



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Ужгородський національний університет**

**ГОРВАТ А.А., ВИСОЧАНСЬКИЙ Ю.М.**

**МЕТОДИКА**  
**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ**

**МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА**  
**І ТЕРМОДИНАМІКА**

**Навчальний посібник**

**Рекомендовано**  
**Міністерством освіти і науки України**  
**для студентів вищих навчальних закладів**

**Видавництво “ІВА”**  
**Ужгород - 2006**

УДК 53 (075.8)  
ББК В 365 я73  
Г–67

*Гиф надано Міністерством  
освіти і науки України (лист  
№14/18.2–434 від 21 лютого 2006р.*

**Горват А.А., Височанський Ю.М.**

Г– 87      Методика розв'язування задач. Молекулярна фізика і термодинаміка. Навчальний посібник / Ужгород, ІВА, 2006 – 183 с.

У посібнику приведені короткі теоретичні відомості та якісні питання з відповідних розділів курсу „Молекулярна фізика і термодинаміка”, наведені приклади розв'язування задач з детальним аналізом їх фізичного змісту, а також задачі для аудиторної та самостійної роботи та приклади типових залікових контрольних робіт, які відповідають дисципліні "Загальна фізика" для фізичних факультетів університетів. Посібник може бути використаний при проведенні практичних занять та для самостійної роботи студентів з цього курсу.

Для студентів, які навчаються за такими напрямками підготовки фахівців як "Фізика" та "Прикладна фізика", а також за деякими інженерними спеціальностями.

**Р е ц е н з е н т и:**

Член-кореспондент НАН України,  
доктор фіз.-мат. наук, професор Стасюк І.В.,  
доктор фіз.-мат. наук, професор Клименко А.П.  
доктор фіз.-мат. наук, професор Маслюк В.Т.

ISBN \_\_\_\_\_

©2006. Горват А.А., Височанський Ю.М.



## ПЕРЕДМОВА

Одним з факторів, які визначають високу якість підготовки інженерів-дослідників та вчителів фізики, є вміння застосовувати теоретичні знання для вирішення практичних завдань. Цьому найбільше сприяє розв'язування задач різного типу та складності.

За влучним виразом проф. С.П.Капіци, задачі дають студентам перші уявлення про світ фізики, методи його опису і шляхи пізнання, як казки для маленьких дітей, допомагають їм пізнати навколишній світ. Як і казки, задачі дають змогу студентам зрозуміти фізичні явища і закони. Елементарні задачі описують умовний світ точкових зарядів, невагомих ниток, безмежних заряджених площин, ідеальних газів та інших ідеалізованих об'єктів, подібних до казкового світу, населеного прекрасними принцесами та злими відьмами. У такому світі сили добра і зла чітко розділені. І в задачах ми можемо розглядати спрощені, а часом і фантастичні умови. Більш складні задачі наближають нас до складної картини реального світу з багаточисельними взаємозв'язками і залежностями, а їх розв'язок подібний до наукового пошуку, де багато питань вимагає значних розумових зусиль навіть для їх правильного формулювання.

Доречно тут відмітити ще одну спільну рису фізичних задач з народним фольклором (казками). Це питання про те, хто автор ідеї тієї чи іншої задачі. На це питання рідко можна дати точну відповідь, особливо в класичних розділах фізики.

У методичному посібнику представлені типові задачі, які використовувались авторами при проведенні практичних занять із студентами фізичного факультету з курсу "Молекулярна фізика і термодинаміка". Структура і зміст навчального посібника відповідають програмі дисципліни "Загальна фізика" для університетських спеціальностей та розробленій авторами Робочій програмі з названого курсу. У навчальний посібник відібрано тільки ті задачі із величезного їх арсеналу, які здавались найбільш цікавими з фізичної точки

зору. Де було можливим, задачі розташовано в логічній послідовності і в порядку наростаючої складності. Тому поштовхом до розв'язку певної задачі може бути ознайомлення з кількома попередніми задачами.

Збірник складається з дев'яти основних розділів, які у свою чергу містять короткі теоретичні відомості, якісні задачі, приклади розв'язку задач і завдання для аудиторної та самостійної роботи; розділу, в якому представлено варіанти чотирьох типових підсумкових контрольних робіт.

Автори намагалися відібрати задачі різної ступені складності, розв'язок переважної більшості з них вимагає не тільки простої механічної підстановки відомих даних у готові формули, а, насамперед, осмислення самого явища, описаного в умові задачі, і вільного володіння фізичними законами, які вивчаються в теоретичному курсі. При написанні методичної розробки перевагу надано задачам, наближеним до практики. У цих задачах розглядаються не повністю ідеалізовані системи, а наближені до реальності фізичні об'єкти. Важливим етапом розв'язку таких задач, характерним для наукового пошуку, є вибір тієї чи іншої фізичної моделі. Ряд задач носить оціночний характер, вони повинні сприяти розвитку фізичного мислення і відчуття масштабів фізичних величин та явищ. У посібнику є певна кількість задач, які не претендують на оригінальність, але мають загальнофізичний інтерес.

Поряд з класичними темами в методичну розробку включено нові питання, адже кожний новий крок у фізиці можна і, напевно, необхідно відображати в задачах, щоб викладання встигало за швидкоплинним розвитком наукової думки.

Підготовка цього посібника зумовлена відсутністю виданих в останні роки методичних розробок та збірників задач із загальної фізики і має метою забезпечити кожного студента навчальними матеріалами, які приведуть до покращення самостійної роботи, проведення практичних занять та організації кредитно-модульної системи оцінки знань студентів.

# 1. МАСИ І РОЗМІРИ МОЛЕКУЛ. ЧИСЛО АВОГАДРО

## 1.1. Короткі теоретичні відомості

Довільна макроскопічна система складається із дуже великого числа атомів, молекул або інших структурних одиниць. Для характеристики кількості речовини макроскопічної системи вибрано одиницю вимірювання – моль. Одиниця кількості речовини – моль містить в собі стільки структурних одиниць (молекул або атомів) скільки атомів є в 0,012 кг ізотопу вуглецю  $C^{12}_6$ .

Враховуючи, що атомна одиниця маси (*а.о.м.*) дорівнює  $1,66 \cdot 10^{-27}$  кг, а відносна молекулярна маса вуглецю  $C^{12}_6$  дорівнює 12, одержуємо, що в одному молі міститься

$$N_A = \frac{0,012 \text{ кг/моль}}{12 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг/структ.од.}} = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ структур.од./моль.}$$

Це число – кількість структурних одиниць в одному молі речовини - дістало назву числа Авогадро.

Моль будь-якого газу при нормальних умовах займає об'єм  $V = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ .

Число Лошмідта  $N_L = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$  – визначає число молекул (атомів) будь-якого газу в  $1 \text{ м}^3$  при нормальних умовах.

В молекулярній фізиці користуються також поняттям молярної маси, яка визначається як маса одного моля речовини  $\mu = m_0 N_A$ , де  $m_0$  - маса молекули. Молярна маса визначається через безрозмірну відносну масу молекули  $m_r$ ,

$$\mu = m_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Відносні атомні маси приведені в таблиці Менделєєва. Відносні маси молекул заходяться у вигляді суми відносних мас атомів, з яких складається молекула.

Знаючи число Авогадро і число Лошмідта можна визначити такі величини:

а) кількість молекул в будь-якому об'ємі

$$N = N_L V = \frac{m N_A}{\mu} = \frac{N_A}{\mu} \rho V; \quad (1.1)$$

де  $m$  – маса,  $V$  – об'єм,  $\rho$  – густина,  $\mu$  – молярна маса цього газу;

б) кількість молекул в одиниці об'єму (концентрацію молекул)

$$n = \frac{\rho}{\mu} N_A; \quad (1.2)$$

в) кількість молекул у тілі, маса якого  $m$

$$N = \frac{m}{\mu} N_A; \quad (1.3)$$

г) кількість молекул в одиниці маси тіла

$$n_m = \frac{N_A}{\mu}; \quad (1.4)$$

Очевидний зв'язок між густиною  $\rho$ , масою молекули  $m_0$  та їх концентрацією  $n$ :

$$m_0 = \frac{\rho}{n} = \frac{\mu}{N_A}; \quad \rho = m_0 n = \frac{\mu}{N_A} n. \quad (1.5)$$

У молекулярній фізиці широко застосовуються молярні і питомі величини, наприклад, молярна і питома теплоємність. При цьому під молярною величиною розуміють значення цієї величини для одного моля речовини, а під питомою – значення цієї величини для одиниці маси (в системі SI – для 1 кг). Зв'язок між цими величинами задається формулами:

$$c_\mu = \frac{c}{\nu} = \frac{c\mu}{m}; \quad c_\rho = \frac{c}{m}; \quad c_\mu = c_\rho \mu, \quad (1.6)$$

де  $c$  – теплоємність тіла,  $c_\mu$  – молярна теплоємність,  $c_\rho$  – питома теплоємність,  $\nu = m/\mu$  – кількість молів речовини.



## 1.2. Якісні задачі

1.1. Частинки речовини (атоми, молекули) розподілені по об'єму в середньому рівномірно. Відома концентрація частинок  $n$ . Оцінити середню відстань  $\langle r \rangle$  між частинками.

1.2. Оцінити відношення  $\beta = V_m/V$  сумарного об'єму молекул повітря  $V_m$  до об'єму посудини  $V$ , в якій вони знаходяться при нормальних умовах. Вважати, що середній діаметр молекул повітря  $d = 3,7 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ .

1.3. Де більше молекул: в 1 л води чи в 1 л ртуті?

1.4. Знайти маси атомів: 1) водню; 2) гелію; 3) кисню; 4) золота.

1.5. Яку масу мають  $2 \cdot 10^{23}$  молекул азоту?

1.6. Який об'єм займають 10 молів ртуті?

1.7. Відстань між центрами сусідніх атомів золота рівна

$d = 3 \text{ \AA} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ . Скільки шарів атомів поміститься в листочку золота товщиною 0,1 мкм.

1.8. Що займає більший об'єм: а) один моль водню чи один моль кисню в газоподібному стані; б) один моль алюмінію чи один моль ртуті у твердому стані?

## 1.3. Приклади розв'язування задач

Задача 1.9. Скільки молекул міститься в  $1 \text{ см}^3$  води? Яка маса молекули води? Оцініть розмір молекули води.

Розв'язання. Маса 1 моля води (хімічна формула  $\text{H}_2\text{O}$ ) рівна:

$$m = \mu \cdot 1 \text{ моль} = (2 + 16) \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг},$$

а його об'єм  $V = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 18 \text{ см}^3$ , оскільки густина води  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3 = 1 \text{ г/см}^3$ . В одному молі будь-якої речовини, в тому числі і води, міститься  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  молекул (число Авогадро).

Отже, в  $1 \text{ см}^3$  міститься  $n = \frac{N_A}{V} = 3,34 \cdot 10^{22}$  молекул. Звідси маса однієї молекули води

$$m_0 = \frac{\rho}{n} = \frac{1 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^3}{3,34 \cdot 10^{22} \text{ см}^3} = 2,99 \cdot 10^{26} \text{ кг.}$$

Значення об'єм у однієї молекули  $v_0$  можна оцінити по формулі:  $v_0 = 1/n$ , звідки випливає, що наближений розмір (діаметр) молекули рівний

$$d = \sqrt[3]{v_0} = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3,34 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}}} = 3,1 \cdot 10^8 \text{ см} = 3,1 \cdot 10^{10} \text{ м.}$$

Задача 1.10. Деяка маса азоту міститься в посудині об'ємом 2 л при температурі  $27^\circ\text{C}$ . Тиск газу на стінки посудини  $p = 10^{-6}$  мм.рт.ст. Визначити скільки молекул азоту міститься в посудині та яка їх загальна маса.

Розв'язання. Знаючи зв'язок між тиском  $p$ , температурою  $T$  та концентрацією молекул ідеального газу  $p = nkT$  (формула 3.6) легко знайти концентрацію молекул  $n = p/kT$ . Помноживши концентрацію молекул на об'єм  $V$ , який займає газ, одержимо загальне число молекул:

$$N = nV = \frac{p}{kT} V.$$

Підставляючи числові значення  $p$ ,  $T$ ,  $V$  і  $k$ , взяті в одиницях системи СІ, дістанемо

$$N = \frac{10^{-6} \cdot 133,3 \text{ Па}}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \cdot (273 + 27) \text{ К}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 6,44 \cdot 10^{13} \text{ молекул.}$$

Із формули (1.3) знаходимо масу газу:

$$m = \frac{N}{N_A} \mu.$$

Підставляючи числові дані задачі одержуємо:

$$m = \frac{6,44 \cdot 10^{-13} \cdot 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 3 \cdot 10^{-12} \text{ кг.}$$

В цій формулі використано, що відносна молярна маса азоту рівна 28, оскільки при кімнатних температурах молекула азоту є двохатомна.

Задача 1.11. Кристали кухонної солі кубічної системи складаються з іонів  $\text{Na}^+$  та  $\text{Cl}^-$ , які по чергово розташовані у вузлах кристалічної решітки. Визначити найменшу відстань між центрами іонів. Молярна маса кухонної солі  $\mu = 59,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ , а її густина  $\rho = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Розв'язання. Взаємне просторове розміщення іонів натрію та хлору показано на рис. 1. Кубічна комірка, яка виділена суцільними лініями, складається з чотирьох іонів  $\text{Na}^+$  і чотирьох іонів  $\text{Cl}^-$ , які знаходяться у вершинах кубу.

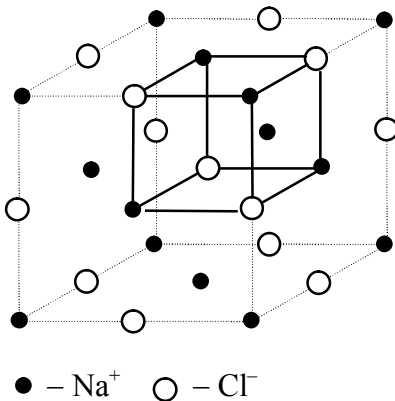


Рис. 1.

( $\text{Na}^+$  або  $\text{Cl}^-$ ) входить до складу восьми таких комірок. Виділений на малюнку комірки належить половина іону натрію і половина іону хлору. Тому в кристалі число кубічних комірок рівне числу іонів  $\text{Na}^+$  і  $\text{Cl}^-$  разом взятих. Отже, в 1 молі кухонної солі є  $2N_A$  комірок. Об'єм одного моля  $v_\mu = \frac{\mu}{\rho}$ , а об'єм, що приходить на

одну комірку становить  $v_0 = \frac{v\mu}{2N_A} = \frac{\mu}{2\rho N_A}$ . Звідси легко оцінити розмір комірки, а отже і найменшу відстань між центрами іонів:

$$d = \sqrt[3]{v_0} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{2\rho N_A}} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

Задача 1.12. Краплина маслинової олії діаметром  $2r=1\text{мм}$  розпливається на поверхні води, утворюючи пляму площею  $S=0,5\text{м}^2$ . Оцініть по цих даних діаметр молекули олії.

Розв'язання. Припустимо, що розливаючись по максимальній площі, олія утворює шар завтовшки лише в одну молекулу. Товщину цього шару неважко визначити, й тим самим оцінити діаметр молекул маслинової олії.

Будемо вважати, що об'єм краплини олії при її розтіканні на поверхні води не змінюється. Отже  $\frac{4}{3}\pi r^3 = Sd$ . Звідки

$$d = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{S}.$$

Підставляючи числові значення одержимо:

$$d = \frac{4}{3} \cdot \frac{3,14 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3}{0,5 \text{ м}^2} = 8,4 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

#### 1.4. Задачі для аудиторної роботи

1.13. Скільки молекул містять 2 г водяної пари.

1.14. Добре відкачана лампа розжарення об'ємом  $100 \text{ см}^3$  має тріщину, через яку щосекунди проникає один мільярд молекул газу. Скільки часу потрібно для заповнення лампи до

нормального тиску, якщо швидкість проникнення газу залишається сталою?

1.15. Скільки електронів міститься в  $1 \text{ см}^3$  свинцю? Густина свинцю  $11,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , атомна маса 207, номер в періодичній системі 82.

1.16. Озеро площею  $4 \text{ км}^2$  і середньою глибиною 5 м „посолили”, кинувши кристалик кухонної солі масою 10 мг. Через тривалий час з озера зачерпнули склянку води об'ємом  $200 \text{ см}^3$ . Скільки іонів натрію виявилось у цій склянці?

1.17. За 10 діб із стакану випарувалося 100 г води. Скільки в середньому вилітало молекул з поверхні води за 1с?

1.18. Скільки молекул ртуті може міститись в  $1 \text{ см}^3$  повітря в приміщенні, яке заражене ртуттю, при температурі 300К, якщо тиск насичених парів ртуті при цій температурі 0,36 Па?

### 1.5. Задачі для самостійної роботи

1.19. Обчислити масу однієї молекули водню і кисню.

1.20. Сучасні вакуумні насоси дають можливість понижувати тиск до  $1,3 \cdot 10^{-11} \text{ Па} = 10^{-13} \text{ мм рт ст}$ . Скільки молекул міститься в  $1 \text{ см}^3$  при цьому тиску і температурі  $27^\circ \text{C}$ ?

1.21. Ампулу об'ємом  $1 \text{ см}^3$ , яка містить повітря при нормальних умовах, залишено в космосі, де тиск можна вважати таким, що рівний нулю. В ампулі пробито малий отвір. За який час тиск в ампулі стане рівним нулю, коли вважати, що через отвір за кожну секунду вилітає сто мільйонів молекул?

1.22. Діаметр молекули азоту приблизно дорівнює  $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ . Вважаючи що молекули мають сферичну форму, знайти яка частина об'єму, що займає газ припадає на об'єм самих молекул при температурі  $0^\circ \text{C}$  і тиску  $10^5 \text{ Па} \approx 1 \text{ атм}$ . (0,038%)

1.23. Яка кількість нейтронів, протонів і електронів міститься в 1 мг алюмінію? Атомна маса 27, номер у

---

періодичній таблиці 13. ( $3,12 \cdot 10^{19}$  нейтронів,  $2,90 \cdot 10^{19}$  ел. і прот.)

## 2. СТАТИСТИЧНИЙ ОПИС СИСТЕМ З ВЕЛИКОЮ КІЛЬКІСТЮ ЧАСТИНОК

### 2.1. Короткі теоретичні відомості

При вивченні систем, які складаються з багатьох частинок, інформація про неї повинна носити узагальнений характер і відноситись не до окремих частинок, а до їх сукупності. Нова форма інформації вимагає і відповідного методу розгляду, який одержав назву статистичного. Основними поняттями статистичного методу є імовірність, густина імовірності, функція розподілу. В загальному випадку під функцією розподілу імовірності розуміється заданий певним чином взаємозв'язок між значенням фізичної величини та імовірністю її появи. Якщо фізична величина приймає ряд дискретних значень  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , то функція розподілу може бути подана у вигляді таблиці:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_k$
$P_1$	$P_2$	$P_3$	$\dots$	$P_k$

де  $P_1, P_2, \dots, P_k$  – імовірності появи фізичної величини із значеннями  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , відповідно.

Якщо фізична величина  $x$  приймає неперервний ряд значень в інтервалі  $[a, b]$ , то функція розподілу задається аналітично, або у вигляді графіка. При цьому інтегральна функція розподілу  $F(x)$  – показуватиме імовірність того, що значення фізичної величини менше  $x$ , тобто лежить в інтервалі від  $-\infty$  до  $x$ , а диференціальна функція розподілу  $f(x)$  (густина імовірності) матиме наступний зміст: імовірність того, що значення фізичної величини лежить в інтервалі  $x, x+dx$  рівнятиметься  $f(x)dx$ . Для функцій розподілу повинна виконуватись умова нормування  $\sum P_i = 1$ ;  $\int f(x)dx = 1$ .

Легко знайти середнє значення  $\langle x \rangle$ , середнє квадратичне відхилення  $D$  і дисперсію  $\sigma$  фізичної величини:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \sum_{i=1}^k x_i p_i ; \\ \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx ; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^k (x_i - \langle x \rangle)^2 p_i ; \\ D &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \langle x \rangle)^2 f(x) dx ; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma = \sqrt{D} &= \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - \langle x \rangle)^2 p_i} ; \\ \sigma = \sqrt{D} &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \langle x \rangle)^2 f(x) dx} . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Біноміальний розподіл

$$P(V', m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad (2.4)$$

задає імовірність того, що із  $n$  частинок (молекул), які знаходяться в об'ємі  $V$ ,  $m$  буде знаходитись в об'ємі  $V'$ , при умові, що імовірність знаходження однієї частинки в цьому об'ємі  $p = V'/V$ , а  $q = 1 - p$  - імовірність того, що частинка знаходиться в об'ємі  $V-V'$ . Очевидно, що  $p+q=1$ .

Біноміальний розподіл при  $n \rightarrow \infty$  переходить у два важливих граничних розподіли:

1) при умові  $n \rightarrow \infty$ ,  $p = const$ ,

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \exp(-\alpha x^2) \quad (2.5)$$

нормальний або гаусовський розподіл.



2) при умові  $n \rightarrow \infty$ ;  $np = const$ ,

$$P(x) = \frac{a^x}{x!} \exp(-a) \quad (2.6)$$

розподіл Пуассона.

Під дією теплового руху кількість частинок в об'ємі  $V$  не залишається сталою величиною, а хаотично змінюється (флуктує) навколо середнього значення  $m$ . Мірою флуктуації є середнє квадратичне відхилення  $\sigma$ , або відносне стандартне відхилення

$$\frac{\sigma}{\langle m \rangle} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^k (m - \langle m \rangle)^2 p_i}}{\langle m \rangle} = \sqrt{\frac{q}{pn}} \approx \frac{1}{\sqrt{m}}. \quad (2.7)$$

Модулі швидкостей молекул газу підлягають розподілу Максвелла

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \cdot v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \alpha^{3/2} v^2 \exp(-\alpha v^2),$$

де  $\alpha = m/2kT$ ,  $m$  - маса молекули,  $v$  - модуль її швидкості.

