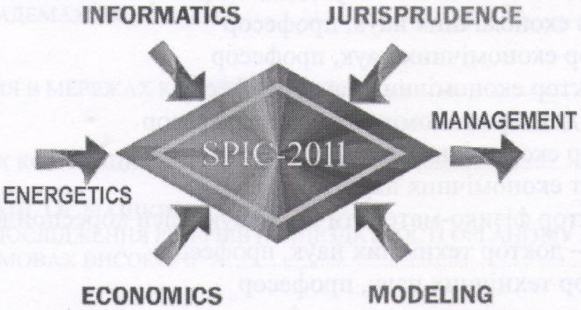
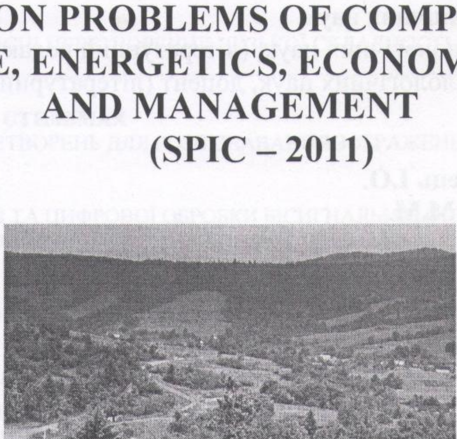
Національна академія наук України
Академія правових наук України
Інститут кібернетики ім. В.М Глушкова НАН України
Бучацький інститут менеджменту і аудиту
Карпатський державний центр інформаційних засобів і технологій НАН України



ПРОБЛЕМНО-НАУКОВА МІЖГАЛУЗЕВА КОНФЕРЕНЦІЯ

ІНФОРМАЦІЙНІ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ, ЮРИСПРУДЕНЦІЇ, ЕНЕРГЕТИКИ, ЕКОНОМІКИ, МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ (ПНМК - 2011)

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PROBLEM INTER-BRANCH CONFERENCE INFORMATION PROBLEMS OF COMPUTER SYSTEMS, JURISPRUDENCE, ENERGETICS, ECONOMICS, MODELING AND MANAGEMENT (SPIC – 2011)



Україна
Бучач - Яремча
17 - 20 травня 2011 року

УДК 517.946

В.В. Маринець

Ужгородський національний університет, Ужгород, vasyl-marynets@rambler.ru

Про один підхід дослідження та наближеного інтегрування крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу

1. Постановка задачі: в просторі функцій $C^*(\bar{D}) \equiv C^{(1.1)}(D) \cap C^1(\bar{D})$, $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x,y) \mid x \in (x_0, x_1], y \in (g(x), y_2]\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid x \in (x_1, x_2], y \in (y_1, y_2]\}$, $x_0 < x_1 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$, $y = g(x)$ – "вільна" крива, $g'(x) > 0$, $x \in [x_0, x_1)$, $g'(x_1) = 0$, $y_i = g(x_i)$, $i = 0,1$, знайти розв'язок диференціального рівняння [1]

$$D^{(1.1)}U(x,y) + a(y)D^{(1.0)}U(x,y) = f(x,y,U(x,y),U(\tau_1(x,y),y),U(x,\tau_2(x,y)),$$
$$D^{(0.1)}U(x,y)) := f[U(x,y)], \quad \bar{B} \to R, \quad \bar{B} \subset R^6, \tag{1}$$

$$\tau_1(x,y) := x - \tau(x,y), \quad \tau_2(x,y) := y - \theta(x,y), \quad 0 \ge a(y) \in C([y_0, y_2]),$$

який задовольняє крайові умови

$$U(x_0, y) = \psi(y), y \in [y_0, y_2], \quad U(x, g(x)) = \varphi(x), x \in [x_0, x_1], \tag{2}$$

$$U(x, y_1) = \omega(x), \ x \in [x_1, x_2], \tag{3}$$

причому

$$\varphi(x_0) = \psi(y_0), \quad \omega(x_1) = \varphi(x_1). \tag{4}$$

$\tau(x,y) \ge 0$, $\theta(x,y) \ge 0$ – задані неперервні функції при $(x,y) \in \bar{D}$, які визначають початкові множини

$$\bar{E}_\tau = \{(\bar{x}, y) \mid \tau_1(x,y) \le \bar{x} \le x_0, (x,y) \in \bar{D}\},$$

$$\bar{E}_{1,\theta} = \{(x,\bar{y}) \mid \tau_2(x,y) \le \bar{y} \le g(x), (x,y) \in \bar{D}_1\}, \quad \bar{E}_\theta = \bar{E}_{1,\theta} \cup \bar{E}_{2,\theta}.$$

$$\bar{E}_{2,0} = \{(x,\bar{y}) \mid \tau_2(x,y) \le \bar{y} \le y_1, (x,y) \in \bar{D}_2\},$$

