МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра геодезії, землеустрою та геоінформатики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт
З вищої геодезії для
студентів спеціальності
193.Геодезія та землеустрій

УЖГОРОД - 2022

Вища геодезія. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з вищої геодезії для студентів спеціальності 193.Геодезія та землеустрій. /Укл.: Калинич І.В., Каблак Н.І. Ужгород Видавництво ДВНЗ «УжНУ «Говерла», 2022, 61 с

Рецензент: - к.т.н., доцент, зав.кафедри геодезії НТУ «Дніпровська політехніка»

Рекомендовано до друку Вченою радою Географічного факультету (Протокол № 2 від 17 листопада 2022р.)

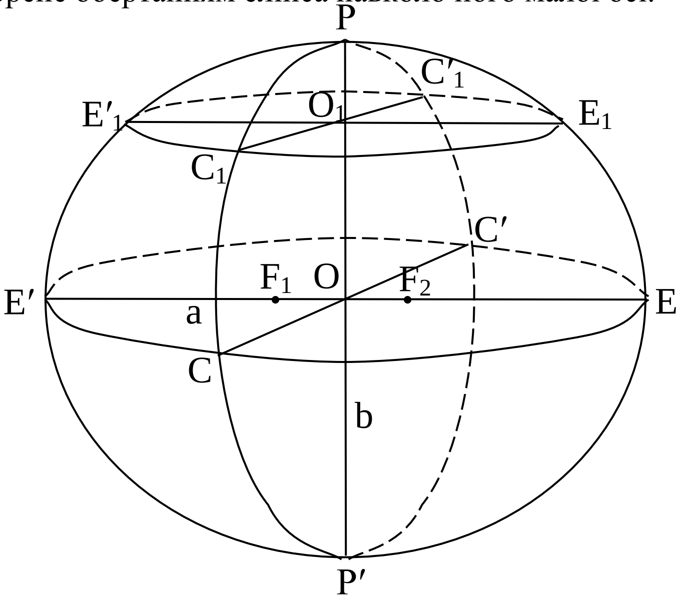
Відповідальний за випуск : завідувач кафедри геодезії, землеуцстрою та геоінформатики доцент Пересоляк В.Ю.

Зміст

СФЕРОЇДАЛЬНА ГЕОДЕЗІЯ.

1.Основні параметри земного еліпсоїда.

Еліпсоїдом **обертання** називається геометричне тіло, утворене обертанням еліпса навколо його малої осі.



Позначення: ***O*** – центр еліпсоїда; ***P*** – північний полюс; ***P'*** – південний полюс; ***PP'*** – вісь обертання еліпсоїда; F_1 і F_2 – точки фокуса еліпсоїда; ***a*** – велика піввісь ; ***b*** – мала піввісь; ***ECE''*** - екватор; $E_1C_1E'_1C'_1$ - паралель; $PE_1EP'E''_1$ і $PC'_1C'P'CC_1$ – меридіани.

Меридіаном називається перетин поверхні еліпсоїда площиною, що проходить через малу піввісь еліпсоїда. Меридіани являють собою еліпс. Наприклад, $PE_1EP'E''_1$ і $PC'_1C'P'CC_1$ – меридіани.

Паралеллю називається перетин поверхні еліпсоїда площиною, перпендикулярної до осі обертання еліпсоїда.

Паралель являє собою окружність. Наприклад, ***ЕСЕ''*** і ***E₁C₁E'₁C'₁*** – паралелі.

Найбільша паралель (***ЕСЕ''***), площина якої проходить через центр еліпсоїда ПРО, називається екватором. Екватор є окружністю радіуса ***a***, де ***a*** – велика піввісь еліпсоїда.

Лінійним ексцентриситетом називається відстань від центра еліпсоїда О до кожного з його фокусів F_1 або F_2. Лінійний ексцентриситет обчислюється за формулою:

$$OF_1 = OF_2 = \sqrt{a^2 - b^2},$$

де ***a*** – велика піввісь; ***b*** – мала піввісь.

Відношення лінійного ексцентриситету до великої півосі називається **першим ексцентриситетом** меридіанного еліпса:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

де ***e*** – перший ексцентриситет.

Відношення лінійного ексцентриситету до малої півосі називається **другим ексцентриситетом** меридіанного еліпса:

$$e^1 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b},$$

де e^1 – другий ексцентриситет.

Полярне стиснення еліпсоїда обчислюється за формулою:

$$\alpha = \frac{a - b}{a},$$

де ***a*** і ***b*** - велика і мала півосі еліпсоїда.

Лінійні величини ***a*** і ***b*** (велика й мала півосі) визначають розміри еліпсоїда.

Відносні величини ***α***, ***e*** и ***e^1^*** (полярне стиснення, перший і другий ексцентриситети) визначають форму еліпсоїда.

Земний еліпсоїд – еліпсоїд, що характеризує фігуру й розміри Землі.

Референц-еліпсоїд - земний еліпсоїд, прийнятий у конкретній країні для обробки геодезичних вимірів і встановлення системи геодезичних координат.

В Україні в цей час застосовуються референц-еліпсоїд Красовского (***a*** = 6378245 м, ***α*** = 1:298,3) і загальземний еліпсоїд (***a*** = 6378137 м, ***α*** = 1:298,2572221).

Обчислення параметрів земного еліпсоїда

Завдання 1. По основних параметрах референц-еліпсоїда Красовского (***a*** = 6378245 м, ***α*** = 1:298,3) обчислити b, e^2, $e'^{2.}$

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \to b = a\cdot(1-\alpha) = 6378245{,}00000\cdot\left(1-\frac{1}{298{,}3}\right) =$$

$$= 6378245{,}00000\cdot\left(\frac{298{,}3-1}{298{,}3}\right) = 6356863{,}01877$$

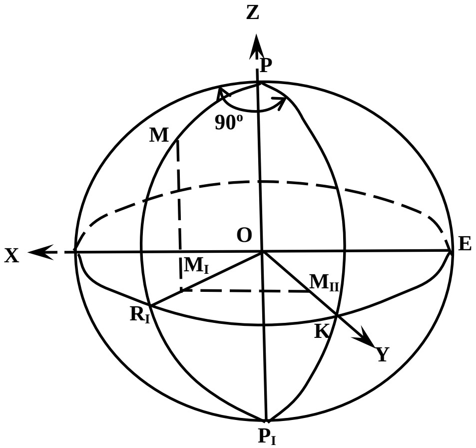
$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \to e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{6378245^2 - 6356863{,}01877^2}{6378245^2} =$$

=0,00663421623

$$e' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \to e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{6378245^2 - 6356863{,}01877^2}{6356863{,}01877^2} =$$

=0,006738525415

2.Системи координат у вищій геодезії.



2.1. **Система прямокутних просторових координат X, Y, Z.**

Початок координат - центр еліпсоїда О.

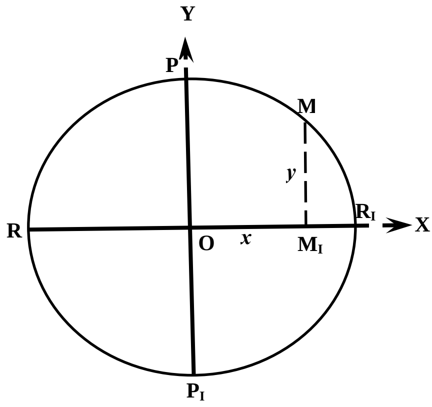
Вісь OZ розташовується по полярній осі еліпсоїда OP;

Вісь OX – у площині екватора в меридіані PEP, що приймають за початковий;

Вісь OY – у площині екватора, але в меридіані PKP, площина якого становить із площиною початкового меридіана кут в 90º. Положення точки М поверхні еліпсоїда визначається координатами :

$X = M_IM_{II}$, $Y = OM_{II}$, $Z = MM_I$

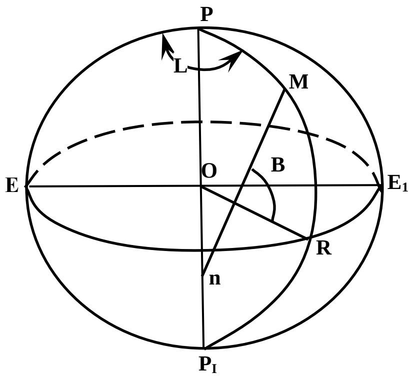
2.2. Система прямокутних прямолінійних координат *x, y*, віднесених до площини меридіана даної точки. У цій системі спочатку визначається меридіан, на якому перебуває крапка. PRIPI – меридіанний



еліпс, що проходить через крапку М. Початок координат – центр еліпса О. Вісь Ох напрямку по великій півосі, вісь О*у* – по малій півосі. Положення точки М визначається координатами: $x = OM_I$, $y = MM_I$.

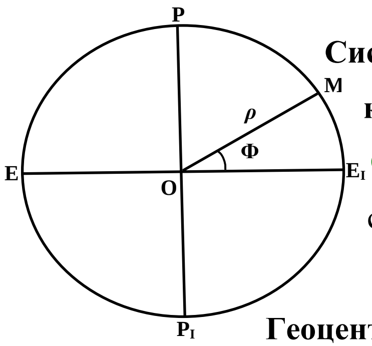
2.3. Система геодезичних координат *B, L*.

Геодезична широта (***B***) визначається гострим кутом між нормаллю (**M*n***) до поверхні еліпсоїда й площиною екватора. Широта змінюється від 0^0 до 90^0 ($0^0 \leq$ ***У*** $\leq 90^0$). Розрізняють північну широту й південну широту.



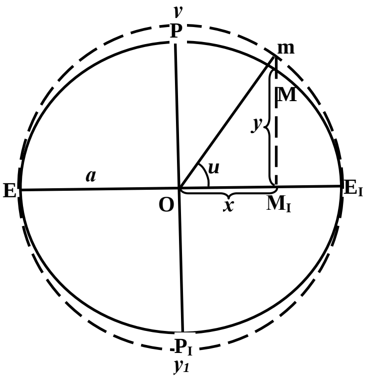
Геодезична довгота (***L***) дорівнює двогранному куту між площинами початкового меридіана (**PEP**$_I$) і меридіана даної точки (**PRP**$_I$). Довгота змінюється від 0^0 до 180^0 ($0^0 \leq$ ***L*** $\leq 180^0$). Розрізняють східну довготу й західну довготу.

2.4. Система геоцентричних координат *Ф, L*.



Однієї з координат у цій системі є **геодезична довгота *L*.**

Геоцентрична широта Ф визначається кутом між радіусом-вектором ρ точки М і площиною екватора.



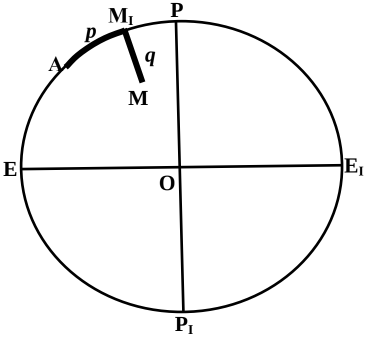
2.5. Система координат з наведеною широтою й геодезичною довготою u, L. Однієї з координат у цій системі є **геодезична довгота *L*.**

PE_IP_IE – меридіанний еліпс, що проходить через точку M;

yE_Iy_IE – окружність радіус якої дорівнює більшої півосі меридіанного еліпса; *x,в* – прямокутні прямолінійні координати віднесені до площини меридіанного еліпса, що проходить через точку M;

кут mOE_I – **приведена широта u** точки M

2.6. Система прямокутних сфероїдних координат p і q.



Осі стероїдної системи координат розташовуються на поверхні еліпсоїда. Початок координат – точка A координати якої відомі. Меридіан точки A приймають за вісь абсцис із позитивним напрямком на північ. Через крапку M проводять нормальний перетин перпендикулярно меридіану точки A. Положення точки M визначається координатами : AM_I = p і M_IM = q.