З цього виразу легко знайти характерні швидкості розподілу Максвелла:

найбільш імовірну швидкість молекул

$$v_i = \sqrt{2kT/m}; \quad (2.9a)$$

середню арифметичну швидкість молекул

$$v_{cp} = \langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m}; \quad (2.9b)$$

середню квадратичну швидкість молекул

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3kT/m}. \quad (2.9b)$$

Із (2.9) одержується наступне співвідношення між характерними швидкостями розподілу Максвелла

$$v_{кв}^2 = \frac{3\pi}{8} v_{cp}^2 = \frac{3}{2} v_i^2. \quad (2.9г)$$

Імовірність того, що проекція швидкості молекули на довільно вибраний напрям лежить в інтервалі  $v_k, v_k+dv_k$  визначається формулою  $dP = f(v_k)dv_k$ , де

$$f(v_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{1/2} \cdot \exp\left( -\frac{mv_k^2}{2kT} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha^{1/2} \exp(-\alpha v_k^2) dv_k. \quad (2.10)$$

Концентрація (густина) молекул в деякому потенціальному полі описується розподілом Больцмана

$$n = n_0 \exp\left( -\frac{E_n(x,y,z)}{2kT} \right), \quad (2.11)$$

де  $n_0$  – концентрація молекул в точці, де їх потенціальна енергія умовно прийнята рівною нулеві,  $E_n(x,y,z)$  – потенціальна енергія молекул в точці з координатами  $x, y, z$ .

## 2.2. Якісні задачі

2.1. Яка імовірність того, що при киданні кубика для ігор випаде: а) або одиниця, або шістка; б) парне число? Яка імовірність того, що при киданні двох однакових кубиків випаде одиниця і п'ятірка?

2.2. Два мисливці одночасно, але незалежно, стріляють в одного зайця. Яка імовірність того, що заєць буде застрелений, якщо імовірність попадання у ціль першим мисливцем рівна 0,8, а другим – 0,7?

2.3. Кубик всі грані якого пофарбовані, розрізаний на 1000 однакових маленьких кубиків. Яка імовірність того, що у вибраного навмання маленького кубика зафарбованими будуть  $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$  та 6 його граней?

2.4. В середині сфери радіуса  $R$  випадковим чином, в середньому рівномірно по об'єму, розподілене велике число пилинок. Знайти імовірність  $dP(r)$  знаходження пилінки на проміжку від  $r$  до  $r+dr$  від центру сфери.

2.5. Показати, що  $\langle (m - \langle m \rangle)^2 \rangle = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 \neq 0$ .

2.6. Довести, що для двох незалежних випадкових величин  $f$  і  $g$ , які зазнають флуктуацій навколо середніх значень  $\langle f \rangle$  і  $\langle g \rangle$ , відповідно, справедливе співвідношення:  $\langle fg \rangle = \langle f \rangle \cdot \langle g \rangle$ .

2.7. На рис. 2 показані графіки функції розподілу густини імовірності  $f(x)$ . Який фізичний зміст мають заштриховані площі?

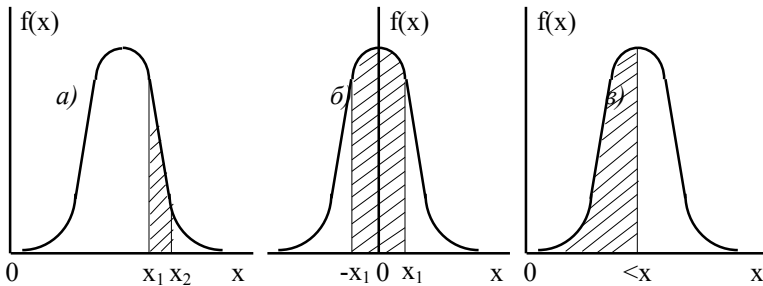


Рис. 2.

2.8. Випадкова величина може приймати значення  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$  імовірності появи яких  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ . Записати вирази, які визначають середні арифметичні значення  $\bar{x}^2, \bar{x}^3$ , і середню квадратичну флуктуацію  $\sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$ .

2.9. На графіку функції розподілу Максвела за модулем швидкості молекули показати положення найбільш імовірної, середньої та середньої квадратичної швидкості. Намалювати вигляд інтегральної функції розподілу.

### 2.3. Приклади розв'язування задач

Задача 2.10. *Із колоди, що містить 36 карт, послідовно навмання виймають три карти. Яка імовірність того, що всі вони будуть тузами.*

Розв'язання. При вийманні першої карти з колоди ймовірність витягнути туз (любий) буде рівна:

$$P_1 = \frac{N_m}{N},$$

де  $N_m$  - число тузів,  $N$  - загальна кількість карт у колоді. Тоді

$$P_1 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Допустимо, що при першій спробі відбулась сприятлива подія (витягнута з колоди карта є тузом). Тоді ймовірність витягнути туз при другій спробі

$$P_2 = \frac{3}{35},$$

оскільки в колоді залишилось 35 карт, із них - 3 тузи. Аналогічно для третьої спроби

$$P_3 = \frac{2}{34} = \frac{1}{17}.$$

Тоді ймовірність витягнути три тузи при трьох послідовних спробах рівна

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{1785}.$$

Задача 2.11. Система містить  $N$  частинок, енергія яких може приймати лише два значення  $E_1$  і  $E_2$ . Яка загальна енергія всіх частинок системи?

Розв'язання. Загальна енергія  $E_3$  всіх частинок системи може бути представлена як добуток числа частинок на середнє значення енергії частинки  $\langle E \rangle$ :

$$E_3 = N \cdot \langle E \rangle,$$

Згідно формули (2.3)

$$\langle E \rangle = P_1 \cdot E_1 + P_2 \cdot E_2,$$

де  $P_1$  і  $P_2$  - імовірності знайти частинку з енергією  $E_1$  і  $E_2$ , відповідно. Подібно до формули (2.11) будемо вважати, що ці імовірності можна записати у вигляді

$$P_i = A \exp\left(-\frac{E_i}{2kT}\right); \quad i = 1, 2,$$

де  $A$  - деяка константа. Тоді

$$\langle E \rangle = A \left\{ E_1 \exp\left(-\frac{E_1}{2kT}\right) + E_2 \exp\left(-\frac{E_2}{2kT}\right) \right\}.$$

Для знаходження константи  $A$  скористаємося тим, що загальне число частинок в системі є  $N$  і залишається сталим:

$$N = N_1 + N_2 = NP_1 + NP_2 = N(P_1 + P_2) = NA \left\{ \exp\left(-\frac{E_1}{2kT}\right) + \exp\left(-\frac{E_2}{2kT}\right) \right\},$$

звідки  $A = \left[ \exp\left(-\frac{E_1}{2kT}\right) + \exp\left(-\frac{E_2}{2kT}\right) \right]^{-1}$ . Таким чином загальна енергія системи частинок:

$$E_3 = N \cdot \frac{E_1 \exp\left(-\frac{E_1}{2kT}\right) + E_2 \exp\left(-\frac{E_2}{2kT}\right)}{\exp\left(-\frac{E_1}{2kT}\right) + \exp\left(-\frac{E_2}{2kT}\right)}$$

**Задача 2.12.** У посудині об'ємом 1 л міститься газ при нормальних умовах. У скільки разів зросте число можливих мікростанів системи при збільшенні об'єму на  $1 \text{ см}^3$ ?

**Розв'язання.** Число мікростанів системи, в якій  $n = \frac{V}{v_0}$  комірок (де  $V$  - об'єм системи,  $v_0$  - об'єм однієї молекули) та  $m$  частинок (молекул) становить

$$z = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

При збільшенні об'єму системи на величину  $\Delta V$  зросте кількість комірок на  $\Delta n = \frac{\Delta V}{v_0}$ , а отже збільшиться і число мікростанів

$$z' = \frac{(n + \Delta n)!}{m! \cdot (n + \Delta n - m)!}.$$

Тоді

$$k = \frac{z'}{z} = \frac{(n + \Delta n)! \cdot m! \cdot (n - m)!}{m! \cdot (n + \Delta n - m)! \cdot n!} = \frac{(n + \Delta n)! \cdot (n - m)!}{n! \cdot (n - m + \Delta n)!}.$$

Цей вираз можна спростити скориставшись формулою

Стірлінга  $x! = \left(\frac{x}{e}\right)^x$ :

$$k = \frac{(n + \Delta n)^{n + \Delta n} \cdot (n - m)^{n - m}}{(n + \Delta n - m)^{n + \Delta n - m} \cdot n^n} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta n}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{\Delta n}{n - m}\right)^{n - m}} \cdot \left[\frac{n + \Delta n}{n + \Delta n - m}\right]^{\Delta n}.$$

Врахуємо, що  $\Delta n \ll n$ ;  $m \ll n$  і відому формулу

$\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \exp(\alpha)$ . Тоді, після простих перетворень, одержуємо:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\exp(\Delta n)}{\exp(\Delta n)} \cdot \left(\frac{n + \Delta n + m - m}{n + \Delta n - m}\right)^{\frac{n + \Delta n - m}{m}} \cdot \frac{m \cdot \Delta n}{n + \Delta n - m} = \exp\left(\frac{m \cdot \Delta n}{n + \Delta n - m}\right) = \\ &= \exp\left[m \cdot \frac{(\Delta n + n - m) + (m - n)}{n + \Delta n - m}\right] = \exp\left[m \cdot \left(1 + \frac{m - n}{n - m + \Delta n}\right)\right] = \end{aligned}$$

$$= \exp \left[ m \cdot \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta n}{n-m}} \right) \right] = \left[ \exp \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta n}{n}} \right) \right]^m .$$

Оскільки  $\Delta n \ll 1$ , то  $1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta n}{n}} \rightarrow 0$ , отже вираз у

квадратних дужках можна розкласти в ряд і врахувати лише перші члени цього ряду ( $e^x \approx 1+x$ ). Тоді

$$k \approx \left( 1 + 1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta n}{n}} \right)^m = \left( \frac{1 + \frac{2\Delta n}{n}}{1 + \frac{\Delta n}{n}} \right)^m \approx \left( 1 + \frac{\Delta n}{n} \right)^m .$$

Враховуючи що  $\frac{\Delta n}{n} = \frac{v_0}{V} = \frac{\Delta V}{V}$ , а  $m = N_L V$ , де  $N_L$  – число

Лошмідта, то  $k \approx \left( 1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^{V \cdot N_L} \approx 1 + \frac{\Delta V}{V} \cdot V N_L = 1 + \Delta V \cdot N_L$ .

При останніх перетвореннях використано, що  $(1+x)^n \approx 1+x \cdot n$  при малих  $x$ .

Підставляючи у формулу для числа мікростанів числові значення величин знаходимо

$$k = 1 + 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \approx 2,7 \cdot 10^{19} .$$

Якщо б у посудині знаходилось всього  $2,7 \cdot 10^3$  молекул, тобто на 19 порядків менше ніж в реальних умовах, кількість мікростанів системи, зростає у 15 разів, а при числі молекул  $2,7 \cdot 10^4$  молекул - це число становить біля міліярда.

**Задача 2.13.** Чому дорівнює число ударів молекул ідеального газу, яких зазнає  $1 \text{ м}^2$  стінки посудини за  $1 \text{ с}$ ?

**Розв'язання.** Розташуємо систему координат так, щоб вісь  $y$  була перпендикулярна до стінки посудини (рис. 3). Розглянемо спочатку гіпотетичний випадок, коли всі молекули рухаються вздовж додатного напрямку осі  $y$  з однаковою

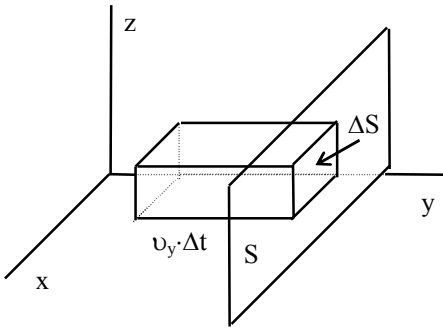


Рис. 3.

швидкістю  $v_y$ , тобто падають перпендикулярно на стінку  $S$ . За час  $\Delta t$  до стінки  $S$  долетять всі молекули, які знаходяться на відстані  $\Delta l = v_y \Delta t$  від стінки. На площадку, площа якої  $\Delta S$  за цей час попадуть всі молекули, що містяться в паралелепіпеді об'ємом  $\Delta V = \Delta S \Delta l = \Delta S v_y \Delta t$ . Отже

число зіткнень  $\Delta z$  молекул із площадкою  $\Delta S$  за час  $\Delta t$  буде співпадати з числом молекул в об'ємі  $\Delta V$

$$\Delta z = n \cdot \Delta V = n \cdot \Delta S \cdot \Delta t \cdot v_y,$$

де  $n$  – концентрація молекул.

За одиницю часу одиниця поверхні стінки зазнаватиме  $z_0$  ударів.

$$z_0 = \frac{\Delta z}{\Delta t \cdot \Delta S} = \frac{n \cdot \Delta S \cdot \Delta t \cdot v_y}{\Delta t \cdot \Delta S} = n \cdot v_y,$$

Якщо б усі молекули газу мали б однакові за модулем, але хаотично орієнтовані швидкості  $v$ , можна було б вважати, що тільки одна шоста частина молекул рухатиметься вздовж додатного напрямку  $y$ , то в цьому випадку

$$z_0 = \frac{1}{6} n v.$$



Легко зрозуміти, що в потоці молекул з різними швидкостями  $v_{1y}, v_{2y}, v_{3y}, \dots, v_{ky}$ , слід розглядати стільки об'ємів паралелепіпедів, скільки налічується швидкостей.

У такому випадку

$$z_0 = \sum_{j=1}^k n_j v_{jy},$$

У випадку газу, молекули якого підлягають розподілу Максвелла за швидкостями

$$dn(v_y) = \frac{n}{v_i \sqrt{\pi}} \exp \left[ - \left( \frac{v_y}{v_i} \right)^2 \right] dv_y,$$

де  $dn(v_y)$  – число молекул, які мають швидкості в інтервалі

$v_y, v_y + dv_y$ ,  $v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$  – найбільш імовірна швидкість молекул.

У цьому випадку

$$z_0 = \int_0^{\infty} v_y dn(v_y) = \int_0^{\infty} \frac{n}{v_i \sqrt{\pi}} v_y \exp \left[ - \left( \frac{v_y}{v_i} \right)^2 \right] dv_y = \frac{n}{2\sqrt{\pi}} v_i.$$

Враховуючи формули (2.7а) та (2.7б), які дають можливість пов'язати найбільш імовірну  $v_i$  та середню  $\langle v \rangle$  швидкості, одержимо

$$z_0 = \frac{1}{4} n \langle v \rangle.$$

Задача 2.14. Для визначення розмірів однорідних і однакових частинок вивчають розподіл їх концентрації в полі відцентрової сили, яка виникає внаслідок обертання центрифуги. Визначити радіус частинки, якщо відоме відношення концентрацій частинок  $\alpha = \frac{n(R_2)}{n(R_1)}$  у місцях,

що розташовані на відстанях  $R_1$  і  $R_2$  від осі центрифуги.

Густина рідини  $\rho_0$ , густина частинок  $\rho$ . Кутова швидкість обертання центрифуги –  $\omega$ .

Розв'язання. На частинку, яка обертається разом з рідиною в центрифугі діють сила тяжіння, сила Архімеда та відцентрова сила інерції. Сума сили тяжіння та сили Архімеда рівна

$$F = F_T - F_A = \rho V g - \rho_0 V g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) = m' \cdot g,$$

де  $V$  – об'єм сферичної частинки,  $m'$  – “ефективна” маса частинки з урахуванням виштовхувальної гідростатичної сили.

При обертанні центрифуги на частинку діє сила

$$F_B = m' \cdot \omega^2 \cdot R,$$

а енергія в полі відцентрових сил

$$E(R) = - \int_0^R F_B dR = - \frac{m' \omega^2 R^2}{2}.$$

Очевидно, що загальна потенціальна енергія частинки рівна сумі потенціальної енергії та енергії в полі відцентрових сил

$$E = E(h) + E(R) = m' \left( gh - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right).$$

Розподіл концентрації частинок у потенціальному полі задається рівнянням Больцмана (2.9) і для різних  $R_1$  і  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) але однакової висоти  $h$  маємо відповідно

$$n_1(R_1) = C \exp \left[ - \frac{m'}{2kT} \cdot \left( gh - \frac{\omega^2 R_1^2}{2} \right) \right],$$

$$n_2(R_2) = C \exp \left[ - \frac{m'}{2kT} \cdot \left( gh - \frac{\omega^2 R_2^2}{2} \right) \right].$$

Оскільки, згідно з умовою задачі  $\alpha = \frac{n(R_2)}{n(R_1)}$ , то

$$\ln \alpha = \frac{m' \omega^2}{2kT} (R_2^2 - R_1^2).$$

Звідки

$$r = \sqrt[3]{\frac{2kT \ln \alpha}{\omega^2 (R_2^2 - R_1^2) \frac{4}{3} \pi \rho \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}}.$$

Задача 2.15. В одному із дослідів Перрена встановлено, що при зміні відстані між шарами, в яких спостерігають за змуленими в рідині частинками гумігуту на  $\Delta h = 0,01$  см число частинок  $n$  зменшується в  $k=2$  рази. Температура рідини  $20^\circ\text{C}$ , частинки гумігуту мають діаметр  $d = 0,3 \cdot 10^{-4}$  см, густина рідини менша густини гумігуту на  $\Delta \rho = 0,2$  г/см<sup>3</sup>. Знайти по одержаним даним число Авогадро.

Розв'язання. На змулену частинку гумігуту діє сила тяжіння  $F_T = mg = V\rho g$  та сила Архімеда  $F_A = \rho' V g$ , де  $V$  – об'єм частинки,  $\rho$  і  $\rho'$  густина гумігуту і рідини відповідно,  $g$  – прискорення земного тяжіння. При цьому сили направлені в протилежні напрямки, тому при зануренні частинки в рідину виконуватиметься робота

$$\Delta A = F \Delta h = (F_T - F_A) \Delta h = (\rho - \rho') V g \Delta h.$$

На таку ж величину зміниться і потенціальна енергія частинки, яка очевидно рівнятиметься

$$E_n = (\rho - \rho') V g \Delta h.$$

Оскільки частинки гумігуту знаходяться в полі потенціальних сил, то їх розподіл по енергіям буде описуватись

формулою Больцмана (2.11). Отже, на висоті  $h_1$  і  $h_2$  концентрація частинок  $n_1$  і  $n_2$  становитиме:

$$n_1 = n_0 \exp \left[ -\frac{Vg(\rho - \rho')h_1}{kT} \right];$$

$$n_2 = n_0 \exp \left[ -\frac{Vg(\rho - \rho')h_2}{kT} \right].$$

Звідки

$$\ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{Vg(\rho - \rho')(h_2 - h_1)}{kT} = \frac{Vg(\rho - \rho')\Delta h}{kT}.$$

Враховуючи, що  $k=R/N_A$ , де  $R$  – універсальна газова стала, одержуємо:

$$N_A = \frac{RT \ln \frac{n_1}{n_2}}{Vg(\rho - \rho')\Delta h} = 6,4 \cdot 10^{23} \text{ (моль}^{-1}\text{)}.$$

#### 2.4. Задачі для аудиторної роботи

2.16. У коробці є  $n=30$  чорних і  $m=10$  білих куль, які в іншому повністю ідентичні між собою. Кулі добре перемішані. Знайти імовірності виймання чорної  $P(ч)$  і білої  $P(б)$  куль із коробки при одному випробуванні. Перевірити умову нормування. Знайти імовірності послідовного виймання двох чорних, двох білих, чорної і білої, білої та чорної кулі, якщо кулі після першого випробування не повертаються в коробку.

2.17. Нехай задана ідеальна система із  $N = 5$  спінів, кожен із яких у відсутності магнітного поля з рівною ймовірністю може орієнтуватись „вверх” або „вниз”. Допустимо, що через рівні проміжки часу здійснюється фотографування цієї системи. В якій частині фотографій буде  $n$  спінів орієнтованих „вверх”. Розглянути випадки, коли  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

2.18. У посудині знаходиться  $N$  молекул. Знайти імовірність того, що в процесі хаотичного руху всі молекули зберуться в одній із половин посудини. Вирахувати імовірність для  $N=2, 10, N_A=6 \cdot 10^{23}$ .

2.19. Випадкова величина  $x$  представлена таким законом розподілу:

$x_i$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$P_i$	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Визначити середнє значення  $\langle x \rangle$ , середнє квадратичне відхилення  $D$  і дисперсію  $\sigma$  величини  $x$ .

2.20. Функція розподілу імовірності значень деякої величини  $x$  має вигляд  $f=Ax$  при  $0 < x < a$ . Поза цим інтервалом  $f=0$ . Тут  $A$  і  $a$  - константи. Вважаючи, що  $a$  задано, знайти: а) значення функції  $f$  при  $x = a$ ; б) середні значення  $\langle x \rangle$  і  $\langle x^2 \rangle$ .

2.21. Знайти відношення числа молекул водню швидкості яких лежать у межах від 3000 до 3010 м/с, до числа молекул, які мають швидкості в межах 1500 до 1510 м/с, якщо температура водню 300 °С.

2.22. Знайти найбільш імовірну, середню та середню квадратичну швидкості молекул кисню при температурі 227 °С.

2.23. На якій висоті густина газу складає 30% його густини на рівні моря. Температуру вважати постійною і рівною 273 К. Задачу розв'язати для повітря і водню.

