УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).29-40

О. М. Десницький[1], Ю. Ю. Млавець[2], І. В. Орловський[3], О. А. Тимошенко[4]

[1] Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
магістр фізико-математичного факультету
sasha178178@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2455-9795

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1480-9017

[3] Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук
i.v.orlovsky@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0922-1611

[4] Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук
otymoshenkokpi@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1885-7275

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ЗБУРЕНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

У роботі доведено граничну теорему про асимптотичну поведінку розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівняння. Рівняння цього типу є узагальненням багатьох моделей, що широко використовуються у задачах фінансової математики. Доведення базується на застосуванні техніки розробленої в роботах Й. І. Гіхмана та А. В. Скорохода для автономних стохастичних диференціальних рівнянь. Знайдено умови, за яких асимптотична поведінка розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння визначається невипадковою функцією. Наведено приклади симуляцій за допомогою метода Ейлера-Маруями.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, лінійне стохастичне диференціальне рівняння, асимптотичні властивості розв'язків, моделювання стохастичних диференціальних рівнянь, метод Ейлера-Маруями.

1. Вступ. Стохастичні диференціальні рівняння ефективно моделюють випадкові процеси. Вони є основним інструментом для дослідження у багатьох галузях науки таких, як: страхова та фінансова математика, економіка, теорія управління тощо. На теперішній час наближені аналітичні і асимптотичні методи дослідження математичних моделей стали невід'ємною частиною теорії математичного моделювання, що дозволяє вивчати розв'язки достатньо складних збурених задач, якщо відомі розв'язки детермінованих задач. Зокрема, збурені динамічні системи часто мають економічну інтерпретацію, що дійсно робить дослідження цікавим для фахівців економічної галузі.

Математики приділяють особливу увагу питанням пов'язаним з асимптотичними властивостями розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Такі задачі вивчали Й. І. Гіхман, А. В. Скороход [1], Р. З. Хасьмінський [2], Г. Маккін [3], Н. Ікеда та С. Ватанабе [4] та багато інших. За деяких умов розв'язки збурених систем можуть зберігати асимптотичні властивості траєкторій відповідних граничних автономних систем. Але загалом це не так: поведінка збуреної та незбуреної траєкторій можуть суттєво відрізнятися. Так, Й. І. Гіхман, А. В. Скороход [1] вивчали асимптотичну поведінку розв'язку автономного рівняння збуреного за допомогою вінерівського процесу:

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t),\ t \geq 0,$$

де $w(\cdot)$ – стандартний вінерівський процес, $a(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ – неперервні додатні функції. Й. І. Гіхман, А. В. Скороход досліджували асимптотику розв'язку стохастичного диференціального рівняння за допомогою звичайного диференціального рівняння з відокремлювальними змінними. Тобто, було знайдено умови, за яких випадковий шум майже не впливає на швидкість зростання розв'язку $X(\cdot)$ збуреної системи. Умови асимптотичної еквівалентності розв'язку стохастичного диференціального рівняння та звичайного диференціального рівняння представлено в роботі Г. Келлера, Г. Керстінга та У. Рослера [5].

Пізніше в роботах [6], [7], [8] було знайдено точний порядок зростання для неавтономного рівняння з коефіцієнтами зсуву та дифузії спеціального вигляду:

$$dX(t) = \alpha(t)a(X(t))dt + \beta(t)\sigma(X(t))dw(t),\ t \geq 0,$$

де $w(\cdot)$ – стандартний вінерівський процес, $a(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ – неперервні додатні функції, $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ – неперервні функції.

Метою цієї роботи є дослідження асимптотичної поведінки траєкторій розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь, які виникають в задачах фінансової математики.

2. Основний результат. Розглянемо лінійне стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = (\alpha(t)X(t) + \gamma(t))dt + \beta(t)X(t)dw(t), \tag{1}$$

де $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ – неперервні додатні функції.