2.7. Плоскі прямокутні координати.

У цей час у нашій країні прийнята проекція Гауса - Крюгера або система прямокутних плоских координат у конформній проекції Гаусса, у якій роблять обчислення всіх пунктів опорної геодезичної мережі.

3.Зв'язок між деякими системами координат.

3.1. Зв'язок між геодезичною широтою В и координатами

$$tgB = \frac{1}{1-e^2}\frac{y}{x} \qquad x = r = \frac{a \cdot \cos B}{\sqrt{1-e^2 \cdot \sin^2 B}} \qquad y = \frac{a \cdot \left(1-e^2\right) \cdot \cos B}{\sqrt{1-e^2 \cdot \sin^2 B}}$$

***x* и *в*,**

віднесеними до площини меридіана обумовленої точки.

r - радіус паралелі, що проходить через точку із широтою В.

3.2. Зв'язок між геодезичною

широтою

$$tg\hat{O} = tgB\left(1-e^2\right) \qquad \left(B-\hat{O}\right)'' \approx \frac{1}{2}\rho'' e^2 \sin 2B$$

$$\left(B-\hat{O}\right)'' = \rho''\left[\frac{e^2}{2-e^2}\sin 2B - \frac{e^4}{2\left(2-e^2\right)^2}\sin 4B + \frac{e^6}{3\left(2-e^2\right)^3}\sin 6B - \ldots\right]$$

В и геоцентричною широтою Ф.

3.3. Зв'язок між геоцентричною широтою Ф и координатами *x* и *в*, віднесеними до центра й осей еліпсоїда.

$$tg\hat{O} = \frac{y}{x} \qquad x = \rho \cdot \cos\hat{O} \qquad y = \rho \cdot \sin\hat{O} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\hat{O}}} \qquad x = \frac{a\sqrt{1-e^2}\cos\hat{O}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\hat{O}}} \qquad y = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin\hat{O}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\hat{O}}}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2\cos^2 B}{1-e^2\sin^2 B} + \frac{a^2\left(1-e^2\right)^2\sin^2 B}{1-e^2\sin^2 B}$$

$$\rho \approx a\left(1 - \frac{e^2}{2}\sin^2 B + \frac{e^4}{2}\sin^2 B - \frac{5}{8}e^4\sin^4 B - \ldots\right)$$

3.4.Зв'язок між наведеною широтою u і геодезичною широтою B.

$$tgu = \sqrt{1-e^2}\cdot tgB \qquad \cos B = \frac{\sqrt{1-e^2}\cos u}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

$$\left(B-u\right)'' = \rho''\left[n\sin 2B - \frac{n^2}{2}\sin 4B + \frac{n^3}{3}\sin 6B - \frac{n^4}{4}\sin 8B + \ldots\right]$$

де:

$$n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{tgB - tgu}{tgB + tgu}$$

3.5.Зв'язок між системою прямокутних просторових координат X, Y, Z і іншими системами координат.

$$X = x\cos L$$

$$Y = x\sin L$$

$$Z = y$$

$$x = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$X = a\cos u\cos L$$
$$Y = a\cos u\sin L$$
$$Z = b\sin u = a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

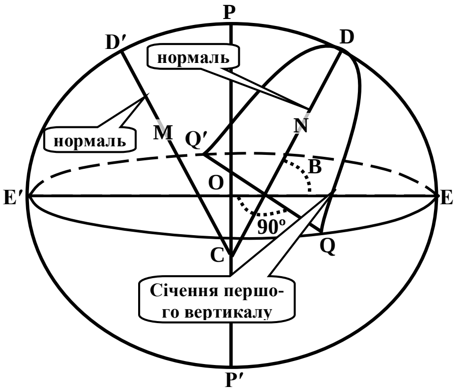
$$X = \frac{a\cos B\cos L}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$$
$$Y = \frac{a\cos u\sin L}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$$
$$Z = \frac{a\left(1-e^2\right)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$$

$$X = \frac{a\cos B\cos L}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$$
$$Y = \frac{a\cos u\sin L}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$$
$$Z = \frac{a\left(1-e^2\right)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$$

4.Головні нормальні перетини еліпсоїда

Перетин еліпсоїда площиною, що проходить через нормаль до його поверхні, називається **нормальним перетином**.

Головними нормальними перетинами є меридіан і перетин першого вертикала. Площина першого вертикала перпендикулярна до площини меридіана. У кожній крапці поверхні еліпсоїда головні нормальні перетини мають найбільшу й найменшу кривизну. Радіус кривизни меридіана позначається через ***M*.** Радіус кривизни першого вертикала позначається ***N***.



Радіус кривини меридіана (***M***) обчислюється по формулах:

$$M \approx c(1-\frac{3}{2}e'^2\cos^2 B+\frac{15}{8}e'^4\cos^4 B-\frac{35}{16}e'^6\cos^6 B+\frac{315}{128}e'^8\cos^8 B-...),$$

$$M=\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 B)^3}};$$

де ***a*** – більша піввісь еліпсоїда; ***e*** – перший ексцентриситет;

e′ – другий ексцентриситет; ***B*** – геодезична широта даної точки;

$$c = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$$ - головний радіус кривини еліпсоїда в полюсів (полярний радіус кривизни).

Радіус кривини першого вертикала (***N***) обчислюється по формулах:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}};$$

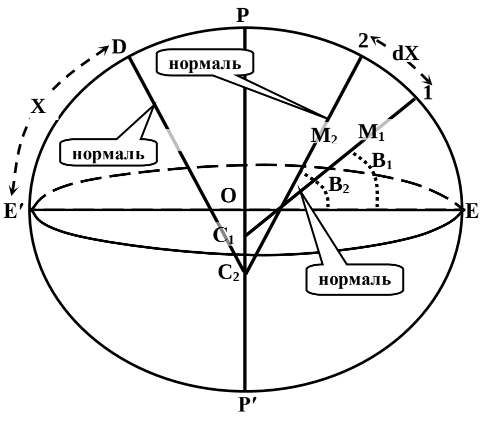
$$N \approx c(1 - \frac{1}{2}e'^2 \cos^2 B + \frac{3}{8}e'^4 \cos^4 B - \frac{5}{16}e'^6 \cos^6 B + \frac{35}{128}e'^8 \cos^8 B - ...).$$

Середній радіус кривини (***R***) визначається по формулі:

$$R = \sqrt{M \times N}$$ де ***M*** и ***N*** - радіуси кривини меридіана й першого вертикала в даній точці.

$$R = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 B)^3}} \times \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B},$$

5.Довжина дуги меридіана



Довжина дуги (***X***) меридіана від екватора (***B***=0^0) до точки (або до паралелі) із широтою (***B***) обчислюється по формулі:

$$X_0^B \approx c[\beta_0 B + \left(\beta_2 \cos B + \beta_4 \cos^3 B + \beta_6 \cos^5 B + \beta_8 \cos^7 B + ...\right)\sin B],$$

де

$$\beta_0 = 1 - \frac{3}{4}e'^2 + \frac{45}{64}e'^4 - \frac{175}{256}e'^6 + \frac{11025}{16384}e'^8; \qquad \beta_2 = \beta_0 - 1;$$

$$\beta_4 = \frac{15}{32}e'^4 - \frac{175}{384}e'^6 + \frac{3675}{8192}e'^8; \qquad \beta_6 = -\frac{35}{96}e'^6 + \frac{735}{2048}e'^8;$$

$$\beta_8 = \frac{315}{1024} e'^8; \qquad e' = \frac{\sqrt{a \ \ - b^2}}{b}; \qquad c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Для контролю довжину дуги (***X***) меридіана від екватора до крапки із широтою (***B***) можна також обчислити по формулі:

$$X_0^B = a(1 - e^2)\left[A\frac{B''}{\rho''} - \frac{B}{2}\sin 2B + \frac{C}{4}\sin 4B - \ldots \right]$$

де:

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \ldots$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \ldots$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \ldots$$

Довжина дуги (***ΔX***) меридіана між паралелями із широтами B_1 і B_2 обчислюється по формулі:

$$\Delta X = \frac{\Delta B''}{6\rho''}\left(M_1 + 4M_m + M_2\right),$$

де $\Delta B = B\ 2 - B_1$ **–** збільшення широти (у кутових секундах);

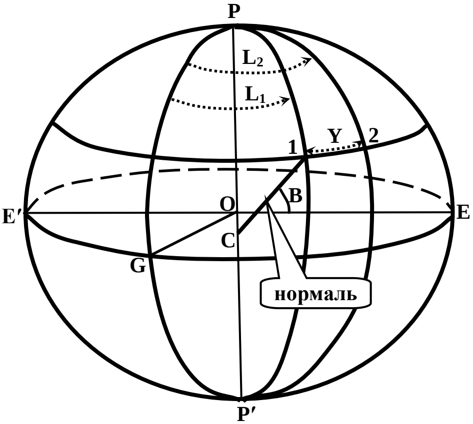
$B_m = \dfrac{B_1 + B_2}{2}$ - середня широта; ***ρ”*** = 206264,8” – кількість секунд у радіані; M_1, M_2 і M_m **–** радіуси кривизни меридіана в точках із широтами B_1, B_2 і B_m.

Для контролю довжину дуги (***ΔX***) меридіана між паралелями із широтами B_1 і B_2 можна обчислити по формулі:

$$\Delta X = X_0^{B2} - X_0^{B1}$$

де $X_0^{У1}$ і $X_0^{У2}$ - довжини дуги меридіана від екватора до паралелей із широтами B_1 і B_2

6.Довжина дуги паралелі



Довжина дуги паралелі

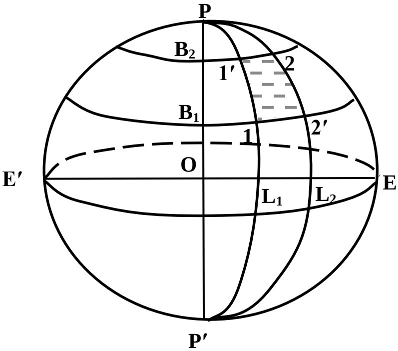
$$Y = \frac{L_2 - L_1}{\rho} N \cos B = \frac{\Delta L''}{\rho''} N \cos B,$$

обчислюється по формулі:

де N – радіус кривизни першого вертикала в точці із широтою B;

$\Delta L = L_2 - L_1$ – різниця довгот двох меридіанів (у кутових секундах); ρ'' = 206264,8” – кількість секунд у радіані.

7.Площа сфероїдальної трапеції



Частина поверхні еліпсоїда, обмежена дугами меридіанів і паралелей, є сфероїдальною трапецією .

Площа сфероїдальної трапеції на поверхні еліпсоїда обчислюється по формулі:

$$P \approx b^2 \frac{L_2 - L_1}{\rho}[(\sin B_2 - \sin B_1) + \frac{2}{3}e^2(\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1) +$$

$$+ \frac{3}{5}e^4(\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1) + \frac{4}{7}e^6(\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1)],$$

де L_1 і L_2 - довготи західного й східного меридіанів трапеції;

B_1 і B_2 - довготи західного й східного меридіанів трапеції;

b - мала піввісь еліпсоїда; ρ'' = 206264,8” – кількість секунд у радіані; е - перший ексцентриситет.

8.Обчислення розмірів знімальної трапеції.