2.24. Газоподібний водень витікає у вакуум із тонкостінної посудини через отвір площею  $S=0,1 \text{ мм}^2$ . Середня частота ударів молекул об стінки посудини  $z_0=10^{26} \text{ с}^{-1}\text{м}^{-2}$ . Через певні проміжки часу вимірюється потік молекул через отвір протягом часу  $\tau=10^{-3} \text{ с}$ . Приймаючи, що тиск в посудині незмінюється, знайти відносну флуктуацію числа молекул, які вилітають за час  $\tau$ ?

### 2.5. Задачі для самостійної роботи

2.25. Із колоди з 36 картами навмання виймають 3. Яка ймовірність того, що серед цих карт буде тільки один туз?

2.26. Є два однакових кубики пофарбованих у синій і червоний колір. На гранях обох кубиків нанесено цифри 1, 2, ..., 6 ("гральна кістка"). Яка ймовірність того, що при одночасному киданні обох кубиків випадуть числа 1 і 5? Розглянути два випадки: а) одиниця випаде на синьому кубуку, а п'ятірка - на червоному; б) кубики однакового кольору.

2.27. Монету кинули вгору  $N$  раз. У скільки разів ймовірність того що „герб” випаде  $N/2$  разів більша ніж ймовірність випадання „герба”  $N/6$  разів. Розглянути випадки  $N = 6$ ,  $N = 24$ .

2.28. Газоподібний водень витікає у вакуум із тонкостінної посудини через отвори  $S_1=0,1 \text{ мм}^2$ ,  $S_2=0,1 \text{ мм}^2$ ,  $S_3=0,3 \text{ мм}^2$ . Знайти ймовірність появи у вакуумі довільної молекули водню через отвори  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ?  $S_1$  або  $S_3$ ?  $S_1$  або  $S_2$ ?  $S_2$  або  $S_3$ ?

2.29. Магнітний момент спіна  $\mu_0$  з ймовірністю  $p$  може бути направлений по полю і з ймовірністю  $q = 1 - p$  - проти поля. В першому випадку проекція моменту на напрям поля рівна  $\mu_0$ , в іншому вона рівна  $-\mu_0$ . Знайти: а) чому рівні середні значення магнітного моменту частинки  $\langle \mu \rangle$  та середнє значення квадрату магнітного моменту частинки  $\langle \mu^2 \rangle$ .

2.30. Побудувати графік біноміального розподілу для  $n=4$  і  $n=20$ .

2.31. Азот знаходиться при температурі  $T = 600 \text{ К}$ . Яка густина ймовірності того, що молекула азоту має швидкість  $500 \text{ м/с}$ ? Яка ймовірність того, що молекула азоту має швидкість в інтервалі від  $499,5 \text{ м/с}$  до  $500,5 \text{ м/с}$ ?

2.32. Визначити число молекул водню, які проходять за 1 секунду через площадку площею  $1 \text{ см}^2$ , яка розміщена

перпендикулярно до напрямку руху молекул. Водень знаходиться при нормальних умовах.

2.33. Найбільш ймовірна швидкість молекул деякого газу становить 1820 м/с. Яка середня арифметична і середня квадратична швидкість молекул? Який це газ, якщо температура 127 °С.

2.34. Покажіть, що доля молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від середньої до середньої квадратичної не змінюється при зміні температури.

2.35. Покази барометра на вершині гори становлять 43 % від показів біля підніжжя. Визначити висоту цієї вершини, якщо температура з висотою не змінюється і становить 10 °С.

2.36. Вважаючи, що повітря на поверхні Землі знаходиться при нормальних умовах, визначити відношення тиску повітря на висоті 2 км до тиску на дні шахти глибиною 2 км. Температура від висоти не залежить.

### 3. МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ІДЕАЛЬНИХ ГАЗІВ

#### 3.1. Короткі теоретичні відомості

Згідно моделі ідеального газу, молекули представляють собою кульки, які хаотично рухаються, при цьому їх розміри дуже малі в порівнянні з віддаллю між молекулами. Взаємодія між молекулами газу зводиться лише до пружних (але не обов'язково центральних) зіткнень, тобто міжмолекулярні сили вважаються настільки малими, що ними повністю нехтують. Виходячи із цієї моделі одержано основні характеристики молекулярного руху в газах:

- середня довжина вільного пробігу

$$\langle l \rangle = \frac{l}{Sn} = \frac{l}{4\pi r^2 n}, \quad (3.1)$$

де  $S=4\pi r^2$  – ефективний переріз,  $r$  – ефективний радіус,  $n$  – концентрація молекул;

- середня частота зіткнень молекули за одиницю часу

$$z = 4\sqrt{2}\pi r^2 n \langle v \rangle, \quad (3.2)$$

де  $\langle v \rangle$  – середня швидкість руху;

- середнє число ударів  $z_0$  молекул в одиничну площадку за одиницю часу

$$z_0 = \frac{1}{4} n \langle v \rangle. \quad (3.3)$$

Унаслідок розсіювання густина потоку молекул зменшується по закону

$$n = n_0 \exp\left(\frac{-x}{\langle l \rangle}\right),$$

а диференціальна функція розподілу молекул по довжинах вільного пробігу (розподіл Клаузіуса) має вигляд



$$f(x) = \frac{1}{\langle l \rangle} \exp\left(-\frac{x}{\langle l \rangle}\right). \quad (3.4)$$

При врахуванні сил притягування між молекулами в проміжку між зіткненнями Сезерленд одержав наступну температурну залежність ефективного перерізу

$$S = S_0 \left(1 + \frac{C}{T}\right), \quad (3.5)$$

де  $C$  - константа Сезерленда, яка має розмірність температури, причому завжди  $C/T \ll 1$ .

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії встановлює взаємозв'язок між тиском газу і середньою кінетичною енергією його молекул

$$p = \frac{2}{3} n \langle E_k \rangle = \frac{2}{3} n \langle mv^2/2 \rangle = nkT. \quad (3.6)$$

З цього рівняння випливає рівняння Клапейрона-Менделєєва

$$pV = \nu RT, \quad (3.7)$$

де  $p$ ,  $V$ ,  $T$  – тиск, об'єм і температура,  $\nu = m/\mu$  – кількість молів ідеального газу,  $R = 8,31441$  Дж/(моль·К) – універсальна газова постійна. Із рівняння (3.7) випливає закон Авогадро: при однакових умовах ( $p_1 = p_2 = \dots = p_k$  і  $T_1 = T_2 = \dots = T_k$ ) в однакових об'ємах міститься одна і та ж кількість молекул довільних газів  $N_1 = N_2 = \dots = N_k$ . Закони Бойля-Маріотта ( $T = const$ )

$p_1 V_1 = p_2 V_2 = const$ , Гей-Люсака ( $p = const$ )  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = const$  і Гей-

Люсака-Шарля ( $V = const$ )  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = const$  є частинними

випадками рівняння (3.7) і зв'язують параметри газу відповідно при ізотермічному, ізобаричному та ізохоричному процесах.

Тиск хімічно не взаємодіючої суміші газів описується законом Дальтона

$$p = n_1kT + n_2kT + n_3kT + \dots = p_1 + p_2 + \dots = \sum_i p_i, \quad (3.8)$$

де  $p_i$  – парціальні тиски.

### 3.2. Якісні задачі

3.1. Температура є мікро- чи макроскопічним параметром системи?

3.2. Які гази краще використовувати в газових термометрах?

3.3. Як задається стан ідеального газу через мікро- і макроскопічні параметри?

3.4. Як пояснити твердження, що сила дії молекул на стінки посудини є величиною постійною у часі?

3.5. Якою може бути верхня межа тиску в дослідах Штерна та в дослідах по експериментальній перевірці розподілу Больцмана (дослід Борна і Бормана)?

3.6. Враховуючи, що повітря складається на 80% з азоту і 20% з кисню, визначити парціальні тиски цих газів, якщо їх сумарний тиск становить  $10^5$  Па.

3.7. Намалювати в координатах  $p$ - $V$ ,  $V$ - $T$ ,  $p$ - $T$  графіки процесів: ізохоричного, ізобаричного та ізотермічного.

3.8. Намалювати в координатах  $p$ - $V$ ,  $V$ - $T$ ,  $p$ - $T$  декілька ізотерм при різних температурах, ізобари при різних тисках та ізохори при різних об'ємах.

3.9. Який фізичний зміст має універсальна газова стала?

3.10. Який фізичний зміст має ефективний поперечний переріз молекули? Поясніть формулу Сезерленда.

### 3.3. Приклади розв'язування задач

Задача 3.11. Знайти відносне число молекул, довжина вільного пробігу яких не перевищує середньої довжини вільного пробігу. При якій концентрації молекул азоту ця

величина становить 1 мм? Ефективний діаметр молекули  $2 \cdot 10^{-10}$  м.

Розв'язання. Розподіл молекул за довжинами вільного пробігу задається формулою Клаузіуса (3.4)

$$f(x)dx = \frac{dN}{N} = \frac{1}{\langle l \rangle} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\langle l \rangle}\right) dx,$$

де  $\frac{dN}{N}$  – відносне число молекул, довжина вільного пробігу яких лежить в інтервалі від  $x$  до  $x+dx$ ;  $\langle l \rangle$  – середня довжина вільного пробігу. Відносне число молекул, довжина вільного пробігу яких лежить в інтервалі від  $x_1$  до  $x_2$  становитиме

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{1}{\langle l \rangle} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x}{\langle l \rangle}\right) dx = -\exp\left(-\frac{x}{\langle l \rangle}\right) \Bigg|_{x_1}^{x_2} = \\ &= \exp\left(-\frac{x_1}{\langle l \rangle}\right) - \exp\left(-\frac{x_2}{\langle l \rangle}\right). \end{aligned}$$

За умовою задачі необхідно знайти відносне число молекул довжина вільного пробігу яких лежить в інтервалі від 0 до  $\langle l \rangle$ . Отже

$$\frac{\Delta N}{N} = \exp\left(-\frac{0}{\langle l \rangle}\right) - \exp\left(-\frac{\langle l \rangle}{\langle l \rangle}\right) = 1 - \frac{1}{e} \approx 1 - 0,37 = 0,63.$$

Тобто, 63% молекул мають довжину вільного пробігу меншу ніж середня.

Щоб знайти концентрацію молекул азоту  $n$  при якій довжина вільного пробігу  $\langle l \rangle = 1$  мм використаємо формулу 3.1:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sigma \cdot n} = \frac{1}{4\pi \cdot d^2 \cdot n},$$

де  $\sigma$  – ефективний переріз,  $d$  – діаметр,  $n$  – концентрація молекул.

Звідки

$$n = \frac{l}{4\pi \cdot d^2 \cdot \langle l \rangle} = \frac{l}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-20}} \approx 0,7 \cdot 10^{22} (\text{м}^{-3}).$$

Тобто середня довжина вільного пробігу 1 мм одержується при концентрації газу в 1000 раз меншій ніж при нормальних умовах.

Задача 3.12. Скляну пластинку покривають золотом термічним напиленням у вакуумі в квазізамкнутому об'ємі при температурі випаровувача 1800 °С. Оцініть тиск, який створюють атоми золота на пластинку, якщо за 1 хв товщина шару золота зростає на 10 мкм. Молекулярна маса золота  $197 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, а густина  $19,3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Розв'язання. Будемо вважати, що всі молекули, які зазнали зіткнень із пластинкою осідають на ній, тобто удари молекул в пластинку є абсолютно непружними. У цьому випадку формулою (3.6) користуватись не можна, оскільки при її виведенні вважалось, що зіткнення молекул з стінкою посудини є абсолютно пружними. Тому будемо виходити із загальних положень, згідно яких тиск

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\Delta K}{\Delta t \cdot S},$$

де  $\Delta K$  – зміна імпульсу всіх частинок, які попадають на пластинку площею  $S$  за час  $\Delta t$ .

У свою чергу

$$\Delta K = \Delta N \cdot m \langle v \rangle,$$

де  $\Delta N$  – кількість частинок масою  $m$  і середньою швидкістю  $\langle v \rangle$ , які попадають за час  $\Delta t$  на пластинку. Врахуємо, що

$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  (формула 2.76), а  $\Delta N$  можна оцінити із таких

міркувань.

Маса частинок золота, які осідають на пластинці за час  $\Delta t$

$$\Delta M = m \cdot \Delta N.$$

Крім того:

$$\Delta M = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot S \cdot \Delta d,$$

де  $\Delta d$  – товщина шару золота. З двох останніх рівнянь знаходимо:

$$\Delta N = \frac{\rho \cdot S \cdot \Delta d}{m}.$$

Отже

$$p = \frac{\Delta N \cdot m \cdot \langle v \rangle}{\Delta t \cdot S} = \frac{\rho \cdot \Delta d \cdot \langle v \rangle}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot \Delta d}{\Delta t} \sqrt{\frac{8RT}{\pi m}}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, одержимо

$$p = \frac{19,3 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{60 \text{ с}} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 2073 \text{ К}}{3,14 \cdot 197 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}} = 1,57 \text{ Па}.$$

Задача 3.13. Швидкість відкачування повітря форвакуумним насосом  $b=150 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$ . Скільки часу потрібно для того, щоб колбу об'ємом  $V_0=5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$  відкачати від нормального атмосферного тиску  $p_0=1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$  до тиску  $p=1,33 \text{ Па}$  ( $1 \cdot 10^{-2} \text{ мм. рт. ст.}$ )?

Розв'язання. У вакуумній техніці під швидкістю відкачування розуміють об'єм газу, що його відкачує насос щосекунди при тиску, який існує в об'ємі  $V_0$  посудини та в робочому об'ємі  $V_k$  насоса (рис. 4). Швидкість відкачування залежить від атмосферного тиску, але при розв'язуванні цієї задачі вважатимемо її сталою величиною.

Задачу можна розв'язати двома способами.

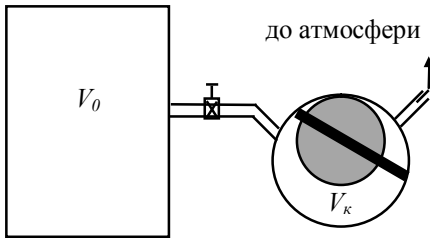


Рис. 4.

Перший спосіб полягає в тому, що рівняння стану газу розглядають при певній фіксованій масі газу. Виділимо масу газу  $dm$ , яку виносить насос з об'єму  $V_0$ . Очевидно, ця маса  $dm$  заповнює в колбі об'єм  $dV$ . Виходячи із рівняння Клапейрона - Менделєєва

$$(3.7), \quad dm = \frac{\mu}{RT} p dV, \quad \text{бо}$$

при цьому тиск  $p$  можна вважати сталим ( $dm$  – мала величина)

. Крім того, зменшення цієї самої маси  $dm$  в об'ємі колби  $V_0$  викличе там зменшення тиску на величину  $dp = -\frac{dm}{V_0} \frac{RT}{\mu}$ .

Виключаючи з цих двох рівнянь  $dm$ , матимемо:

$$dp = -\frac{p \cdot dV}{V_0}. \quad \text{Отже,}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{p}{V_0} \frac{dV}{p} = -\frac{p}{V_0} b,$$

оскільки за визначенням швидкість відкачування  $b = dV/dt$ .

Оскільки  $b$  ми вважаємо сталою величиною, то розділяючи змінні та інтегруючи одержаний вираз матимемо

$$-\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{b}{V_0} \int_0^\tau dt.$$

Звідки

$$\tau = \frac{V_0}{b} \ln \frac{p_0}{p}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$\tau = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{150 \cdot 10^{-6}} \cdot \ln \frac{1,01 \cdot 10^5}{1,33} = 370 \text{ (с)}.$$

Другий спосіб розв'язання задачі демонструє дещо інший підхід до задачі, і тому ознайомлення з ним становить певний інтерес. Будемо вважати, що насос виконує один оберт за секунду і максимальний робочий об'єм  $V_k$  камери насоса (мал. 4) чисельно дорівнює  $b$  – швидкості відкачування. Останнє справедливо, якщо  $V_k \ll V_0$ . Тоді сполучення  $V_k$  з  $V_0$  мало змінює тиск у колбі, Перед початком відкачування тиск в об'ємі

$V_0$  дорівнює  $p_0 = \frac{m}{\mu V_0} \cdot RT$ . Очевидно, що через секунду після

початку відкачування, тобто після одного оберту насоса, тиск в колбі зменшиться до величини

$$p_1 = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V_0 + V_k} = \frac{V_0 p_0}{V_0 + b}.$$

Після наступного оберту

$$p_2 = \frac{V_0 p_1}{V_0 + b} = \frac{V_0^2}{(V_0 + b)^2} \cdot p_0.$$

Після того як пройде  $\tau$  секунд з моменту початку відкачування

$$p_\tau = \left( \frac{V_0}{V_0 + b} \right)^\tau p_0, \text{ звідки } \tau = \frac{\ln \frac{p_0}{p}}{\ln \frac{V_0 + b}{V_0}} = \frac{\ln \frac{p_0}{p}}{\ln \left( 1 + \frac{b}{V_0} \right)}.$$

Якщо  $V_0 \gg b$ , то  $\ln \left( 1 + \frac{b}{V_0} \right) \cong \frac{b}{V_0}$ , тоді  $\tau = \frac{V_0}{b} \ln \frac{p_0}{p}$ .

**Задача 3.14.** Яку кількість кисню використали з балону об'ємом 40 л при зварювальних роботах, якщо покази

манометра на балоні змінились від 14 до 6 атм., а температура змінилась від  $27^{\circ}\text{C}$  до  $7^{\circ}\text{C}$ .

Розв'язання. Манометр на балоні показує різницю тисків газу в балоні та поза його межами, тобто істинний тиск газу в балоні рівний  $p+p_0$ , де  $p$  – покази манометра,  $p_0$  – атмосферний тиск. До початку зварювальних робіт

$$(p_1 + p_0)V = \frac{m_1}{\mu} RT_1. \text{ Звідки}$$

$$m_1 = \frac{(p_1 + p_0)V\mu}{RT_1}.$$

У кінці зварювальних робіт  $(p_2 + p_0)V = \frac{m_2}{\mu} RT_2$ . Звідки

$$m_2 = \frac{(p_2 + p_0)V\mu}{RT_2}.$$

Тоді, використана кількість кисню,

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{V\mu}{R} \cdot \left( \frac{p_1 + p_0}{T_1} - \frac{p_2 + p_0}{T_2} \right).$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$\Delta m = \frac{40 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}}{8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}} \times \left( \frac{14 \cdot 10^5 \text{ Па} + 1 \cdot 10^5 \text{ Па}}{300 \text{ К}} - \frac{6 \cdot 10^5 \text{ Па} + 1 \cdot 10^5 \text{ Па}}{280 \text{ К}} \right) = 0,38 \text{ кг}.$$

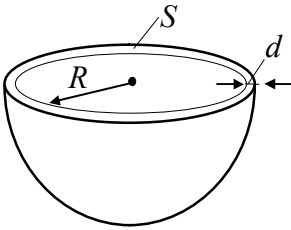
Задача 3.15. У тонкостінний сталевий балон сферичної форми, маса якого  $M$  нагнітається азот при температурі  $T$ . Знайти максимальну кількість азоту  $m_{\text{max}}$ , що може вміститись у балоні, якщо допустиме напруження стінок балону  $\sigma$ . Густина сталі  $\rho$ .



Розв'язання. Із рівняння стану (3.7) знаходимо шукану масу азоту

$$m_{max} = \frac{\mu V}{RT} p_{max},$$

де  $p_{max}$  - максимально допустимий тиск азоту в об'ємі  $V$  балону при температурі  $T$ . Цей тиск створює напруження стінок балону.



Мал.5. а

Позначимо товщину стінки балону через  $d$ , а його внутрішній радіус через  $R$ . Враховуючи, що по умові задачі балон тонкостінний ( $R \gg d$ ), то, з достатньою точністю, масу балону можна вирахувати по формулі

$$M = 4\pi \cdot R^2 \cdot d \cdot \rho,$$

а його об'єм

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Напруження в стінці балону можна знайти поділивши сумарну силу  $F_{cm}$ , з якою “верхня” половина балону відривається від “нижньої”, на площу колового перерізу стінки балона  $S = 2\pi R d$  (рис. 5 а). Для знаходження сили  $F_{cm}$  може бути використана формула. Тоді

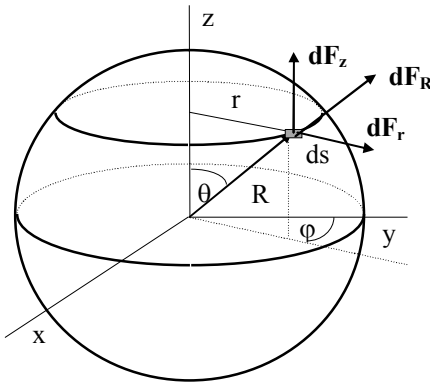
$$\sigma = \frac{F_{cm}}{S} = \frac{p_{max} \cdot \pi R^2}{2\pi R d},$$

звідки  $p_{max} = \frac{2\sigma \cdot d}{R}$ , де  $\pi R^2$  - проекція площі півсфери на площину перерізу.

