

УДК 512.44

DOI 10.24144/2616-7700.2022.1(40).33-50

**Я. В. Варга<sup>1</sup>, В. Л. Реґо<sup>2</sup>, Г. Я. Семчишин<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доц. кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,  
кандидат фізико-математичних наук

iana.varga@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7842-248X>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
ст. викладач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь

vasyl.reho@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4995-2577>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
ст. викладач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь

halyna.semchyshyn@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1029-579X>

## ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

У даній статті обґрунтований оригінальний метод побудови чисельно-аналітичної схеми дослідження розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, підпорядкованих нелінійним інтегральним крайовим умовам. В основі методу лежить перехід від заданих інтегральних крайових умов до параметризованих умов модельного типу, які мають простий вигляд початкових умов. Для модельної параметризованої задачі побудована конструктивна чисельно-аналітична схема, яка базується на параметризованих послідовних наближеннях із покращеними характеристиками збіжності. Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної крайових задач. Доведено, що діленням відрізка інтегрування навпіл у два рази можна покращити достатні умови рівномірної збіжності параметризованих послідовних наближень. Цю техніку та її переваги продемонстровано на прикладі інтегральної крайової задачі, в якій для виконання достатніх умов збіжності потрібно поділити відрізок інтегрування навпіл.

**Ключові слова:** звичайні диференціальні рівняння, нелінійна інтегральна крайова задача, неперервно диференційовний розв'язок, параметризація, умова Ліпшиця, ділення відрізка інтегрування, збіжність послідовних наближень.

**1. Вступ.** Дослідження розв'язків крайових задач пов'язане з властивостями спеціальних послідовностей функцій. Головне обмеження, пов'язане із збіжністю цих послідовностей, полягає в тому, що найбільше власне значення матриці

$$Q = \frac{3(b-a)}{10}K$$

припускається меншим за одиницю:

$$r(Q) < 1. \quad (1)$$

У даній роботі показано, що використовуючи відповідну техніку ділення заданого інтервалу на підінтервали, достатню умову (1) вдається послабити в два рази.

**2. Постановка та зведення до двох модельних задач.** Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь (2), підпорядковану інтегральним крайовим умовам вигляду (3)

$$\frac{du(t)}{dt} = f\left(t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right), \quad t \in [a, b], \quad (2)$$

$$\int_a^b g(s, u(s)) ds = d, \quad (3)$$

де  $f : [a, b] \times D \times D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  і  $g : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  є неперервними в певній обмеженій області, яка є коректно визначеною нижче,  $d \in \mathbb{R}^n$  – заданий вектор.

Зафіксуємо деякі відкриті обмежені області  $D_a, D_{\frac{a+b}{2}}, D_b \subset \mathbb{R}^n$  і цікавимося неперервно диференційовними розв'язками  $x$  крайової задачі (2), (3) такими, що

$$u(a) \in D_a, \quad u\left(\frac{a+b}{2}\right) \in D_{\frac{a+b}{2}}, \quad u(b) \in D_b. \quad (4)$$

Загалом можемо вибрати  $D_a, D_{\frac{a+b}{2}}, D_b$  опуклими множинами.

На основі множин  $D_a$  і  $D_{\frac{a+b}{2}}$  введемо у розгляд множину

$$D_{a, \frac{a+b}{2}} = (1 - \theta)z + \theta\eta, \quad z \in D_a, \quad \eta \in D_{\frac{a+b}{2}}, \quad \theta \in [0, 1] \quad (5)$$

і її покомпонентний векторний  $\rho^x$ -окіл

$$D^x = B\left(D_{a, \frac{a+b}{2}}, \rho^x\right). \quad (6)$$

Аналогічно, на основі множин  $D_{\frac{a+b}{2}}$  і  $D_b$  визначимо множину

$$D_{\frac{a+b}{2}, b} = (1 - \theta)\eta + \theta\lambda, \quad \eta \in D_{\frac{a+b}{2}}, \quad \lambda \in D_b, \quad \theta \in [0, 1] \quad (7)$$

і її покомпонентний векторний  $\rho^y$ -окіл.

$$D^y = B\left(D_{\frac{a+b}{2}, b}, \rho^y\right). \quad (8)$$

Важливо підкреслити, що  $D^x, D^y$  є обмеженими множинами, і надалі припускається, що умови Ліпшиця

$$f \in Lip(K_x, D^x), \quad f \in Lip(K_y, D^y), \quad (9)$$

$$|f(t, u, v) - f(t, \tilde{u}, \tilde{v})| \leq K_1^x |u - \tilde{u}| + K_2^x |v - \tilde{v}|, \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad \{u, v\} \in D^x,$$

$$|f(t, u, v) - f(t, \tilde{u}, \tilde{v})| \leq K_1^y |u - \tilde{u}| + K_2^y |v - \tilde{v}|, \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad \{u, v\} \in D^y$$

в цих областях виконуються локально.

Ставимо задачу знаходження неперервно диференційовного розв'язку  $u(t)$  задачі (2), (3), для якого має місце включення (4).

Насамперед, спростимо інтегральні крайові умови (3) і зведемо їх до придатних умов модельного типу. Для цього введемо в розгляд векторні параметри

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (10)$$

формально поклавши

$$z = u(a), \quad \eta = u\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \lambda = u(b). \quad (11)$$

Після цього, замість крайової задачі (2), (3), використовуючи техніку ділення відрізка навпіл, будемо розглядати відповідно на інтервалах  $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$  та  $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$  наступні дві параметризовані задачі модельного типу (12)-(13) та (14)-(15):

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad x(a) = z, \quad (12)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad x\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta \quad (13)$$

та

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y(t), \frac{dy(t)}{dt}\right), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta, \quad (14)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y(t), \frac{dy(t)}{dt}\right), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad y(b) = \lambda, \quad (15)$$

кожна з яких складається з двох задач Коші, де  $z, \eta, \lambda \in \mathbb{R}^n$  вважаються параметрами. Зауважимо, що довжина інтервалу в задачах (12)-(13) та (14)-(15) є  $\frac{b-a}{2}$  на противагу  $b-a$  у випадку вихідної задачі (2), (3).