Обчислити розміри рамки й площа знімальної трапеції:

H - 42 -25

Розрахунки виконати для референт - еліпсоїда Красовского:

$$a = 6\ 378\ 245,\ 000\ 00\ м;$$

$$b = 6\ 356\ 863,\ 018\ 77\ м;$$

$$\alpha = 1{:}298{,}3 = 0{,}003\ 352\ 329\ 869;$$

$$e^2 = 0{,}006\ 693\ 421\ 623;$$

$$e'^{\,2} = 0{,}006\ 738\ 525\ 415.$$

8.1.Обчислення широт і довгот рамки знімальної трапеції

По номенклатурі за допомогою таблиці 1 визначити масштаб карти (плану) і розмір знімальної трапеції:

Таблиця 1

Номенклатура	Масштаб	Розмір трапеції по:	
		широті	довготі
H – 42	1:1000 000	4º	6º
H – 42 – 25	1:100 000	20′	30′
H – 42 – 25 – B	1:50 000	10′	15′
H – 42 – 25 – B – г	1:25 000	5′	7′30″
H – 42 – 25 – B – г – 2	1:10 000	2′ 30″	3′45″
H – 42 – 25 – (215)	1:5 000	1′ 15″	1′ 52,5″
H – 42 – 25 – (215 – і)	1:2 000	25″	37,5″

У нашому прикладі:

Номенклатура ________________________ H - 42 - 1

масштаб карти (плану) ________________1:100 000

Розмір трапеції по широті ____________ 20’

Розмір трапеції по довготі ____________ 30’

По першій букві номенклатури, що позначає пояс аркушів карт за допомогою таблиці 2 визначити широту верхньої й нижньої рамки карти масштабу 1:1000 000 :

Таблиця 2

пояс		Широта рамки трапеції масштабу 1:1000 000		пояс		Широта рамки трапеції масштабу 1:1000 000	
№	буква	нижньої	верхньої	№	буква	нижньої	верхньої
1	A	0°	4°	13	M	48°	52°
2	B	4°	8°	14	N	52°	56°
3	C	8°	12°	15	O	56°	60°
4	D	12°	16°	16	P	60°	64°
5	E	16°	20°	17	Q	64°	68°
6	F	20°	24°	18	R	68°	72°
7	G	24°	28°	19	S	72°	76°
8	H	28°	32°	20	T	76°	80°
9	I	32°	36°	21	U	80°	84°
10	J	36°	40°	22	V	84°	88°
11	K	40°	44°	23	W	88°	90°
12	L	44°	48°				

<u>У нашому прикладі:</u>

- широта верхньої рамки - 32°, нижньої - 28°.

По групі цифр, що випливає за буквою , що позначає номер колонки карт визначити довготу лівої й правої рамки карти масштабу 1:1000 000:

$L_{п.} = (№_{колонки} – 30) \times 6^{\circ}$

$L_{л.} = L_{п.} - 6^{\circ}$

<u>У нашому прикладі:</u>

$L_{п.} = (№колонки – 30) \times 6^{\circ} = (42 - 30)^{\circ}\ 6^{\circ} = 72^{\circ}$

$L_{л.} = L_{п.} - 6^{\circ} = 72^{\circ} - 6^{\circ} = 66^{\circ}$

По другій групі цифр, що позначає положення аркуша карти масштабу 1:100 000 в аркуші карти масштабу 1:1000 000 за допомогою таблиці 3 визначити широту верхньої й нижньої рамки карти масштабу 1:100 000, для чого:

- Знайти в таблиці 3 ячейку з відповідною цифрою;
- У лівому стовпці таблиці прочитати значення широти, яке треба додати до широти нижньої рамки карти масштабу 1:1000 000;
- визначити широту верхньої й нижньої рамки карти масштабу 1:100000.

У нашому прикладі:

- Для карти Н – 42 –25 у таблиці 3 ячейки 25 відповідають значення широти верхньої – 3°20', нижньої –3°00'
- широта нижньої рамки карти масштабу 1:1000 000 - 28 ?
- широта нижньої рамки карти $L_{л..}$ = 28 º+ 3°00' = 31°00'
- широта нижньої рамки карти $L_{п..}$ = 28 º+ 3°20' = 31°20'

Аналогічно визначають довготу лівої й правої рамки:

- У нижньому рядку таблиці прочитати значення довготи, яке треба додати до довготи лівої рамки карти масштабу 1:1000 000;
- визначити довготу лівої й правої рамки карти масштабу 1:100000.

У нашому прикладі:

- Для карти Н – 42 –25 у таблиці 3 ячейки 25 відповідають значення довготи лівої – 0°00', правої – 0°30'
- довгота лівої рамки карти масштабу 1:1000 000 - 66 ?
- широта нижньої рамки карти Вн. = 66 º+ 0°00' = 66°00'

– широта верхньої рамки карти Вв. = 66 °+ 0°30' = 66°30'

4°00'

Таблиця 3

.

3°40'	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
3°20'	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
3°00'	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
2°40'	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
2°20'	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
2°00'	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**
1°40'	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**	**81**	**82**	**83**	**84**
1°20'	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**
1°00'	**97**	**98**	**99**	**100**	**101**	**102**	**103**	**104**	**105**	**106**	**107**	**108**
0°40'	**109**	**110**	**111**	**112**	**113**	**114**	**115**	**116**	**117**	**118**	**119**	**120**
0°20'	**121**	**122**	**123**	**124**	**125**	**126**	**127**	**128**	**129**	**130**	**131**	**132**
0°00'	**133**	**134**	**135**	**136**	**137**	**138**	**139**	**140**	**141**	**142**	**143**	**144**
	0°	**0°30'**	**1°**	**1°30'**	**2°**	**2°30'**	**3°**	**3°30'**	**4°**	**4°30'**	**5°**	**5°30'** **5°**

9.Обчислення довжин дуг меридіанів і паралелей

Завдання 4. Обчислення радіусів кривизни меридіана (***M***), радіуса кривизни першого вертикала (***N***) і середній радіус кривизни (***R***) для точок з геодезичними широтами B_1, B_2 і B_m,= $(B_1 + B_2)/2$ по формулах:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 B)^3}};$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}};$$

$$R = \sqrt{M \times N}.$$

Для розглянутого прикладу маємо:

B_1 =31° 00' M_1 =6352463,644 N_1 =6383914,9 R_1 =6368169,865

B_2 =31° 20' M_2 =6352792,871 N_2 =6384025,2 R_2 =6368389,890

B_m =31° 10' M_m =6352628,003 N_m =6383970,0 R_m =6368279,708

Завдання 5. Обчислення довжини дуги меридіана від

$$X_0^B \approx c[\beta_0 B + \left(\beta_2 \cos B + \beta_4 \cos^3 B + \beta_6 \cos^5 B + \beta_8 \cos^7 B + \ldots\right)\sin B],$$

екватора до точок з геодезичними широтами ***B₁***, і ***B₂*** по формул

і: $$\beta_4 = \frac{15}{32}e'^4 - \frac{175}{384}e'^6 + \frac{3675}{8192}e'^8; \qquad \beta_6 = -\frac{35}{96}e'^6 + \frac{735}{2048}e'^8;$$

де

$$\beta_0 = 1 - \frac{3}{4}e'^2 + \frac{45}{64}e'^4 - \frac{175}{256}e'^6 + \frac{11025}{16384}e'^8; \qquad \beta_2 = \beta_0 - 1;$$

$$\beta_8 = \frac{315}{1024}e'^8; \qquad e' = \frac{\sqrt{a \;\; - b^2}}{b}; \qquad c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Для розглянутого прикладу маємо:

Xo¹ = 3431035,2629
Xo² = 3467993,3550

Для контролю довжини дуг меридіана від екватора до

точок із

$$X_0^B = a(1 - e^2)\left[A\frac{B''}{\rho''} - \frac{B}{2}\sin 2B + \frac{C}{4}\sin 4B - \ldots\right]$$

широтами ***B₁***, і ***B₂*** можна також обчислити по формулі:

де:

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \ldots$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \ldots$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \ldots$$

Для розглянутого прикладу маємо:

Xo¹ = 3431035,2689

$Xo^2 = 3467993{,}3605$

Завдання 6. Обчислення довжини дуги меридіана між точками з геодезичними широтами ***B₁***, і ***B₂*** по формулі:

$$\Delta X = \frac{\Delta B}{6\rho}(M_1 + 4M_m + M_2).$$

У нашому прикладі:

$\Delta X = 36958{,}09210$м. на місцевості , що на карті масштабу 1:100 000 складе: $\Delta X = 36958{,}09210$м. : 100 000 = 0,3695809210м. $\approx$ 369,58мм.

Для контролю довжину дуги меридіана між крапками з ΔX = геодезичними широтами $\boldsymbol{B_1}$, і $\boldsymbol{B_2}$ по формулі:

$\Delta X = Xo^1 - xo^2 = 3467993{,}3605 - 3431035{,}2689 = 36957{,}6715$ м.

або

$\Delta X = Xo^1 - xo^2 = 3467993{,}3550 - 3431035{,}2629 =$ 36958,0921м., що на карті масштабу 1:100000 складе:

ΔX = = 36957,6715 м.м. : 100 000 = 0,369575715м. $\approx$369,58мм.

ΔX = 36958,0921м. : 100 000 = 0,3695809210м. $\approx$369,58мм.

Завдання 7. Обчислення довжини дуги паралелі на геодезичних широтах $\boldsymbol{B_1}$ і $\boldsymbol{B_2}$ між меридіанами з довготами L_1 і L_2 по формулі:

$$\Delta Y_i = \frac{L_2 - L_1}{\rho} N_i \cos B_i.$$

У нашому прикладі маємо:

$\Delta У_Н$ = 47 752,934 м., $\Delta У_В$ = 47 586,020 м. на місцевості , що на карті масштабу 1:100000 складе:

$\Delta У_Н$ = 47 752,934м. : 100000 = 0, 47752934 м. ≈ 477,53мм.

$\Delta У_В$ = 47 586,020м. : 100000 = 0, 47586020м м. ≈ 475,86мм.

10.Обчислення площі знімальної трапеції.

Завдання 8. Обчислення площі знімальної трапеції по

$$P = b^2 \frac{L_2 - L_1}{\rho}[(\sin B_2 - \sin B_1) + \frac{2}{3}e^2(\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1) +$$

$$+\frac{3}{5}e^4(\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1) + \frac{4}{7}e^6(\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1) + ...].$$

формулі:

У нашому прикладі маємо:

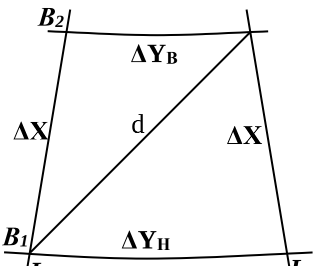
P = 1761777864,9 м^2. = 176177,7865 га. = 1761,778 км^2.

Для грубого контролю площу знімальної трапеції можна обчислити по $P \approx \frac{\Delta Y_1 + \Delta Y_2}{2} \times \Delta X$ наближеній формулі:

$$P \approx \frac{47752{,}934 + 47586{,}020}{2} \times 36958{,}0921 \approx 17611772921ì^{\;2} \approx 1761177{,}2921ãà \approx$$

$$\approx 1761{,}177êì^{\;2}$$

10.1.Обчислення діагоналі знімальної трапеції.



Діагональ знімальної трапеції обчислюють за формулою:

$$d = \sqrt{\Delta Y_{Í} \cdot \Delta Y_{Â} + \left(\Delta X^2\right)}$$

де:

d – довжина діагоналі трапеції,

ΔY_H – довжина дуги паралелі нижньої рамки, ΔY_B – довжина дуги паралелі верхньої рамки трапеції, ΔX - довжина дуги меридіана лівої (правої) рамки.