Зауважимо, що якщо покласти $\gamma(t) = 0$, то отримаємо так зване однорідне рівняння

$$dX_0(t) = \alpha(t)X_0(t)dt + \beta(t)X_0(t)dw(t). \tag{2}$$

Лінійні стохастичні диференціальні рівняння зустрічаються у багатьох прикладних задачах, зокрема, у таблиці 1 наведено рівняння для різноманітних моделей відсоткових ставок, які є частинними випадками рівняння (1). Параметри $\alpha > 0$, $\sigma > 0$ та β – це константи, $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ – неперервні додатні функції.

Таблиця 1.

Типи моделей зміни відсоткових ставок

Моделі	**СДР**
Vašiček	$\mathrm{dX(t)} = \alpha(\beta - \mathrm{X(t)})\mathrm{dt} + \sigma \mathrm{dw(t)}$
Brenam-Schmate	$\mathrm{dX(t)} = \alpha(\beta - \mathrm{X(t)}) + \sigma \mathrm{X(t)dw(t)}$
Ornstein–Uhlenbeck	$\mathrm{dX(t)} = \alpha(\mathrm{t})(\mathrm{X(t)} - \gamma(\mathrm{t}))\mathrm{dt} + \mathrm{dw(t)}$
Hull–White	$\mathrm{dX(t)} = (\alpha(\mathrm{t})\mathrm{X(t)} + \gamma(\mathrm{t}))\,\mathrm{dt} + \varphi(\mathrm{t})\mathrm{dw(t)}$
Rendleman–Bartter	$\mathrm{dX(t)} = \alpha(\mathrm{t})\mathrm{X(t)dt} + \beta(\mathrm{t})\mathrm{X(t)dw(t)}$

Параметри у кожному з рівнянь мають певний фінансовий зміст. Так, наприклад, у моделі О. Васічека (*Vašiček*) параметр β – середній (довгостроковий) рівень відсоткової ставки, σ – параметр волатильності, а α – параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення.

Для знаходження розв'язку рівняння (1), слід спочатку знайти деякий частинний розв'язок відповідного однорідного рівняння (2) (див., наприклад, [1]).

Нехай $X_0(\cdot)$ є розв'язком однорідного рівняння (2), для якого $X_0(0) = 1$. Тоді, в силу неперервності, $X_0(t) > 0$ на деякому проміжку. Для розв'язання (2) розглянемо допоміжний процес $Z(t) = \ln(X_0(t))$ (тоді $Z(0) = 0$), до якого застосуємо формулу Іто:

$$dZ(t) = \frac{1}{X_0(t)}\alpha(t)X_0(t)dt - \frac{1}{2}\frac{1}{X_0^2(t)}\beta^2(t)X_0^2(t)dt + \frac{1}{X_0(t)}\beta(t)X_0(t)dw(t),$$

або

$$dZ(t) = \left(\alpha(t) - \frac{1}{2}\beta^2(t)\right)dt + \beta(t)dw(t).$$

Звідки

$$Z(t) = \int\limits_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s)\right)ds + \int\limits_0^t \beta(s)dw(s).$$

Тоді

$$X_0(t) = \exp\left\{\int\limits_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s)\right)ds + \int\limits_0^t \beta(s)dw(s)\right\}. \tag{3}$$

Перейдемо до рівняння (1). Його розв'язок $X(\cdot)$ будемо шукати у вигляді

$$X(t) = X_0(t)Y(t),$$

де $Y(\cdot)$ – деякий процес, що задовольняє рівняння

$$dY(t) = a(t)dt + b(t)dW(t),\ Y(0) = X(0),$$

в якому $a(t)$ і $b(t)$ – невідомі функції, а $X_0(\cdot)$ задано у (3).

Застосовуючи формулу Іто до $X(\cdot)$, отримаємо

$$\begin{aligned} dX(t) &= Y(t)dX_0(t) + X_0(t)dY(t) + dX_0(t)dY(t) = \\ &= \alpha(t)X(t)dt + \beta(t)X(t)dw(t) + \\ &\qquad + X_0(t)\left((a(t) + \beta(t)b(t))dt + b(t)dW(t)\right). \end{aligned}$$