Техніка параметризації, яку будемо використовувати, полягає у тому, що замість вихідної задачі (2),(3) вивчаємо сім'ю параметризованих модельних задач (12)-(13) та (14)-(15). Після цього, розв'язки вихідної крайової задачі отримуються відповідним вибором чисельних значень введених параметрів.

**Зауваження 1.** [9, Зауваження 4] Множина розв'язків крайової задачі (2), (3) співпадає з тією множиною розв'язків параметризованих задач (12)-(13) та (14)-(15), які задовольняють додаткові умови (11).

Наведемо допоміжні означення та твердження, які потрібні для обґрунтування результатів.

**Означення 1.** [5, Означення 1] Для будь-якого невід'ємного вектора  $\rho \in \mathbb{R}^n$  і точки  $z \in \mathbb{R}^n$  під компонентним векторним околom точки розуміємо множину

$$B(z, \rho) = \{\psi \in \mathbb{R}^n : |\psi - z| \leq \rho\}.$$

Аналогічно, для будь-якої обмеженої області  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  і будь-якого невід'ємного вектора  $\rho \in \mathbb{R}^n$  під векторним  $\rho$ -околom області  $\Omega$  розуміємо множину

$$B(\Omega, \rho) = B(z, \rho).$$

**Означення 2.** [5, Означення 2] На основі двох обмежених множин  $D_a \in \mathbb{R}^n$ ,  $D_b \in \mathbb{R}^n$  визначимо множину

$$D_{a,b} = (1 - \theta)z + \theta\eta, \quad z \in D_a, \quad \eta \in D_b, \quad \theta \in [0, 1]$$

і її векторний  $\rho$ -окил

$$D = B(D_{a,b}, \rho).$$

Таким чином, множину  $D_{a,b}$  формують всі можливі «відрізки», що з'єднують точки множин  $D_a$  та  $D_b$ .

**Лема 1.** [1, Лема 2] Для будь-якої неперервної функції  $f : [\tau, \tau + I] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , має місце оцінка

$$\left| \int_{\tau}^t \left[ f(\tau) - \frac{1}{I} \int_{\tau}^{\tau+I} f(s) ds \right] d\tau \right| \leq \alpha_1(t, \tau, I) \frac{\max_{s \in [\tau, \tau+I]} f(s) - \min_{s \in [\tau, \tau+I]} f(s)}{2} \quad (16)$$

для всіх  $t \in [\tau, \tau + I]$ , де

$$\alpha_1(t, \tau, I) = 2(t - \tau) \left( a - \frac{t - \tau}{I} \right), \quad |\alpha_1(t, \tau, I)| \leq \frac{I}{2}, \quad t \in [\tau, \tau + I]. \quad (17)$$

**Лема 2.** [3, Лема 3] Нехай послідовність неперервних функцій  $[\alpha_m(t, \tau, I)]_m^{\infty}$  для  $t \in [\tau, \tau + I]$  визначається рекурентним співвідношенням

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1}(t, \tau, I) &= \left( 1 - \frac{t - \tau}{I} \right) \int_{\tau}^t \alpha_m(s, \tau, I) ds + \\ &+ \frac{t - \tau}{I} \int_t^{\tau+I} \alpha_m(s, \tau, I) ds, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

де  $\alpha_0(t, \tau, I) = 1$ . Тоді мають місце наступні оцінки для всіх  $t \in [\tau, \tau + I]$ :

$$\alpha_{m+1}(t, \tau, I) \leq \frac{10}{9} \left( \frac{3I}{10} \right)^m \alpha_1(t, \tau, I), \quad m \geq 0, \quad (19)$$

$$\alpha_{m+1}(t, \tau, I) \leq \frac{3I}{10} \alpha_m(t, \tau, I), \quad m \geq 2,$$

де  $\alpha_1(t, \tau, I)$  наводиться в (17).

### 3. Ділення відрізка інтегрування навпіл та послідовні наближення.

Отже, ми пропонуємо замість інтегральної крайової задачі (2), (3) досліджувати спочатку окремо дві допоміжні модельні задачі (12)–(13) та (14)–(15). Для цього побудуємо придатні ітераційні процеси і вивчимо їх властивості.

Покладемо, що областю визначення за фазовою змінною функції  $f$  у правій частині системи (2) є множина  $D^x$  вигляду (6), тобто  $f : [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \times D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Припустимо, що  $f \in Lip(K_x, D^x)$  з вектором  $\rho^x$ , який задовольняє нерівність

$$\rho^x \geq \frac{b - a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f), \quad (20)$$

крім того,

$$r(Q_x) < 1, \quad Q_x = \frac{3(b-a)}{20} K_x. \quad (21)$$

Для параметризованої задачі (12)–(13) введемо в розгляд наступну рекурентну параметризовану послідовність функцій  $x_m : [a, \frac{a+b}{2}] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , поклавши

$$\begin{aligned} x_0(t, z, \eta) &= z + \frac{2(t-a)}{b-a} [\eta - z] = \left[ 1 - \frac{2(t-a)}{b-a} \right] z + \frac{2(t-a)}{b-a} \eta, \\ x_{m+1}(t, z, \eta) &= z + \int_a^t f \left( s, x_m(s, z, \eta), \frac{dx_m(s, z, \eta)}{ds} \right) ds - \\ &- \frac{2(t-a)}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f \left( s, x_m(s, z, \eta), \frac{dx_m(s, z, \eta)}{ds} \right) ds - \frac{2(t-a)}{b-a} [\eta - z], \end{aligned} \quad (22)$$

при  $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$  для всіх  $m = 0, 1, 2, \dots$ , яка задовольняє початкові умови  $x(a) = z$ ,  $x(\frac{a+b}{2}) = \eta$  для всіх  $z, \eta \in \mathbb{R}^n$ , де  $z \in D_a, \eta \in D_{\frac{a+b}{2}}$  вважаються параметрами.