У нашому прикладі маємо:

$$d = \sqrt{\Delta Y_{\text{Í}} \cdot \Delta Y_{\text{Â}} + \left(\Delta X^{2}\right)} = \sqrt{47752{,}934 \cdot 47586{,}020 + 36958{,}092^{2}} =$$

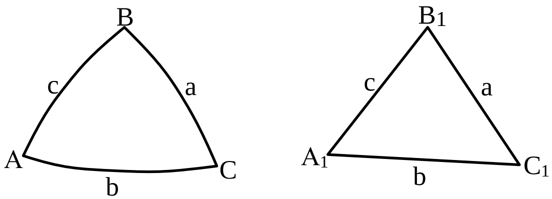
$$= 60318{,}095$$

11.Розв’язування малих сферичних і сфероїдальних трикутників

Трикутники тріангуляції є сфероїдальними або еліпсоїдальними трикутниками, оскільки вони утворені на поверхні еліпсоїда. Тому що на практиці доводиться мати справу із трикутниками, сторони яких не перевищують 40 $\div$ 50 км і в рідких випадках досягають 70 $\div$80 км, внаслідок близькості земного еліпсоїда до сфери розходженнями в елементах сферичних і сфероїдальних трикутників тріангуляції зневажають. Такі трикутники розв’язують , користуючись теоремою Лежандра або способом аддидаментів.

11.1. Розв’язування сферичних трикутників за теоремою Лежандра.

Якщо сторони плоского й сферичного трикутників відповідно рівні, то кути плоского трикутника дорівнюють кутам сферичного трикутника, зменшеним на одну третину сферичного надлишку.



Сума кутів сферичного трикутника дорівнює:

$$(A+B+C) = 180^{o} + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\text{Đ}}{R^2}\rho = \frac{bc \cdot \sin A_1}{2R^2}\rho = \frac{b^2 \sin A_1 \sin C_1}{\sin B_1} \cdot \frac{\rho}{2R^2}$$

де ε - сферичний надлишок трикутника

R - середній радіус кривизни сферичного трикутника

Кути плоского трикутника визначаються за формулами:

$$\grave{A}_1 = \grave{A} - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A} - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\tilde{N}_1 = \tilde{N} - \frac{\varepsilon}{3}$$

Кути А$_1$, В$_1$, З$_1$ називають приведеними сферичними кутами. Якщо сторони сферичного трикутника менше 90км., то при обчисленні сферичного надлишку розходженням між сферичними кутами і їхніми приведеними значеннями можна знехтувати.

<u>Завдання 9.</u> У сферичного трикутника АВС: ∠А = 61° 42' 07,59",

∠В = 59° 52' 27,47", ∠З = 58° 25' 28,88", Д$_{А\text{-}В}$ = 37629,31м., середня широта В$_m$ = 31° 10' 00". Визначити Д$_{В\text{-}С}$ і Д$_{С\text{-}А}$.

<u>Розв’язання.</u>

- <u>Обчислити</u> сферичний надлишок за

$$\varepsilon'' = \frac{P}{R^2}\rho'' = \frac{b^2 \sin A_1 \sin C_1}{\sin B_1}\cdot\frac{\rho''}{2R^2} \approx \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B}\cdot\frac{\rho''}{2R^2}; \quad R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B}.$$

формулою:

<u>У нашому прикладі:</u>

R = 6368279,708 м.; Р$_{\Delta ABC}$ = 632867780,3 м^2; ε" = 3,219".

- Обчислити нев'язку сферичного трикутника за формулою:

$$W = \Sigma\beta_i - \left(180^\circ + \varepsilon\right)$$

$$W = \Sigma\beta_i - \left(180^\circ + \varepsilon\right) = (61^\circ\,42'\,07{,}59'' + 59^\circ\,52'\,27{,}47'' + 58^\circ\,25'\,28{,}88'') -$$
$$-(180^\circ + 3{,}219'') = 180^\circ\,00'\,03{,}940'' - 180^\circ\,00'\,03{,}219'' = +0^\circ\,00'\,00{,}721''$$

<u>У нашому прикладі:</u>

- Обчислити виправлені кути сферичного трикутника за формулами :

$$A^{è}=A-\frac{W}{3};\quad B^{è}=B-\frac{W}{3};\quad C^{è}=C-\frac{W}{3}.$$

$$A^{è}=61^{\circ}\,42'\,07{,}59''-\frac{0{,}721''}{3}=61^{\circ}\,42'\,07{,}59''-0{,}240''=61^{\circ}\,42'\,07{,}350'';$$

$$B^{è}=59^{\circ}\,52'\,27{,}47''-\frac{0{,}721''}{3}=59^{\circ}\,52'\,27{,}47''-0{,}240''=59^{\circ}\,52'\,27{,}230'';$$

<u>У нашіму прикладі:</u>

- Для контролю обчислень знайти суму виправлених кутів:

$$C^{è}=58^{\circ}\,25'\,28{,}88''-\frac{0{,}721''}{3}=58^{\circ}\,25'\,28{,}88''-0{,}241''=58^{\circ}\,25'\,28{,}639'';$$

$$\Sigma\beta^{è}=A^{è}+B^{è}+C^{è}=(180^{\circ}+\varepsilon')$$

<u>У нашому прикладі:</u>

$$\Sigma\beta^{è}=A^{è}+B^{è}+C^{è}=61^{\circ}\,42'\,07{,}350''+59^{\circ}\,52'\,27{,}23''+$$
$$+58^{\circ}\,25'\,28{,}639''=180^{\circ}\,00'\,03{,}219''=(180^{\circ}+\varepsilon'')$$

- <u>Обчислити</u> приведені сферичні кути за формулами :

$$\grave{A}_1=\grave{A}^{è}-\frac{\varepsilon}{3};\hat{A}_1=\hat{A}^{è}-\frac{\varepsilon}{3};\tilde{N}_1=\tilde{N}^{è}-\frac{\varepsilon}{3}$$

<u>У нашому прикладі:</u>

$$\grave{A}_1=\grave{A}^{è}-\frac{\varepsilon}{3}=61^{\circ}\,42'\,07{,}35''-\frac{3{,}219''}{3}=61^{\circ}42'06{,}277''$$

$$\hat{A}_1=\hat{A}^{è}-\frac{\varepsilon}{3}=59^{\circ}\,52'\,27{,}235-\frac{3{,}219''}{3}=59^{\circ}52'\,26{,}157''$$

$$\tilde{N}_1=\tilde{N}^{è}-\frac{\varepsilon}{3}=58^{\circ}25'28{,}639''-\frac{3{,}219''}{3}=58^{\circ}25'27{,}566''$$

- Для контролю обчислень знайти суму приведених кутів:

$$\Sigma\beta=A_1+B_1+C_1=61^{\circ}\,42'\,06{,}277''+59^{\circ}\,52'\,26{,}157''+$$
$$+58^{\circ}\,25'\,27{,}566''=180^{\circ}\,00'\,00{,}000''$$

- Обчислити довжини сторін Д $_{B\text{-}C}$ і Д $_{C\text{-}A}$ за формулами :

$$\ddot{A}_{AN} = \frac{\ddot{A}_{AB}\cdot\sin A}{\sin C}; \ddot{A} = \frac{\ddot{A}_{AB}\cdot\sin B}{\sin C}$$

У нашім прикладі:

$$\ddot{A}_{\hat{A}\tilde{N}} = \frac{\ddot{A}_{AB}\cdot\sin A_1}{\sin C} = \frac{37629{,}31\cdot\sin(61^\circ 42'06{,}277'')}{\sin\left(58^\circ 25'27{,}566''\right)} = 38889{,}988$$

$$\ddot{A}_{CA} = \frac{\ddot{A}_{AB}\cdot\sin B_1}{\sin C} = \frac{37629{,}31\cdot\sin(59^\circ 52'26{,}157'')}{\sin\left(58^\circ 25'27{,}566''\right)} = 38202{,}345$$

11.2.Розв'язування сферичних трикутників по трьох сторонах.

При розв'язанні сферичних трикутників по трьох сторонах із застосуванням теореми Лежандра, трикутники спочатку врозвязують як плоскі, приймаючи сторони трикутників прямолінійними, а до обчислених у такий спосіб кутам трикутників додають поправки рівні $\frac{\varepsilon}{3}$

Формули для обчислень мають вигляд:

$$tg\frac{A_1}{2} = \frac{P}{p(p-a)}$$

$$tg\frac{B_1}{2} = \frac{P}{p(p-b)}$$

$$tg\frac{C_1}{2} = \frac{P}{p(p-c)}$$

ãäå:

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ - напівпериметр трикутника ABC

$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

- площа трикутника ABC

Кути сферичного трикутника визначаються за формулами :

$$A = \grave{A}_1 + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$B = B_1 + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$C = C_1 + \frac{\varepsilon}{3}$$

формула для обчислення сферичного надлишку: $\varepsilon = \frac{P_{\Delta ABC}}{R^2}\rho$

де: R - середній радіус кривизни в області розташування трикутника, прийнятого за сферичний.

Завдання 10. У сферичного трикутника ABC: Д $_{AB}$ = 37629,31м.

Д $_{BC}$ = 38889,988 м., Д $_{CA}$ =38202,345 м. , середня широта B_m = 31° 10' 00". Визначити ∠A , ∠B , ∠C.

Розв'язання .

- Обчислити напівпериметр сферичного трикутника:

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

У нашому прикладі:

p =57360,8215

- Обчислити площу сферичного $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ трикутника:

У нашому прикладі: P = 632865749,145м^2.

- Обчислити кути плоского трикутника:

$$A_1 = 2 \cdot arctg\left(\frac{P}{p(p-a)}\right)$$

$$B_1 = 2 \cdot arctg\left(\frac{P}{p(p-b)}\right)$$

$$C_1 = 2 \cdot arctg\left(\frac{P}{p(p-c)}\right)$$

У нашім прикладі:

A_1 = 61° 42' 06,28"

B_1 = 59° 52' 26,16"

З$_1$ = 58° 25' 27,57"

- Обчислити сферичний надлишок:

$$\varepsilon'' = \frac{P}{R^2}\rho'' \qquad R_m = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B}.$$

<u>У нашому прикладі:</u>

R_m = 6368279,708; ε" = 3,218799007" ? 3,219"

- Обчислити кути сферичного трикутника:

$$A = \grave{A}_1 + \frac{\varepsilon}{3}$$
$$B = B_1 + \frac{\varepsilon}{3}$$
$$C = C_1 + \frac{\varepsilon}{3}$$

У <u>нашому прикладі:</u>

A = 61° 42' 06,28"+ 3,219" : 3 = 61° 42' 07,35"

B = 59° 52' 26,16"+ 3,219" : 3 = 59° 52' 27,23"

З = 58° 25' 27,57"+ 3,219" : 3 = 58° 25' 28,64"

11.3. Розв’язування сферичних трикутників за хордами .

Для рішення трикутників, утворених хордами між пунктами, розташованими на поверхні еліпсоїда:

- Обчислюють кути утворені хордами сферичного трикутника: $A* = \left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right), B* = \left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right), C* = \left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right).$

- Переходять від довжини вихідної сторони до відповідній їй хорді за $\overline{a} = 2R\sin\frac{a}{2R}$ формулою:

- Обчислюють вихідні довжини хорд трикутника за формулами :

$$\bar{b} = \bar{a}\frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right)}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right)} \qquad \bar{c} = \bar{a}\frac{\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right)}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right)}$$

- Переходять від хорд трикутника до довжин їхніх сторін:

$$b = 2R\arcsin\frac{\bar{b}}{2R} \qquad c = 2R\arcsin\frac{\bar{c}}{2R}$$

Завдання 11. У сферичного трикутника АВС: ∠А = 61° 42' 07, 35",
∠В = 59° 52' 27, 23", ∠З = 58° 25' 28, 64", $Д_{А\text{-}В}$ = 37629,31м., середня широта B_m = 31° 10' 00". Визначити хорди сторін $Д_{ВС}$ і $Д_{СА}$.