Підставляючи знайдені вирази для  $p_{max}$  і  $V$  у формулу для маси, знайдемо

$$m = \frac{\mu}{RT} \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{2\sigma d}{R} = \frac{2\sigma \mu M}{3RT\rho}.$$

*Додаток.* Виведення формули  $F_{cm} = p_{max} \cdot \pi R^2$ . На рис. 5 б зображено сферичний балон з центром якого зв'язані декартова система координат  $x, y, z$  та сферична система координат  $R, \theta, \varphi$ . На поверхні балона вибрана площадка  $ds$  з площею



Мал.5. б

$ds=R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$ , яка знаходиться на відстані  $r$  від осі  $z$ . Якщо в балоні встановився максимальний тиск  $p_{\max}$ , то на цю площадку діє сила  $dF_R = p_{\max} \cdot ds$ , напрям якої співпадає з напрямком радіуса-вектора  $\mathbf{R}$ , проведеного з центру балона до площадки. Вектор  $d\mathbf{F}_R$  можна розкласти на дві складові:  $d\mathbf{F}_r$  – яка напрямлена вздовж радіуса  $r$ , проведеного до площадки;  $d\mathbf{F}_z$  – яка паралельна осі  $z$  ( $dF_z = dF_R \cdot \cos\theta$ ). Коли обходити всі точки поверхні балона вздовж малого кола радіуса  $r$ , то модулі складових  $dF_r$  і  $dF_z$  залишаються сталими, напрям вектора  $d\mathbf{F}_z$  теж залишається сталими, лише змінюється напрям вектора  $d\mathbf{F}_r$ . Тому сумарна сила, яка діє на смугу поверхні балона шириною  $R \cdot d\theta$  і довжиною  $2\pi \cdot r$  буде напрямлена вздовж осі  $z$ , а її модуль рівний

$$dF = p_{\max} \cdot R \cdot d\theta \cdot 2\pi \cdot R \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta.$$

Це справедливо для смуг поверхні балона любого радіуса  $r$ .

Тому

$$\begin{aligned} F_{\text{см}} &= \int_0^{\pi/2} dF = \\ &= \int_0^{\pi/2} p_{\max} \cdot 2\pi \cdot R^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta = p_{\max} \cdot \pi R^2. \end{aligned}$$

### 3.4. Задачі для аудиторної роботи

3.16. Сучасні вакуумні насоси дозволяють понижувати тиск до  $10^{-10}$  Па. Скільки молекул містить  $1\text{ см}^3$  азоту при такому тиску і температурі  $27^\circ\text{C}$ . Яка при цих умовах середня довжина вільного пробігу молекул і середній час між зіткненнями?

3.17. Знайти загальне число зіткнень між молекулами азоту за 1 с, які знаходяться в об'ємі  $V=1\text{ см}^3$  при нормальних умовах. Ефективний діаметр молекули азоту  $d=3,1\cdot 10^{-10}$  м.

3.18. При якому тиску середня довжина вільного пробігу молекул азоту рівна 1 мм, якщо при нормальному тиску вона рівна  $6\cdot 10^{-5}$  мм.

3.19. Розрахуйте величину  $kT$  в електрон-вольтах при кімнатній температурі  $t = 20^\circ\text{C}$ .

3.20. Нижче якого тиску можна говорити про вакуум між стінками посудини Дьюара, якщо відстань між стінками 8 мм, а температура  $17^\circ\text{C}$ ? Ефективний діаметр молекул повітря прийняти рівним 0,27 нм.

3.21. В посудині знаходиться суміш газів, яка складається із молекул аргону і гелію. Яке відношення середніх квадратичних швидкостей молекул цих газів?

3.22. При температурі  $27^\circ\text{C}$  і тиску  $1,1\cdot 10^5$  Па густина суміші молекул азоту і кисню становить  $1,3\text{ кг/м}^3$ . Визначити концентрацію молекул азоту і кисню в суміші.

3.23. Газ з молярною масою  $\mu$  знаходиться рід тиском  $p$  між двома однаковими горизонтальними пластинами. Температура газу зростає лінійно від  $T_1$  біля нижньої пластини до  $T_2$  біля верхньої. Об'єм газу між пластинами  $V$ . Знайти його масу.

3.24. В закритій посудині при температурі 300К і тиску 0,1Мпа знаходиться 10 г молекул водню і 16 г гелію. Вважаючи гази ідеальними, визначити питомий об'єм суміші.

3.25. Визначити тиск, який чинить газ на стінки посудини, якщо його густина рівна  $0,01 \text{ кг/м}^3$  а середня квадратична швидкість молекул  $480 \text{ м/с}$ .

3.26. Скільки качань необхідно зробити, щоб за допомогою насосу, який захоплює при кожному качанні  $40 \text{ см}^3$  повітря, наповнити пусту камеру шини велосипеда настільки, щоб площа її дотику з дорогою стала рівною  $60 \text{ см}^2$ . Навантаження на колесо рівне  $350 \text{ Н}$ , об'єм камери  $2000 \text{ см}^3$ . Тиск атмосферного повітря прийняти рівним  $10^5 \text{ Па}$ , жорсткістю шини знехтувати.

3.27. Визначити масу кисню в балоні об'ємом  $10 \text{ л}$ , якщо при температурі  $-13^\circ\text{C}$  манометр на балоні показує тиск  $8,8 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

3.28. По газопровідній трубі тече вуглекислий газ при тиску  $3,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$  і температурі  $7^\circ\text{C}$ . Яка швидкість руху газу в трубі, якщо за час  $10 \text{ хв}$ . Протікає  $2 \text{ кг}$  вуглекислого газу. Площа поперечного перерізу труби  $5 \text{ см}^2$ .

3.29. При нормальному атмосферному тиску в посудину вводять кисень  $\text{O}_2$  та метан  $\text{CH}_4$  в такій кількості, що парціальні тиски газів є рівними. Посудину закривають і проводять вибух, в результаті чого проходить хімічна реакція  $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 = \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ . Після цього посудину охолоджують до початкової температури. Знаючи, що тиск насиченої водяної пари при цій температурі  $2240 \text{ Па}$ , визначити кінцевий тиск у посудині.

3.30. Температура повітря в кімнаті об'ємом  $150 \text{ м}^3$  рівна  $6^\circ\text{C}$ , відносна вологість  $80\%$ . Скільки води потрібно випарити в цій кімнаті, щоб при збільшенні температури до  $18^\circ\text{C}$  відносна вологість стала  $60\%$ ?

3.31. Знайти середню відстань між молекулами насиченої водяної пари при температурі  $373 \text{ К}$ . У скільки разів ця відстань більша від відстані між молекулами води при  $273 \text{ К}$ ?

### 3.5. Задачі для самостійної роботи

3.32. Знайти середню тривалість вільного пробігу молекул при тиску 3 мм рт. ст. і температурі 27 °С.

3.33. При якому тиску середня довжина вільного пробігу молекул водню рівна 25 мм? Температура водню 68°С, ефективний діаметр молекули  $2,3 \cdot 10^{-10}$  м.

3.34. Знайти відносну долю молекул, довжина вільного пробігу яких лежить в межах від  $\langle l \rangle$  до  $2\langle l \rangle$ .

3.35. Розрахуйте температура гуру при якій  $kT = 1\text{eV}$ .

3.36. Визначити середню кінетичну енергію поступального руху молекул газу, який знаходиться під тиском 0,1 Па. Концентрація молекул газу  $10^{13} \text{ см}^{-3}$ .

3.37. Деяка маса молекул азоту знаходиться при температурі 300К і тиску  $10^5$  Па. Запас середньої кінетичної енергії поступального руху молекул цього газу складає 6,3 Дж. Знайти число молекул газу, його масу та об'єм.

3.38. В закритій посудині об'ємом 20 л знаходиться 6г водню та 12 г гелію при температурі 300К. Визначити тиск і молярну масу суміші газів.

3.39 Компресор захоплює при кожному качанні 4л повітря при атмосферному тиску і температурі  $-3^\circ\text{C}$  і нагнітає його в резервуар об'ємом  $1,5\text{м}^3$ , причому температура повітря в резервуарі  $45^\circ\text{C}$ . Скільки качань повинен зробити компресор, щоб тиск в резервуарі зріс на  $2 \cdot 10^5$  Па?

3.40. У двох посудинах об'ємами 5л та 7л, з'єднаних трубкою з краном, знаходиться повітря під тиском відповідно 2 атм. і 3 атм. Температура в обох посудинах однакова. Який тиск встановиться в посудинах якщо кран відкрити? Вважати, що температура газів не змінюється.

3.41. Циліндрична посудина довжиною 84 см розділена невагомим теплонепроникним поршнем на дві рівні частини. В

обох половинах посудини знаходиться однакові маси газу при температурі  $27^{\circ}\text{C}$  і тиску  $10^5$  Па. На яку відстань зміститься поршень, якщо газ в одній з половин нагріти до  $57^{\circ}\text{C}$ ? Який тиск встановиться при цьому у циліндрі? Вважати, що у другій половині посудини температура не змінюється.

3.42. В посудині об'ємом 1 л знаходиться сухе повітря при нормальних умовах. В цю посудину вводять деяку кількість бутану ( $\text{C}_4\text{H}_{10}$ ), після чого тиск в посудині зріс до 1500 мм рт.ст. Яка маса бутану була введена в посудину? Яка молярна маса одержаної суміші?

3.43. Три балони місткістю 3, 7, і 5 л наповнені відповідно киснем, азотом, і вуглекислим газом з тисками  $2 \cdot 10^5$  Па,  $3 \cdot 10^5$  Па,  $0,6 \cdot 10^5$  Па при одній і тій же температурі. Який буде тиск суміші газів якщо балони з'єднати між собою? Процес вважати ізотермічним.

3.44. Газ в балоні перебуває при температурі  $27^{\circ}\text{C}$  і тиску  $4 \cdot 10^5$  Па. Який буде тиск газу, якщо з балона випустити половину його маси а температуру знизити до  $12^{\circ}\text{C}$ ?

3.45. У двох однакових посудинах об'ємом по  $500 \text{ см}^3$  кожна знаходиться водень і кисень при температурі 293К. Тиск водню 26,6 кПа, кисню 53,2 кПа. Посудини з'єднали між собою і, після того як гази перемішалися, пропустили електричний розряд, в результаті чого суміш газів згоріла. Яким стане тиск в посудинах, після того як встановиться початкова температура? Тиск насичених парів води при 293К 2,32 кПа.

3.46. Відносна вологість повітря вечером при температурі  $16^{\circ}\text{C}$  рівна 60%. Вночі температура повітря понижується до  $4^{\circ}\text{C}$  і випадає роса. Скільки водяної пари конденсується при цьому із  $1 \text{ м}^3$  повітря?

## 4. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ

### 4.1. Короткі теоретичні відомості

У молекулярних системах, фізичні параметри яких є функцією координат, виникають потоки тепла, маси, електричного заряду і ін.. Ці явища дістали назву процесів переносу. Молекули газу, безперервно і безладно рухаючись, весь час перемішуються, обмінюючись енергіями та швидкостями, і цей процес перемішування зумовлює явища переносу – дифузію, теплопровідність та внутрішнє тертя. Причиною явищ переносу є прагнення системи до рівноважного стану з рівномірним розподілом фізичних параметрів. Перенос маси (дифузія), кінетичної енергії (теплопровідність) і кількості руху (внутрішнє тертя) у певному напрямку в газі можливий лише тоді, коли вздовж цього напрямку існує градієнт, відповідно, густини  $\rho$ , температури  $T$  або відносної швидкості  $u$  руху шарів газу один відносно одного.

Маса газу  $dM$ , що переноситься за час  $dt$  через площадку  $\Delta S$  у напрямі  $x$ , який перпендикулярний до цієї площадки, згідно з рівнянням дифузії (рівняння Фіка) дорівнює

$$\frac{dM}{dt} = -D \frac{d\rho}{dx} \Delta S, \quad (4.1)$$

де  $D = \frac{l}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$  - коефіцієнт дифузії,  $d\rho/dx$  - градієнт густини (концентрації) у напрямку  $x$ ;  $\langle v \rangle$  і  $\langle l \rangle$  – відповідно, середня швидкість і середня довжина вільного пробігу молекул газу. Знак мінус у правій частині рівняння означає, що дифузія відбувається в бік зменшення густини.

Теплопровідність у газі описується аналогічним рівнянням (рівняння Фур'є)

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \frac{dT}{dx} \Delta S, \quad (4.2)$$

тут  $dQ$  – кількість тепла, яке переноситься за час  $dt$  через площадку  $\Delta S$  при градієнті температури в напрямку  $x$  рівному  $\frac{dT}{dx}$ ,  $\lambda = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle c_V$  – коефіцієнт теплопровідності,  $c_V$  – питома теплоємність газу при сталому об'ємі.

Якщо один шар газу рухається відносно другого з швидкістю  $u$ , то через площадку  $\Delta S$ , яка паралельна напрямку руху шарів газу, за час  $dt$  переноситься з першого шару в другий кількість руху  $dK$ , що визначається рівнянням Ньютона:

$$\frac{dK}{dt} = -\eta \frac{du}{dx} \Delta S, \quad (4.3)$$

тут  $\frac{du}{dx}$  – градієнт швидкості в напрямі, який перпендикулярний

до швидкості руху шарів газу, а  $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$  – коефіцієнт

в'язкості. Величину  $F = \frac{dK}{dt}$  – називають силою тертя між шарами рідини.

З приведених рівнянь очевидний взаємозв'язок між коефіцієнтами переносу

$$\lambda = c_V \eta = \rho c_V D \quad (4.4)$$

Зауважимо, що феноменологічно аналогічними (4.1–4.3) рівняннями описується явища переносу в рідинах та твердих тілах. Однак, механізми цих явищ відмінні від механізму перенесення в газах. Це обумовлено тим, що, по-перше, в рідинах і твердих тілах не має змісту поняття довжини вільного пробігу, і по-друге, сили взаємодії між молекулами дуже великі і постійно впливають на їх рух.

Наприклад, в рідинах дифузійні процеси обумовлені випадковими перескакуваннями молекул або атомів із одного стану в інший. Імовірність цих перескоків залежить від температури і енергії частинки, що приводить до такої температурної залежності коефіцієнту дифузії



$$D = D_0 \exp(-E/kT), \quad (4.5)$$

де  $E$  – енергія активації дифузії,  $D_0$  – постійна, яка визначається властивостями і будовою конкретної речовини.

В'язкість рідин описується формулою Френкеля

$$\eta = A \exp(b/T), \quad (4.6)$$

де  $A$  і  $b$  визначаються властивостями речовини.

Теплопровідність у твердих тілах обумовлена взаємодією між молекулами, в результаті якої їх тепловий рух набуває колективного характеру. Колективні збурення кристалічної решітки ведуть себе як квазічастинки, які одержали назву фононів, для яких можна ввести поняття довжини вільного пробігу. Коефіцієнт теплопровідності твердих тіл

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho v_{зв} \langle l_{\phi} \rangle c_V, \quad (4.7)$$

де  $\rho$  – густина,  $c_V$  – питома теплоємність,  $v_{зв}$  – швидкість звуку в твердому тілі,  $\langle l_{\phi} \rangle$  – середня довжина вільного пробігу фононів.

Відмітимо, що електропровідність також відноситься до явищ переносу.

У випадку нестационарних явищ переносу, тобто коли градієнти  $\frac{d\rho}{dx}$ ;  $\frac{dT}{dx}$  та ін. не залишаються сталими в часі, нерівноважність системи, наприклад, різниця температур, змінюється по закону

$$\Delta T = \Delta T_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (4.8)$$

де  $\Delta T_0$  – початкова різниця температур,  $\tau$  – час релаксації, який для довільних нестационарних явищ має фізичний зміст часу, за який нерівноважність зменшується в  $e$  раз.

У сильно розріджених газах середня довжина вільного пробігу  $\langle l \rangle$  стає більша за розміри посудини  $L$ , в якій міститься газ. У цьому разі можна вважати, що молекули зазнають

зіткнень лише із стінками посудини і кожна молекула переносить ту кількість руху або кінетичну енергію, яку вона дістає у відповідному елементарному акті зіткнення зі стінкою. Зрозуміло, що за таких умов застосування рівнянь переносу у вище приведеному вигляді неможливе, оскільки втрачає зміст поняття середньої довжини вільного пробігу. Підрахунок переносу кількості тепла, імпульсу і маси в цьому випадку полягає в тому, що розглядається механізм явища і оцінюється ефект, який зумовлюється дією кожної окремої частинки (молекули), а потім підраховується сумарна дія всіх молекул газу, які беруть участь в явищі переносу.

## 4.2. Якісні задачі

4.1. Чим пояснити відносно повільне протікання явищ перенесення у газах, в той час як швидкості молекул в них становлять кілька сотень метрів за секунду?

4.2. Чому при виготовленні колб термосів з подвійними стінками викачування повітря з них здійснюють в пічці з температурою 300–400°C?

4.3. Дати визначення середньої довжини вільного пробігу молекул та середнього часу зіткненнями між молекулами. Як зв'язані між собою ці величини?

4.4. Відомий градієнт концентрації молекул  $\mathbf{grad}(n)$  і коефіцієнт дифузії  $D$ . Записати вираз для вектора густини потоку молекул  $\mathbf{j}$ . Вкажіть одиницю вимірювання  $D$  і  $\mathbf{j}$  у системі СІ.

4.5. Відомий градієнт температури  $\mathbf{grad}(T)$  і коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$ . Визначити напрям перенесення тепла і записати вираз для вектора густини потоку тепла  $\mathbf{j}$ . Вкажіть одиниці вимірювання  $\lambda$  і  $\mathbf{j}$  у системі СІ.

4.6. Відомий градієнт швидкості впорядкованого руху молекул  $\mathbf{grad}(\mathbf{u})$  та коефіцієнт в'язкості  $\eta$ . Записати вираз для

вектора потоку кількості руху молекул  $\mathbf{j}$ . Яка розмірність  $\mathbf{j}$  і  $\eta$  у системі СІ.

4.7. Визначити характер залежності від температури  $T$  та тиску  $p$  газу коефіцієнтів дифузії  $D$ , в'язкості  $\eta$  та теплопровідності  $\lambda$ .

### 4.3. Приклади розв'язування задач

Задача 4.8. Для вивчення теплопровідності азоту ним заповнюють простір між двома довгими коаксіальними циліндрами з радіусами  $R_1=0,5$  см і  $R_2=2$  см. Внутрішній циліндр рівномірно нагрівається спіраллю по якій проходить струм  $I=0,1$  А. Опір спіралі на одиницю довжини циліндра становить  $r=1000$  Ом/м. Температура  $T_2$  зовнішнього циліндра підтримується сталою за допомогою танучого льоду. При стаціонарному процесі температура внутрішнього циліндра встановлюється рівною  $T_1=366$  К. Визначити розподіл температури між циліндрами та з приведених даних оцінити коефіцієнт теплопровідності азоту, вважаючи його сталою величиною. Конвекцією знехтувати.

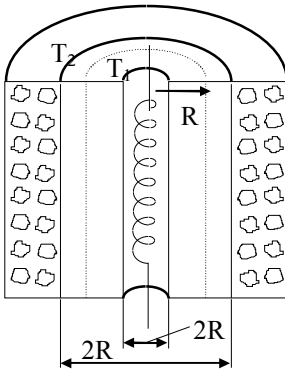


Рис. 6.

Розв'язання. Кількість тепла  $dQ$ , яка переноситься через будь-яку уявну поверхню радіуса  $R$  ( $R_1 < R < R_2$ ) за час  $dt$  згідно (4.2) дорівнює

$$\begin{aligned} dQ &= -\lambda \cdot \frac{dT}{dR} \cdot \Delta S \cdot dt = \\ &= -\lambda \cdot \frac{dT}{dR} \cdot 2\pi R h \cdot dt, \end{aligned}$$

де  $\frac{dT}{dR}$  – градієнт температури біля поверхні проміжного циліндра,  $h$  – його висота (рис. 6). Оскільки процес теплопровідності є стаціонарним, то така ж кількість тепла  $dQ$  за той же самий час  $dt$  повинна виділитися у внутрішньому циліндрі за рахунок нагрівання на спіралі, опір якої  $h \cdot r$ .

По закону Джоуля

$$dQ = I^2 \cdot r \cdot h \cdot dt.$$

Тоді

$$I^2 \cdot r \cdot h = -\lambda \cdot \frac{dT}{dR} \cdot 2\pi R \cdot h, \quad \text{або} \quad \frac{dR}{R} = -\frac{2\pi\lambda}{I^2 r} dT.$$

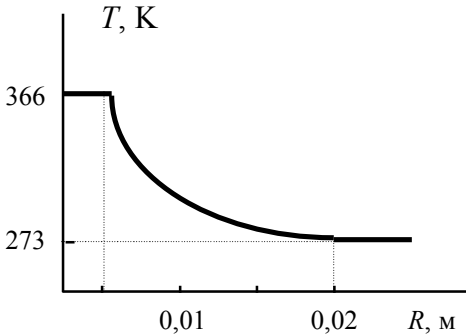


Рис. 7.

Інтегруючи одержане диференціальне рівняння при

$$\ln R_1 = -\frac{2\pi\lambda}{I^2 r} T_1 + const,$$

умові, що  $\lambda$  є сталою величиною, маємо

$$\ln R = -\frac{2\pi\lambda}{I^2 r} T + const.$$

Для знаходження константи інтегрування використовуємо дані умови задачі:

$$\ln R_2 = -\frac{2\pi\lambda}{I^2 r} T_2 + const.$$

Із цих рівнянь знаходимо розподіл температури між циліндрами:

$$\ln R = -\frac{2\pi\lambda}{I^2 r} T + \ln R_1 + \frac{2\pi\lambda}{I^2 r} T_1,$$

звідки

$$T = T_1 - \frac{I^2 r}{2\pi\lambda} \ln \frac{R}{R_1}.$$

Аналогічно визначаємо коефіцієнт теплопровідності азоту

$$\lambda = \frac{I^2 r \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi(T_1 - T_2)}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо:

– коефіцієнт теплопровідності

$$\lambda = \frac{0,01 \cdot 10^3 \text{ (ВВт/м)} \ln \frac{2 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}}}{2 \cdot 3,14 \cdot (366 \text{ К} - 273 \text{ К})} \approx 2,37 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}};$$

– розподіл температури між циліндрами

$$T = T_1 - 67 \cdot \ln \frac{R}{R_1}.$$

Графік цієї залежності зображений на рис. 7.