Подібно, для параметризованої задачі (14)–(15) на підінтервалі  $[\frac{a+b}{2}, b]$  покладемо, що областю визначення за фазовою змінною функції  $f$  є множина  $D^y$  вигляду (8), крім того, припустимо, що  $f \in Lip(K_y, D^y)$  з вектором  $\rho^y$ , який задовольняє нерівність

$$\rho^y \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) \quad (23)$$

і

$$r(Q_y) < 1, \quad Q_y = \frac{3(b-a)}{20} K_y. \quad (24)$$

Для вивчення другої модельної задачі (14)–(15) введемо у розгляд параметризовану послідовність функцій  $y_m : [\frac{a+b}{2}, b] \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , поклавши

$$\begin{aligned} y_0(t, \eta, \lambda) &= \eta + \frac{2t-a-b}{b-a} [\lambda - \eta] = \left[ 1 - \frac{2t-a-b}{b-a} \right] \eta + \frac{2t-a-b}{b-a} \lambda, \\ y_{m+1}(t, \eta, \lambda) &= \eta + \int_{\frac{a+b}{2}}^t f \left( s, y_m(s, \eta, \lambda), \frac{dy_m(s, \eta, \lambda)}{ds} \right) ds - \\ &- \frac{2t-a-b}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f \left( s, y_m(s, \eta, \lambda), \frac{dy_m(s, \eta, \lambda)}{ds} \right) ds + \frac{2t-a-b}{b-a} [\lambda - \eta], \end{aligned} \quad (25)$$

при  $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$  для всіх  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  і  $\eta \in \mathbb{R}^n$ .

Зауважимо, що всі члени послідовності функцій (22), (25) задовольняють двоточкові модельні крайові умови (11) для всіх  $z, \eta, \lambda \in \mathbb{R}^n$ .

**4. Дослідження збіжності послідовних наближень та визначальні рівняння.** Наступне твердження показує, що послідовність функцій (22) рівномірно збігається для всіх  $(z, \eta) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$  і її гранична функція є розв'язком певної адитивно збуреної задачі.

**Теорема 1.** *Припустимо, що існує невід'ємний вектор  $\rho^x$  такий, що  $f \in Lip(K_x, D^x)$  на інтервалі  $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ , і який задовольняє нерівність (20) та виконується*

$$r(Q_x) < 1$$

з матрицею  $K$ , для якої виконуються умови (21).

Тоді, для довільної пари векторів  $(z, \eta) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ :

1. Всі члени послідовності (22) є неперервно диференційовними функціями на відрізьку  $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$  і задовольняють модельні умови

$$x_m(t = a, z, \eta) = z, \quad x_m\left(t = \frac{a+b}{2}, z, \eta\right) = \eta.$$

2. Послідовність функцій (22) рівномірно збігається відносно  $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$  при  $m \rightarrow \infty$  до граничної функції

$$x_\infty(t, z, \eta) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z, \eta).$$

3. Гранична функція задовольняє умови:

$$x_\infty(a, z, \eta) = z, \quad x_\infty\left(\frac{a+b}{2}, z, \eta\right) = \eta.$$

4. Функція  $x_\infty(t, z, \eta)$  в області  $D^x$  є єдиним абсолютно неперервним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int_a^t f\left(s, x(s), \frac{dx(s)}{ds}\right) ds - \frac{2(t-a)}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x(s), \frac{dx(s)}{ds}\right) ds + \frac{2(t-a)}{b-a} [\eta - z], \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]. \quad (26)$$

Інакше кажучи,  $x_\infty(t, z, \eta)$  є розв'язком наступної задачі Коші для адитивно збуреної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \frac{dx(t)}{dt}\right) + \frac{2}{b-a} \Delta(z, \lambda), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad (27)$$

$$x(a) = z,$$

де збурення  $\Delta(z, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  – відображення, яке визначене формулою:

$$\Delta(z, \eta) := [\eta - z] - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x_\infty(s, z, \eta), \frac{dx_\infty(s, z, \eta)}{ds}\right) ds. \quad (28)$$

## 5. Справедлива оцінка

$$\begin{aligned}
& |x_\infty(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta)| \leq \\
& \leq \frac{10}{9} \alpha_1 \left( t, a, \frac{b-a}{2} \right) Q_x^m (I_n - Q_x)^{-1} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f), \quad t \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right], \quad m \geq 0, \quad (29)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = & \frac{1}{2} \left[ \max_{(t, x, x') \in [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \times D^1} f(t, x, x') - \right. \\
& \left. - \min_{(t, x, x') \in [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \times D^1} f(t, x, x') \right]. \quad (30)
\end{aligned}$$

**Доведення.** Справедливість твердження 1 перевіряється прямим обчисленням. Доведемо, що за умов теореми для фіксованих  $z \in D_a$ ,  $\eta \in D_{\frac{a+b}{2}}$  і  $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$  послідовність функцій (22) належить області  $D$  і є послідовністю Коші у банаховому просторі  $C([a, \frac{a+b}{2}], \mathbb{R}^n)$  зі стандартною рівномірною нормою.

Дійсно, з використанням оцінки (16) із леми 1 для  $\tau = a$ ,  $I = \frac{b-a}{2}$  і співвідношення (22) при  $m = 0$ ,  $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$  випливає, що

$$\begin{aligned}
& |x_1(t, z, \eta) - x_0(t, z, \eta)| \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \alpha_1 \left( t, a, \frac{b-a}{2} \right) \left[ \max_{t \in [a, \frac{a+b}{2}]} f(t, x_0(t, z, \eta), x'_0(t, z, \eta)) - \right. \\
& \quad \left. - \min_{t \in [a, \frac{a+b}{2}]} f(t, x_0(t, z, \eta), x'_0(t, z, \eta)) \right] \leq \\
& \leq \alpha_1 \left( t, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \frac{b-a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f). \quad (31)
\end{aligned}$$

Отже, приходимо до висновку, що  $x_1(t, z, \eta) \in D^x$  при  $(t, z, \eta) \in [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ .

Використовуючи це, і міркуючи за індукцією згідно з лемою 2, легко переконатися в тому, що

$$|x_m(t, z, \eta) - x_0(t, z, \eta)| \leq \alpha_1 \left( t, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \frac{b-a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f),$$

$$m = 2, 3, \dots,$$

а це означає, що всі функції послідовності (22) містяться в області  $D^x$  для всіх  $m = 1, 2, 3, \dots$  та  $(t, z, \eta) \in [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ .

Розглянемо різницю функцій

$$\begin{aligned}
& x_{m+1}(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta) = \\
& = \int_a^t \left[ f \left( s, x_m(s, z, \eta), \frac{dx_m(s, z, \eta)}{ds} \right) - f \left( s, x_{m-1}(s, z, \eta), \frac{dx_{m-1}(s, z, \eta)}{ds} \right) \right] ds -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2(t-a)}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ f \left( s, x_m(s, z, \eta), \frac{dx_m(s, z, \eta)}{ds} \right) - \right. \\
& \left. - f \left( s, x_{m-1}(s, z, \eta), \frac{dx_{m-1}(s, z, \eta)}{ds} \right) \right] ds, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (32)
\end{aligned}$$

і введемо позначення

$$r_m(t, z, \eta) = |x_m(t, z, \eta) - x_{m-1}(t, z, \eta)|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Відповідно до рекурентного співвідношення (18) леми 1, використовуючи умову Ліпшиця (9) і умову (19) для  $m = 1$ , з (31) і (32) випливає, що

$$\begin{aligned}
& r_2(t, z, \lambda) \leq \\
& \leq K_x \left[ \left( 1 - \frac{2(t-a)}{b-a} \right) \int_t^a \alpha_1 \left( s, a, \frac{b-a}{2} \right) ds + \frac{2(t-a)}{b-a} \int_b^t \alpha_1 \left( s, a, \frac{b-a}{2} \right) ds \right] \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \\
& \leq K_x \alpha_2 \left( t, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \frac{10}{9} Q_x \alpha_1 \left( s, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f),
\end{aligned}$$

де матриця  $Q_x$  має вигляд (21). Методом індукції легко переконатися, що

$$\begin{aligned}
r_{m+1}(t, z, \eta) & \leq K_x^m \alpha_{m+1} \left( t, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D, D_x^1}(f) \leq \\
& \leq \frac{10}{9} Q_x^m \alpha_1 \left( t, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, b], D, D_x^1}(f).
\end{aligned}$$

Таким чином, з урахуванням останньої нерівності

$$\begin{aligned}
& |x_{m+j}(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta)| \leq \\
& \leq |x_{m+j}(t, z, \eta) - x_{m+j-1}(t, z, \eta)| + |x_{m+j-1}(t, z, \eta) - x_{m+j-2}(t, z, \eta)| + \dots + \\
& + |x_{m+1}(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta)| = \sum_{i=1}^j r_{m+i}(t, z, \eta) \leq \\
& \leq \frac{10}{9} \alpha_1 \left( t, a, \frac{b-a}{2} \right) \sum_{i=1}^j Q_x^{m+i-1} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = \\
& = \frac{10}{9} \alpha_1 \left( t, a, \frac{b-a}{2} \right) Q_x^m \sum_{i=0}^{j-1} Q_x^i \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f), \quad (33)
\end{aligned}$$

де  $\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f)$  має вигляд (30). Оскільки максимальне власне значення матриці  $Q_x$  вигляду (21) не перевищує одиницю, то

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q_x^i \leq (I_n - Q_x)^{-1}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} Q_x^m = 0_n.$$



Таким чином, згідно з критерієм Коші, з нерівності (33) випливає, що послідовність функцій  $[x_m(t, z, \eta)]_{m=0}^{\infty}$  вигляду (22) рівномірно збігається в області  $(t, z, \eta) \in [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$  до граничної функції  $x_{\infty}(t, z, \eta)$ .

Оскільки всі функції послідовності (22) задовольняють умови  $x_m(a, z, \eta) = z$ ,  $x_m(b, z, \eta) = \eta$  для всіх значень введених параметрів  $z \in D_a$ ,  $\eta \in D_{\frac{a+b}{2}}$ , можна зробити висновок, що гранична функція  $x_{\infty}(t, z, \eta)$  також їх задовольняє. Перейшовши у рівності (22) до границі при  $m \rightarrow \infty$  отримуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (26) або, що те ж саме, є розв'язком задачі Коші (27), де  $\Delta(z, \eta)$  задається формулою (28). За переходу до границі при  $j \rightarrow \infty$  у (22) отримуємо оцінку (29), що й завершує доведення.

**Теорема 2.** *Припустимо, що існує невід'ємний вектор  $\rho^y$  такий, що  $f \in Lip(K_y, D^y)$  на інтервалі  $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$  і який задовольняє нерівність (20) та виконується умова*

$$r(Q_y) < 1,$$

де матриця  $Q_y$  задана (24).

Тоді, для довільної пари векторів  $(\eta, \lambda) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$ :

1. Усі члени послідовності (25) є неперервно диференційовними функціями на відрізьку  $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$  і задовольняють модельні умови

$$y_m \left( t = \frac{a+b}{2}, \eta, \lambda \right) = \eta, \quad y_m(t = b, \eta, \lambda) = \lambda.$$

2. Послідовність функцій (25) рівномірно збігається відносно  $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$  при  $m \rightarrow \infty$  до граничної функції

$$y_{\infty}(t, \eta, \lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t, \eta, \lambda).$$

3. Гранична функція задовольняє умови:

$$y_{\infty} \left( \frac{a+b}{2}, \eta, \lambda \right) = \eta, \quad y_{\infty}(a, \eta, \lambda) = \lambda.$$

4. Функція  $y_{\infty}(t, \eta, \lambda)$  в області  $D^y$  є єдиним абсолютно неперервним розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = \eta + \int_{\frac{a+b}{2}}^t f \left( s, y(s), \frac{dy(s)}{ds} \right) ds - \frac{2(t-a)}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f \left( s, y(s), \frac{dy(s)}{ds} \right) ds + \frac{2(t-a)}{b-a} [\lambda - \eta], \quad t \in \left( \frac{a+b}{2}, b \right). \quad (34)$$