Нехай

$$U(x,y)\big|_{\bar{E}_\tau} = \Psi(x,y), \quad U(x,y)\big|_{\bar{E}_\theta} = \Phi(x,y), \tag{5}$$

де $\Psi(x,y) \in C^1(\bar{E}_\tau)$, $\Phi(x,y) \in C^1(\bar{E}_\theta)$ – задані функції.

Очевидно

$$\Psi(x_0, y) = \psi(y) \in C^1([y_0, y_2]), \quad \Phi(x, g(x)) = \varphi(x) \in C^1([x_0, x_1]),$$
$$\Phi(x, y_1) = \omega(x) \in C^1([x_1, x_2]), \quad \Psi(x_0, y_0) = \Phi(x_0, y_0). \tag{6}$$

Зауважимо, якщо ввести нову невідому функцію

$$Z(x,y) = \begin{cases} U(x,y) - \Phi(x,y), \ (x,y) \in E_\theta, \\ U(x,y) - \Psi(x,y), \ (x,y) \in \bar{E}_\tau, \\ U(x,y), (x,y) \in D, \end{cases}$$

то задача (1) – (6) зводиться до аналогічної задачі з однорідними крайовими умовами (2), (3), (5). Тому, не зменшуючи загальності майбутніх міркувань, будемо вважати, що

$$\Psi(x,y) = \Phi(x,y) = 0, \quad (x,y) \in E_\theta \cup \bar{E}_\tau.$$

Розв'язок задачі (1) – (6) $U(x,y)=U_s(x,y),\ (x,y)\in\bar{D}_s,\ s=1,2,$ де $U_1(x,y)-$ розв'язок задачі арбу (1) – (6) при $(x,y)\in\bar{D}_1$, $U_2(x,y)-$ розв'язок задачі Гурса (1), (3) і $_2(x,y)=U_1(x,y),(x,y)\in\bar{D}_2$.

2. Зведення крайової задачі (1) - (6) до еквівалентних інтегральних рівнянь.

Нехай права частина рівняння (1) $f[U(x,y)]\in C_1(\bar{B})$, де $C_1(\bar{B})-$ простір функцій, які довольняють наступні умови [2]:

1) $f[U(x,y)]\in C(\bar{B})$,

2) в просторі функцій $C_1(\bar{B}_1)$, $\bar{B}_1\cup R^{10}$, $Пр_{xOy}\bar{B}_1=\bar{D}$, існує така функція

$$I(x,y,U(x,y)U(\tau_1(x,y),y),U(x,\tau_2(x,y)),D^{(0.1)}U(x,y);V(x,y),V(\tau_1(x,y),y),V(x,\tau_2(x,y)),$$

$$)^{(1.0)}V(x,y)):=H[U(x,y);V(x,y)],\quad U(x,y),V(x,y)\in\bar{B}_1,\quad \text{що}\quad \forall\, U(x,y)\in\bar{B}$$

$I[U(x,y);U(x,y)]\equiv f[U(x,y)]$ і для довільних з простору $C^*(\bar{D})$ двох пар функцій $_s(x,y)],V_s(x,y)\in\bar{B}_1$, $s=1,2$, які задовольняють умови $D^{(0.i)}U_s(x,y)\le D^{(0.i)}V_s(x,y)$, $=0,1,(x,y)\in\bar{D}$, в області $\bar{B}_1$ виконується нерівність

$$H[U_1(x,y);V_2(x,y)]\le H[V_1(x,y);U_2(x,y)],\tag{7}$$

3) функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ в області $\bar{B}$ задовольняє умову Ліпшиця, тобто $U_S(x,y),V_S(x,y)\in C^*(\bar{D})$, які належать $\bar{B}_1$, виконується нерівність

$$\begin{aligned}&I[U_1(x,y);V_1(x,y)]-H[U_2(x,y);V_2(x,y)]\|\le L(|U_1(x,y)-U_2(x,y)|+|V_1(x,y)-V_2(x,y)|+\\&|D^{(0.1)}(U_1(x,y)-U_2(x,y))|+|D^{(0.1)}(V_1(x,y)-V_2(x,y))|+|U_1(\tau_1(x,y),y)-U_2(\tau_1(x,y),y)|+\\&|V_1(\tau_1(x,y),y)-V_2(\tau_1(x,y),y)|+|U_1(x,\tau_2(x,y))-U_2(x,\tau_2(x,y))|+|V_1(x,\tau_2(x,y))-V_2(x,\tau_2(x,y))|),\end{aligned}$$

е L – стала Ліпшиця.