Підставляючи отримане у (1), будемо мати:

$$a(t) = (X_0(t))^{-1} \gamma(t) \text{ та } b(t) = 0.$$

Отже,

$$Y(t) = X(0) + \int_0^t (X_0(s))^{-1} \gamma(s) ds.$$

Використовуючи останнє співвідношення та (3), одержимо

$$\begin{aligned} X(t) = \exp\left\{ \int_0^t \left[\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s)\right] ds + \int_0^t \beta(s) dw(s) \right\} \cdot \\ \cdot \left[X(0) + \int_0^t \exp\left\{ - \int_0^s \left(\alpha(u) - \frac{1}{2}\beta^2(u)\right) du - \int_0^s \beta(u) dw(u) \right\} \cdot \gamma(s) ds \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Як бачимо, хоч сам розв'язок має представлення в явному вигляді, але це представлення достатньо громіздке для виявлення його асимптотичних властивостей.

Розглянемо рівняння (1), та припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty, \quad X(0) > 0, \quad \text{майже напевно (м.н.)}.$$

Умови, при яких розв'язок стохастичного диференціального рівняння необмеженно зростає із збільшенням часу можна знайти в [1] або [10].

Помітимо також, що за цих умов, враховуючи вигляд розв'язку (4),

$$X(t) > 0, \quad t \geq 0, \quad \text{м.н.}$$

Розглянемо також звичайне диференціальне рівняння

$$d\mu(t) = \alpha(t)\mu(t)dt, \tag{5}$$

де $\alpha(\cdot)$ – функція, яка співпадає з функцією із (1), $\mu(\cdot)$ – розв'язок рівняння (5) такий, що

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = \infty. \tag{6}$$

Позначимо $A(t) = \int_0^t \alpha(s)ds$, тоді

$$\ln \mu(t) = A(t), \tag{7}$$

та в силу умови (6) одержимо

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \infty. \tag{8}$$

Сформулюємо основну теорему.

Теорема 1. *Нехай $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ – неперервні додатні функції, такі, що існує неперервний розв'язок $X(\cdot)$ рівняння (1) з початковою умовою X(0)>0, причому*

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty \text{ м.н.}$$

Припустимо, що виконується умова (8) та наступні три умови:

(i) *існує таке число $M > 1$, що для $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{A(2^{n+1})}{A(2^n)} \leq M;$$

(ii) *$\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ задовольняють наступним співвідношенням*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t \beta^2(s)ds = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{A^2(2^n)} \int_0^{2^{n+1}} \beta^2(s)ds < \infty; \tag{10}$$

(iii) *для $\alpha(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$*

$$\sup_{t\geq 0} \frac{1}{A(t)} \int_0^t \gamma(s)ds = K_\gamma < \infty;$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln X(t)}{\ln \mu(t)} = 1 \text{ м.н.} \tag{11}$$

Доведення. Доведемо, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln X(t)}{\ln \mu(t)} = 1 \text{ м.н.} \tag{12}$$

Розглянемо процес $Z(t) = \ln X(t)$ та застосуємо до нього формулу Іто

$$dZ(t) = \frac{1}{X(t)} dX(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2(t)} < dX(t), dX(t) > .$$

Оскільки згідно правила множення диференціалів (див. [4])

$$< dX(t), dX(t) >= (\beta(t)X(t))^2 dt,$$

то

$$dZ(t) = \frac{1}{X(t)}(\alpha(t)X(t) + \gamma(t))dt + \frac{1}{X(t)}\beta(t)X(t)dw(t) - \\ - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2(t)}(\beta(t)X(t))^2 dt,$$

тобто

$$dZ(t) = \left(\alpha(t) + \gamma(t)e^{-Z(t)} - \frac{1}{2}\beta^2(t)\right)dt + \beta(t)dw(t),$$

або в інтегральній формі

$$Z(t) = Z(0) + A(t) + \int_0^t \gamma(s) e^{-Z(s)} ds - \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2(s) ds + \int_0^t \beta(s) dw(s).$$

Таким чином, враховуючи останню рівність та (7), отримуємо

$$\frac{\ln X(t)}{\ln \mu(t)} = \frac{Z(t)}{A(t)} = \frac{Z(0)}{A(t)} + 1 + \frac{1}{A(t)} \int_0^t \gamma(s) e^{-Z(s)} ds - \frac{1}{2A(t)} \int_0^t \beta^2(s) ds +$$

$$+ \frac{1}{A(t)} \int_0^t \beta(s) dw(s) = \frac{Z(0)}{A(t)} + 1 + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t).$$