Розв'язок .

- Сферичний надлишок дорівнює:

$$\varepsilon'' = \frac{P}{R^2}\rho'' \approx \frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin C}\cdot\frac{\rho''}{2R^2}; \qquad R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B}.$$

У нашому прикладі:

R = 6368279,708 м.; $P_{\Delta ABC}$ = 632867780,3 м^2; ε" = 3,219".

- Кути, утворені хордами сферичного трикутника рівні:

$$A* = \left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right), B* = \left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right), C* = \left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

У нашому прикладі:

А* = 61° 42' 06,545"; В* = 59° 52' 26,425" ; З* = 58° 25' 27,835"

- Довжина хорди сторони АВ дорівнює:

$$\bar{\ddot{A}}_{AB} = 2R\sin\frac{\ddot{A}_{AB}}{2R} = 2\times 6368279{,}708\times \arcsin\frac{37629{,}31}{2\times 6368279{,}708} = 37629{,}255$$

- Довжини хорд сторін ВР і АС рівні:

$$\bar{\ddot{A}}_{AC} = \bar{\ddot{A}}_{AB}\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{4}\right)} = 37629{,}255\frac{\sin(58°\,25'\,27{,}835'')}{\sin(58°\,25'\,27{,}835'')} = 38202{,}288$$

$$\bar{\ddot{A}}_{BC} = \bar{\ddot{A}}_{AB}\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{4}\right)} = 37629{,}255\frac{\sin(61°\,42'\,07{,}35'')}{\sin(58°\,25'\,27{,}835'')} = 38889{,}927$$

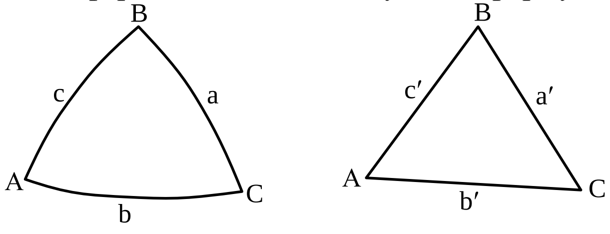
- Сторони сферичного трикутника ВР і АС рівні:

$$\ddot{A}_{AC} = 2R\sin\frac{\bar{\ddot{A}}_{AC}}{2R} = 2\times 6368279{,}708\times \sin\frac{38202{,}288}{2\times 6368279{,}708} = 38202{,}345$$

$$\ddot{A}_{BC} = 2R\sin\frac{\bar{\ddot{A}}_{BC}}{2R} = 2\times 6368279{,}708\times \sin\frac{38889{,}927}{2\times 6368279{,}708} = 38889{,}987$$

11.4.Розв'язування сферичних трикутників за способом аддидаментів

При розв'язуванні трикутників за способом аддидаментів виправлення за сферичність для застосування формул плоскої



тригонометрії вводяться в сторони.

<u>Прядок обчислень при застосуванні способу адидаментів:</u>

- **З** вихідної сторони а обчислюється її аддидамент Ас і її наведене значення а′ по формулах:

$$A_c = \frac{c^3}{6R^2} \qquad c' = c - A_c$$

- З одержанням наведеного значення вихідної сторони трикутник розв’язується як плоский з використанням сферичних кутів (A,B,C), і визначаються наведені значення інших сторін (а′, b’) за формула

$$a' = \frac{c' \cdot \sin A}{\sin C}, \quad b' = \frac{c' \cdot \sin B}{\sin C}$$

- **За** отриманими приведеними значеннями сторін (b′, c’) визначають їх $A_a = \frac{a'^3}{6R^2}, A_b = \frac{b'^3}{6R^2}$ аддидаменти:

- **Визначають** шукані значення $a = a' + A_a, b = b' + A_b$ сторін:

<u>Завдання 12.</u> У сферичного трикутника АВС: ∠А = 61° 42' 07, 35",

∠В = 59° 52' 27, 23", ∠З = 58° 25' 28, 64", Д $_{АВ}$ = 37629,310 м. середня широта В$_m$ = 31° 10' 00". Визначити довжини сторін Д $_{В-С}$ і Д $_{С-А}$.

<u>Розв’язок .</u>

- Радіус кривизни_ дорівнює: $$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B}.$$

У нашому прикладі: R = 6368279,708 м.

- Аддидамент вихідної сторони АВ дорівнює:

$$A_{AB} = \frac{\ddot{A}_{\grave{A}\hat{A}}{}^3}{6R^2} = \frac{37629{,}310^3}{6\times 6368279{,}708^2} = 0{,}219$$

- Приведене значення вихідної сторони дорівнює:

$$\ddot{A}'_{\grave{A}\hat{A}} = \ddot{A}_{\grave{A}\hat{A}} - A_{AB} = 38889{,}988 - 0{,}219 = 37629{,}091$$

- Приведені значення шуканих сторін рівні:

$$\ddot{A}'_{\hat{A}\tilde{N}} = \frac{\ddot{A}'_{\grave{A}\hat{A}}\cdot\sin A}{\sin C} = \frac{37629{,}091\cdot\sin(61^\circ\,42'\,07,35'')}{\sin(58^\circ\,25'\,28,64'')} = 38889{,}749$$

$$\ddot{A}'_{\tilde{N}A} = \frac{\ddot{A}'_{CA}\cdot\sin B}{\sin C} = \frac{37629{,}091\cdot\sin(59^\circ\,52'\,27,23'')}{\sin(58^\circ\,25'\,28,64'')} = 39481{,}969$$

- Аддидаменти шуканих сторін рівні:

$$A_{BC} = \frac{\ddot{A}'_{\hat{A}C}{}^3}{6R^2} = \frac{40192{,}636^3}{6\times 6368279{,}708^2} = 0{,}267$$

$$A_{CA} = \frac{\ddot{A}'_{CA}{}^3}{6R^2} = \frac{39481{,}969^3}{6\times 6368279{,}708^2} = 0{,}253$$

- Довжини шуканих сторін рівні:

$$\ddot{A}_{CA} = \ddot{A}'_{CA} + A_{CA} = 39481{,}969 + 0{,}253 = 39482{,}222$$

АД А-В	ДА-В′	Д В-С′	Д А_С-′	АД В-С	АД А С-	Д В_С	Д С_А
0,219	37629,091	38889,746	38202,116	0,242	0,229	38889,988	38202,345

$$\ddot{A}_{\hat{A}C} = \ddot{A}'_{\hat{A}C} + A_{BC} = 40192{,}636 + 0{,}267 = 40192{,}903$$

12 Розв’язування геодезичних задач на поверхні еліпсоїда

12.1 Загальні відомості

Головною геодезичною задачею є обчислення геодезичних координат пунктів, відстаней і азимутів напрямків між пунктами на поверхні референц - еліпсоїда (мал. 7).

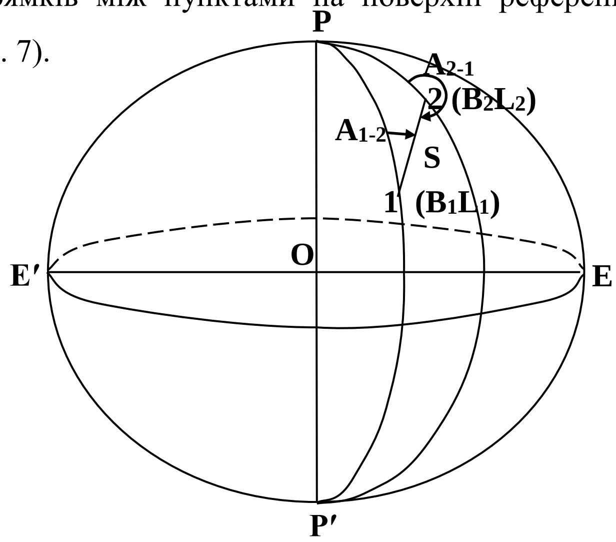


Рис. 7 - Головна геодезична задача

Розрізняють пряме і обернену геодезичну задачу залежно від того, які величини є відомими і якими величинами визначаються.

При розв'язанні **оберненої геодезичного задачі** відомі геодезичні координати двох точок (***B₁, L₁***) і (***B₂, L₂***), по яких обчислюються відстань між точками (***S***), прямий (***A 1-2***) і зворотний (***A 2-1***) азимути.

У **прямій геодезичній задачі** відомі координати вихідної точки (B_1, L_1), відстань до обумовленої точки (***S***) і азимут напрямку на обумовлену точку ($A_{1\text{-}2}$). Розв'язання прямої геодезичної задачі зводиться до обчислення координат другої точки (B_2, L_2) і зворотного азимуту ($A_{2\text{-}1}$).

12.2 Обернена геодезична задача

Відомі геодезичні координати двох точок (B_1, L_1) і (B_2, L_2), необхідно обчислити відстань між точками (***S***), прямий ($A_{1\text{-}2}$) і зворотний ($A_{2\text{-}1}$) азимути.

Для розв'язання оберненої геодезичної задачі при відстані між точками до 40 км застосовуються формули із середніми аргументами Гаусса:

$$Q = S\cos A_m = \frac{\Delta B}{\rho} M_m \left[1 - \frac{2l^2 + (l\sin B_m)^2}{24\rho^2}\right];$$

$$P = S\sin A_m = \frac{l\cos B_m}{\rho} N_m \left[1 + \frac{\Delta B^2 - (l\sin B_m)^2}{24\rho^2}\right];$$

$$t = l\sin B_m \left[1 + \frac{3\Delta B^2 + 2l^2 - 2(l\sin B_m)^2}{24\rho^2}\right],$$

де $\Delta B = B_2 - B_1;\quad l = L_2 - L_1;\quad B_m = (B_1 + B_2)/2;$

M_m – радіус кривини меридіана в точці із широтою ***B_m***;

N_m – радіус кривини першого вертикалу в точці із широтою ***B_m***.

Середній азимут ***A_m*** обчислюється за формулою:

$$tgA_m = \frac{P}{Q}.$$

По знаках чисельника (***P***) і знаменника (***Q***) визначається чверть, до якої відноситься середній азимут ***A_m***, а потім обчислюється його значення.

Відстань між точками обчислюється за формулою:

$$S = \frac{P}{\sin A_m} = \frac{Q}{\cos A_m} = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Прямий (***A_{1-2}***) і зворотний (***A_{2-1}***) азимути обчислюються за формулами :

$$A_{1-2} = A_m - \frac{t}{2};$$

$$A_{2-1} = A_m \pm 180^0 + \frac{t}{2}.$$

При відстанях до 40 км наведені формули дозволяють обчислити широту й довготу з точністю до 0,0001"-0,0002" і азимут - до 0,001".

12.3 Пряма геодезична задача

Відомі координати вихідної точки (***B_1, L_1***), відстань до точки (***S***),яку необхідно визначити і азимут напрямку на точку ($A_{1\text{-}2}$), необхідно обчислити координати другої точки (B_2, L_2) і зворотний азимут ($A_{2\text{-}1}$).

При відстанях між точками до 60 км застосовується спосіб допоміжної точки (мал. 8).

Спочатку обчислюються допоміжні величини:

$$u = \frac{S}{N_1}\cos A_{1-2}; \quad v = \frac{S}{N_1}\sin A_{1-2},$$

де N_1 – радіус кривизни першого вертикала у вихідній точці із широтою B_1.

Потім обчислюються величини:

$$b = u(1 + \frac{v^2}{3}); \quad \varphi_0 = B_1 + b\rho'',$$

де φ_0 - широта допоміжної точки на сфері радіуса N_1.