Задача 4.9. *Визначити кут  $\varphi$  на який повернеться диск, підвішений на пружній нитці, якщо під ним на віддалі  $h=10^{-2}$  м обертається такий же самий диск з кутовою швидкістю  $\omega=50 \text{ с}^{-1}$ . Радіуси дисків  $R=0,1$  м, модуль кручення нитки  $G=10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{рад}^{-1}$ . Розглянути випадки, коли диски знаходяться у повітрі при нормальних умовах і при тиску  $p=1,33 \cdot 10^{-2} \text{ Па} \approx 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$  Краєвими ефектами знехтувати.*

Розв'язання. При нормальних умовах довжина вільного пробігу молекул повітря набагато менша ніж відстань  $h$  між дисками (рис. 8). Очевидно, верхній диск повертається внаслідок дії сили тертя, яка виникає між ним і шаром повітря, що рухається внаслідок обертання нижнього диска. Допустимо, що швидкість шару повітря, який прилягає безпосередньо до нижнього диска, дорівнює швидкості самого диска, а градієнт

швидкості по вертикалі – лінійний. Тоді лінійна швидкість циліндричного шару повітря біля нижнього диска становить

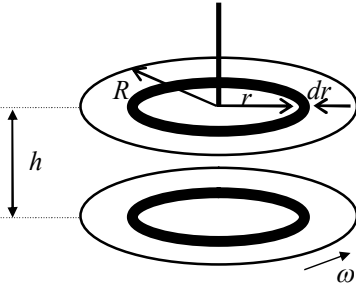


Рис. 8.

$v = \omega r$ , а біля верхнього диску рівнятиметься нулеві. Отже градієнт швидкості повітря між дисками  $\frac{dv}{dx} = \frac{\omega \cdot r}{h}$ . Оскільки

тиск повітря між дисками досить високий, і рух повітря між дисками вважається ламінарним, то для обчислення сили тертя скористаємося рівнянням (4.3).

Розглянемо на верхньому диску кільце радіуса  $r$  і шириною  $dr$ . На нього діятиме сила тертя

$$df = \eta \frac{\omega \cdot r}{h} 2\pi \cdot r \cdot dr,$$

яка створюватиме момент сили

$$dM = r \cdot df = \eta \cdot \frac{\omega}{h} \cdot 2\pi r^3 \cdot dr.$$

Сумарний момент, який прикладений до верхнього диску

$$M = \int_0^R dM = \eta \cdot \frac{\omega}{h} \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = \eta \cdot \frac{\omega\pi}{2h} \cdot R^4.$$

Диск повертатиметься доти, доки момент сил тертя не зрівноважиться моментом сили, що виникає внаслідок пружного кручення нитки підвісу. Отже

$$G = \eta \cdot \frac{\omega\pi}{2h} \cdot R^4.$$

Звідки

$$= \eta \cdot \frac{\omega\pi}{2hG} \cdot R^4.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ та враховуючи, що при

нормальних умовах коефіцієнт в'язкості повітря  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Па·с, одержуємо

$$= \frac{1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с} \cdot 50 \cdot \text{с}^{-1} \cdot 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4}{2 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{рад}^{-1}} = 1,41 \text{ рад.}$$

У випадку розрідженого газу довжина вільного пробігу молекул повітря буде перевищувати відстань між дисками. Дійсно, для молекул повітря, діаметр яких  $3 \cdot 10^{-10}$  м, при тиску  $p = 1,33 \cdot 10^{-2}$  Па і температурі 273 К з формули (3.1) маємо

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\pi d^2 p} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot 273 \text{ К}}{3,14 \cdot 9 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2 \cdot 1,33 \cdot 10^{-2} \text{ Па}} \approx 1 \text{ м.}$$

Тому цю задачу вже не можна розв'язувати ґрунтуючись на рівнянні (4.3).

Розглянемо поведінку кожної молекули, що відбивається від нижнього диску, і оцінимо сумарний ефект впливу всіх відбитих молекул на верхній диск, до якого вони долітають без зіткнень. Для простоти будемо вважати, що всі молекули повітря рухаються з однаковими швидкостями, рівними

середній швидкості молекул  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ , яка при температурі

273К має значення близьке до 450 м/с. На кільце нижнього диску радіусом  $r$  і шириною  $dr$ , згідно формули (3.3), щосекунди

потрапляє  $dN = z_0 dS = \frac{1}{4} n \langle v \rangle 2\pi r \cdot dr$  молекул, кожна з яких, відбиваючись, забирає з собою додатковий момент кількості

руху  $m \cdot v \cdot r = m \cdot \omega \cdot r^2$ , де  $m$  – маса молекули. Отже, всі молекули, що відбилися від кільця долітають до верхнього диска і надають йому елементарного моменту кількості руху

$$dL = m\omega r^2 dN = \frac{1}{4} n \langle v \rangle 2\pi r \cdot dr \cdot m\omega r^2 = \frac{1}{2} n \langle v \rangle \pi \omega m r^3 dr.$$

Враховуючи, що  $n = \frac{p}{kT}$  повний момент кількості руху, який надають верхньому диску відбиті від нижнього диску молекули за одну секунду, рівний

$$L_k = \int_0^R dM = \frac{p \langle v \rangle \pi \omega t R^4}{kT \cdot 8}.$$

Згідно рівняння моментів ( $dL/dt=M$ )  $L_k$  чисельно рівний моменту сил  $M_k$ , які діють на верхній диск. Тому умову рівноваги верхнього диску можна записати у вигляді  $G \cdot \varphi = L_k$ . Звідки кут закручення нитки рівний

$$= \frac{p \langle v \rangle \pi \omega t R^4}{kTG \cdot 8},$$

де  $m$  – маса молекули, яку слід вирахувати по формулі (1.5) прийнявши для повітря  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$\varphi = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ (рад)}.$$

**Задача 4.10.** У колбі об'ємом  $V=12$  л, шийка якої має довжину  $h=5$  см і поперечний діаметр  $d=2$  см, вводять кілька крапель ефіру  $(C_2H_2)_2O$  при  $T=20^\circ C$ . При цьому весь ефір випарувався, утворивши в колбі насичену пару. Скільки часу  $t_1$  необхідно для зменшення концентрації молекул ефіру в колбі на 20% після моменту зняття закупорки? Через який час  $t_2$  в лабораторній кімнаті об'ємом  $V_k=100$  м<sup>3</sup> концентрація ефіру досягне  $\rho_k=0,012$ /м<sup>3</sup>, тобто буде відчутній його запах? Як зміниться час  $t_2$  у випадку, коли в колбу буде налито стільки ефіру, що на її дні знаходиться рідина?



Коефіцієнт дифузії молекул ефіру в повітрі  $D=1,2 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Молярна маса ефіру  $\mu=74$  г/моль.

Розв'язання. Будемо вважати, що конвекційні потоки відсутні, тому молекули ефіру можуть покинути колбу тільки за рахунок дифузії. При кімнатній температурі тиск насиченої пари ефіру становить  $p_0 = 440$  мм рт.ст.  $= 58,7 \cdot 10^3$  Па. Його густина може бути знайдена з рівняння Клапейрона-Менделєєва

$$\rho_0 = \frac{M}{V} = \frac{p_0 \mu}{RT} = \frac{58,7 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot 74 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 293 \text{ К}} = 1,78 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Враховуючи, що концентрація молекул ефіру в колбі завжди набагато більша ніж у лабораторній кімнаті (рис.9), можна вважати, що градієнт концентрації молекул ефіру по довжині шийки колби рівний

$$\frac{d\rho(t)}{dx} = \frac{\rho(t) - 0}{h} = \frac{\rho(t)}{h}.$$

Тоді рівняння Фіка (4.1) може бути записано у вигляді

$$dM = -D \cdot \frac{\rho(t)}{h} \cdot S \cdot dt,$$

де  $dM$  – маса ефіру, яка переноситься через поперечний переріз шийки колби  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  за час  $dt$ . Оскільки  $dM$  – не що інше, як зменшення маси ефіру в колбі, то  $dM = -V \cdot d\rho$ . Тоді

$$V \cdot \frac{d\rho(t)}{dt} = -D \cdot \frac{\rho(t)}{h} \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$

Якщо ввести позначення  $\frac{4Vh}{D \cdot \pi \cdot d^2} = \tau$ , то одержане диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d\rho(t)}{\rho} = -\frac{dt}{\tau}.$$

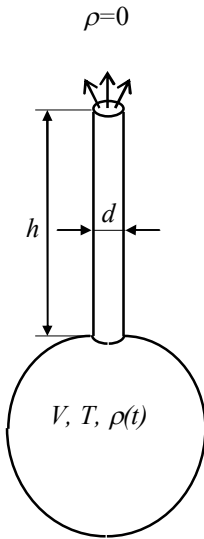


Рис. 9.

Інтегруючи це рівняння, одержуємо

$$\ln \rho = -\frac{t}{\tau} + \ln C,$$

звідки

$$\rho = C \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Сталу інтегрування визначаємо із початкових умов: при  $t=0$  густина ефіру в колбі  $\rho=\rho_0$ . Підставляючи ці дані в останнє рівняння одержуємо, що  $C=\rho_0$ .

Таким чином, залежність густини ефіру в колбі від часу має вигляд

$$\rho = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (4.9)$$

Величина  $\tau = \frac{4Vh}{D\pi d^2}$  має розмірність

часу, її називають *часом релаксації*. Час релаксації є основним параметром нестационарного процесу переносу. Він рівний часу, протягом якого концентрація ефіру в колбі (а в загальному випадку – нерівноважність системи) зменшується в  $e$  раз.

Згідно умови задачі потрібно знайти час  $t_1$  протягом якого концентрація ефіру в колбі зменшиться на 20%, тобто  $\rho_1 = \rho_0 - 0,2\rho_0 = 0,8\rho_0$ , отже

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right).$$

Звідки

$$t_1 = -\frac{4Vh}{D\pi d^2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$t_1 = -\frac{4 \cdot 12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \ln 0,8}{1,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx 3,6 \cdot 10^5 \text{ с} = 100 \text{ год.}$$

Як бачимо, навіть в газах процеси дифузії протікають досить повільно.

Загальна маса ефіру в кімнаті через час  $t_2$ , коли буде відчутній його запах  $M_{\kappa} = V_{\kappa} \cdot \rho_{\kappa}$ . При цьому в колбі концентрація ефіру зменшиться до значення

$$\rho_2 = \frac{M_0 - M_{\kappa}}{V} = \rho_0 - \frac{V_{\kappa}}{V} \rho_{\kappa}.$$

Скориставшись рівнянням (4.9) можемо записати

$$\rho_2 = \rho_0 - \frac{V_{\kappa}}{V} \rho_{\kappa} = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right).$$

Звідки

$$t_2 = -\frac{4Vh}{D\pi d^2} \ln \frac{\rho_2}{\rho_0} = -\frac{4Vh}{D\pi d^2} \ln \left(1 - \frac{V_{\kappa} \rho_{\kappa}}{\rho_0}\right).$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, одержуємо, що в лабораторній кімнаті запах ефіру буде відчутний через  $t_2 \approx 10^6$  с.

Якщо на дно колби буде налито рідкий ефір, то втрата його парів, внаслідок дифузії, буде компенсуватися за рахунок випаровування і в колбі буде знаходитися насичена пара ефіру, доки весь рідкий ефір не випарується з дна колби.

У цьому випадку градієнт концентрації ефіру по довжині шийки колби буде сталим і рівняння Фіка матиме вигляд:

$$dM = -D \cdot \frac{\rho_0}{h} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot dt.$$

Проінтегрувавши ліву і праву частини цього рівняння

$$\int_0^{M'} dM = -D \cdot \frac{\rho_0}{h} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \int_0^{t_2'} dt,$$

одержуємо

$$M' = \frac{D\rho_0\pi d^2}{4h} t_2'$$

Знак мінус тут опущений, оскільки зменшення кількості ефіру в колбі означає його приріст в кімнаті. Врахувавши, що  $M' = V_{\kappa} \cdot \rho_{\kappa}$ , одержуємо:

$$t_2' = \frac{4V_{\kappa} h}{D\pi d^2} \frac{\rho_{\kappa}}{\rho_0}$$

Виконуючи обчислення, маємо  $t_2' \approx 7,4 \cdot 10^4$  с. Тобто запах парів ефіру за цих умов відчуватиметься швидше.

Задача 4.11. Дві колби однакового об'єму  $V$  заповнені однаковим газом і сполучені трубками  $A$  і  $B$  (рис.10). Діаметр трубки  $A$  дуже малий, а трубки  $B$  – дуже великий у порівнянні з довжиною вільного пробігу молекул газу. Колби підтримуються при сталих температурах  $T_1$  і  $T_2$ . Які процеси відбуватимуться, якщо широкую трубку  $B$  перекрити краном  $K_2$ ?

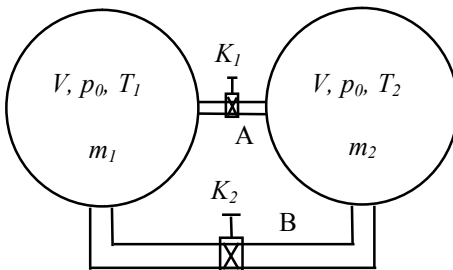


Рис. 10.

Розв'язання.

Якщо широка трубка відкрита, то стан вузької трубки можна не брати до уваги. Рівновага в сполучених колбах буде мати місце при рівних тисках  $p_1$  і  $p_2$ . Отже, при відкритому крані  $K_2$

$$p_1 = p_2 = p_0.$$

Із

рівняння

Клапейрона-Менделеева:  $m_1 = \frac{\mu p_0 V}{RT_1}$ ;  $m_2 = \frac{\mu p_0 V}{RT_2}$ . Кількості молекул у лівій і правій колбах (див. мал. 10) будуть різні і, відповідно, рівні:

$$N_1 = \frac{m_1}{\mu} N_A = \frac{N_A p_0 V}{RT_1}; \quad N_2 = \frac{m_2}{\mu} N_A = \frac{N_A p_0 V}{RT_2},$$

а їх концентрації

$$n_1 = \frac{N_A p_0}{RT_1}; \quad n_2 = \frac{N_A p_0}{RT_2}.$$

Звідки  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}$ . Враховуючи, що загальне число молекул

у колбах  $N_0 = \frac{m_1 + m_2}{\mu} N_A = n_1 V + n_2 V = V(n_1 + n_2)$ , одержуємо

$$n_1 = \frac{N_0}{V} \cdot \frac{T_2}{(T_1 + T_2)}; \quad n_2 = \frac{N_0}{V} \cdot \frac{T_1}{(T_1 + T_2)}.$$

Якщо широко трубку (кран  $K_2$ ) закрити, а вузьку (кран  $K_1$ ) відкрити, то головну роль в процесах перенесення будуть відігравати зіткнення молекул із стінками трубки А, а не між собою.

Щосекунди з лівої колби у праву, згідно формули (3.3), буде переходити  $\Delta N_{12} = \frac{1}{4} C n_1 \langle v_1 \rangle S$  молекул, а із правої у

ліву -  $\Delta N_{21} = \frac{1}{4} C n_2 \langle v_2 \rangle S$ , де -  $\langle v_1 \rangle$ ,  $\langle v_2 \rangle$  середні

арифметичні швидкості молекул (формула 2.7б) у колбах,  $n_1$  і  $n_2$  – їх концентрації,  $S$  – поперечний переріз трубки А,  $C$  – деякий коефіцієнт, який залежить від довжини трубки. Тоді

$$\frac{\Delta N_{12}}{\Delta N_{21}} = \frac{n_1 \langle v_1 \rangle}{n_2 \langle v_2 \rangle} = \frac{T_2 \sqrt{T_1}}{T_1 \sqrt{T_2}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Якщо, наприклад,  $T_2 < T_1$ , то  $\frac{\Delta N_{12}}{\Delta N_{21}} < 1$ , тобто відразу після

закриття крану  $K_2$ , при відкритому крані  $K_1$  газ почне перетікати із “холодної” колби у “гарячу”. Цей процес триватиме доти, доки не встановиться динамічна рівновага: число молекул, які переходять за одиницю часу по трубці А зліва на право стане рівне числу молекул, які переходять за одиницю часу по трубці А з права вліво. Із умови  $\Delta N_{12} = \Delta N_{21}$  випливає, що  $n'_1 < v_1 \rangle = n'_2 < v_2 \rangle$ , де  $n'_1, n'_2$  – концентрації молекул у колбах після встановлення динамічної рівноваги. Тоді  $\frac{n'_1}{n'_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ .

Враховавши, що  $n'_1 V + n'_2 V = N_0$ , знаходимо, що  $n'_1 = \frac{N_0}{V} \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}$ . Отже, коли перекрити широку трубку з “холодної” колби в “гарячу” перейде

$$n'_1 - n_1 = \frac{N_0}{V} \left( \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} - \frac{T_2}{T_1 + T_2} \right) \text{ (молекул)}.$$

**Задача 4.12.** У тонкостінній сферичній посудині об'ємом  $V=1\text{л}$  створено надвисокий вакуум. Внаслідок пошкодження в посудині утворюється отвір площею

$S=1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2$ . Через який проміжок часу  $\tau$  тиск у посудині буде рівний половині атмосферного тиску  $p_0=10^5 \text{ Па}$ ? Вважати, що заповнення посудини газом є квазірівноважним

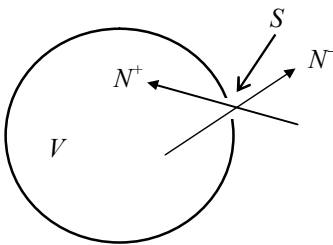


Рис. 11.

проце-сом. Температура газу як в посудині, так і поза нею становить  $T=293$  К. Молярна маса повітря  $\mu=29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Розв'язання. У довільний момент часу скрізь отвір  $S$  (рис. 11) будуть проникати потоки молекул  $N^+$  і  $N^-$ , які не будуть взаємодіяти між собою, оскільки товщина стінки посудини є дуже малою (будемо вважати меншою за довжину вільного пробігу молекул). Згідно формули (3.3)

$$N^+ = \frac{1}{4} n_0 \langle v \rangle S,$$

$$N^- = -\frac{1}{4} n \langle v \rangle S.$$

Отже, за час  $dt$  концентрація молекул у посудині зросте на величину

$$dn = \frac{N^+ + N^-}{V} dt = \frac{1}{4} \frac{\langle v \rangle S}{V} (n_0 - n) dt.$$

Враховуючи зв'язок між концентрацією і тиском одержимо

$$dp = \frac{\langle v \rangle S}{4V} (p_0 - p) dt, \quad \text{або} \quad \frac{dp}{p_0 - p} = \frac{\langle v \rangle S}{4V} \cdot dt.$$

Інтегруючи останнє рівняння одержимо

$$\int_0^{\frac{p_0}{2}} \frac{dp}{p_0 - p} = \frac{\langle v \rangle S}{4V} \int_0^{\tau} dt,$$

$$\ln \frac{p_0}{p_0 - \frac{p_0}{2}} = \frac{\langle v \rangle S}{4V} \cdot \tau$$

Звідки

$$\tau = \frac{4V}{\langle v \rangle S} \ln 2 = \frac{4V}{\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot S} \ln 2.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$\tau = \frac{4 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \ln 2}{1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2} \cdot \sqrt{\frac{3,14 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}}{8 \cdot 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot 293 \text{ К}}} = 598,8 \text{ с} \approx 10 \text{ хв.}$$

#### 4.4. Задачі для аудиторної роботи

4.13. Визначити розподіл температури в просторі між двома концентричними сферами з радіусами  $R_1$  і  $R_2$ , що заповнений газом при великому тиску, якщо температури обох сфер сталі і дорівнюють відповідно  $T_1$  і  $T_2$ .

4.14. При якому тиску газу в посудині об'ємом 1 л довжина вільного пробігу молекул повітря буде порівняна з розмірами посудини. Ефективний діаметр молекул повітря  $3 \cdot 10^{-10}$  м, температура повітря 300 К.

4.15. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул азоту, коефіцієнт дифузії і в'язкість при тиску  $10^5$  Па і температурі  $17^\circ\text{C}$ . Як зміняться знайдені величини при збільшенні об'єму газу вдвічі а) при постійному тиску, б) при постійній температурі? Ефективний діаметр молекул азоту  $3,7 \cdot 10^{-10}$  м.

4.16. Радіус краплинки води, яка знаходиться при температурі  $20^\circ\text{C}$ , за час 25 хв. зменшився від  $r_1 = 1,48$  мм до  $r_2 = 1,31$  мм. Визначити густину парів води на відстані  $2r_1$  та коефіцієнт дифузії молекул води у повітрі. Густина насиченої пари при  $20^\circ\text{C}$  становить  $17,3 \text{ г/м}^3$ .



4.17. Між двома металічними пластинами, температури яких  $20^{\circ}\text{C}$  та  $30^{\circ}\text{C}$ , затиснуті щільно складені пластини із дерева товщиною 3 см та із скла товщиною 2 см. Нехтуючи скачками температури у містах дотику, знайти температуру поверхні дотику дерева і скла. Теплопровідність дерева –  $0,175 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ , скла –  $0,695 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ .

4.18. Вода в ставку має температуру  $0^{\circ}\text{C}$ , а навколишнє повітря  $-10^{\circ}\text{C}$ . Який шар льоду утворюється за одну добу від початку замерзання води? Коефіцієнт теплопровідності льоду  $2,5 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ .

4.19. Тиск повітря між стінками посудини Дьюара сферичної форми при кімнатній температурі становить  $10^{-3}$  мм рт.ст. Площа внутрішньої поверхні посудини  $600 \text{ см}^2$ , відстань між стінками  $0,5 \text{ см}$ . Визначити масу рідкого азоту яка випаровується за 1 годину із цієї посудини, якщо питома теплота випаровування азоту  $2,02 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$ , а температура кипіння  $80 \text{ К}$ .

#### 4.5. Задачі для самостійної роботи

4.20. У скільки разів зміниться маса газу, яка пройшла через площадку  $S$  в процесі стаціонарної дифузії, якщо абсолютна температура зменшилась у 3 рази, а час дифузії збільшився вдвічі?