Інакше кажучи,  $y_{\infty}(t, \eta, \lambda)$  є розв'язком наступної задачі Коші для адитивно збуреної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dt} = f \left( t, y, \frac{dy(t)}{dt} \right) + \frac{2}{b-a} H(\eta, \lambda), \quad t \in \left( \frac{a+b}{2}, b \right), \quad (35)$$

$$y \left( \frac{a+b}{2} \right) = \eta,$$

де збурення  $H(\eta, \lambda) : \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$  – відображення, яке визначене формулою:

$$H(\eta, \lambda) := [\lambda - \eta] - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f \left( s, y_\infty(s, \eta, \lambda), \frac{dy_\infty(s, \eta, \lambda)}{ds} \right) ds. \quad (36)$$

5. Справедлива оцінка

$$\begin{aligned} & |y_\infty(t, \eta, \lambda) - y_m(t, \eta, \lambda)| \leq \\ & \leq \frac{10}{9} \alpha_1 \left( t, \frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2} \right) Q_y^m (I_n - Q_y)^{-1} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f), \quad t \in \left[ \frac{a+b}{2}, b \right], \quad m \geq 0, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) = & \frac{1}{2} \left[ \max_{(t, y, y') \in [\frac{a+b}{2}, b] \times D^y \times D_1} f(t, y, y') - \right. \\ & \left. - \min_{(t, y, y') \in [\frac{a+b}{2}, b] \times D^y \times D_1} f(t, y, y') \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

**Доведення.** За аналогією з теоремою 1 може бути встановлена рівномірна збіжність послідовності функцій (25).

Граничні функції  $x_\infty(t, z, \eta)$  і  $y_\infty(t, \eta, \lambda)$  послідовностей (22) і (25) на підінтервалах  $[a, \frac{a+b}{2}]$ ,  $[\frac{a+b}{2}, b]$  можуть бути корисними для отримання критерію розв'язності інтегральної крайової задачі (2),(3). Виявляється, що функції

$$\Delta(z, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ і } H(\eta, \lambda) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$$

які задані рівняннями (28) і (36), дають можливість зробити такий висновок.

Насправді, теореми 1 і 2 гарантують, що за наведених припущень функції

$$x_\infty(t, z, \eta) : \left[ a, \frac{a+b}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y_\infty(t, \eta, \lambda) : \left[ \frac{a+b}{2}, b \right] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

є коректно визначеними для всіх  $(z, \eta) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ ,  $(\eta, \lambda) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$ . Тому, якщо покласти

$$u_\infty(t, z, \eta, \lambda) := \begin{cases} x_\infty(t, z, \eta), & t \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ y_\infty(t, \eta, \lambda), & t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases} \quad (38)$$

ми одержимо функцію  $u_\infty(t, z, \eta, \lambda) : [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ , яка також коректно визначена для тих же значень параметрів  $(z, \eta) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$  і  $(\eta, \lambda) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$ . Очевидно, що ця функція є неперервною, тому що в точці  $t = \frac{a+b}{2}$  маємо

$$x_\infty \left( \frac{a+b}{2}, z, \eta \right) = y_\infty \left( \frac{a+b}{2}, \eta, \lambda \right) = \eta. \quad (39)$$

Поряд із рівняннями (12) і (13), визначених відповідно на інтервалах  $[a, \frac{a+b}{2}]$  і  $[\frac{a+b}{2}, b]$ , введемо в розгляд наступні рівняння з адитивним збуренням у правій частині:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f \left( t, x, \frac{dx(t)}{dt} \right) + \frac{2}{b-a} \mu^x, \quad t \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right] \quad (40)$$

з початковою умовою

$$x(a) = z \quad (41)$$

та

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y, \frac{dy(t)}{dt}\right) + \frac{2}{b-a}\mu^y, \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \quad (42)$$

з початковою умовою

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta, \quad (43)$$

де

$$\mu^x = \begin{pmatrix} \mu_1^x \\ \vdots \\ \mu_n^x \end{pmatrix}, \quad \mu^y = \begin{pmatrix} \mu_1^y \\ \vdots \\ \mu_n^y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

вважаємо керуючими параметрами.

**Теорема 3.** Нехай  $z \in D_a$  і  $\eta \in D_{\frac{a+b}{2}}$  є фіксовані. Припустимо, що всі умови теорем 1, 2 мають місце.

Тоді для того, щоб розв'язки  $x(\cdot, a, z)$  і  $y(\cdot, \frac{a+b}{2}, \eta)$  задач Коші (40), (41) і (42), (43) відповідно мали властивості модельних умов

$$x(a) = z, \quad x\left(\frac{a+b}{2}, a, z\right) = \eta,$$

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta, \quad y\left(b, \frac{a+b}{2}, \eta\right) = \lambda,$$

необхідно і достатньо, щоб керуючі параметри  $\mu^x$  і  $\mu^y$  були задані формулами:

$$\mu^x = \eta - z - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x_\infty(s, z, \eta), \frac{dx_\infty(s, z, \eta)}{ds}\right) ds \quad (44)$$

та

$$\mu^y = \lambda - \eta - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(s, y_\infty(s, \eta, \lambda), \frac{dy_\infty(s, \eta, \lambda)}{ds}\right) ds \quad (45)$$

де  $x_\infty(\cdot, z, \eta)$  і  $y_\infty(\cdot, \eta, \lambda)$  є відповідно граничними функціями послідовностей (22) та (25). Більш того, в цьому випадку

$$x(\cdot, a, z) = x_\infty(\cdot, z, \eta), \quad y\left(\cdot, \frac{a+b}{2}, \eta\right) = y_\infty(\cdot, \eta, \lambda). \quad (46)$$

**Доведення.** Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 2 [2].

Наступна теорема встановлює зв'язок функції (38) з розв'язком інтегральної крайової задачі (2), (3) в термінах нулів функцій  $\Delta(z, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  та  $H(\eta, \lambda) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ , які визначені в (28), (36).