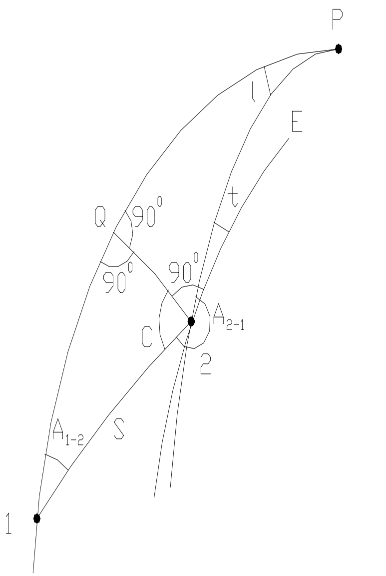


Рис. 8 - Пряма геодезична задача

Зближення меридіанів (***t***) і різницю довгот меридіанів (***l***) обчислюються за формулами:

$$t''=\tau(1-\frac{\lambda^2}{6}-\frac{\tau^2}{6})\rho'';$$

$$l''=\lambda(1-\frac{\tau^2}{3})\rho'',$$

де $\lambda = c\sec\varphi_0; \quad \tau = c\times tg\varphi_0; \quad c = v(1-\frac{u^2}{6}).$

Різницю широт $\Delta\boldsymbol{B}$ точки, що визначають і вихідної точки обчислюються за формулою:

$$\Delta B''=V_1^2\Delta\varphi(1-\frac{3}{4}e'^2\sin 2B_1\Delta\varphi-\frac{e'^2}{2}\cos 2B_1\Delta\varphi^2)\rho'',$$

де $V_1^2 = 1+e'^2\cos^2 B_1$ - квадрат другої сфероїдичної функції геодезичної широти; e'^2 - квадрат другого ексцентриситету;

$$\Delta\varphi = b-d; \quad d = \frac{c\tau}{2}(1-\frac{\lambda^2}{12}-\frac{\tau^2}{6}).$$

Координати точки, яку визначають обчислюють за формулами:

$$B_2 = B_1 + \Delta B'';$$
$$L_2 = L_1 + l''.$$

Азимут зворотного напрямку обчислюється за формулою:

$$A_{2-1} = A_{1-2} \pm 180^0 + t''-\varepsilon'',$$

де $\varepsilon'' = \rho'' \dfrac{bc}{2V_1^2}.$

Значення координат шуканої точки (***B*₂, *L*₂**) і пов'язані з їхнім визначенням величини $(\varphi_0, \quad l'', \quad \Delta B'')$ обчислюються до 0,0001".

Значення зворотного азимута (***A* 2-₁**) і пов'язані з його визначенням величини $(t'', \quad \varepsilon'')$ обчислюються до 0,001".

12.4 Приклади розв'язування геодезичних задач на поверхні еліпсоїда

12.4.1. Вихідні дані

Для розв'язання оберненої геодезичної задачі необхідно взяти вихідні координати південно-західної (***B*₁, *L*₁**) і північно-східної (***B*₂, *L*₂**) вершин знімальної трапеції з таблиці 1.

Для розв'язання прямої геодезичної задачі необхідно взяти вихідні координати (***B*₁, *L*₁**) південно-західної вершини трапеції з таблиці 1, а відстань (***S***), і азимут(***A* 1-₂**)напрямку до точки, яку визначають необхідно обчислити за формулами:

$$S = 5000{,}000\ \grave{i} + {}^{1}\ {}_{\hat{a}\grave{a}\eth.} \times 50{,}000\ \grave{i}\ ;$$

$$A_{1-2} = 45^{0}00^{1}00^{11} + 1^{1} \times {}^{1}\ {}_{\tilde{a}\eth.} + 1^{11} \times {}^{1}\ {}_{\hat{a}\grave{a}\eth.},$$

де ***№гр.*** – номер групи; ***№вар.*** **–** номер варіанта.

Наприклад, для групи № 2 і варіанту № 30 маємо:

$$S = 5000{,}000\ \grave{i} + 30 \times 50{,}000\ \grave{i} = 6500{,}000\ \grave{i}\ ;$$

$$A_{1-2} = 45^{0}00^{1}00^{11} + 1^{1} \times 2 + 1^{11} \times 30 = 45^{0}02^{1}30^{11}.$$

12.4.2 Приклад розв'язування оберненої геодезичної задачі

Таблиця 2 - Вихідні дані

Номер точки	Широта (***B***)			Довгота (***L***)		
	0	1	11	0	1	11
1	47	50	00	39	00	00
2	47	52	30	39	03	45
Різниця	0	02	30	0	03	45

У табл. 3 наведений приклад розв'язання оберненої геодезичної задачі за формулами (див. п. 2.2):

$$\Delta B = B_2 - B_1; \quad l = L_2 - L_1; \quad B_m = (B_1 + B_2)/2;$$

$$Q = S\cos A_m = \frac{\Delta B}{\rho} M_m \left[1 - \frac{2l^2 + (l\sin B_m)^2}{24\rho^2} \right];$$

$$P = S\sin A_m = \frac{l\cos B_m}{\rho} N_m \left[1 + \frac{\Delta B^2 - (l\sin B_m)^2}{24\rho^2} \right];$$

$$t = l\sin B_m \left[1 + \frac{3\Delta B^2 + 2l^2 - 2(l\sin B_m)^2}{24\rho^2} \right];$$

$$tgA_m = \frac{P}{Q};$$

$$S = \frac{P}{\sin A_m} = \frac{Q}{\cos A_m} = \sqrt{P^2 + Q^2};$$

$$A_{1-2} = A_m - \frac{t}{2};$$

$$A_{2-1} = A_m \pm 180^0 + \frac{t}{2}.$$

Таблиця 3 – Розв’язання оберненої задачі

Позначення	Значення			Позначення	Значення		
B B_m	47^{0}	51^{1}	15^{11}	M_m	6370682,598		
$\sin B_m$	0,741439301			N_m	6390012,146		
$\cos B_m$	0,671019942			$l \sin B_m$	0,046339956		
$Q=S \cos A_m$	4632,890537			$P=S \sin A_m$	4677,292111		
$tg\, A_m=P/Q$	1,009583989			$A_m=arctg(P/Q)$	$45{,}27324958^{0}$		
A_m	45^{0}	16^{1}	$23{,}698^{11}$	t	0^{0}	2^{1}	$46{,}824^{11}$
$A\ 1\text{-}_2$	**45^{0}**	**15^{1}**	**$0{,}287^{11}$**	$A\ 2\text{-}_1$	**225^{0}**	**17^{1}**	**$47{,}110^{11}$**
$S=Q/\cos A_m$	**6583,368 м**			$S=P/\sin A_m$	**6583,368 м**		

12.4.3. Приклад розв’язання прямої геодезичної задачі

Таблиця 4 - Вихідні дані

Позначення	Значення		
	0	1	11
B_1	47^{0}	50^{1}	00^{11}
L_1	39^{0}	00^{1}	00^{11}
$A\ 1\text{-}_2$	45^{0}	00^{1}	00^{11}
$S\ 1\text{-}_2$	5000,000 м		

У табл. 5 наведений приклад розв’язання прямої геодезичної задачі за формулами (див. п. 2.3):

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}};$$

$$u = \frac{S}{N_1}\cos A_{1-2}; \quad v = \frac{S}{N_1}\sin A_{1-2};$$

$$b = u\left(1+\frac{v^2}{3}\right); \quad \varphi_0 = B_1 + b\rho'';$$

$$\lambda = c\sec\varphi_0; \quad \tau = c \times tg\varphi_0; \quad c = v\left(1-\frac{u^2}{6}\right);$$

$$t'' = \tau\left(1-\frac{\lambda^2}{6}-\frac{\tau^2}{6}\right)\rho'';$$

$$l'' = \lambda\left(1-\frac{\tau^2}{3}\right)\rho'';$$

$$V_1^2 = 1 + e'^2\cos^2 B_1;$$

$$\Delta B'' = V_1^2\Delta\varphi\left(1-\frac{3}{4}e'^2\sin 2B_1\Delta\varphi - \frac{e'^2}{2}\cos 2B_1\Delta\varphi^2\right)\rho'';$$

$$\Delta\varphi = b - d; \quad d = \frac{c\tau}{2}\left(1-\frac{\lambda^2}{12}-\frac{\tau^2}{6}\right);$$

$$B_2 = B_1 + \Delta B'';$$

$$L_2 = L_1 + l'';$$

$$\varepsilon'' = \rho''\frac{bc}{2V_1^2};$$

$$A_{2-1} = A_{1-2} \pm 180^0 + t'' - \varepsilon''.$$

Таблиця 5 – Розв’язання прямої задачі

Позначення	Значення			Позначення	Значення		
B_1	47^0	50^1	$00,0000^{11}$	N_1	6390004,380		
$2B_1$	95^0	40^1	$00,0000^{11}$	A 1-2	45^0	00^1	$00,000^{11}$
$sin2B_1$	0,99511318			sin 1-2	0,70710678		
$cos2B_1$	-0,09874083			cos 1-2	0,70710678		
u	0,000553291			c	0,000553291		
v	0,000553291			λ	0,000824726		
b	0,000553291			τ	0,000611589		
φ_0	47,86503459			t^{11}	$126,1492^{11}$		
φ_0	47^0	51^1	$54,1245^{11}$	l^{11}	$170,1118^{11}$		
d	0,00000016919			$\Delta\varphi$	0,000553122		
V'^2	1,0030365789			e'^2	0,0067385254		
$\Delta B''$	114,4358”			ε''	$0,0315^{11}$		
B_2	47^0	51^1	$54,4358^{11}$	L_1	39^0	00^1	$00,0000^{11}$
A 2-1	225^0	02^1	$06,118^{11}$	L_2	39^0	02^1	$50,1118^{11}$

13 Плоскі прямокутні координати Гаусса-Крюгера

13.1 Сутність системи плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера

Поверхня земного еліпсоїда не може бути зображена на площині без розривів або без перекручувань. У геодезії найбільш вигідною вважається рівнокутна (конформна) проекція, у якій забезпечується відсутність перекручувань кутів і збереження подоби нескінченно малих фігур. При цьому масштаб зображення по осях ***X*** и ***B*** (m_x і m_y) збільшується при віддаленні точок від осі абсцис, але в кожній точці проекції не залежить від напрямку й становить:

$$m = m_x = m_y = 1 + \frac{Y^2}{2R^2} + ...,$$

де ***Y*** – віддалення точки від осьового меридіана; ***R*** – середній радіус кривини еліпсоїда в даній точці (див. п. 1.3).

У системі плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера поверхня еліпсоїда розбита меридіанами на координатні зони шириною по 6^0 по довготі (мал.9). Кожна із цих зон зображується на площині незалежно від інших, утворюючи самостійну систему координат (мал. 10). Осями координат служать зображення осьового меридіану зони й екватора.

Крайнім західним меридіаном першої зони є Гринвічський меридіан. Довгота осьового меридіана координатних зон обчислюється за формулою:

$$L_{0,N} = 6^0 N - 3^0,$$

де ***N*** – номер координатної зони (рахунок зон ведеться від Гринвічського меридіана на схід).

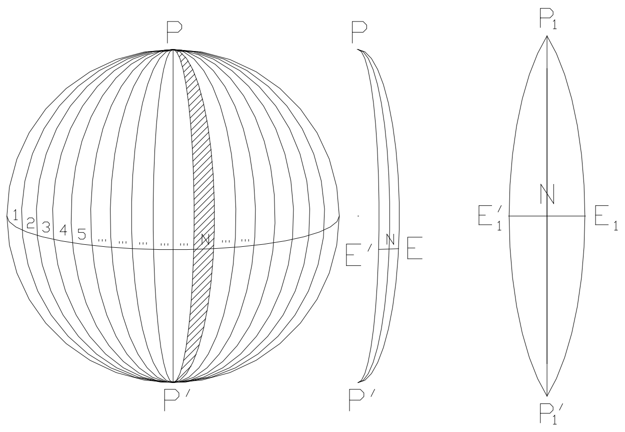


Рис. 9 - Розподіл земного еліпсоїда на координатні зони

Координатні зони збігаються з колонами аркушів карт масштабу 1:1000000, а номер зони (***N***) на 30 менше номери відповідної колони аркушів карт.