З (8) випливає, що

$$\frac{Z(0)}{A(t)} \longrightarrow 0, \text{ при } t \to \infty. \tag{13}$$

Доведемо, що

$$I_1(t) = \frac{1}{A(t)} \int_0^t \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds \longrightarrow 0, \text{ при } t \to \infty, \quad \text{м.н.} \tag{14}$$

Розглянемо довільне $\omega \in \left\{ \lim_{t\to\infty} X(t) = \infty \ \wedge \ X(0) > 0 \right\}$ та зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$. Тоді існує $t_1 = t_1(\varepsilon, \omega) > 0$ таке, що для всіх $t > t_1$

$$X(t) > \frac{2}{\varepsilon} K_\gamma,$$

де K_γ задано у ***(iii)***. Тоді для будь-якого $t \geq t_1$, враховуючи умову ***(iii)***, будемо мати

$$I_1(t) \leq \frac{1}{A(t)} \int_0^{t_1} \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds + \frac{1}{A(t)} \int_{t_1}^t \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{A(t)} \int_0^{t_1} \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds + \frac{\varepsilon}{2K_\gamma} \cdot \frac{1}{A(t)} \int_{t_1}^t \gamma(s) ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{A(t)} \int_0^{t_1} \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds + \frac{\varepsilon}{2K_\gamma} \cdot \frac{1}{A(t)} \int_0^t \gamma(s) ds \leq \frac{1}{A(t)} \int_0^{t_1} \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Більш того, враховуючи (8) та те, що $\inf_{t\geq 0} X(t, \omega) > 0$, буде існувати $t_2 = t_2(\varepsilon, \omega) > 0$ таке, що для всіх $t > t_2$

$$\frac{1}{A(t)} \int_0^{t_1} \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds < \frac{\varepsilon}{2},$$

звідки остаточно отримуємо, що для будь-якого $t > \max\{t_1,\, t_2\}$

$$I_1(t) < \varepsilon.$$

В силу довільності вибору $\varepsilon > 0$, отримуємо (14).

З умови (9) випливає, що

$$I_2(t) = -\frac{1}{2A(t)} \int\limits_0^t \beta^2(s)ds \ \longrightarrow\ 0,\ \text{при}\ t \to \infty. \tag{15}$$

Перейдемо до доведення

$$I_3(t) = \frac{1}{A(t)} \int\limits_0^t \beta(s)dw(s) \ \longrightarrow\ 0,\ \text{при}\ t \to \infty,\ \text{м.н.} \tag{16}$$

Розглянемо послідовність $t_n = 2^n,\ n \geq 0$, і покажемо спочатку, що

$$I_3(t_n) = I_3(2^n) \ \longrightarrow\ 0,\ \text{при}\ n \to \infty,\ \ \text{м.н.} \tag{17}$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Використовуючи нерівність Дуба (див. [1]),

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{k\geq n} I_3(2^k) > \varepsilon\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 2^n} I_3(t) > \varepsilon\right\} = \mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 2^n} \frac{1}{A(t)}\left|\int\limits_0^t \beta(s)dw(s)\right| > \varepsilon\right\} \leq$$
$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\sup_{t\in[2^k;2^{k+1}]} \frac{1}{A(t)}\left|\int\limits_0^t \beta(s)dw(s)\right| > \varepsilon\right\} \leq$$
$$\leq \frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{A^2(2^n)} \int\limits_0^{2^{n+1}} \beta^2(s)ds \ \longrightarrow\ 0,\ \text{при}\ n \to \infty,$$

завдяки умові (10), і (17) доведено. Помітимо також, що з останнього співвідношення, враховуючи те, що послідовність $\sup\limits_{t\geq 2^n} I_3(t),\ n \in \mathbb{N}$, є монотонно спадною, отримуємо також

$$\sup_{t\geq 2^n} I_3(t) \ \longrightarrow\ 0,\ \ \text{при}\ n \to \infty\ \ \text{м.н.} \tag{18}$$

