}$	4,417
0,99	0,01	2,576	0,999999	$1\cdot10^{-6}$	4,892
0,991	0,009	2,612	0,999999	$1\cdot10^{-7}$	5,327

Додаток 3

Значення t_c для різних значень довірчої ймовірності $P_{дов}$ та кількості вимірювань n
(розподіл Ст'юдента)

$P_{дов}$ / n	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	1,000	1,376	1,963	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	636,6
3	0,816	1,061	1,336	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
4	0,765	0,978	1,250	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
5	0,741	0,941	1,190	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
6	0,727	0,920	1,156	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
7	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,45	3,14	4,71	5,96
8	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
9	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
10	0,703	0,883	1,110	1,383	1,833	2,26	2.82	3,25	4,78
11	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
12	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
13	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
14	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
15	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
16	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
17	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
18	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
19	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
20	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,33	2,58	3,29

Додаток 4.

Значення довірчої ймовірності $P_{дов}$ для різних значень коефіцієнта Ст'юдента t_c та кількості вимірювань n.

n \ t_c	2	2,5	3	3,5
2	0,705	0,758	0,795	0,823
3	0,816	0,870	0,905	0,928
4	0,861	0,912	0,942	0,961
5	0,884	0,933	0,960	0,975
6	0,898	0,946	0,970	0,983
7	0,908	0,953	0,976	0,987
8	0,914	0,959	0,980	0,990
9	0,919	0,963	0,983	0,992
10	0,923	0,966	0,985	0,993
11	0,927	0,969	0,987	0,994
12	0,929	0,970	0,988	0,995
13	0,931	0,972	0,989	0,996
14	0,933	0,974	0,990	0,996
15	0,935	0,974	0,990	0,996
16	0,936	0,975	0,991	0,997
17	0,937	0,976	0,992	0,997
18	0,938	0,977	0,992	0,997
19	0,939	0,978	0,992	0,997
20	0,940	0,978	0,993	0,997
∞	0,955	0,988	0,997	0,9995

Додаток 5.

Найбільші абсолютні значення нормованих відхилень β_T.

Рівень значимості q, $\%$	Число результатів вимірювань n						
	4	6	8	10	12	15	18
1	1.73	2.16	2.43	2.62	2,75	2,90	3,00
2	1.72	2,13	2.37	2,54	2.66	2.80	2,90
5	1.71	2.10	2,27	2,41	2.52	2.64	2,72
10	1.69	2.00	2.17	2,29	2,39	2.49	2,58
Рівень значимості q, $\%$	Число результатів вимірювань n						
	20	25	30	35	40	45	50
1	3.08	3.20	3.29	3,36	3.42	3,47	3.52
2	2.96	3.07	3.16	3,22	3,28	3,33	3,37
5	2.78	2,88	2.96	3,02	3,08	3.12	3,16
10	2.62	2.72	2.79	2.85	2.90	2.95	2.99

ЛІТЕРАТУРА

1. Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии: Учеб. Пособие. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – 312 с.

2. Маркин Н.С. Практикум по метрологии: Учебное пособие – М.: Изд– во стандартов, 1994. – 188 с.

3. Вайсбанд М.Д., Проненко В.И. Техника выполнения метрологических работ. – К.: Техника, 1986. – 168 с.

4. Шаблин С.А. Прикладная метрология в вопросах и ответах. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 189 с.

5. Поліщук Є.С., Дороживець М.М., Яцук В.О., та ін. Метрологія та вимірювальна техніка: Підручник / Є.С.Поліщук, М.М.Дорожовець, В.О.Яцук, В.М.Ванько, Т.Г.Бойко; За ред. проф. Є. С. Поліщука. – Львів.: Видавництво «Бескід Біт» , 2003. – 544 с.

6. Цюцюра В.Д., Цюцюра С.В. Метрологія та основи вимірювань: Навч. посіб. – К.: Знання-Прес, 2003. – 180 с.

7. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – М.: Энергоатомиздат, 1985. - 245 с.

8. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология: Учеб. пособие для вузов. – М.: Логос, 2001. – 408 с.

9. Рабинович С.Г. Погрешности измерений. - Л.: Энергия, 1978. - 262 с.

10. Иванов В.А., Марусина М.Я., Ткалич В.Л. Прикладная метрология: Учебное пособие. – СПб.: СПбГИТМО(ТУ), 2003. – 104 с.

11. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – Изд. 7-е, стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 479 с.

12. Пронкин Н.С. Основы метрологи. Практикум по метрологии и измерениям. - М.: Логос, 2007 – 392 с.

13. Кузнецов В.А., Ялунина Г.В. Основы метрологии. Учебное пособие. – М.: Изд-во стандартов, 1995. – 280 с.

14. Головко Д.Б., Рего К.Г., Скрипник Ю.О. Основи метрології та вимірювань. - Київ.: Либідь, 2001. - 408 с.

15. Сергеев А.Г. Метрология: Учебник. – М.: Логос, 2005. – 272 с.

16. ДСТУ 2681-94. Метрологія. Терміни та визначення.

17. Душин Е.М. и др. Основы метрологии и электрические измерения. — Л.: Энергоатомиздат, 1987. — 480 с.

18. Кравцов А.В. Метрология и электрические измерения. —М.: Колос, 1999. — 216 с.

19. Кузнецов В.А., Ялунина Г.В. Общая метрология. — М.: Изд-во стандартов, 2001. — 272 с.