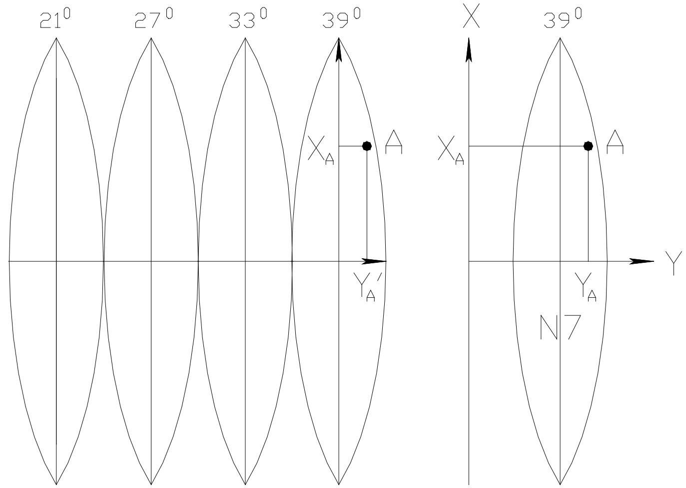


Рис. 10 - Координатні зони

Для однозначного визначення положення точки й одержання тільки позитивних значень ординат вісь абсцис переносять на 500 км на захід від осьового меридіана й перед ординатою записують № координатної зони.

Отже, ордината визначається за формулою:

$$y = N * 1000000\,ì\ + 500000\,ì\ + y^{1},$$

де ***N*** - номер координатної зони; ***в 1-***^{1}- віддалення точки від осьового меридіана. Наприклад, точка розташована в координатній зоні № 7 на віддаленні 11500 м від осьового меридіана на захід (***в***^{1} **=** -11500 м). Тоді ***в***=7000000 м + 500000 м – 11500 м = 7488500 м.

13.2 Обчислення плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера за геодезичними координатами точок

При відомих значеннях геодезичних координат точок на поверхні земного еліпсоїда (***B*, *L***) плоскі прямокутні координати Гаусса-Крюгера (***x*, *y*)** обчислюються по формулах:

$$x = X + \frac{l^2}{2\rho^2} N \sin B \cos B \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{12\rho^2}(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \right.$$

$$\left. + \frac{l^4 \cos^4 B}{360\rho^4}(61 - 58t^2 + t^4) \right\};$$

$$y = \frac{l}{\rho} N \cos B \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{6\rho^2}(1 - t^2 + \eta^2) + \right.$$

$$+\frac{l^4\cos^4 B}{120\rho^4}(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58\eta^2t^2)\Bigg\},$$

де ***X*** – довжина дуги меридіана від екватора до точки із широтою ***B*** (див. п. 1.4); ***N*** – радіус кривизни першого вертикала в точці із широтою ***B***;

$t = tqB;\quad \eta^2 = e'^2\cos^2 B;\quad l = L - L_0$ – різниця між довготою даної крапки й довготою осьового меридіана координатної зони.

При обчисленні на ЕОМ плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера по геодезичних координатах точок на поверхні референц-еліпсоїда Красовского використовують формули

$$x = 6367558{,}4969\frac{B}{\rho} - \{a_0 - [0{,}5 + (a_4 + a_6 l^2)l^2]\times$$

$$\times l^2 N\}\sin B\cos B;$$

$$y = [1 + (a_3 + a_5 l^2)l^2]lN\cos B,$$

де допоміжні коефіцієнти обчислюються за формулами :

$$a_0 = 32140{,}404 - [135{,}3302 - (0{,}7092 - 0{,}0040\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B;$$

$$a_4 = (0{,}25 + 0{,}00252\cos^2 B)\cos^2 B - 0{,}04166;$$

$$a_6 = (0{,}166\cos^2 B - 0{,}084)\cos^2 B;$$

$$a_3 = (0{,}3333333 + 0{,}001123\cos^2 B)\cos^2 B - 0{,}1666667;$$

$$a_5 = 0{,}0083 - [0{,}1667 - (0{,}1968 + 0{,}0040\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B;$$

$$l = \frac{L - L_0}{\rho}.$$

13.3 Обчислення геодезичних координат точок за плоскими прямокутними координатами Гаусса-Крюгера

Загальний шлях рішення зводиться до визначення по відомій абсцисі ***x*** широти ***B₀*** підстави зображення плоскої ординати на поверхні еліпсоїда й різниці широт (***B 0-B***), де ***B*** – шукана широта заданої точки. Потім обчислюється різниця довгот (L-***L₀*=*l***) меридіана даної точки й осьового меридіана зони.

Широта ***B*** и довгота ***L*** обчислюються за формулами :

$$B = B_0 - (B_0 - B) \quad \grave{e} \quad L = L_0 + l.$$

Різниця широт і довгот обчислюються за формулами:

$$B_0 - B = \frac{y^2 \rho}{2M_0 N_0} t_0 \left\{ 1 + \frac{y^2}{12 N_0} (5 + 3t_0^2 + \eta_0^2 - 9\eta_0^2 t_0^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{y^2}{360 N_0^4} (61 + 90 t_0^2 + 45 t_0^4) \right\};$$

$$l = \frac{y\rho}{N_0 \cos B_0} \left\{ 1 - \frac{y^2}{6N_0^2} (1 + 2t_0^2 + \eta_0^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{y^4}{120 N_0^4} (5 + 28 t_0^2 + 24 t_0^4 + 6\eta_0^2 + 8\eta_0^2 t_0^2) \right\},$$

де ***N₀***, ***M₀*** - радіуси кривизни першого вертикала й меридіана в точці із широтою ***B₀***.

На ЕОМ обчислення на поверхні референц-еліпсоїда Красовского виконуються за перетвореними формулами :

$$B = B_0 - [1 - (b_4 - 0{,}12z^2)z^2)z^2 b_2 \rho;$$

$$l = [1 - (b_3 - b_5 z^2)z^2]z\rho,$$

де

$$B_0 = \beta + \{50221746 + [293622 + (2350 + 22\cos^2\beta)\cos^2\beta]\cos^2\beta\} \times$$
$$\times 10^{-10}\rho \sin\beta\cos\beta;$$

$$\beta = \frac{x}{6367558{,}4969}\rho; \qquad z = \frac{y}{N_0 \cos B_0};$$

$$N_0 = 6399698{,}902 - 21562{,}267\cos^2 B_0 +$$
$$+ 108{,}973\cos^4 B_0 - 0{,}612\cos^6 B_0 + 0.004\cos^8 B_0;$$

$$b_2 = (0{,}5 + 0{,}003369\cos^2 B_0)\sin B_0 \cos B_0;$$

$$b_3 = 0{,}333333 - (0{,}166667 - 0{,}001123\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$b_4 = 0{,}25 + (0{,}16161 + 0{,}00562\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$b_5 = 0{,}2 - (0{,}1667 - 0{,}0088\cos^2 B_0)\cos^2 B_0.$$

14. Перетворення плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера з однієї координатної зони в іншу

Завдання перетворення координат полягає в тому, що по відомих координатах $\boldsymbol{X_1}$ і $\boldsymbol{Y_1}$, віднесеним до осьового меридіана однієї зони з довготою $\boldsymbol{L_0}$, визначать координати $\boldsymbol{X_2}$ і $\boldsymbol{Y_2}$ ці ж точки з віднесенням їх до осьового меридіана суміжної зони з довготою $\boldsymbol{L_0}$**+6⁰** (мал. 11) або з довготою $\boldsymbol{L_0}$ **- 6⁰**.

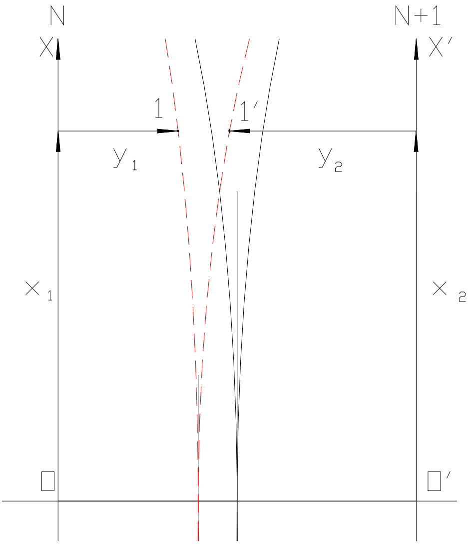


Рис. 11 - Схема до перетворення плоских прямокутних координат

Гаусса-крюгера з однієї координатної зони в іншу

Перетворення координат на ЕОМ доцільно виконувати з попереднім переходом від заданих плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера ($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{в_1}$) до геодезичних координат ($\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{L_1}$) по формулах (див. п. 3.3):

$$y = Y - {}^{1}{}_{\text{çîíû}} \times 1000000\text{ì} - 500000\text{ì} ;$$

$$L_0 = {}^{1}{}_{\text{çîíû}} \times 6^0 - 3^0;$$

$$\beta = \frac{x}{6367558{,}4969};$$

$$B_0 = \beta + \{50221746 + [293622 + (2350 + 22\cos^2\beta)\cos^2\beta]\cos^2\beta\}\times$$
$$\times 10^{-10}\rho\sin\beta\cos\beta;$$

$$N_0 = 6399698{,}902 - 21562{,}267\cos^2 B_0 +$$
$$+108{,}973\cos^4 B_0 - 0{,}612\cos^6 B_0 + 0.004\cos^8 B_0;$$

$$b_2 = (0{,}5 + 0{,}003369\cos^2 B_0)\sin B_0\cos B_0;$$

$$b_3 = 0{,}333333 - (0{,}166667 - 0{,}001123\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$b_4 = 0{,}25 + (0{,}16161 + 0{,}00562\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$b_5 = 0{,}2 - (0{,}1667 - 0{,}0088\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$z = \frac{y}{N_0\cos B_0};$$

$$B = B_0 - [1 - (b_4 - 0{,}12z^2)z^2)z^2 b_2\rho;$$

$$l = [1 - (b_3 - b_5 z^2)z^2]z\rho;$$

$$L = L_0 + l.$$

Потім обчислюються плоскі прямокутні координати Гаусса-Крюгера в суміжній координатній зоні з довготою осьового меридіана

$$L_0^1 = L_0 \pm 6^0,$$

де знак «+» відповідає перерахуванню в суміжну східну зону, а знак «-» - у суміжну західну зону.

Плоскі прямокутні координати Гаусса-Крюгера в суміжній координатній зоні обчислюються по формулах (див. п. 3.2):

$$x = 6367558{,}4969\frac{B}{\rho} - \{a_0 - [0{,}5 + (a_4 + a_6 l^2) l^2] \times$$
$$\times l^2 N\} \sin B \cos B;$$

$$y = [1 + (a_3 + a_5 l^2) l^2] l N \cos B,$$

де

$$a_0 = 32140{,}404 - [135{,}3302 - (0{,}7092 - 0{,}0040 \cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B;$$

$$a_4 = (0{,}25 + 0{,}00252 \cos^2 B)\cos^2 B - 0{,}04166;$$

$$a_6 = (0{,}166 \cos^2 B - 0{,}084)\cos^2 B;$$

$$a_3 = (0{,}3333333 + 0{,}001123 \cos^2 B)\cos^2 B - 0{,}1666667;$$

$$a_5 = 0{,}0083 - [0{,}1667 - (0{,}1968 + 0{,}0040 \cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B;$$

$$l = \frac{L - L_0^1}{\rho}.$$

15.Приклад обчислення плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера за геодезичними координатами точок

Вихідними даними є геодезичні координати вершин знімальної трапеції масштабу 1:10000 (розмір трапеції ΔB = $2^1 30^{11}$, ΔL = $3^1 45^{11}$). Розрахунок вихідних даних виконується відповідно до вказівок у таблиці 1. У табл. 6 дані геодезичні координати вершин знімальної трапеції, по яких розглядається приклад обчислення плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера.