Нехай тепер $t \geq 2$ деяке довільне число, а $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2^n \leq t < 2^{n+1}$. Тоді

$$|I_3(t)| \leq |I_3(t) - I_3(2^n)| + I_3(2^n) \leq \sup_{t\in[2^n;2^{n+1}]} |I_3(t) - I_3(2^n)| + I_3(2^n),$$

і, враховуючи (17), для доведення співвідношення (16) достатньо показати, що

$$\sup_{t\in[2^n;2^{n+1}]} |I_3(t) - I_3(2^n)| \ \longrightarrow\ 0,\ \ \text{при}\ n \to \infty\ \ \text{м.н.}$$

Розглянемо

$$\sup_{t\in[2^n;2^{n+1}]}|I_3(t)-I_3(2^n)| = \sup_{t\in[2^n;2^{n+1}]}\left|\frac{1}{A(t)}\int_0^t\beta(s)dw(s)-\frac{1}{A(2^n)}\int_0^{2^n}\beta(s)dw(s)\right| =$$

$$= \sup_{t\in[2^n;2^{n+1}]}\left|\left(\frac{1}{A(t)}-\frac{1}{A(2^n)}\right)\int_0^{2^n}\beta(s)dw(s)+\frac{1}{A(t)}\int_{2^n}^t\beta(s)dw(s)\right| \le$$

$$\le \sup_{t\in[2^n;2^{n+1}]}\frac{A(t)-A(2^n)}{A(t)A(2^n)}\cdot\left|\int_0^{2^n}\beta(s)dw(s)\right| + \sup_{t\in[2^n;2^{n+1}]}\frac{1}{A(t)}\left|\int_{2^n}^t\beta(s)dw(s)\right| =$$

$$= I_{4,n}+I_{5,n}.$$

З (17) та умови ***(i)*** випливає

$$I_{4,n} = \sup_{t\in[2^n;2^{n+1}]}\frac{A(t)-A(2^n)}{A(t)}\cdot I_3(2^n) \le \left(\frac{A(2^{n+1})}{A(2^n)}-1\right)\cdot I_3(2^n) \le$$
$$\le (M-1)I_3(2^n) \longrightarrow 0, \quad \text{при } n\to\infty \ \text{ м.н.}$$

Розглянемо другий доданок

$$I_{5,n} \le \sup_{t\ge 2^n}\frac{1}{A(t)}\left|\int_{2^n}^t\beta(s)dw(s)\right| =$$

$$= \sup_{t\ge 2^n}\frac{1}{A(t)}\left|\int_{2^n}^t\beta(s)dw(s)+\int_0^{2^n}\beta(s)dw(s)-\int_0^{2^n}\beta(s)dw(s)\right| \le$$

$$\le \sup_{t\ge 2^n}\frac{1}{A(t)}\left|\int_0^t\beta(s)dw(s)\right| + \frac{1}{A(2^n)}\int_0^{2^n}\beta(s)dw(s) =$$

$$= \sup_{t\ge 2^n} I_3(t)+I_3(2^n) \longrightarrow 0, \quad \text{при } n\to\infty \ \text{ м.н.},$$

завдяки (17) та (18). Таким чином, (16) доведено.

З (13)–(16) випливає (12).

Теорему доведено.

3. Моделювання розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь. Доповненням до аналітичних результатів слугуватимуть результати моделювання, отримані за допомогою чисельних методів. Моделювання та візуалізація дозволяють побачити закономірності, які важко розгледіти в аналітичному записі рівняння. Таким чином, можна помітити не очевидну на перший погляд асимптотичну поведінку чи паттерн в поведінці траєкторій. Для моделювання рівняння будемо використовувати програмну реалізацією методу Ейлера-Маруями (див, наприклад, [11], [12]). До того ж в роботі Т. Мітсуї [13] було показано, що різниця між розв'язком стохастичного диференціального рівняння та його апроксимацією Ейлера-Маруями прямує до нуля м.н.