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови теорем 1, 2. Тоді:*

1. *Функція*

$$u_\infty(t, z^*, \eta^*, \lambda^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(t, z^*, \eta^*, \lambda^*)$$

*є неперервно диференційовним розв'язком інтегральної крайової задачі (2), (3) тоді й тільки тоді, коли трійка векторів  $(z^*, \eta^*, \lambda^*)$  задовольняє систему  $3n$  алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{aligned} \Delta(z, \eta) &= \eta - z - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x_\infty(s, z, \eta), \frac{dx_\infty(s, z, \eta)}{ds}\right) ds = 0, \\ H(\eta, \lambda) &= \lambda - \eta - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(s, y_\infty(s, \eta, \lambda), \frac{dy_\infty(s, \eta, \lambda)}{ds}\right) ds = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\Lambda(z, \eta, \lambda) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} g(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds + \int_{\frac{a+b}{2}}^b g(s, y_\infty(s, \eta, \lambda)) ds - d = 0.$$

2. *Для будь-якого розв'язку  $U(\cdot)$  задачі (2), (3) з властивістю*

$$\left(U(a), U\left(\frac{a+b}{2}\right), U(b)\right) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b,$$

*існує така трійка векторів  $(z_0, \eta_0, \lambda_0)$ , що*

$$U(\cdot) = u_\infty(t, z_0, \eta_0, \lambda_0),$$

*де функція  $u_\infty(t, z_0, \eta_0, \lambda_0)$  задана згідно з (38).*

**Доведення.** Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 3 [6].

Систему рівнянь (47) називають системою визначальних рівнянь тому, що її корені визначають розв'язки заданої крайової задачі.

Хоча теорема 4 теоретично дає відповідь, як побудувати розв'язок крайової задачі (2), (3), однак її застосування пов'язане з труднощами, тому що явний вигляд  $x_\infty(t, z, \eta)$ ,  $y_\infty(t, \eta, \lambda)$  і функцій

$$\Delta(z, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H(\eta, \lambda) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\Lambda(z, \eta, \lambda) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

які задані в (47), зазвичай є невідомими. Ці труднощі можуть бути подолані, якщо застосувати функції  $x_m(s, z, \eta)$ ,  $y_m(s, \eta, \lambda)$  для якогось фіксованого  $m$ . На їх основі замість точної визначальної системи можна розглядати так звану  $m$ -ту наближену систему визначальних рівнянь:

$$\Delta_m(z, \eta) = \eta - z - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x_m(s, z, \eta), \frac{dx_m(s, z, \eta)}{ds}\right) ds = 0,$$

$$H_m(\eta, \lambda) = \lambda - \eta - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(s, y_m(s, \eta, \lambda), \frac{dy_m(s, \eta, \lambda)}{ds}\right) ds = 0, \quad (48)$$

$$\Lambda_m(z, \eta, \lambda) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} g(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds + \int_{\frac{a+b}{2}}^b g(s, y_\infty(s, \eta, \lambda)) ds - d = 0.$$

Зауважимо, що на противагу (47)  $m$ -та наближена визначальна система (48) містить у собі члени, які залежать від функцій  $x_m(\cdot, z, \eta)$ ,  $y_m(\cdot, \eta, \lambda)$  і тому вона явно може бути побудована.

Природно очікувати, що наближення до невідомого розв'язку задачі (2), (3) може бути отримане на основі функції

$$u_m(t, z, \eta, \lambda) := \begin{cases} x_m(t, z, \eta), & t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \\ y_m(t, \eta, \lambda), & t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \end{cases} \quad (49)$$

яка є «наближеним» варіантом до (38) і яка коректно визначена для всіх  $t \in [a, b]$  та  $(z, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(\eta, \lambda) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**5. Модельний приклад.** Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) - x_1(t)\frac{dx_2}{dt} + \frac{t^2}{4}x_2^2(t) - \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{18}t^2 + \frac{23}{72}t + \frac{1}{36}, \\ x_2'(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t)\frac{dx_1}{dt} + tx_1(t) - \frac{5}{27}t^3 - \frac{1}{12}t + \frac{1}{3}, \end{cases} \quad t \in [0, 2], \quad (50)$$

з інтегральними крайовими умовами

$$\begin{cases} \int_0^2 sx_1(s)x_2(s)ds = \frac{58}{135}, \\ \int_0^2 s^2x_2^2(s)ds = \frac{32}{45}. \end{cases} \quad (51)$$

Очевидно, що (50), (51) є окремим випадком (2), (3) при  $a := 0$ ,  $b := 2$ ,

$$f\left(t, x_1, x_2, x_1', x_2'\right) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) - x_1(t)\frac{dx_2}{dt} + \frac{t^2}{4}x_2^2(t) - \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{18}t^2 + \frac{23}{72}t + \frac{1}{36} \\ \frac{1}{2}x_2^2(t)\frac{dx_1}{dt} + tx_1(t) - \frac{5}{27}t^3 - \frac{1}{12}t + \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$g(t, x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \int_0^2 tx_1x_2dt \\ \int_0^2 t^2x_2^2dt \end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{58}{135} \\ \frac{32}{45} \end{pmatrix}.$$

Точний розв'язок інтегральної крайової задачі (50), (51) має вигляд:

$$x_1^*(t) = \frac{t^2}{6} + \frac{1}{12}, \quad x_2^*(t) = \frac{t}{3}. \quad (52)$$

Прямі обчислення показують, що для крайової задачі (50), (51) не виконується достатня умова (1):

$$K = \begin{pmatrix} \frac{325}{202} & \frac{295}{202} \\ \frac{254}{101} & \frac{438}{505} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{195}{202} & \frac{177}{202} \\ \frac{762}{505} & \frac{1314}{2525} \end{pmatrix}, \quad r(Q) = 1.914050065 > 1.$$

Тому застосуємо техніку ділення відрізка інтегрування, що описана вище на відрізьку  $[0, 2]$ . Введемо наступні параметри, згідно з (10):

$$\begin{aligned} z &:= x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \\ \eta &:= x(1) = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \\ \lambda &:= x(2) = \begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Нехай опуклі підмножини  $D_a$  і  $D_{\frac{a+b}{2}}$ , де шукаємо значення розв'язку  $x(a)$  та  $x\left(\frac{a+b}{2}\right)$ , мають вигляд:

$$\begin{aligned} D_a &= D_{\frac{a+b}{2}} = \{(x_1, x_2) : -0.1 \leq x_1 \leq 0.8, -0.1 \leq x_2 \leq 0.7\}, \\ D_x^1 &= \left\{ \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt} \right) : -0.1 \leq \frac{dx_1}{dt} \leq 0.4, -0.1 \leq \frac{dx_2}{dt} \leq 0.4 \right\}. \end{aligned}$$

