Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОЇ МОЛОДІЖНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ (ПОО – XXXVII)

Україна, Крим
Велика Ялта, смт. Кацивелі
22–29 вересня 2011 року

Київ – 2011

УДК 517:518:519:533:534

Праці міжнародної молодіжної математичної школи "Питання оптимізації обчислень (ПОО – XXXVII)" – Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. – 214 с.

Розглядаються питання побудови оптимальних за складністю (та близьких до них) алгоритмів розв'язання наступних класів задач обчислювальної та прикладної математики: цифрова обробка сигналів, відновлення функцій і функціоналів, розв'язування різних класів рівнянь, системний аналіз і математичне програмування, методи захисту інформації.

Відмінною рисою праць школи є їх спрямованість на побудову ефективних за різними критеріями алгоритмів, оцінок їх характеристик, порівняльний аналіз за цими характеристиками та розв'язання широкого спектра прикладних задач. Певна увага приділена комп'ютерній технології розв'язання задач прикладної та обчислювальної математики із заданими значеннями характеристик якості.

Збірник праць розрахований на спеціалістів у галузі обчислювальної та прикладної математики.

ISBN 978-966-02-5965-2

УДК 517.946

В.В. МАРИНЕЦЬ

Ужгородський національний університет, Ужгород, vasyl-marynets@rambler.ru

ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Нехай $y = g_i(x) \quad (x = k_i(y)), \quad i = 1,2$ – "вільні" криві, причому $g_1'(x) < 0, \quad x \in (x_1, x_0)$, $g_1(x_k) = y_k,\ k = 0,1,\ g_2'(x) > 0,\ x \in (x_0, x_2),\ g_2(x_0) = y_0,\ g_2(x_2) = y_1,\ x_1 < x_0 < x_2,\ y_0 < y_1 < y_2$.

Розглянемо область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, де $D_1 = \{(x,y) \mid x \in [x_1, x_0], y \in (g_1(x), y_1]\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid x \in [x_0, x_2], y \in (g_2(x), y_1]\}$, $D_3 = \{(x,y) \mid x \in [x_1, x_0], y \in [y_1, y_2]\}$.

Постановка задачі: в просторі вектор-функцій $C^*(\overline{D}) \equiv C^{(1.1)}(D) \cap C^1(\overline{D})$ знайти розв'язок (регулярний) рівняння

$$U_{xy}(x,y) + a_1(x,y)U_x(x,y) + a_2(x,y)U_y(x,y) = f(x,y,U(x,y),U(x,\theta(x,y))) \equiv f[U(x,y)], \tag{1}$$

який задовольняє умови

$$U(x, g_1(x)) = \varphi_1(x),\ U_y(x, g_1(x)) = \psi(x),\ \ x \in [x_1, x_0],\ \psi(x) \in C([x_1, x_0]),\ \varphi_1(x) \in C^1([x_1, x_0]) \tag{2}$$

$$U(x, g_2(x)) = \varphi_2(x),\ x \in [x_0, x_2],\ \ \varphi_2(x) \in C^1([x_0, x_2]) \tag{3}$$

$$U(x,y) = \varphi(y),\ y \in [y_1, y_2],\ \ \varphi(y) \in C^1([y_1, y_2]) \tag{4}$$

причому

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0),\ \ \varphi_1(x_1) = \varphi(y_1),\ \varphi'(y_1) = \psi(x_1), \tag{5}$$

а $\theta(x,y) \equiv y - \tau(x,y)$, де $\tau(x,y) \geq 0$ – задана неперервна функція, яка визначає початкову множину $\overline{E} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$, $\overline{E}_1 = \{(x,\overline{y}) \mid x \in [x_1, x_0], \theta(x,y) \leq \overline{y} \leq g_1(x), (x,y) \in \overline{D}_1 \cup \overline{D}_3\}$, $\overline{E}_2 = \{(x,\overline{y}) \mid x \in [x_0, x_2], \theta(x,y) \leq \overline{y} \leq g_2(x), (x,y) \in \overline{D}_2\}$.

Нехай

$$U(x,y)\ /_{\overline{E}} = \Phi(x,y),\ \ (x,y) \in \overline{E}, \tag{6}$$

де $\Phi(x,y) \in C^1(\overline{E})$ – задана функція.

Очевидно

$$\Phi(x, g_1(x)) = \varphi_1(x),\ \ \Phi_y(x, g_1(x)) = \psi(x),\ \ x \in [x_1, x_0],$$
$$\Phi(x, g_2(x)) = \varphi_2(x),\ \ x \in [x_0, x_2]. \tag{7}$$

Лема. Нехай $f[U(x,y)] \in C(\overline{B}),\ f : B \to R,\quad \overline{B} \to R^4,\ a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D),\quad a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$, $a_{1_x}(x,y) = a_{2_y}(x,y)$, а $K \equiv \varphi_2'(x_0) - \varphi_1'(x_0) + (g_1'(x_0) - g_2'(x_0))\psi(x_0) = 0$. Тоді, якщо задача (1) – (7) має розв'язок, то він буде регулярним. У супротивному випадку має місце рівність

$$U_x(x_{0+}, y) - U_x(x_{0-}, y) = K \exp\left(\int_y^{y_0} a_1(x_0, \eta)\, d\eta\right),\quad y \in [y_0, y_1],\quad \text{і}\quad U(x,y) \in C^{(1.1)}(D \setminus I) \cap C^1(\overline{D}),$$

$I = \{(x,y) \mid x = x_0, y \in [y_0, y_1]\}$ (розв'язок буде узагальненим).

За допомогою побудованої модифікації двостороннього методу встановлюються достатні умови існування, єдиності, знакосталості розв'язку крайової задачі (1) – (7), доводяться теореми про диференціальні нерівності, порівняння.