Покладемо $t_n^h = nh$ та $\Delta_n^h w = w(t_n^h) - w(t_{n-1}^h)$. Числове наближення X, породжене в точці $t_n^h = nh$ і лінійно інтерпольоване між ними, будемо позначати

$\left\{X^h(t)\right\}_{0\le t\le 1}$, тобто $X_n^h = X^h(t_n^h)$ – значення в n-ій точці сітки розбиття. Схема моделювання за допомогою метода Ейлера-Маруями є наступною:

$$X^h(0) = x_0;$$

$$X_n^h = X_{n-1}^h + \alpha(t_{n-1}^h)X_{n-1}^h + \gamma(t_{n-1}^h)h + b(t_{n-1}^h)X_{n-1}^h\Delta_n^h w,$$

де $\Delta_n^h w$ – гауссівська випадкова величини $\mathcal{N}(0;h)$ при фіксованому h та $X_n^h = X^h(t_n^h)$. Наприклад, у випадку відрізку $[0;1]$ вибираємо $h = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

Для моделювання розглянемо лінійне стохастичне диференціальне рівняння (1) з наступними коефіцієнтами

$$\alpha(t) \sim \tilde{\alpha}t^m,\ \gamma(t) \sim \tilde{\gamma}t^p,\ \beta(t) \sim \tilde{\beta}t^k,\ \text{при}\ \ t \to \infty, \tag{19}$$

де $m,\ p,\ k \in (0;+\infty)$, $\tilde{\alpha},\ \tilde{\gamma},\ \tilde{\beta}$ – деякі додатні сталі. Знайдемо при яких значеннях $m,\ p,\ k$ умови Теореми 1 будуть виконуватися. Для ***(i)***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(2^{n+1})}{A(2^n)} = \lim_{t\to\infty}\frac{A(2^{t+1})}{A(2^t)} = 2^m,$$

а тому обмежена. Для ***(ii)***

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{A(t)}\int\limits_0^t \beta^2(s)ds = \lim_{t\to\infty}\frac{\beta^2(t)}{\alpha(t)} = \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}}\lim_{t\to\infty} t^{2k-m} = 0,$$

при $m > 2k$. Для загального члена ряду з нерівності (10) маємо

$$\frac{1}{A^2(2^n)}\int\limits_0^{2^{n+1}} \beta^2(s)ds \sim \frac{2^{2k+1}(m+1)^2}{2k+1}\cdot 2^{2n\left(k-m-\frac{1}{2}\right)},\ \text{при}\ \ n\to\infty,$$

а тому ряд збігається, якщо $m > k - \frac{1}{2}$. І останнє

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{A(t)}\int\limits_0^t \gamma(s)ds = \lim_{t\to\infty}\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} = \begin{cases} \dfrac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}}, & \text{при } m = p; \\ 0, & \text{при } m > p. \end{cases}$$

а тому при $m \ge p$ буде виконуватися ***(iii)***.

Підсумовуючи отримане, якщо $m \ge p$, $m > 2k$ і $m,\ p,\ k \in (0;+\infty)$, то до лінійного стохастичного диференціального рівняння (1) з коефіцієнтами, що задовольняють (19), можна застосувати Теорему 1.

Застосуємо схему Ейлера-Маруями для апроксимації розв'язку наступного стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = \left(t^{\frac{1}{2}}X(t) + t^{\frac{1}{2}}\right)dt + t^{\frac{1}{6}}X(t)dw(t).$$

Зобразимо траєкторії його явного розв'язку з початковою умовою $X(0) = 5$ та схемою Ейлера-Маруями для $n = 50$ та відтворимо розв'язок детермінованої задачі з початковою умовою $\mu(0) = 5$:

$$d\mu(t) = \sqrt{t}\mu(t)dt.$$

Для таких рівнянь виконують усі умови Теореми 1. Як видно з Рис. 1 траєкторії прямують до нескінченності та мають схожу динаміку. Відношення логарифмів розв'язків представлено на Рис. 2. Моделювання відношення логарифмів розв'язку рівняння збуреного вінерівським процесом та розв'язку детермінованої задачі показує, що траєкторії є еквівалентними, а отже відношення самих розв'язків є також еквівалентним, що підтверджує твердження Теореми 1.