Задачу (1) – (6) можна подати в еквівалентній інтегральній формі

$$U_1(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in E_{1,0}\cup\bar{E}_\tau,\\ T_1 f[U_1(\xi,\eta), & (x,y)\in\bar{D}_1,\end{cases}\tag{8}$$

$$U_2(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in E_{2,0}\cup\bar{E}_\tau,\\ T_2 f[U_2(\xi,\eta), & (x,y)\in\bar{D}_2,\end{cases}$$

$$T_1 f[U_1(\xi,\eta)] := \int_{x_0}^{x}\int_{g(x)}^{y} \exp\left(\int_{y}^{\tau} a(\tau)d\tau\right) f(U_1(\xi,\eta) d\eta d\xi, \quad (x,y) \in \bar{D}_1,$$

$$T_2 f[U_2(\xi,\eta)] := \int_{x_1}^{x}\int_{y_1}^{y} \exp\left(\int_{y}^{\eta} a(\tau)d\tau\right) f(U_2(\xi,\eta) d\eta d\xi, \quad (x,y) \in \bar{D}_2.$$

<u>Лема 1</u>. Якщо $f[U(x,y)] \in C(\bar{B})$, і $g'(x_1) = 0$, а розв'язок задачі (1) – (5) існує, то він належатиме просторові $C^*(\bar{D})$.

<u>3. Двосторонній метод наближеного розв'язання задачі (1) – (6).</u>

Нехай $Z_{p,s}(x,y), V_{p,s}(x,y) \in C^*(\bar{D})$ належать області $\bar{B}_1$, $p \in N$, $s = 1,2$. Введемо позначення:

$$H[Z_{p,s}(x,y); V_{p,s}(x,y)] := F_s^p(x,y), \qquad H[V_{p,s}(x,y); Z_{p,s}(x,y)] := F_{p,s}(x,y),$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{p,s}(x,y)] := Z_{p,s}(x,y) - Z_{p+1,s-1}(x,y) - T_s F_{p,s}(\xi,\eta), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (x,y) \in \bar{D}_s, \quad s = 1,2, \quad p \in N, \\ &\beta_{p,s}(x,y)] := V_{p,s}(x,y) - V_{p+1,s-1}(x,y) - T_s F_s^p(\xi,\eta), \end{aligned} \tag{9}$$

$Z_{p,0}(x,y) = V_{p,0}(x,y) \equiv 0$, для $\forall p \in N$.

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$ та $\{V_{p,s}(x,y)\}$ згідно закону

$$\begin{aligned} &Z_{p+1,s}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in E_\tau \cup \bar{E}_{s,\theta}, \\ Z_{p+1,s-1}(x,y) + T_s F_{p,s}(\xi,\eta), & (x,y) \in \bar{D}_s, \end{cases} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p \in N, s = 1,2, \\ &V_{p+1,s}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in E_\tau \cup \bar{E}_{s,\theta}, \\ V_{p+1,s-1}(x,y) + T_s F_s^p(\xi,\eta), & (x,y) \in \bar{D}_s, \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

де за нульове наближення вибираємо довільні з простору $C^*(\bar{D}_s)$ функції $Z_{0,s}(x,y), V_{0,s}(x,y) \in \bar{B}_1$, $s = 1,2$, які задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} &D^{(0,i)}\alpha_{0,s}(x,y) \geq 0, \quad D^{(0,i)}\beta_{0,s}(x,y) \leq 0, \quad D^{(0,i)}W_{0,s}(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in \bar{D}_s, \\ &W_{0,s}(x,y) = Z_{0,s}(x,y) - V_{0,s}(x,y), \quad s = 1,2. \end{aligned} \tag{11}$$

<u>Лема 2</u>. Якщо $f[U(x,y)] \in C_1(\bar{B})$, і $a(y) \leq 0$, то множина функцій нульового наближення $Z_{0,s}(x,y), V_{0,s}(x,y) \in C^*(\bar{D}_s)$, які задовольняють умови (11) не порожня.