4.21. Для розрахунку опалювальної системи будинку оцінюють втрату теплоти через  $1 \text{ м}^2$  поверхні стіни за добу. Товщина цегляної стіни  $40 \text{ см}$ , температура стіни ззовні і всередині приміщення відповідно рівні  $18^{\circ}\text{C}$  та  $-20^{\circ}\text{C}$ . Визначити втрати енергії через  $1 \text{ м}^2$ . Коефіцієнт теплопровідності цегли  $0,70 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ .

4.22. В результаті деякого процесу в'язкість деякого газу збільшилася у 2 рази, а коефіцієнт дифузії у 4 рази. Як і у скільки разів зміниться тиск газу?

4.23. Середня довжина вільного пробігу атомів гелію при нормальних умовах  $1,8 \cdot 10^{-7}$  м. Знайти коефіцієнти дифузії, внутрішнього тертя та теплопровідності.

4.24. Простір між двома вертикальними пластинами заповнений гелієм. Відстань між пластинами 50 мм. Одна з пластин підтримується при температурі 290К, друга – при 330К. Тиск газу близький до нормального. Знайти густину потоку тепла між пластинами. Ефективний діаметр атомів гелію становить  $2 \cdot 10^{-10}$  м.

4.25. На висоті 20 см над горизонтальною трансмісійною стрічкою, яка рухається із швидкістю 70 м/с паралельно до неї підвішена пластинка площею  $4 \text{ см}^2$ . Яку силу треба прикласти до цієї пластинки, щоб вона залишалась нерухомою. В'язкість повітря при нормальних умовах  $1,7 \cdot 10^{-5}$  Пас. В умовах досліду температура  $27^\circ\text{C}$ , тиск атмосферний.

4.26. Циліндрична посудина з подвійними стінками наповнена льодом з температурою  $0^\circ\text{C}$ . Температура повітря, що оточує посудину  $20^\circ\text{C}$ . Радіус зовнішньої стінки 5 см, внутрішньої 4 см, висота посудини 20 см. Тиск повітря між стінками до заповнення посудини льодом  $1,3 \cdot 10^{-2}$  Па. За який час в посудині розтопиться 100 г льоду.

4.27. Дві посудини об'ємом 1 л кожна з'єднані трубкою довжиною 10см і поперечним перерізом  $1 \text{ см}^2$ . В одній посудині знаходиться вологе повітря, в іншій сухе. Через який час різниця концентрацій парів води в посудинах зменшиться в  $e$  раз? Коефіцієнт дифузії парів води у повітрі прийняти рівним  $0,23 \text{ см}^2/\text{с}$ .

4.28. Мідний стержень довжиною 25см і діаметром 1,5 см нагрівається з одного кінця і охолоджується проточною водою з другого. Знайти різницю температур між кінцями стержня, якщо проточна вода нагрівається на 3К при її витраті 0,1 кг за хвилину. Втратами тепла через бічну поверхню знехтувати. Коефіцієнт теплопровідності міді  $3,2 \cdot 10^2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ .

4.29. В алюмінієвій посудині кипить вода при температурі  $100^{\circ}\text{C}$ . Визначити різницю температур нижньої і верхньої поверхонь дна посудини, якщо його товщина 2мм, площа  $200\text{см}^2$  і за 5 хвилин з посудини випарилось 0,1 кг води. Втратами тепла через бокову поверхню посудини знехтувати.

4.30. Показати, що для шаруватого матеріалу (матеріалу який містить шари із різною теплопровідністю) коефіцієнт теплопровідності вздовж шарів більший ніж перпендикулярно до них.

4.31. Циліндрична труба, по якій тече перегріта вода з температурою  $120^{\circ}\text{C}$ , оточена теплоізолюючою оболонкою із азбесту. Зовнішня поверхня оболонки має температуру  $50^{\circ}\text{C}$ . Знайти втрати теплоти через оболонку за добу, якщо довжина труби 65 м, зовнішній діаметр теплоізолюючої оболонки 13 см, внутрішній 7 см. Коефіцієнт теплопровідності азбесту  $0,21\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ .

## 5. ПЕРШЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ

### 5.1. Короткі теоретичні відомості

Перше начало термодинаміки є відображенням закону збереження енергії для теплових процесів

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (5.1)$$

де  $\delta Q$  – кількість тепла, передана термодинамічній системі,  $dU$  – зміна внутрішньої енергії системи,  $\delta A$  – робота, яку виконує система над зовнішніми тілами.

Якщо термодинамічною системою є ідеальний газ, то його внутрішня енергія визначається тільки кінетичною енергією руху його молекул. Внутрішня енергія  $U$  одного моля ідеального газу, молекула якого має  $i$  ступенів вільності

$$U = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} R T, \quad (5.2)$$

тобто вона залежить лише від температури газу. В (5.2) добуток сталої Больцмана  $k$  на число Авогадро  $N_A$  позначено через  $R$ . Сталу  $R$  прийнято називати універсальною газовою постійною, а її значення  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .

Елементарна робота  $\delta A$ , яку виконує ідеальний газ обчислюється за формулою

$$\delta A = p dV. \quad (5.3)$$

Молярна теплоємність ідеального газу при сталому об'ємі (тобто коли  $dV=0$ , а значить і  $\delta A=0$ ) рівна

$$c_{v\mu} = \frac{i}{2} R. \quad (5.4)$$

Для внутрішньої енергії одного моля ідеального газу на підставі (5.2) та (5.4) можна записати

$$U = c_{v\mu} T. \quad (5.5)$$

Взаємозв'язок між молярною теплоємністю при постійному об'ємі  $c_{v\mu}$  і постійному тиску  $c_{p\mu}$  визначається рівнянням Майєра

$$c_{p\mu} - c_{v\mu} = R. \quad (5.6)$$

У загальному випадку, коли в термодинамічному процесі беруть участь  $\nu = m/\mu$  молів ідеального газу, перше начало термодинаміки записується у вигляді

$$dQ = \frac{m}{\mu} c_{v\mu} dT + p dV. \quad (5.7)$$

Процес зміни стану ідеального газу, який відбувається із довільною сталою теплоємністю  $c$ , називається політропічним, його рівняння має вигляд

$$pV^n = \text{const}; \quad TV^{n-1} = \text{const}; \quad p^{1-n} T^n = \text{const}, \quad (5.8)$$

де  $n = (c - c_p)/(c - c_v)$  – показник політропи. При  $n=1$  рівняння (5.8) переходить у рівняння ізотерми  $pV = \text{const}$ . Коли відсутній обмін теплом термодинамічної системи із навколишнім середовищем, тобто  $dQ=0$ , а отже  $c=0$ , то  $n = \frac{c_p}{c_v} = \gamma$  і рівняння (5.8)

переходить у рівняння адіабати

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (5.9)$$

Оскільки при адіабатичному процесі  $\delta Q=0$ , то  $-dU = \delta A$ . Це означає, що робота, яка виконується газом над зовнішніми тілами, здійснюється за рахунок зміни внутрішньої енергії газу.

Нижче наведено формули для обчислення питомої теплоємності  $c_p$ , роботи  $A_{12}$ , зміни внутрішньої енергії  $\Delta U_{12}$  та кількості одержаного тепла  $Q_{12}$  при різних процесах переходу ідеального газу із початкового стану 1 в кінцевий стан 2:

а) ізохоричний процес

$$c_p = \frac{m}{\mu} c_{v\mu} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R, \quad (5.10a)$$

$$A_{12} = 0, \quad (5.11a)$$

$$\Delta U_{12} = \frac{m}{\mu} c_{v\mu} (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} V (p_2 - p_1), \quad (5.12a)$$

$$Q_{12} = \frac{m}{\mu} c_{v\mu} (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} V (p_2 - p_1); \quad (5.13a)$$

б) ізобаричний процес

$$c_p = \frac{m}{\mu} c_p = \frac{m}{\mu} (c_{v\mu} + R) = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i+2}{2} R, \quad (5.10б)$$

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = p (V_2 - V_1), \quad (5.11б)$$

$$\Delta U_{12} = \frac{m}{\mu} c_{p\mu} (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} p (V_2 - V_1), \quad (5.12б)$$

$$Q_{12} = \frac{m}{\mu} c_{p\mu} (T_2 - T_1) = \frac{i+2}{i} p (V_2 - V_1); \quad (5.13б)$$

в) ізотермічний процес

$$c_p = \infty, \quad (5.10в)$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{m}{\mu} RT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \\ &= p_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = p_2 V_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right), \end{aligned} \quad (5.11в)$$

$$\Delta U_{12} = 0, \quad (5.12в)$$

$$Q_{12} = \frac{m}{\mu} RT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{m}{\mu} RT \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right); \quad (5.13в)$$

г) адіабатичний процес

$$c_p = 0, \quad (5.10г)$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{(\gamma-1)} \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{(\gamma-1)} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)^{\gamma-1} = \\ &= \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{(\gamma-1)} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma-1} = c_{v\mu} (T_1 - T_2), \end{aligned} \quad (5.11г)$$

$$\Delta U_{12} = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma-1} (T_2 - T_1), \quad (5.12г)$$

$$Q_{12} = 0. \quad (5.13\text{г})$$

Певна кількість ідеального газу може послідовно брати участь у кількох різних процесах. У цьому випадку для обчислення роботи, виконаної газом, і кількості тепла, одержаного газом, необхідно розрахувати ці величини на кожній ділянці переходу із стану 1 у стан 2, а загальну кількість тепла і виконану роботу знайти як алгебраїчну суму на всіх ділянках. Оскільки внутрішня енергія є функція стану системи, то її зміна не залежатиме від термодинамічного шляху і для обчислення  $\Delta U_{12}$  достатньо знати початкові і кінцеві параметри системи.

## 5.2. Якісні задачі

5.1. Порівняйте роботу виконану при ізотермічному ( $A_1$ ) і адіабатичному ( $A_2$ ) розширенні одного моля ідеального газу. Початковий стан і кінцевий об'єми однакові.

5.2. Знайти число ступіней вільності поступального, обертального та коливного руху молекул: He, N<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O, CH<sub>4</sub>. Врахувати, що молекула CO<sub>2</sub> лінійна. Яка молярна теплоємність при постійному об'ємі цих газів при низьких, кімнатній і високих температурах.

5.3. Як пояснити, що  $c_p > c_v$ ?

5.4. Які рівняння, що приведені нижче, описують політропічні процеси: а)  $V = \text{const}$ ; б)  $p = \text{const}$ ; в)  $T = \text{const}$ ; г)  $p = V \cdot a$ ; д)  $p = a \cdot \exp(-\alpha V)$ ; е)  $V = a \cdot p^{-0.7}$ ; ж)  $V \cdot |\cos p| = a$ ? В записаних рівняннях  $a$  – стала величина. Для політропічних процесів визначіть показник політропи.

5.5. Чому при аналізі термодинамічних процесів розглядаються процеси, які протікають безмежно повільно, в той час як реальні процеси мають скінчену швидкість?

5.6. Чому нерівноважні процеси не можна зобразити неперервною лінією на термодинамічній діаграмі?

5.7. Яка різниця між функцією стану і функцією процесу?

5.8. Яким ізопроцесам відповідає значення теплоємності:  
 $c=0$ ;  $c=\infty$ ;  $c=c_v$ ;  $c=c_p$ ?

5.9. Чому значення теплоємностей  $c_p$  і  $c_v$  для багатоатомних газів залежать від температури?

5.10. Зобразить на графіку замкнутий цикл, який складається з ізотерми, ізохори та ізобари. На яких ділянках цього циклу газ отримує теплоту? На яких ділянках робота виконується газом? На якій ділянці внутрішня енергія газу залишається незмінною?

### 5.3. Приклади розв'язування задач

Задача 5.11. Дві теплоізольовані колби об'ємами  $V_1$  і  $V_2$  містять однаковий за хімічним складом газ при тисках  $p_1$  і  $p_2$  і при температурах  $T_1$  і  $T_2$ . Колби сполучені тонкою трубкою із краном (рис. 12). Кран відкривають і гази змішуються. Визначити рівноважні температуру і тиск, які встановляться в колбах.

Розв'язання. Оскільки, система теплоізольована ( $\delta Q=0$ ) і її сумарний об'єм  $V=V_1+V_2$  не змінюється ( $dV=0$ ), то робота системою не виконується, тобто  $dA=pdV=0$ .

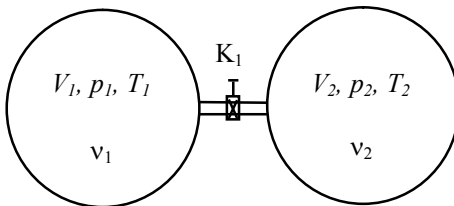


Рис. 12.

З першого начала термодинаміки (5.1) випливає, що загальна внутрішня енергія системи залишається сталою ( $dU=0$ ), проте при змішуванні газів внутрішня енергія може перерозподілитись між частинами системи.



Отже  $U_1+U_2=U=const$ ; де  $U_1=v_1c_{v\mu}T_1$ ;  $U_2=v_2c_{v\mu}T_2$  – внутрішня енергія газів в першій і другій колбах до змішування,  $v_1$  і  $v_2$  – кількість молей газу в колбах. З рівняння стану  $pV=vRT$  знаходимо, що  $v_1 = \frac{p_1V_1}{RT_1}$ ;  $v_2 = \frac{p_2V_2}{RT_2}$ .

Внутрішня енергія газу після змішування  $U=vc_{v\mu}T$ .

Температура газу  $T$  після відкриття крану може бути знайдена з рівняння

$$\frac{p_1V_1}{RT_1}c_{v\mu}T_1 + \frac{p_2V_2}{RT_2}c_{v\mu}T_2 = \left( \frac{p_1V_1}{RT_1} + \frac{p_2V_2}{RT_2} \right) c_{v\mu}T.$$

Звідки

$$T = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2}}.$$

Загальний тиск, що встановиться після відкриття крану

$$p = \frac{vRT}{V} = \frac{v_1 + v_2}{V_1 + V_2} RT = \frac{\left( \frac{p_1V_1}{RT_1} + \frac{p_2V_2}{RT_2} \right) RT}{V_1 + V_2} = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

*Задача 5.12.* Два молі кисню дуже повільно переводяться із стану 1 в стан 2. Яку кількість тепла необхідно підвести до газу, якщо в координатах  $p$ – $V$  процес 1–2 зображується прямою лінією. В стані 1 газ характеризується параметрами  $p_1=1$  атм,  $V_1=24,6$  л,  $T_1=300$  К, а в стані 2 – параметрами:  $p_2=3 p_1$ ,  $V_2=2V_1$ .

Розв'язання. Зобразимо графічно досліджуваний процес в координатах  $p$ – $V$  (рис. 13). Кількість тепла  $Q$ , яке необхідне для переведення газу з першого стану у другий, визначається з першого начала термодинаміки (5.1)  $Q=\Delta U+A$ ,

де  $\Delta U$  – зміна внутрішньої енергії газу,  $A$  – виконана газом робота.

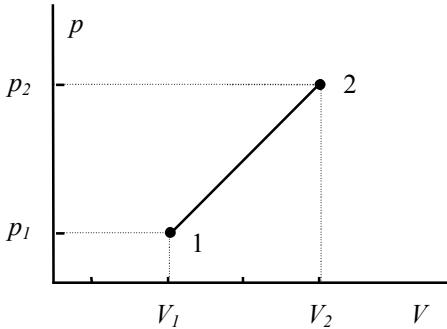


Рис. 13.

Зміна внутрішньої енергії залежить лише від зміни температури  $\Delta T$  і не залежить від характеру переходу із стану 1 у стан 2:

$$\Delta U = \nu c_{v\mu} \Delta T,$$

де  $c_{v\mu} = \frac{i}{2} R$  – молярна теплоємність ідеального газу при сталому тиску (див. 5.4),  $\nu$  – кількість молей газу.

У стані 2 температуру газу легко знайти користуючись рівнянням стану

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Звідки

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = T_1 \frac{3 p_1 2 V_1}{p_1 V_1} = 6 T_1.$$

Кисень ( $O_2$ ) – двоатомний газ і при згаданих у задачі умовах його молекули мають п'ять ступіней вільності, тобто  $i=5$ . Отже зміна внутрішньої енергії газу рівна:

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu \cdot R(6T_1 - T_1) = \frac{25}{2} \nu \cdot R T_1.$$

Робота, здійснювана газом, залежить від того, яким чином здійснюється перехід газу із одного стану в інший. У даній задачі визначити роботу можна двома шляхами.

Площа, обмежена лініями  $V_1-1$ ,  $1-2$  та  $V_2-2$  (див. рис. 13), чисельно рівна виконаній роботі:

$$A = p_1(V_2 - V_1) + \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = 2p_1V_1.$$

*Другий спосіб.* Робота при елементарній зміні об'єму газу  $dA = pdV$ . Згідно умови задачі між об'ємом і тиском існує лінійна залежність  $p = a + bV$ , де  $a$  і  $b$  постійні величини. Тому,  $dA = (a + bV)dV$ . Інтегруючи цей вираз одержимо

$$A = a(V_2 - V_1) + \frac{1}{2}b(V_2^2 - V_1^2).$$

Постійні  $a$  і  $b$  знаходимо із такої системи рівнянь

$$p_1 = a + bV_1$$

$$p_2 = a + bV_2$$

або

$$p_1 = a + bV_1$$

$$3p_1 = a + 2bV_1$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь знаходимо

$$a = -p_1; \quad b = \frac{2p_1}{V_1}.$$

Тому

$$A = 2p_1V_1.$$

Загальна кількість теплоти, яку отримав газ, очевидно, рівнятиметься сумі зміни внутрішньої енергії та виконаної газом роботи:

$$Q = \frac{25}{2} \nu \cdot RT_1 + 2p_1V_1.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$\begin{aligned} Q &= \frac{25}{2} \cdot 2 \cdot 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 300 \text{ К} + 2 \cdot 1 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 24,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = \\ &= 67,2 \text{ кДж}. \end{aligned}$$

**Задача 5.13.** Певна маса азоту при тиску  $p_1 = 1 \cdot 10^4$  Па заповнює об'єм  $5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>, а при тиску  $3 \cdot 10^5$  Па – об'єм  $2 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>. Перехід від першого стану до другого відбувся у два етапи: спочатку по ізохорі, а потім – по ізобарі. Обчислити зміну внутрішньої енергії, роботу, що виконується, та кількість теплоти, одержаної газом.

**Розв'язання.** Розглядуваний процес зображається на  $p$ – $V$  діаграмі (рис. 14) двома відрізками прямих – ізохорою 1–3 та ізобарою 3–2, де 3 – проміжковий стан, який характеризується параметрами  $V_1$ ,  $p_2$ ,  $T_3$ . Оскільки маса азоту

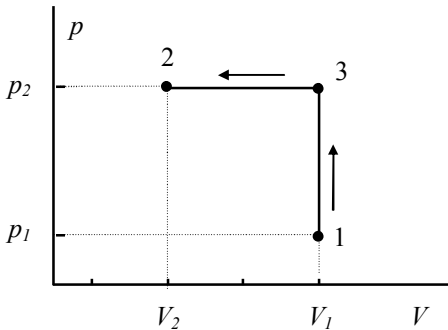


Рис. 14.

залишається сталою, то

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

звідки

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} > 1.$$

Отже, температура газу у результаті переходу 1–3–2 підвищилася.

Зміна внутрішньої енергії

$$U_{21} = \nu c_{v\mu} (T_2 - T_1) = \frac{c_{v\mu}}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Враховуючи, що для азоту  $c_{v\mu} = \frac{5}{2} R$ , знаходимо

$$U_{21} = \frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$U_{21} = \frac{5}{2}(3 \cdot 2 - 0,1 \cdot 5) \cdot 10^2 \text{ Дж} = 1375 \text{ Дж}.$$

Робота газу при виконанні процесу 1–2 рівна роботі при ізобаричному стисненні 3–2, оскільки при ізохоричній зміні стану 1–3 –  $A_{31}=0$ , отже

$$A_{21} = p_2(V_2 - V_1) = 3 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot (2 - 5) \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = -900 \text{ Дж}.$$

Сумарна кількість теплоти

$$Q_{21} = U_{21} + A_{21} = 1375 - 900 = 475 \text{ (Дж)}.$$

Отже, в результаті переходу 1–3–2 азот забирає тепло від зовнішнього середовища.

Задача 5.14. Визначити рівняння процесу, який виконує один моль ідеального газу, якщо у цьому процесі молярна теплоємність змінюється за законом  $c = KT$ , де  $K$  – стала величина.

Розв'язання. Зміна кількості теплоти  $dQ = c \cdot dT = KT \cdot dT$ . Тоді рівняння першого принципу термодинаміки (5.1) буде мати вигляд

$$KTdT = c_{v\mu}dT + p dV.$$

З рівняння стану ідеального газу  $p = RT/V$ . Підставляючи цей вираз у попереднє рівняння і розділяючи змінні  $T$  і  $V$  одержимо

$$(kT - c_{v\mu}) \frac{dT}{T} = R \frac{dV}{V}.$$

Звідси, інтегруючи праву і ліву частини рівняння, маємо

$$KT - c_{v\mu} \ln T = R \ln V + \ln a,$$

де  $\ln a$  – стала інтегрування. Одержане рівняння можна записати у такому вигляді

$$\frac{K}{R} T = \ln a + \ln \left( VT \frac{c_{v\mu}}{R} \right)$$

Потенціюючи останній вираз, одержуємо

$$VT \frac{c_{v\mu}}{R} = a' e^{\frac{K}{R}T},$$

де  $a'$  – константа. Враховуючи, що  $\gamma = \frac{c_{p\mu}}{c_{v\mu}}$  з рівняння (5.6)

можна одержати  $\frac{c_{v\mu}}{R} = \frac{I}{\gamma - 1}$ . Крім того, з рівняння стану

ідеального газу  $T = \frac{pV}{R}$ . Тоді одержане раніше рівняння може

бути приведене до вигляду

$$pV^\gamma e^{-\frac{(\gamma-1)}{R}KT} = \text{const.}$$

**Задача 5.15.** Чому дорівнює теплоємність ідеального газу в процесі, який відбувається при зростанні температури всередині циліндричної посудини, закритої невагомим поршнем (рис. 15) площею  $S$ , до якого прикріплено пружину жорсткості якої  $k$ ? Записати рівняння стану такого газу. Зовнішній тиск  $p_0$  залишається сталим.