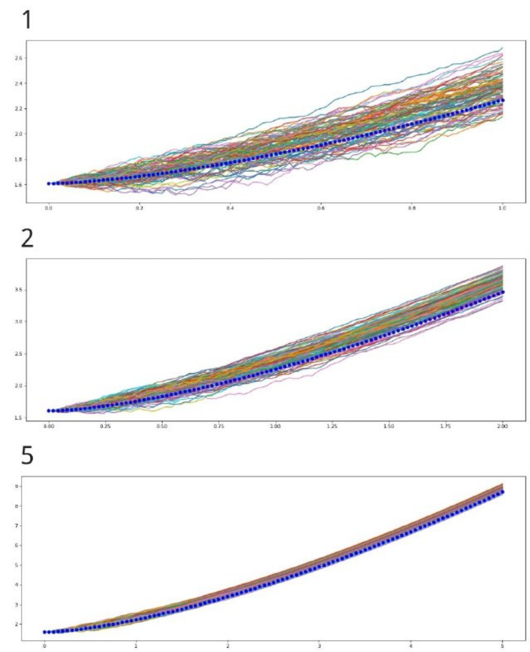

Рис. 1. Поведінка розв'язків стохастичного диференціального рівняння та розв'язку звичайного диференціального рівняння (точкова синя лінія), при $t \to \infty$.

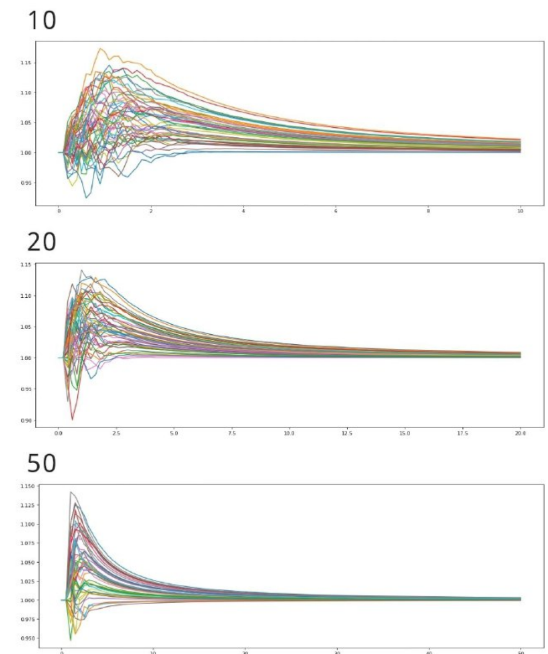

Рис. 2. Логарифмічна еквівалентність розв'язків стохастичного диференціального рівняння та розв'язку звичайного диференціального рівняння.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Дослідження асимптотичних властивостей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь представляє особливий інтерес з практичної точки зору. У статті наведено умови, при яких властивості розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння загального вигляду визначаються властивостями розв'язку звичайного диференціального рівняння, що належить до класу диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними. Досліджуване рівняння є узагальненням більшості моделей росту відсоткової ставки, що активно використовуються у світі фінансів. Було знайдено дві невипадкові функції, під дією яких розв'язок стохастичного рівняння та розв'язок відповідної детермінованої задачі мають однаковий порядок на нескінченності. Цей результат дає змогу досить просто отримувати граничні теореми для різноманітних стохастичних диференціальних рівнянь, що виникають в задачах фінансової математики.

Надалі було б цікаво розповсюдити основний результат роботи на випадок моделей породжених дробово-броунівським рухом.