<u>Теорема 1.</u> Нехай $f[U(x,y)] \in C_1(\bar{B})$, $0 \geq a(y) \in C([y_0, y_1])$, а функції нульового наближення задовольняють умови (11).

Тоді послідовності функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$ та $\{V_{p,s}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (10), при виконанні умов

$$D^{(0.i)}(Z_{0,s}(x,y)-V_{1,s}(x,y))\geq 0,\quad D^{(0.i)}(Z_{1,s}(x,y)-V_{0,s}(x,y))\geq 0,\quad i=0,1;\quad (x,y)\in\overline{D}_s,\quad s=1,2:$$

1) збігаються рівномірно до єдиного в просторі $C^*(\overline{D}_s)$ розв'язку відповідного інтегрального рівняння з (8);

2) мають місце оцінки

$$\sup_{i,s}\max_{\overline{D}_s}\left|D^{0,i}W_{p,s}(x,y)\right|\leq\frac{[8LqK(x_2-x_0+y_2-y_0)]^p}{p!}d_0\qquad(12)$$

$$d_0=\sup_{s,i}\{\max_{\overline{D}_s}\left|D^{0,i}W_{0,s}(x,y)\right|,\ \max_{\overline{D}}\left|W_{0,s}(\tau_1(x,y),y)\right|,\ \max_{\overline{D}}\left|W_{0,s}(x,\tau_2(x,y))\right|\},$$

$$q=\sup\{1,(x_2-x_0+y_2-y_0),\max_{[y_0,y_2]}(1-a(y)K(y-y_0))\},\quad K=\exp(\int_{y_2}^{y_0}a(\tau)d\tau);$$

3) в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності

$$D^{(0.i)}V_{2p,s}(x,y)\leq D^{(0.i)}Z_{2p+1,s}(x,y)\leq D^{(0.i)}V_{2p+2,s}(x,y)\leq D^{(0.i)}Z_{2p+3,s}(x,y)\leq D^{(0.i)}U_s(x,y)\leq$$
$$\leq D^{(0.i)}V_{2p+3,s}(x,y)\leq D^{(0.i)}Z_{2p+2,s}(x,y)\leq D^{(0.i)}V_{2p+1,s}(x,y)\leq D^{(0.i)}Z_{2p,s}(x,y),\quad i=0,1,$$
$$(x,y)\in\overline{D}_s,\quad s=1,2,\quad p\in N.$$

Наслідок 1. Якщо $f[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$ і $a(y)\leq 0$, то умови (11) є необхідними і достатніми для виконання нерівностей

$$D^{(0.i)}V_{0,s}(x,y))\leq D^{(0.i)}U_s(x,y)\leq D^{(0.i)}Z_{0,s}(x,y),\quad i=0,1,\quad (x,y)\in\overline{D}_s,\quad s=1,2.$$

Наслідок 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і $f[U(x,y)]\equiv H[0;U(x,y)]$. Якщо $f[0]\geq(\leq)0$, то задача (1) – (6) при однорідних крайових умовах має єдиний невід'ємний (не додатній) розв'язок в просторі функцій $C^*(\overline{D})$.

Зауважимо, якщо $f[U(x,y)]\equiv H[0;U(x,y)]$, то для побудови двостороннього методу наближеного інтегрування задачі (1) – (6) достатньо будувати одну із послідовностей $\{Z_{p,s}(x,y)\}$ або $\{V_{p,s}(x,y)\}$, а, отже, кількість операцій для реалізації методу (10) зменшується у два рази.

Побудуємо ітераційний процес згідно формул

$$Z_{p+1,s}(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in E_{s,0}\cup\overline{E}_\tau,\\ Z_{p+1,s-1}(x_1,y)+T_sF_s^p(\xi,\eta), & (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,\end{cases}\qquad(13)$$

$$V_{p+1,s}(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in E_{s,0}\cup E_\tau,\\ V_{p+1,s-1}(x_1,y)+T_sF_{p,s}(\xi,\eta),\end{cases}$$