**Розв'язання.** Нагріваючись, газ розширюється. При переміщенні поршня від положення рівноваги на відстань  $x$ , тиск газу, що діє на поршень буде рівний

$$p(x) = p_0 + \frac{F}{S} = p_0 + \frac{kx}{S},$$

де  $F=kx$  – пружна сила. Оскільки  $dV=Sdx$ , то мала зміна тиску газу

$$dp = \frac{kdx}{S} = \frac{kdV}{S^2}.$$

Інтегруючи це рівняння знаходимо

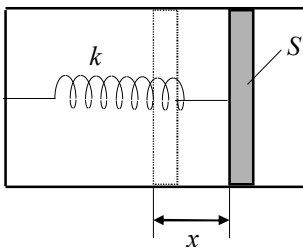


Рис. 15.

$$p = \frac{kV}{S^2} + C.$$

де  $C$  – стала інтегрування, яку знаходимо з початкових умов: при  $x=0$ ;  $V=V_0$ ,  $p=p_0$  тобто

$$p_0 = \frac{kV_0}{S^2} + C.$$

Виключаючи з двох останніх рівнянь сталу  $C$  одержимо

$$\frac{p - p_0}{V - V_0} = \frac{k}{S^2},$$

або

$$\frac{p - p_0}{V - V_0} = \text{const..}$$

Очевидно, це рівняння не може бути зведене до вигляду  $pV^n = \text{const}$ , і, отже, розглядуваний процес розширення газу не є політропічним.

Диференціюючи рівняння стану для одного моля газу  $pV=RT$ , одержимо  $pdV + Vdp = RdT$ . Враховуючи, що для досліджуваного процесу  $dp = \frac{k dV}{S^2}$ , знаходимо що

$$p \cdot dV = \frac{R}{\frac{V}{p} \frac{k}{S^2} + 1} dT.$$

Враховуючи, що згідно першого принципу термодинаміки для одного моля

$$c_\mu = \frac{c_{v\mu} dT + pdV}{dT}.$$

Із двох останніх рівнянь знаходимо, що теплоємність газу

$$c_\mu = c_{v\mu} + \frac{R}{\frac{V}{p} \frac{k}{S^2} + 1}.$$

Як бачимо, під час розглянутого у задачі процесу теплоємність газу залежить від тиску і об'єму, і не є сталою величиною.

Задача 5.16. Тиск і об'єм певної маси кисню політропічно змінюється від значень  $p_1=4,04 \cdot 10^5$  Па і  $V_1=1 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup> до  $p_2=1,01 \cdot 10^5$  Па і  $V_2=2 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>. Початкова температура газу  $T_1=500$  К. Яку кількість тепла одержав кисень від зовнішнього середовища? На скільки змінилась його внутрішня енергія?

Розв'язання. Кількість тепла, яке одержав кисень від зовнішнього середовища  $Q=c(T_2-T_1)$ , де  $T_2$  – температура газу в кінці політропічного процесу. З даних умови задачі можна визначити показник політропи  $n$ . Згідно (5.8)  $p_1V_1^n = p_2V_2^n$ , звідки  $\ln p_1 + n \cdot \ln V_1 = \ln p_2 + n \cdot \ln V_2$ . Тоді

$$n = \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2.$$

Оскільки показник політропи  $n = \frac{c_\mu - c_{p\mu}}{c_\mu - c_{v\mu}}$ , де  $c_\mu$  – молярна теплоємність газу, то розв'язавши рівняння  $2 = \frac{c_\mu - c_{p\mu}}{c_\mu - c_{v\mu}}$  можна знайти молярну теплоємність газу

$$c_\mu = c_{v\mu} - R.$$

Враховуючи, що для кисню  $c_{v\mu} = \frac{5}{2}R$  одержуємо, що

$$c_\mu = \frac{3}{2}R.$$



Тоді кількість теплоти

$$Q = \nu \frac{3R}{2} (T_2 - T_1).$$

Температуру  $T_2$  знаходимо з рівняння стану  $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ ,

звідки  $T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1$ . Число молів газу можна визначити з

рівняння Клапейрона–Менделєєва  $p_1 V_1 = \nu R T_1$ , звідки

$$\nu = \frac{p_1 V_1}{R T_1}. \text{ Тоді}$$

$$Q = \frac{p_1 V_1}{R T_1} \cdot \frac{3}{2} R \cdot \left( \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} - 1 \right) T_1 = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$Q = \frac{3}{2} \cdot (1,01 \cdot 2 - 4,04 \cdot 1) \cdot 10^2 \text{ Дж} = -303 \text{ Дж}.$$

Отже газ віддає тепло у зовнішнє середовище.

Зміна внутрішньої енергії газу

$$\Delta U = \nu c_{\nu} (T_2 - T_1) = \frac{p_1 V_1}{R T_1} \cdot \frac{5}{2} R \cdot \left( \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} - 1 \right) T_1 = \frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, маємо

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot (1,01 \cdot 2 - 4,04 \cdot 1) \cdot 10^2 \text{ Дж} = -505 \text{ Дж}.$$

#### 5.4. Задачі для аудиторної роботи

5.17. Двохатомному газу надано 2100 Дж теплоти. При цьому газ розширювався при постійному тиску. Знайти роботу розширення газу.

5.18. Обчислите відношення  $\gamma = C_p/C_v$  для суміші 3 молей аргону і 5 молей кисню.

5.19. Посудина, що містить деяку кількість азоту при температурі  $15^\circ\text{C}$ , рухається із швидкістю  $v = 100$  м/с. Яка буде температура газу в посудині, якщо вона раптово зупиниться? Передачею теплоти стінкам можна нехтувати.

5.20. При деякому політропічному процесі гелій був стиснутий від початкового об'єму 4 л до кінцевого 1 л. Тиск при цьому змінився від 1 до 8 атм. Знайти теплоємність цієї маси газу, якщо його початкова температура була 300 К.

5.21. Нагрівається чи охолоджується ідеальний газ, якщо він розширюється по закону  $pV^2 = \text{const}$ . Яка його молярна теплоємність при цьому?

5.22. В кімнаті об'ємом  $90 \text{ м}^3$  повітря змінюлося повністю через 2 год. Яка кількість теплоти потрібна для обігріву повітря в кімнаті за добу, якщо температура повітря в кімнаті повинна бути  $18^\circ\text{C}$ , а зовнішнє повітря має температуру  $-5^\circ\text{C}$ ? Прийняти, що середня густина повітря рівна  $1,25 \text{ кг/м}^3$ .

5.23. У циліндрі дизельного двигуна відбувається швидке згорання горючої суміші. Яка температура  $t_2$  і який тиск  $p_2$  встановляться після згорання, якщо об'єм камери згорання  $V = 10$  л, тиск газової суміші перед згоранням  $p_1 = 5 \cdot 10^5$  Па, температуру  $t_1 = 210^\circ\text{C}$ , маса гасу в суміші  $m_0 = 0,9$  г, питома теплоємність продуктів згорання  $c_v = 0,71$  кДж/(кг·К), середня молярна маса горючої суміші  $M = 29,4$  г/моль, теплота згорання гасу  $q = 4,2 \cdot 10^4$  Дж/г?

Вказівка. Розраховувати нагрівання при згоранні як, ізохоричний процес, нехтуючи зміною об'єму за час згорання.

5.24. Деяку маси двоатомного газу ( $\gamma = 1,4$ ) стискають один раз ізотермічно, інший раз адіабатно. Початкові температура і тиск газу, що стискається, в обох випадках однакові. Кінцевий тиск в  $n$  раз більше початкового. Знайдіть відношення роботи стиснення при адіабатному процесі до

роботи стиснення при ізотермічному процесі. Розгляньте випадки: а)  $n = 2$ ; б)  $n = 100$ .

5.25. Знайти рівняння процесу, в якому молярна теплоємність ідеального газу змінюється по закону  $C = C_V + \alpha T$ , де  $\alpha$  – деяка стала величина.

5.26. Один моль ідеального газу здійснює процес при якому а)  $T = T_0 e^{\alpha V}$ , б)  $T = T_0 + \alpha V$  ( $\alpha$  – деяка стала величина). Знайти теплоємність газу в таких процесах.

#### 5.4. Задачі для самостійної роботи

5.27. Приймаючи відношення молярних теплоємностей для двоатомних газів рівним 1,4, обчисліть питомі теплоємності кисню та азоту.

5.28. Балон об'ємом  $V = 10$  л з киснем при тиску  $p_1 = 78,4 \cdot 10^5$  Па і температурі  $7^\circ\text{C}$  нагрівається до  $15,5^\circ\text{C}$ . Яка кількість теплоти при цьому одержана газом?

5.29. Кисень об'ємом 1 л знаходиться під тиском 1 МПа. Визначити, яку кількість тепла необхідно надати газу для того, щоб а) збільшити його об'єм вдвічі в результаті ізобарного процесу; б) збільшити його тиск вдвічі в результаті ізохорного процесу.

5.30. Робота розширення деякого двоатомного ідеального газу складає 2 кДж. Визначити кількість підведеного до газу тепла, якщо процес а) – ізотермічний, б) – ізобарний

5.31. Турбогенератор потужністю 3000 кВт охолоджується проточним повітрям. Які об'єми повітря повинні поступати в генератор і виходити з нього протягом 1 с, якщо коефіцієнт корисної дії генератора рівний 94%, температура повітря, що виходить з генератора, не повинна перевищувати  $50^\circ\text{C}$ , температура повітря, що поступає,  $20^\circ\text{C}$ , тиск повітря 750 мм рт.ст.

5.32. Деяка маса азоту при тиску 1 атм. мала об'єм 5 л, а при тиску 3 атм. – об'єм 2 л. Перехід від першого стану до

другого був зроблений в два етапи: спочатку ізохорний, потім ізобарний. а) Визначте зміну внутрішньої енергії, кількість теплоти і проведену газом роботу. б) Проведіть ті ж розрахунки у випадку іншого порядку етапів: спочатку ізобарний, потім ізохорний. Чому результати розрахунків теплоти і роботи у випадках а) і б) різні

5.33. В чотирьохтактному дизельному двигуні атмосферне повітря, яке надходить у циліндри об'ємом 10 л піддається 12-разовому стисненню. Допускаючи, що процес стиснення є адіабатним, визначити кінцевий тиск, кінцеву температуру і роботу стиснення, якщо початкові тиск і температура рівні 1 атм, і  $10^{\circ}\text{C}$ .

5.34. Компресор повинен давати  $50 \text{ м}^3$  стиснутого до 8 атм. повітря за годину. Компресор охолоджується, так що процес стиснення можна вважати ізотермічним. Якої потужності мотор потрібний для компресора, якщо ККД 60%?

5.35. Горюча суміш в дизельному двигуні загоряється при температурі  $800^{\circ}\text{C}$ . Початкова температура суміші  $70^{\circ}\text{C}$ , у скільки разів треба зменшити об'єм суміші для того, щоб вона загорілась. Стиснення вважати адіабатичним,  $\gamma = 1,4$ .

5.36. Знайти рівняння процесу, в якому молярна теплоємність ідеального газу змінюється по закону а)  $C = C_v + \alpha V$ , б)  $C = C_v + \kappa V$ , в)  $C = \beta/T$ ; де  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\beta$  – деякі сталі величини.

5.37. Один моль ідеального газу здійснює процес при якому а)  $p = p_0 e^{\alpha V}$ , б)  $p = p_0 + \alpha/V$  ( $\alpha$  – деяка стала величина). Знайти теплоємність газу в таких процесах.

## 6. ЕНТРОПІЯ. ДРУГЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ. КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ ЦИКЛІВ

### 6.1. Короткі теоретичні відомості

Макроскопічний стан термодинамічної системи може реалізуватись через ряд мікроскопічних станів, загальне число яких  $\Gamma \gg 1$  дістало назву термодинамічної імовірності. В статистичному підході ентропія  $S$  системи визначається термодинамічною імовірністю і обчислюється по формулі Больцмана

$$S = k \ln \Gamma . \quad (6.1)$$

Наприклад, для системи що складається з  $n$  однакових комірок, в яких знаходиться  $m$  однакових частинок

$$\Gamma = n! / [m!(n-m)!].$$

Згідно термодинамічного підходу приріст ентропії

$$dS = \frac{\delta Q}{T} , \quad (6.2)$$

є повним диференціалом, а отже сама ентропія  $S$  – функція стану системи, тобто визначається тільки об'ємом, тиском і температурою системи.

Якщо ентропію в будь-якому стані 1 позначити  $S_1$ , а в стані 2 –  $S_2$ , то її зміна  $S_{12} = S_2 - S_1$  у результаті оборотного переходу з одного стану в інший становитиме

$$S_{12} = \frac{Q_{12}}{T} , \quad (6.3)$$

причому при переході із стану 1 у стан 2 кількома процесами повна зміна ентропії тіла дорівнює алгебраїчній сумі змін ентропій в кожному процесі

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 . \quad (6.4)$$

Визначення ентропії (6.1) і (6.2) є еквівалентними. Розглянемо, як обчислюється зміна ентропії в окремих процесах.

- а) Зміна ентропії в ідеальних газах при:  
ізохоричному процесі

$$\Delta S = c_{\rho v} m \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{i}{2} R m \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = c_{\rho v} m \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right); \quad (6.5)$$

ізобаричному процесі

$$\Delta S = c_{\rho p} m \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{i+2}{i} R m \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = c_{\rho p} m \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right); \quad (6.6)$$

ізотермічному процесі

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{p_1 V_1}{T} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right); \quad (6.7)$$

політропічному процесі

$$\Delta S = c_{\rho} \cdot m \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right), \quad (6.8)$$

де  $c_{\rho v}$  – питома теплоємність при постійному об'ємі;  $c_{\rho p}$  – питома теплоємність при постійному тиску;  $c_{\rho n} = \frac{n-\gamma}{n-1}$  – питома теплоємність при політропічному процесі,  $n$  і  $\gamma$  – показники політропи і адіабати, відповідно;  $m$  – маса газу.

б) Зміна ентропії внаслідок нагрівання, або охолодження твердого тіла, або рідини в межах температур  $T_1$  і  $T_2$

$$\Delta S_{12} = c_{\rho} m \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right), \quad (6.9)$$

де  $c_{\rho}$  – питома теплоємність речовини;  $m$  – маса речовини.

в) Зміна ентропії внаслідок зміни агрегатного, або іншого фазового перетворення

$$\Delta S_{12} = \frac{L_{\rho} m}{T_k}, \quad (6.10)$$

де  $L_{\rho}$  – схована теплота,  $T_k$  – температура фазового перетворення,  $m$  – маса речовини.

г) У довільному адіабатичному процесі теплообмін системи з навколишнім середовищем відсутній, тому ентропія залишається незмінною, тобто  $S_2=S_1$ ,  $\Delta S=0$ .

Абсолютна температура системи  $T$  зв'язана із термодинамічною ймовірністю  $\Gamma$  співвідношенням

$$\frac{1}{kT} = \frac{\partial \ln \Gamma}{\partial E}, \quad (6.11)$$

де  $k$  – постійна Больцмана,  $\Gamma$  – число доступних станів системи в малому інтервалі енергій від  $E$  до  $E + dE$ .

Якщо в результаті змін термодинамічна система повертається у вихідний стан, то говорять, що вона здійснила круговий процес або цикл. В результаті проходження циклу на різних його ділянках робоче середовище отримує від нагрівника певну кількість теплоти  $Q_1 = \sum Q_i$ , і віддає холодильнику певну кількість теплоти  $Q_2 = \sum Q_k$ , тут  $Q_i$  і  $Q_k$  – кількості тепла одержаного (відданого) на різних ділянках циклу. Оскільки, після завершення циклу, внутрішня енергія залишається незмінною, то із першого началу термодинаміки випливає, що

$$Q_1 - Q_2 = A, \quad (6.12)$$

тобто певна кількість теплоти перетворюється в роботу, яку робоче середовище виконує над зовнішніми тілами.

Коефіцієнт корисної дії (к.к.д.) циклу в загальному випадку визначається, як

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\sum Q_i - \sum Q_k}{\sum Q_i}. \quad (6.13)$$

В окремому випадку циклу Карно, який складається із двох ізотерм і двох адіабат

$$\eta = \eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.14)$$

де  $T_1$  і  $T_2$  – абсолютні температури відповідно нагрівника і холодильника.

Згідно другого начала термодинаміки не може існувати такий термодинамічний цикл, єдиним результатом якого було б повне перетворення всієї теплоти, здобутої від якого-небудь джерела (нагрівника), в роботу. Певна частина теплоти обов'язково віддається холодильнику. З точки зору визначення к.к.д. циклу це означає, що завжди  $Q_2 \neq 0$ , а отже  $\eta < 1$ .

Згідно із статистичним трактуванням другого начала термодинаміки всі необоротні процеси в ізольованій системі проходять так, що система наближається до свого найбільш імовірного стану. При цьому зміна ентропії системи  $\Delta S \geq 0$ , тобто вона прямує до свого максимального значення. Отже друге начало термодинаміки визначає напрям природних процесів: при переході системи із стану 1 з ентропією  $S_1$  в стан 2 з ентропією  $S_2$ , ентропія завжди збільшується, або залишається незмінною.

## 6.2. Якісні задачі

6.1. Які межі застосування першого та другого начал термодинаміки?

6.2. Поясніть таке твердження: “Ентропія є міра неупорядкованості системи”.

6.3. В координатах  $T$ – $S$  намалюйте графіки ізопроцесів та циклу Карно.

6.4. Приведіть приклади незворотних процесів у природі.

6.5. Які чинники зменшують к.к.д. теплового двигуна по відношенню до його максимального значення?

6.6. Чи можна охолодити повітря в кухні, якщо залишити відкритими дверці холодильника?

6.7. Щоб найбільш ефективно збільшити к.к.д. теплового двигуна, який працює по циклу Карно, Ви будете збільшувати температуру нагрівника  $T_n$  не змінюючи температуру холодильника  $T_x$ , чи навпаки?

6.8. Запишіть і поясніть формули для коефіцієнту корисної дії ідеальної холодильної машини.



6.9. Поясніть, чому в останні роки в автомобілебудуванні перевага надається дизельним двигунам?

6.10. Що є нагрівником і холодильником у ракетному двигуні?

### 6.1. Приклади розв'язування задач

Задача 6.11. Визначити зміну ентропії 1 г водню в такому процесі: спочатку газ ізобарично стискується до об'єму, що у два рази менший ніж початковий, а потім ізотермічно розширюється до початкового об'єму.

Розв'язання. Розглядуваний процес є оборотним і зображений в координатах  $p$ – $V$  на рис. 16, де 1–2 – ізобара, 2–3 – ізотерма. При ізобаричному стисненні згідно (6.6)

$$\Delta S_{21} = \frac{i+2}{2} R \frac{m}{\mu} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

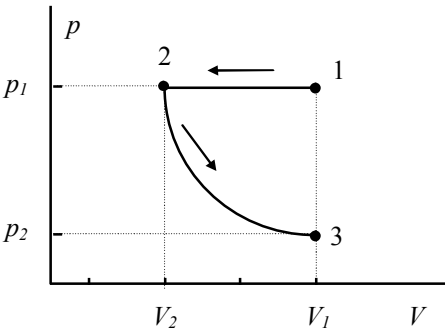


Рис. 16.

Оскільки при ізобаричному процесі  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ , то

$$\Delta S_{21} = \frac{i+2}{2} R \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad \text{При}$$

ізотермічному розширенні газу, згідно (6.7)

$$\Delta S_{32} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Загальна зміна ентропії

$$\Delta S_{31} = \Delta S_{21} + \Delta S_{32} = -\frac{i}{2} R \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та врахувавши, що за нормальних умов молекула водню двоатомна ( $i=5$ ), маємо

$$\Delta S_{31} = -\frac{5}{2} \cdot 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}} \cdot \ln 2 = -7,2 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Розв'язати задачу можна і іншим шляхом. Врахуємо, що ентропія є функцією стану системи, тобто визначається параметрами  $p$ ,  $V$ ,  $T$  системи. Дійсно, використовуючи означення ентропії (6.2) та перше начало термодинаміки одержимо

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{\mu} c_{v\mu} \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV.$$

Врахувавши, що  $\frac{p}{T} = \frac{m R}{\mu V}$  зміну ентропії можна записати у вигляді

$$dS = \frac{m}{\mu} c_{v\mu} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V}.$$

Інтегруючи, одержуємо

$$S = \frac{m}{\mu} (c_{v\mu} \ln T + R \ln V) + C,$$

де  $C$  – константа інтегрування. Зміна ентропії при оборотному переході з стану 1 в стан 3 при  $V = \text{const}$  рівна

$$\Delta S_{31} = S_3 - S_1 = \frac{m}{\mu} c_{v\mu} \ln \frac{T_3}{T_1}.$$

Оскільки  $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3}$  і враховуючи, що  $p_1 = p_2$ ,

$V_2 = 0,5 \cdot V_1$ ,  $V_3 = V_1$ ,  $T_2 = T_3$  одержимо  $\frac{T_3}{T_1} = 0,5$ . Отже

$$\Delta S_{31} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \ln 0,5 = -7,2 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

**Задача 6.12.** Обчислити зміну ентропії  $\Delta S$  для 0,1 кг льоду при перетворенні його в пару, якщо початкова температура льоду  $T_0 = 233 \text{ К}$ , а температура пари

$T_1=373$  К. Питома теплоємність льоду  $c_1=2,1 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К), теплота плавлення льоду  $\lambda=32 \cdot 10^4$  Дж/кг, теплоємність води  $c_2=4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К), теплота пароутворення води  $q=22,6 \cdot 10^6$  Дж/кг. Вважати, що теплоємності льоду і води є сталими, а процес відбувається при атмосферному тиску.