А опуклі підмножини  $D_{\frac{a+b}{2}}$  і  $D_b$ , де шукаємо значення розв'язку  $x\left(\frac{a+b}{2}\right)$  та  $x(b)$ , виглядають наступним чином:

$$\begin{aligned} D_{\frac{a+b}{2}} &= D_b = \{(y_1, y_2) : -0.1 \leq y_1 \leq 0.6, -0.1 \leq y_2 \leq 0.7\}, \\ D_y^1 &= \left\{ \left( \frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt} \right) : -0.1 \leq \frac{dy_1}{dt} \leq 0.4, -0.1 \leq \frac{dy_2}{dt} \leq 0.4 \right\}. \end{aligned}$$

У цьому випадку опукла лінійна комбінація  $D_{a, \frac{a+b}{2}}$  вигляду (5) для векторів  $z \in D_a, \eta \in D_{\frac{a+b}{2}}$  є наступною:  $D_{a, \frac{a+b}{2}} = D_a = D_{\frac{a+b}{2}}$ .

А опукла лінійна комбінація  $D_{\frac{a+b}{2}, b}$  вигляду (7) для векторів  $\eta \in D_{\frac{a+b}{2}}, \lambda \in D_b$  є наступною:  $D_{\frac{a+b}{2}, b} = D_{\frac{a+b}{2}} = D_b$ .

Вектори  $\rho^x$  та  $\rho^y$  вибираємо наступним чином:

$$\rho^x = \rho^y = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}.$$

Отже,  $\rho^x$ -окіл  $D_{a, \frac{a+b}{2}}$  дається наступним чином

$$D^x = \{(x_1, x_2) : -0.7 \leq x_1 \leq 1.4, -0.7 \leq x_2 \leq 1.3\}. \quad (53)$$

Векторний  $\rho^y$ -окіл  $D_{a, \frac{a+b}{2}}$  задається наступним чином

$$D^y = \{(y_1, y_2) : -0.7 \leq x_1 \leq 1.2, -0.7 \leq x_2 \leq 1.3\}. \quad (54)$$

Після ділення відрізка інтегрування навпіл в областях  $D^x$  та  $D^y$  умова Ліпшиця виконується, відповідно з матрицями  $K_x, K_y$ , на підставі яких

$$Q_x := \frac{3}{20}K_x = \frac{3}{20} \begin{pmatrix} \frac{75}{101} & \frac{225}{202} \\ \frac{154}{101} & \frac{438}{505} \end{pmatrix}, \quad r(Q_x) = 0.63289 < 1,$$

$$Q_y := \frac{3}{20}K_y = \frac{3}{20} \begin{pmatrix} \frac{195}{404} & \frac{177}{404} \\ \frac{381}{505} & \frac{657}{2525} \end{pmatrix}, \quad r(Q_y) = 0.95702 < 1.$$

Крім того, з (30), (37) отримаємо

$$\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = \frac{1}{2} \left[ \max_{(t, x, x') \in [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \times D^1} f(t, x, x') - \min_{(t, x, x') \in [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \times D^1} f(t, x, x') \right] = \begin{bmatrix} 0.579 \\ 0.511 \end{bmatrix},$$

$$\rho^x = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = \begin{bmatrix} 0.289 \\ 0.2556 \end{bmatrix}.$$

$$\delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) = \frac{1}{2} \left[ \max_{(t, y, y') \in [\frac{a+b}{2}, b] \times D^y \times D^1} f(t, y, y') - \min_{(t, y, y') \in [\frac{a+b}{2}, b] \times D^y \times D^1} f(t, y, y') \right] = \begin{bmatrix} 0.6724 \\ 1.151 \end{bmatrix},$$

$$\rho^y = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) = \begin{bmatrix} 0.336 \\ 0.575 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, ми перевірили, що всі умови теорем 1, 2 виконуються для крайової задачі (50), (51).

Використовуючи пакет символної математики Maple, розв'язуємо наближену систему визначальних рівнянь (48) при  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  і отримуємо чисельні результати, які подані у Табл. 1.

Таблиця 1.

Наближені значення параметрів для точного розв'язку (52)

$m$	$z_1$	$z_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
0	0.0544236	0.00383804	0.7235553	0.6653011	0.221925	0.3354314
1	0.0838575	-0.0036436	0.7507277	0.6633951	0.2499014	0.32943908
2	0.0872916	-0.0014107	0.7524909	0.6670138	0.25282909	0.333472055
3	0.08318309	0.00018941	0.74997514	0.66677822	0.2498736	0.333419237
4	0.0829641	0.01294231	0.7497939	0.66660603	0.24973132	0.3333301

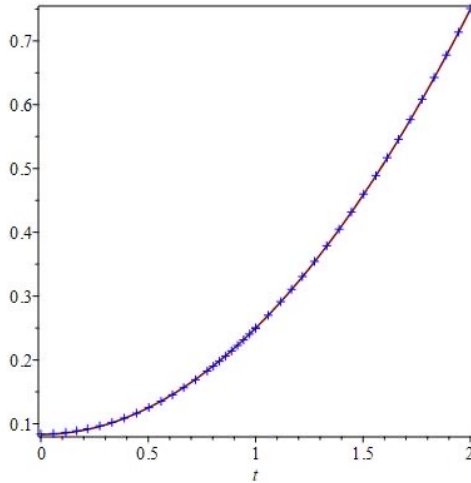
$$x1_{nabl1} := 0.08385759124 - 0.006960104218t^4 + 0.02743264167t^3 + 0.1389005564t^2 + 0.00667146813t,$$

$$x2_{nabl1} := -0.003643689810 - \frac{5}{108}t^4 + 0.05841846573t^3 + 0.0001613689350t^2 + 0.3207992385t,$$