де за нульове наближення $Z_{0,s}(x,y),V_{0,s}(x,y)\in\overline{B}_1$ вибираємо довільні з простору $C^*(\overline{D}_s)$, $s=1,2$ функції, які задовольняють умови

$$D^{(0.i)}\{Z_{0,s}(x,y)-Z_{0,s-1}(x,y)\ T_sF_s^0(\xi,\tau)\}\geq 0,$$

$$D^{(0.i)}\{V_{0,s}(x,y)-V_{0,s-1}(x,y)-T_sF_{0,s}(\xi,\tau)\}\le 0, \tag{14}$$

$$D^{(0.i)}W_{0,s}(x,y)\ge 0, \quad (x,y)\in\bar D_s \quad s=1,2, \quad i=0,1.$$

Надалі функції $Z_{0,s}(x,y), V_{0,s}(x,y)\in C^*(\bar D_s)$, $s=1,2$, які задовольняють в $\bar B_1$ умови (14), будемо називати функціями порівняння задачі (1) – (6). Очевидно, якщо $Z_{0,1}(x,y)=M(x-x_0)(y-g(x))$, $Z_{0,2}(x,y)=Z_{0,1}(x,y)+M(x-x_1)(y-y_1)$, $V_{0,1}(x,y)=m(x-x_0)(y-g(x))$, $V_{0,2}(x,y)=V_{0,1}(x,y)+m(x-x_1)(y-y_1)$, $(x,y)\in\bar D_s$, $s=1,2$, $M=\sup\limits_{\bar B_1}H[U(x,y);V(x,y)]$, $m=\inf\limits_{\bar B_1}H[U(x,y);V(x,y)]$ належать області $\bar B_1$, то їх можна взяти за функції нульового наближення [3].

Теорема 2. Нехай права частина рівняння (1) $f[U(x,y)]\in C_1(\bar B)$ і в області $\bar B_1$ існують функції $Z_{0,s}(x,y), V_{0,s}(x,y)\in C^*(\bar D_s)$, $s=1,2$, які задовольняють умови (14).

Тоді послідовності функцій $\{D^{(0,i)}Z_{p,s}(x,y)\}$, $\{D^{(0,i)}V_{p,s}(x,y)\}$ побудовані згідно формул (13):

а) збігаються рівномірно до єдиного в просторі $C^*(\bar D)$ розв'язку задачі (1) - (6),

б) мають місце оцінки (12),

в) в області $\bar B_1$ виконуються нерівності:

$$D^{(0,i)}V_{p,s}(x,y)\le D^{(0,i)}V_{p+1,s}(x,y)\le D^{(0,i)}U_s(x,y)\le D^{(0,i)}Z_{p+1,s}(x,y)\le D^{(0,i)}Z_{p,s}(x,y),$$

$$(x,y)\in\bar D_s,\quad s=1,2,\quad p\in N.$$

Розглянемо поряд із рівнянням (1) квазілінійне рівняння вигляду

$$D^{(1.1)}Z(x,y)+a(y)D^{(1,0)}Z(x,y)=f_1(x,y,Z(x,y),Z(\tau_1(x,y),y),Z(x,\tau_2(x,y)),$$

$$D^{(0,1)}Z(x,y))\equiv f_1[Z(x,y)],\quad f_1:\bar B\to R. \tag{15}$$

Надалі будемо вважати, що праві частини рівнянь (1),(15) задовольняють наступні умови:

1) $f[U(x,y)]\in C_1(\bar B)$,

2) функція $f_1[Z(x,y)]\in C(\bar B)$ і в області $\bar B$ має невід'ємні обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, починаючи з третього,

3) для всякої з простору $C^*(\bar D)$ функції $V(x,y)\in\bar B$

$$f_1[V(x,y)]\ge(\le)f[V(x,y)]. \tag{16}$$

Теорема 3. Нехай праві частини рівнянь (1), (15) $f[U(x,y)]$ та $f_1[Z(x,y)]$ задовольняють попередні умови 1)-3) і в області $\bar B$ існують функції порівняння задач (1) - (6),(15),(2) - (6). Тоді для розв'язків цих задач в області $\bar D$ виконуються нерівності: $D^{(0,i)}U(x,y)\le(\ge)D^{(0,i)}Z(x,y)$, $i=0,1$.

Список джерел

1. Коллатц Л. Функциональный аналіз и вычислительная математика.– М.: Мир, 1969. – 448с.
2. Маринец В.В. Питьовка О.Ю. Про крайову задачу для диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу // Науковий вісник Ужгород.ун-ту. Серія Математика і інформатика. – 2010.– Вип.20. – С.79-89.
3. Маринець В.В. Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // УМЖ. – 1995. – Т.47, №12. – С.1667-1675.