Таблиця 6 - Координати вершин знімальної трапеції

Номер точки	Широта			Довгота		
	0	1	11	0	1	11

$1_{юз}$	47	50	00	39	00	00
$1^1_{сз}$	47	52	30	39	00	00
$2_{св}$	47	52	30	39	03	45
$2^1_{юв}$	47	50	00	39	03	45

У табл. 7 наведений розрахунок координат ***X, У*** за формулами (див. п. 3.2):

$$x = 6367558{,}4969\frac{B}{\rho} - \{a_0 - [0{,}5 + (a_4 + a_6 l^2)l^2]\times$$

$$\times l^2 N\}\sin B\cos B;$$

$$y = [1 + (a_3 + a_5 l^2)l^2]lN\cos B,$$

де

$$a_0 = 32140{,}404 - [135{,}3302 - (0{,}7092 - 0{,}0040\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B;$$

$$a_4 = (0{,}25 + 0{,}00252\cos^2 B)\cos^2 B - 0{,}04166;$$

$$a_6 = (0{,}166\cos^2 B - 0{,}084)\cos^2 B;$$

$$a_3 = (0{,}3333333 + 0{,}001123\cos^2 B)\cos^2 B - 0{,}1666667;$$

$$a_5 = 0{,}0083 - [0{,}1667 - (0{,}1968 + 0{,}0040\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B;$$

$$l = \frac{L - L_0}{\rho}.$$

Таблиця 7 - Розрахунок плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера за геодезичними координатами точок

Позначення	$1_{юз}$			$1^1_{сз}$			$2_{св}$			$2^1_{юв}$		
L	**39**	**00**	**00**	**39**	**00**	**00**	**39**	**03**	**45**	**39**	**03**	**45**
L₀	39	00	0	39	00	00	39	00	0	39	00	0

									0			0
l*, *рад.	0,0000000			0,000000000			0,0010908			0,0010908		
B	**47**	**50**	**00**	**47**	**52**	**30**	**47**	**52**	**30**	**47**	**50**	**00**
sin	0,7411953			0,7416832			0,7416832			0,7411953		
cos	0,6712895			0,6707503			0,6707503			0,6712895		
cos²B	0,4506296			0,4499060			0,4499060			0,4506296		
N	6390004,380			6390019,912			6390019,912			6390004,380		
a₀	32079,564			32079,661			32079,661			32079,564		
a₃	-0,0162288			-0,0164707			-0,01647075			-0,01622881		
a₄	0,0715091			0,0713266			0,07132658			0,07150912		
a₅	-0,02649			-0,02650			-0,02650			-0,02649		
a₆	0,0299238			0,02982174			0,02982174			0,0299238		
X	**5299989,4567**			**5304622,3479**			**5304624,2392**			**5299991,3483**		
y	0,0000			0,0000			4675,4182			4679,1652		
Y	**7500000,0000**			**7500000,0000**			**7504675,4182**			**7504679,1652**		

16 Обчислення геодезичних координат точки за плоскими прямокутними координатами Гаусса-Крюгера

Як приклад розглянемо рішення завдання для точки з плоскими прямокутними координатами Гаусса-Крюгера:

x_1 = **5000000** м;

$в_1$ = **4830000** м.

Рішення завдання виконуємо за формулами (див. п. 4):

$$y = Y - 1_{\text{çîíû}} \times 1000000\text{ì} - 500000\text{ì} ;$$

$$L_0 = 1_{\text{çîíû}} \times 6^0 - 3^0;$$

$$\beta = \frac{x}{6367558{,}4969};$$

$$B_0 = \beta + \{50221746 + [293622 + (2350 + 22\cos^2\beta)\cos^2\beta]\cos^2\beta\} \times \\ \times 10^{-10}\rho\sin\beta\cos\beta;$$

$$N_0 = 6399698{,}902 - 21562{,}267\cos^2 B_0 + \\ + 108{,}973\cos^4 B_0 - 0{,}612\cos^6 B_0 + 0.004\cos^8 B_0;$$

$$b_2 = (0{,}5 + 0{,}003369\cos^2 B_0)\sin B_0 \cos B_0;$$

$$b_3 = 0{,}333333 - (0{,}166667 - 0{,}001123\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$b_4 = 0{,}25 + (0{,}16161 + 0{,}00562\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$b_5 = 0{,}2 - (0{,}1667 - 0{,}0088\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$z = \frac{y}{N_0 \cos B_0};$$

$$B = B_0 - [1 - (b_4 - 0{,}12z^2)z^2)z^2 b_2\rho;$$

$$l = [1 - (b_3 - b_5 z^2)z^2]z\rho;$$

16.1. Приклад обчислення геодезичних координат точок за плоскими прямокутними координатами Гаусса-Крюгера

У якості вихідних даних візьмемо обчислені в попереднім завданні (табл. 7) плоскі прямокутні координати Гаусса-Крюгера південно-західної (1) і північно-східної (2) вершин знімальної трапеції й обчислимо в табл. 8 середні арифметичні значення координат за формулами:

$$X_{ñð.} = \frac{\tilde{O}_1 + \tilde{O}_2}{2}; \qquad Y_{ñð.} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}.$$

За значенням Yср. установлюємо номер координатної зони (у нашому випадку № зони = 7).

Таблиця 8 - Координати вершин знімальної трапеції

Номер крапки	***X, м***	***Y, м***
1ЮЗ	5299989,4567	7500000,0000
2СВ	5304624,2392	7504675,4182
Середні	5302306,8480	7502337,7091

Рішення завдання виконуємо за формулами (див. п. 3.3):

$$y = Y - {}^{1}{}_{\text{çîíû}} \times 1000000\,\text{ì} - 500000\,\text{ì}\;;$$

$$L_0 = {}^{1}{}_{\text{çîíû}} \times 6^0 - 3^0; \qquad \beta = \frac{x}{6367558{,}4969};$$

$$B_0 = \beta + \{50221746 + [293622 + (2350 + 22\cos^2\beta)\cos^2\beta]\cos^2\beta\} \times$$
$$\times 10^{-10}\rho\sin\beta\cos\beta;$$

$$N_0 = 6399698{,}902 - 21562{,}267\cos^2 B_0 +$$
$$+108{,}973\cos^4 B_0 - 0{,}612\cos^6 B_0 + 0.004\cos^8 B_0;$$

$$b_2 = (0{,}5 + 0{,}003369\cos^2 B_0)\sin B_0\cos B_0;$$

$$b_3 = 0{,}333333 - (0{,}166667 - 0{,}001123\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$b_4 = 0{,}25 + (0{,}16161 + 0{,}00562\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$b_5 = 0{,}2 - (0{,}1667 - 0{,}0088\cos^2 B_0)\cos^2 B_0;$$

$$z = \frac{y}{N_0\cos B_0};$$

$$B = B_0 - [1 - (b_4 - 0{,}12z^2)z^2)z^2 b_2 \rho;$$

$$l = [1 - (b_3 - b_5 z^2)z^2]z\rho;$$

$$L = L_0 + l.$$

Таблиця 9 - Обчислення геодезичних координат точок

за плоскими прямокутними координатами

Позна-чення	1юз	Позна-чення	1юз		
X	**5302306,8480**	***N₀***	6390012,149		
Y	**7502337,7091**	***z***	0,00054520		
y	2337,7091	***z^2***	0,00000030		
L_0	39,0000000	***b_2***	0,24951499		
β, рад.	0,83270642	***b_3***	0,25851293		
sin β	0,73975516	***b_4***	0,32390715		
cos β	0,67287614	***b_5***	0,12672451		
cos^2 β	0,45276230	***B, радий.***	0,83521284		
B_0, рад.	0,83521292	***B, град.***	**47**	**51**	**15,015**
sin B_0	0,74143940	***l, радий.***	0,00054520		
cos B_0	0,67101983	***l, град.***	0	01	52,455
cos^2 $У_0$	0,45026761	***L, град.***	**39**	**01**	**52,455**

17. Приклад перетворення плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера із західної координатної зони в східну

17.1 Вихідні дані

Таблиця 10 - Вихідні дані для рішення завдань

Номер групи	***X_1, м*** (№вар. - номер варіанта)	***B_1, м***

1	5100000 м + №$_{\text{вар.}}$×100 м	5200000 м - №$_{\text{вар.}}$×100 м
2	5200000 м + №$_{\text{вар.}}$×100 м	6700000 м + №$_{\text{вар.}}$×100 м
3	5300000 м + №$_{\text{вар.}}$×100 м	7200000 м - №$_{\text{вар.}}$×100 м

Наприклад, для групи № 2 і варіанти № 30 одержимо:

$\boldsymbol{X_1}$ = 5200000 м + 30×100 м = 5200000 м + 3000 м = 5203000 м;

$\boldsymbol{B_1}$ = 6700000 м + 30×100 м = 6700000 м + 3000 м = 6703000 м.

18. Обчислення плоских прямокутних координат Гаусса-крюгера за геодезичними координатами точки

Вихідними даними є геодезичні координати точки, обчислені в табл. 2. У табл. 3 наведений розрахунок координат ***X, У*** за формулами (див. п. 3):

$$x = 6367558{,}4969\frac{B}{\rho} - \{a_0 - [0{,}5 + (a_4 + a_6 l^2)l^2]\times$$

$$\times l^2 N\}\sin B \cos B;$$

$$y = [1 + (a_3 + a_5 l^2)l^2]lN\cos B,$$

$$a_0 = 32140{,}404 - [135{,}3302 - (0{,}7092 - 0{,}0040\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B;$$

$$a_4 = (0{,}25 + 0{,}00252\cos^2 B)\cos^2 B - 0{,}04166;$$

$$a_6 = (0{,}166\cos^2 B - 0{,}084)\cos^2 B;$$

$$a_3 = (0{,}3333333 + 0{,}001123\cos^2 B)\cos^2 B - 0{,}1666667;$$

$$a_5 = 0{,}0083 - [0{,}1667 - (0{,}1968 + 0{,}0040\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B;$$

$$l = \frac{L - L_0}{\rho}.$$

Таблиця 12 - Розрахунок плоских прямокутних координат

Гаусса-Крюгера по геодезичних координатах точок

Позна-чення	Розрахунки			Позна-чення	Розрахунки
L	**25**	**11**	**22,115**	***N***	6388966,567
№ зони	5			***a_0***	32073,051
L_0	27	00	00,000	***a_3***	-0,0000565
l, град.	-1	48	37,885	***a_4***	0.0837154
l, рад.	-0,031599597			***a_5***	-0,02538
B	**45**	**3**	**27,976**	***a_6***	-0.0005825
sin	0,7078194			***X***	**4993047,800**
cos	0,7063934			***y***	-142612,894
cos^2B	0,4989917			***Y***	**5357387,106**

15.Список використаної літератури

1.Савчук С.Г. Вища геодезія.-Ж : ЖДТУ, 2005

2.Світова геодезична система координат WGS-84. Основні положення. Зв'язок з іншими геодезичними системами. - Затверджено наказом Міністерства екології та природних ресурсів України від 14.12.2001 р. № 467.