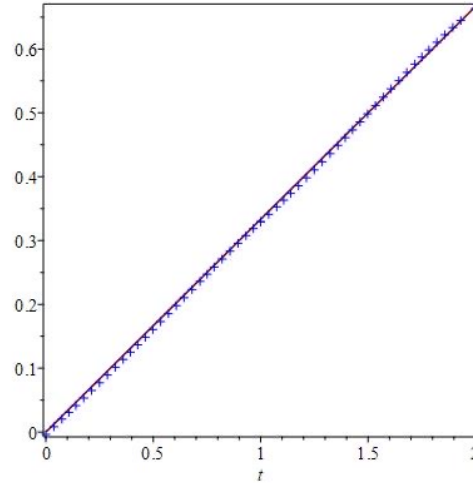
$$y1_{nabl1} := 0.0376664262 - 0.006905526170t^4 + 0.04601773050t^3 + 0.05458044925t^2 + 0.1185430734t,$$

$$y2_{nabl1} := 0.0698292949 - \frac{5}{108}t^4 + 0.1762511131t^3 - 0.1675061485t^2 + 0.2971611239t.$$

Графіки точного розв'язку (лінія) та його першого наближення ( $\times$ ) виглядають наступним чином:



а) перша компонента



б) друга компонента

Рис. 1. Точний розв'язок (52) (лінія) та його перше наближення ( $\times$ ).

Похибка першої апроксимації ( $m = 1$ ):

$$\max_{t \in [0,2]} |x_1^*(t) - x1_1(t)| \approx 0.008, \quad \max_{t \in [0,2]} |x_2^*(t) - x2_1(t)| \approx 0.006.$$



Похибка четвертої апроксимації ( $m = 4$ ):

$$\max_{t \in [0,2]} |x_1^*(t) - x_{1_4}(t)| \approx 0.0005, \quad \max_{t \in [0,2]} |x_2^*(t) - x_{2_4}(t)| \approx 0.00012.$$

**6. Висновки.** У даній статті показано, що у тих випадках, коли не виконуються достатні умови збіжності для нелінійної системи диференціальних рівнянь, а саме коли найбільше власне значення певної матриці більше за одиницю, тоді доцільно застосовувати техніку ділення відрізка інтегрування на підінтервали.

Будуються дві модельні параметризовані послідовності функцій. Доведена їх рівномірна збіжність. Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної інтегральної крайової задачі.

Теоретичні результати перевірили на прикладі крайової задачі з нелінійними інтегральними крайовими умовами.

Універсальність даного методу підтверджується тим, що він може легко застосовуватися у випадку крайових умов більш складного вигляду, включаючи нелінійні функціональні та інтегральні обмеження. Цікаво відзначити, що для вивчення параметризованої модельної задачі застосовується одна і та же чисельно-аналітична схема, яка орієнтована спеціально на модельну задачу.

### Список використаної літератури

1. Ronto M., Ronto A., Varha Y. A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation*. 2015. Vol. 250. P. 689–700.
2. Rontó M., Varha Y., Marynets K. Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems. *Tatra Mountains, Mathematical Publications*. 2015. 63. P. 247–267. DOI: 10515/tmmp-2015-0035.
3. Varga I. On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Math. Notes*. 2018. Vol. 19, No. 2. P. 1233–1241.
4. Ronto M., Ronto A. Successive approximation techniques in non-linear boundary value problems for ordinary differential equations. *Handbook of differential equations, ordinary differential equations*. 2008. Vol. IV. P. 441–592.
5. Ronto M., Varha Y. Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes*. 2014. Vol. 15, No. 2. P. 725–742.
6. Ronto M., Varha Y. Successive approximations and interval halving for integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes*. 2015. Vol. 16, No. 2, P. 1129–1152.
7. Варга Я. В. Дослідження розв'язків інтегральних крайових задач. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2015. Вип. 26, № 1. С. 23–24.
8. Varga I. On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Mathematical Notes*. 2018. Vol. 19, № 2. P. 1221–1229.
9. Ronto A., Ronto M., Varga I. Partially solved differential systems with two-point non-linear boundary conditions, *Miskolc Mathematical Notes*. 2017. Vol. 18, № 2. P. 1001–1014, DOI: 10.181514/MMN.2017.2000.

**Varga I. V., Reho V. L., Semchyshyn H. Y.** Investigation of solutions of integral boundary value problems .

In this article the original method of constructing a numerical-analytical scheme for investigation the solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations under nonlinear integral boundary conditions is substantiated. At the heart of the method lies transition from given integral boundary conditions to parameterized conditions of model type, which have a simple appearance of the initial conditions. For a model parameterized problem, a constructive numerically-analytical scheme is constructed, which is built on

parameterized approximations with improved convergence characteristics. The connection between the solutions of the model and transitional boundary value problems is established. It is proved that by dividing the segment of integration in half, twice can be improved the sufficient conditions of uniform convergence for parameterized sequential approximations. This technique and its advantages are illustrated by example of one integral boundary value problem, in which to perform sufficient convergence conditions you need to split the integration segment in half.

**Keywords:** ordinary differential equations, nonlinear integral boundary value problems, continuously differentiated solution, parameterization, Lipschitz conditions, division of integration segment, convergence of successive approximations.

## References

1. Ronto, M., Ronto, A., & Varha, Y. (2015). A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation*, (Vol. 250), 689–700.
2. Rontó, M., Varha, Y., & Marynets, K. (2015). Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems. *Tatra Mountains, Mathematical Publications*, 63, 247–267. <https://doi.org/10.515/tmmp-2015-0035>.
3. Varga, I. (2018). On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Math. Notes*, 19(2), 1233–1241.
4. Ronto, M., & Ronto, A. (2008). Successive approximation techniques in non-linear boundary value problems for ordinary differential equations. *Handbook of differential equations, ordinary differential equations*, (Vol. IV), 441–592.
5. Ronto, M., & Varha, Y. (2014). Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes*, 15(2), 725–742.
6. Ronto, M., & Varha, Y. (2015). Successive approximations and interval halving for integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes*, 16(2), 1129–1152.
7. Varga, I. V. (2015). Investigation of integral boundary value problems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 26(1), 23–34. [in Ukrainian]
8. Varga, I. (2018). On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Mathematical Notes*, 19(2), 1221–1229.
9. Ronto, A., Ronto, M., & Varga, I. (2017). Partially solved differential systems with two-point non-linear boundary conditions, *Miskolc Mathematical Notes*, 18(2), 1001–1014, <https://doi.org/10.181514/MMN.2017.2000>.

Одержано 15.04.2022