Список використаної літератури

1. Гіхман Й. І., Скороход А. В. Стохастичні диференціальные рівняння. Київ : Наукова думка. 1968. 356 с.
2. Хасьмінський Р. З. Стійкість систем диференціальних рівнянь при випадкових збуреннях їх параметрів. Наука. 1969. 367 с.
3. Маккін Г. Стохастичні інтеграли. Москва : Мир, 1972. 181 с.
4. Ікєда Н., Ватанабе С. Стохастичні диференциальні рівняння і дифузійні процеси. Москва : Наука, 1986. 445 с.
5. Келлер Г., Керстинг Г., Рослер У. Про асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. *Wahrsch. Geb.* 1984. Вип. 68. С. 163–184. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00531776
6. Buldygin V. V. and Tymoshenko O. A. On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients. *Theor Stoch. Process,* 2010. 16. P. 12–22.
7. Tymoshenko O. A. Generalization of asymptotic behavior of non-autonomous stochastic differential equations. *Naukovi Visti NTUU KPI,* 2016. 4. P. 100–106. DOI: https://doi.org/10.20535/1810-0546.2016.4.71649
8. Klesov O. I., Tymoshenko O. A. Almost Sure Asymptotic Properties of Solutions of a Class of Non-homogeneous Stochastic Differential Equations. *Modern Mathematics and Mechanics. Fundamentals, Problems and Challenges. Switzerland: Springer.* 2019. P. 97–114. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-46
9. Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G., and Tymoshenko O. A. On the φ-asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations. *Theory Stoch. Process,* 2008. 14. P. 11–29.
10. Klesov O. I, Tymoshenko O. A. Unbounded solutions of stochastic differential equations with timedependent coefficients. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.,* 2013. 41. P. 25–35.
11. Asmussen S., Glynn P. W. Stochastic Modelling and Applied Probability. New York: Springer, 2007. 476 p.
12. Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1992. 326 p.
13. Mitsui T. Stability analysis of numerical solution of stochastic differential equations. *Res. Inst. Math.Sci. Kyoto Univ.,* 1995. P. 124–138.

Desnytskiy O. M., Mlavets Yu. Yu., Orlovskiy I. V., Tymoshenko O. A.
Asymptotic Behavior of Solutions of General Linear Differential Equations Peretrubated by Wiener Process.

The limit theorem on the asymptotic behavior of the solution of a linear stochastic differential equation of the general form is proved. The method is based on the application of the technique developed in the work by Y. I. Gihman and A. V. Skorokhoda for autonomous stochastic differential equations. The conditions under which the solution of a linear stochastic differential equation is approximated by a non-random function have been found. Examples of simulations using the Euler-Murayama method are given.

Keywords: stochastic differential equation, linear stochastic differential equation, asymptotic properties of solutions, modeling of stochastic differential equations, the Euler-Maruyama method.

References

1. Gihman, I. I., & Skorohod, A. V. (1972). *Stochastic differential equations.* Berlin: Springer-Verlag.
2. Khasminskyi, R. Z. (1969). *Stability of systems of differential equations under random perturbations of their parameters.* Nauka [in Russian].
3. Makkin, G. (1972). *Stochastic integrals.* Moscow: Mir. [in Russian].
4. Ikeda, N., & Watanabe, S. (1992). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* North Holland.
5. Keller, G., Kersting, G., & Rösler, U. (1984). On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations *Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete,* 68, 163–189. https://doi.org/10.1007/BF00531776
6. Buldygin, V., & Tymoshenko, O. (2010). On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients. *Theory of Stochastic Processes,* 16(2), 12–22. https://doi.org/10.1093/bjps/axp018
7. Tymoshenko, O. A. (2016). Generalization of asymptotic behavior of non-autonomous stochastic differential equations. *Naukovi Visti NTUU KPI,* 4, 100–106. https://doi.org/10.20535/1810-0546.2016.4.71649
8. Klesov, O. I., & Tymoshenko, O. A. (2019). Almost Sure Asymptotic Properties of Solutions of a Class of Non-homogeneous Stochastic Differential Equations. *Modern Mathematics and Mechanics. Fundamentals Problems and Challenges. Switzerland: Springer,* 97–114. https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-46
9. Buldygin, V. V., Klesov, O. I., Steinebach, J. G., & Tymoshenko, O. A. (2008). On the φ-asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations. *Theory Stoch. Process,* 14, 11–29.
10. Klesov, O. I., & Tymoshenko, O. A. (2013). Unbounded solutions of stochastic differential equations with timedependent coefficients. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.,* 41, 25–35.
11. Asmussen, S., & Glynn, P. W. (2007). *Stochastic Modelling and Applied Probability.* New York: Springer.
12. Kloeden, P. E., & Platen, E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.* Springer.
13. Mitsui, T. (1995). Stability analysis of numerical solution of stochastic differential equations. *Kokyuroku (Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ),* 850, 124–138.

Одержано 18.08.2022