Розв'язання. Перетворення льоду в пару реалізується шляхом виконання декількох процесів: процес 1 – нагрівання льоду від температури  $T_0$  до температури плавлення  $T_{пл.}$ ; процес 2 – плавлення льоду при  $T_{пл.}$ ; процес 3 – нагрівання води, що утворилася до температури кипіння  $T_{к.}$ ; процес 4 – випаровування води при  $T_{к.}$ ; процес 5 – нагрівання пари від  $T_{к.}$  до  $T_1$ . Згідно умови задачі процес відбувається при атмосферному тиску, при цьому для льоду  $T_{пл.}=273$  К,  $T_{к.}=373$  К, отже останній етап (нагрівання пари) відсутній.

Кожному процесу відповідає зміна параметрів стану системи і при умові оборотності зміна ентропії становитиме:

– для процесу 1 згідно (6.9) 
$$\Delta S_1 = c_1 m \ln \left( \frac{T_{пл.}}{T_0} \right);$$

– для процесу 2 згідно (6.10) 
$$\Delta S_2 = \frac{\lambda \cdot m}{T_{пл.}};$$

– для процесу 3 
$$\Delta S_3 = c_2 m \ln \left( \frac{T_{к.}}{T_{пл.}} \right);$$

– для процесу 4 
$$\Delta S_4 = \frac{q \cdot m}{T_{к.}}.$$

Повна зміна ентропії  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 =$   

$$= m \left[ c_1 \ln \left( \frac{T_{пл.}}{T_0} \right) + \frac{\lambda}{T_{пл.}} + c_2 \ln \left( \frac{T_{к.}}{T_{пл.}} \right) + \frac{q}{T_{к.}} \right].$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин та виконуючи обчислення, маємо

$$\Delta S = 0,1 \text{ кг} \cdot \left( 2,1 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot \ln \frac{273 \text{ К}}{233 \text{ К}} + \frac{32 \cdot 10^4 \text{ Дж} / \text{кг}}{273 \text{ К}} \right) +$$

$$4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot \ln \frac{373 \text{ К}}{273 \text{ К}} + 0,1 \text{ кг} \left( \frac{22,6 \cdot 10^6 \text{ Дж} / \text{кг}}{373 \text{ К}} \right) = 6,34 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Задача 6.13. У термостаті з дуже малою теплоємністю перемішується 0.1кг води при температурі  $T_0=293 \text{ К}$  з такою ж самою кількістю води при температурі кипіння  $T_k=373 \text{ К}$  Чому дорівнює загальна зміна ентропії води?

Розв'язання. Процес перемішування відбувається в термостаті, тому система теплоізолювана і процес перемішування адіабатичний. Однак такий процес є необоротним, бо завжди будь-яка передача тепла від нагрітого тіла до холодного є необоротною. Отже, ентропія системи збільшиться, тобто загальна зміна ентропії повинна бути додатною.

Після змішування температуру води в термостаті  $T$  можна визначити із рівняння теплового балансу

$$cm_1(T-T_0)=cm_2(T_k-T).$$

оскільки по умові задачі  $m_1=m_2=m$ , то  $T = \frac{T_k + T_0}{2}$ .

Зміна ентропії холодної води, враховуючи що її температура зростає від  $T_0$  до  $T$ , рівна:  $\Delta S_1 = m \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_0}$ .

Зміна ентропії гарячої води:  $\Delta S_2 = m \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_k}$ .

Загальна зміна ентропії:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m \cdot c \left( \ln \frac{T}{T_0} + \ln \frac{T}{T_K} \right) = m \cdot c \cdot \ln \frac{T^2}{T_0 T_K} = m \cdot c \cdot \ln \frac{(T_K + T_0)^2}{4 T_0 T_K}.$$

Оскільки вираз  $\frac{(\alpha + \beta)^2}{4 \cdot \alpha \cdot \beta} \geq 1$  для любых  $\alpha$  і  $\beta$  (в загальному  $\alpha \cdot \beta > 0$ ), то, очевидно, що завжди в процесі змішування  $\Delta S \geq 0$ .

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, маємо

$$\Delta S = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0,1 \text{ кг} \cdot \ln \frac{(293 \text{ К} + 373 \text{ К})^2}{4 \cdot 293 \text{ К} \cdot 373 \text{ К}} = 6,1 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Задача 6.14. Коефіцієнт корисної дії автомобіля  $\eta_1 = 50\%$ , коли його двигун охолоджується водою температура якої  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ . При цьому автомобіль споживає 10 л бензину на 100 км шляху. Скільки бензину споживатиме автомобіль на 100 км шляху, якщо температуру охолоджуючої води понизити до  $T = 75^\circ\text{C}$ ? Оцінки зробити для двигуна, що працює по циклу ідеальної теплової машини.

Розв'язання. Температуру згорання палива  $T_2$  в обох випадках будемо вважати однаковою. Її значення можна вирахувати із формули (6.14) для коефіцієнту корисної дії ідеальної теплової машини  $\eta_1 = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ , звідки

$$T_2 = T_1 \frac{1}{1 - \eta_1} = T_1 \cdot 2 = 746 \text{ (К)}..$$

$$\text{У другому випадку } \eta_2 = 1 - \frac{T}{T_2} = 1 - \frac{348}{746} = 0,53 = 53\%.$$

Якщо вважати, що витрата бензину на одиницю шляху залежить лише від коефіцієнту корисної дії  $\eta$ , то витрата

бензину на 100 км шляху при зменшенні температури холодильника становить  $\frac{0,5}{0,53} \cdot 10 \text{ л} = 9,4 \text{ л}$ .

**Задача 6.15.** Знайти коефіцієнт корисної дії циклу, який складається з адиабати, ізотерми та ізобари. Довести на прикладі цього циклу, що вся теплота, яка поглинається ідеальним газом перетворюється у зовнішню роботу, а зміна внутрішньої енергії і ентропії, в результаті здійснення циклу, рівна нулеві. Початкові параметри газу та температуру ізотерми вважати відомими.

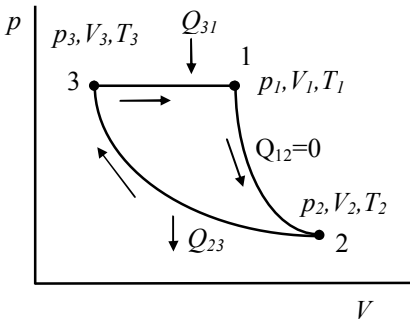


Рис. 17.

### Розв'язання

Описаний в умові задачі цикл в координатах  $p$ – $V$  зображено на рис. 17. Виберемо напрям обходу циклу за годинниковою стрілкою. Позначимо параметри ідеального газу в станах 1, 2, 3 відповідно через  $p_i$ ,  $V_i$ ,  $T_i$ , де  $i=1, 2, 3$ . Вздовж адиабатичного процесу

1–2 всі три параметри газу змінюються. Вздовж ізотерми 2–3 температура стала, тому  $T_2=T_3$ , а на ділянці 3–1 циклу  $p=const$ , отже  $p_3=p_1$ . При адиабатичному розширенні ( $V_2>V_1$ ) газ охолоджується, тому  $T_1>T_2$ . Обчислимо одержану (віддану) газом кількість теплоти на кожній ділянці циклу. На адиабаті 1–2  $Q_{12}=0$ . При ізотермічному стискуванні 2–3 згідно (5.13)

$Q_{23} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} < 0$ , оскільки  $V_3 < V_2$ , тобто газ віддає тепло.

При ізобаричному розширенні 3–1 згідно (5.136)  $Q_{31} = c_{p\mu}(T_1 - T_2) > 0$ , оскільки  $T_1 > T_2$ , тобто газ поглинає тепло.

Отже в результаті циклу газ дістане кількість тепла

$$Q_n = Q^+ + Q^- = Q_{31} + Q_{23} = c_{p\mu}(T_1 - T_2) + RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} =$$

$$c_{p\mu}(T_1 - T_2) - RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Затрачена кількість теплоти  $Q_3 = Q^- = Q_{23}$ , тоді згідно (6.13)

$$\eta = \frac{Q_n}{Q_3} = \frac{Q_{31} + Q_{23}}{Q_{23}} = 1 - \frac{RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}{c_{p\mu}(T_1 - T_2)}.$$

Оскільки для адіабати  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ , тобто  $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ , то

$$\eta = 1 - \frac{RT_2 \ln \frac{T_1}{T_2}}{(\gamma - 1)c_{p\mu}(T_1 - T_2)}.$$

Обчислимо сумарну роботу, що виконує газ у результаті циклу. Вона рівна алгебраїчній сумі робіт, яку виконує газ на окремих ділянках циклу. Робота при адіабатичному розширенні газу додатна згідно (5.11г)

$$A_{12} = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = c_{v\mu}(T_1 - T_2).$$

Робота ізотермічного стискування 2–3 від’ємна і згідно (5.11в)

$$A_{23} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = -RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3}.$$

Ізобарично розширюючись на ділянці 3–1 газ виконує також додатну роботу, яка згідно (5.11б) становить

$$A_{31} = R(T_1 - T_2).$$

Отже сумарна робота циклу

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} =$$

$$= c_{v\mu}(T_1 - T_2) - RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} + R(T_1 - T_2) = c_p(T_1 - T_2) - RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3},$$

що співпадає з  $Q_n$ .

Цілком аналогічно для зміни внутрішньої енергії одержуємо:

$$\text{на ділянці 1-2} \quad U_{12} = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}R(T_2 - T_1);$$

$$\text{на ділянці 2-3} \quad T_2 = \text{const}, \text{ отже } U_{23} = 0;$$

$$\text{на ділянці 3-1} \quad U_{31} = \frac{i}{2}p(V_1 - V_3) = \frac{i}{2}R(T_1 - T_2).$$

Очевидно, що загальна зміна внутрішньої енергії газу

$$\Delta U = U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0.$$

Для розрахунку зміни ентропії скористаємося формулами (6.6–6.8):

$$\text{на ділянці 1-2} \quad \Delta S_{12} = 0;$$

$$\text{на ділянці 2-3} \quad \Delta S_{23} = R \ln \frac{V_3}{V_2}.$$

$$\text{Врахуємо, що } \frac{p_1 V_3}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \quad \text{звідки} \quad V_3 = \frac{T_2}{T_1} V_1. \quad 3$$

$$\text{рівняння адиабати} \quad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \text{ або } T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \text{ звідки}$$



$$V_2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1. \quad \text{Отже}$$

$$S_{23} = R \ln \frac{V_3}{V_2} = R \ln \frac{\frac{T_2}{T_1} V_1}{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1} = R \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1+\frac{1}{\gamma-1}} = R \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma-1+1}{\gamma-1}} =$$

$$= R \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} = R \frac{\frac{i+2}{i}}{\frac{i+2}{i}-1} \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{i+2}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

На ділянці 3-1  $S_{31} = \frac{i+2}{2} R \ln \frac{T_1}{T_2}.$

Отже  $\Delta S = S_{12} + S_{23} + S_{31} = 0.$

Задача 6.16. *Невелика теплоізолювана посудина розділена на дві рівні частини теплопроникною перегородкою. У кожній частині знаходиться вуглекислий газ в кількості  $10^{-8}$  моль. Температура газу в одній частині судини  $28^\circ\text{C}$ , у другій частині  $27^\circ\text{C}$ . Нехтуючи теплоємністю посудини, визначити, в скільки разів зростає ймовірність стану системи при вирівнюванні температур. Визначити зміну ймовірності під час переходу такої ж кількості теплоти від менш нагрітої частини газу до більш нагрітої. Вважати, що газ ідеальний.*

Р о з в' я з а н н я. Згідно співвідношення Больцмана, ентропія прямо пропорційна натуральному логарифму термодинамічної ймовірності  $\Gamma$  даного стану системи, тому її зміна:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln(\Gamma_2/\Gamma_1), \quad \text{звідки} \quad \Gamma_2/\Gamma_1 = e^{(\Delta S/k)}$$

де  $k$  – постійна Больцмана;  $\Gamma$  – термодинамічна ймовірність стану, тобто число, пропорційне кількості тих фізично різних мікростанів системи, якими може бути реалізований даний макростан.

Температура кожної частини газу змінюється в результаті переходу теплоти від однієї частини газу до іншої, тому та кількість теплоти, що віддається одним газом, рівна кількості теплоти, що одержується іншим газом. (Теплоємністю посудини можна нехтувати.) Оскільки в обох частинах посудини знаходиться однорідний газ однакової маси, то зміна температури по модулю буде також однаковою. Якщо в результаті теплообміну температура газу в першій частині посудини зменшиться, так що  $T = T_1 - \Delta T$ , то в другій частині температура збільшиться і  $T = T_2 + \Delta T$ , звідки  $T = (T_1 + T_2)/2$ .

Для того, щоб знайти зміну ентропії, слід розглянути квазістатичний процес, який може перевести систему з початкового стану в кінцевий. Оскільки об'єм газу, що знаходиться в кожній частині посудини, залишається сталим, таким процесом може бути квазістатичне ізохорне нагрівання однієї частини газу та квазістатичне ізохорне охолодження іншої частини. Якщо температура газу, що знаходиться в першій частині посудини, змінюється від  $T_2$  до  $T$ , а в другій частині – від  $T_2$  до  $T$ , то

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^T \frac{\delta Q}{T} + \int_{T_2}^T \frac{\delta Q}{T}$$

Тут  $Q = \nu c_{\nu\mu} dT$ , де  $\nu = m/\mu$  – число молей,  $c_{\nu} = iR/2$  – молярна теплоємність при постійному об'ємі (для вуглекислого газу  $i = 6$ ).

Проводячи інтегрування з урахуванням того, що  $T = T_1 - \Delta T$   
 $= T_2 + \Delta T$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_v \left[ \ln \left( 1 - \frac{\Delta T}{T_1} \right) + \ln \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_2} \right) \right]$$

Оскільки  $\Delta T \ll T_1$  і  $\Delta T \ll T_2$ , натуральні логарифми можна розкласти в степеневий ряд і обмежитися тільки його першими членами. Тоді

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T \left[ \left( -\frac{1}{T_1} \right) + \left( \frac{1}{T_2} \right) \right],$$

де  $m C_v \Delta T / \mu = Q_{12}$  – кількість теплоти, віддана однією частиною газу і одержана другою. Отже, останній вираз може бути використаний для розрахунку зміни ентропії не тільки при вирівнюванні температур, але і при будь-якому теплообміні між газами, що знаходяться в різних частинах посудини. В цьому випадку можуть змінюватися  $Q_{12}$  і знак перед дужкою.

У випадку вирівнювання температур  $\Delta T = 0,5^\circ\text{C}$ , а кількість теплоти  $Q_{12} = 1,25 \cdot 10^{-7}$  Дж. Тоді  $\Delta S = 1,38 \cdot 10^{-12}$  Дж/К. Тоді

$$\Gamma_2/\Gamma_1 = \exp 10^{11} \approx (20600)^{11},$$

тобто, стан з однаковою температурою газів надзвичайно більш ймовірний ніж початковий.

Зміна ентропії під час переходу такої ж кількості теплоти від газу менш нагрітого до газу більш нагрітого  $-1,38 \cdot 10^{-12}$  Дж/К і відповідно

$$\Gamma_2/\Gamma_1 = 1/\exp 10^{11} \approx 10^{-48},$$

тобто такий процес має нехтовно малу ймовірність.

Вважаючи, що термодинамічна ймовірність рівна або прямо пропорційна числу випадків, коли даний стан має місце, отриманий результат можна інтерпретувати так: описана в завданні система мимоволі переходить в стан, при якому температури газів будуть рівні практично завжди; перехід теплоти від менш нагрітого газу до більш нагрітого неможливий.

Проте якщо кількість теплоти на багато порядків менша,

наприклад  $Q_{12} = 1,25 \cdot 10^{-17}$  Дж, то в цьому випадку зміна ентропії при передачі теплоти від більш нагрітого газу до менш нагрітого  $\Delta S = 1,38 \cdot 10^{-22}$  Дж/К і  $\Gamma_2/\Gamma_1 = e^{10} \approx 20000$ . Зміна ентропії під час переходу такої ж кількості теплоти від менш нагрітого газу до більш нагрітого  $\Delta S = -1,38 \cdot 10^{-22}$  Дж/К і  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 1/e^{10} \approx 1/20000$ . Це означає, що вже в одному випадку з 20000 можливий процес переходу теплоти від менш нагрітого газу до більш нагрітого, тобто ймовірність такого процесу різко підвищується.

Очевидно, для того, щоб передача такої кількості теплоти (близько  $10^{-17}$  Дж) могла хоч скільки-небудь змінити температуру газу, кількість газу повинна бути різко зменшена. Так, для зміни температури на 0,01К число молей газу повинно складати  $10^{-15} - 10^{-16}$ , що відповідає загальній кількості молекул  $N \sim 10^8 - 10^7$ . Для макроскопічних об'ємів, що містять таку кількість молекул, вже можна говорити про реальну ймовірність процесу, що йде всупереч термодинамічної інтерпретації другого начала термодинаміки.

#### 6.4. Задачі для аудиторної роботи

6.17. Цикл Карно здійснюється в інтервалі температур  $T_1 = 600$  К і  $T_2 = 200$ К. Тиск в кінці ізотермічного розширення і на початку адіабатичного стиснення однакові і рівні  $2 \cdot 10^6$  Па. Робочим тілом є повітря. Визначити і корисну роботу одним кілограмом повітря за цикл.

6.18. Температура нагрівача в 3 рази вища за температуру холодильника. Яку частину енергії, одержаної в циклі Карно від нагрівача, газ віддає холодильнику?

6.19. При здійсненні циклу Карно газ одержав від нагрівача 16,77 кДж енергії і виконав 5,59 кДж роботи. У скільки разів температура нагрівача вища, температури холодильника?

6.20. Робоче тіло – ідеальний газ – теплового двигуна здійснює цикл, який складається із послідовності ізобарного, адіабатного та ізотермічного процесів. При ізобарному нагріванні температура газу підвищується від 300К до 600К. Побудувати графік циклу і визначити його ККД.

6.21. В деякій температурній області ентропія термодинамічної системи веде себе по закону  $S = a + b T$ , де  $a$  – деяка константа,  $b = 5 \text{ Дж/К}^2$ . Яку кількість теплоти одержує система при оборотному нагріванні в цій області від 290 К до 310 К?

6.22. Холодильна машина, що працює за циклом Карно підтримує в камері температуру 260 К. За кожен цикл машина відводить з холодильної камери 40 кДж і передає цю енергію навколишньому середовищу, що має температуру 300 К. Визначити потужність, споживану холодильною машиною, якщо тривалість циклу 1,5 с.

6.23. Цикл двигуна Дизеля складається із ізобари, ізохори і двох адіабат. Визначити ккд, якщо відомо, що коефіцієнт адіабатичного стиснення  $n = V_4/V_1$ , а коефіцієнт ізобаричного розширення  $k = V_2/V_1$ .

6.24. Дві посудини, об'єми яких 1,6 л і 3,4 л, містять відповідно, 14 г окислу вуглецю і 16 г кисню. Температури газів однакові. Посудини сполучають, і гази перемішуються. Визначити приріст ентропії при цьому процесі.

6.25. У політропному процесі ентропія одного кілограма азоту збільшилася на 140 Дж/К; при цьому температура газу змінилася від 20°C до 120°C. Визначити показник політропи.

6.26. Визначте, яку максимальну роботу можуть виконати продукти згорання на повітрі 10 кг палива. Теплота згорання палива  $25 \cdot 10^3 \text{ кДж} \cdot \text{кг}^{-1}$ . Температура продуктів згорання 1500°C. Температура повітря 20°C.

6.27. Визначте зміну ентропії при ізотермічному стисненні  $7 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$  азоту на  $10^{-6}$  частину початкового об'єму газу.

6.28. Скориставшись визначенням абсолютної температури, знайти процентне збільшення числа станів, доступних такій системі, при зростанні її енергії на  $10^{-3}$  еВ при кімнатній температурі (293К).

### 6.5. Задачі для самостійної роботи

6.29. Порівняйте коефіцієнти корисної дії двох циклів Карно. У першому циклі до робочого тіла теплота підводиться при температурі 500 К і відводиться при температурі 300 К, а в другому теплота підводиться при температурі 400 К і відводиться при температурі 200 К.

6.30. Коефіцієнт корисної дії циклу Карно  $\eta = 0,3$ . При ізотермічному розширенні газ одержав від нагрівача 200 Дж енергії. Визначте роботу, що здійснюється при ізотермічному стисненні.

6.31. Домашній холодильник споживає з електричної мережі 200 Вт. Температура навколишнього середовища (повітря в кімнаті) 293 К. Визначити температуру в камері холодильника, якщо кількість відведеного тепла в 5 разів перевищує кількість витраченої енергії. Холодильник працює за циклом Карно.

6.32. Температура пару, який надходить із котла в теплову машину  $210^{\circ}\text{C}$ . Конденсація пари відбувається при температурі  $40^{\circ}\text{C}$ . Яку максимальну роботу можна одержати, якщо для отримання пари затрачено 1 кДж теплоти?

6.33. Яку максимальну кількість теплоти можна відвести від холодильної камери за допомогою холодильної машини виконуючи роботу 1 кДж, якщо температура в холодильній камері –  $10^{\circ}\text{C}$ , а температура води, яка використовується для відведення теплоти від холодильної машини  $11^{\circ}\text{C}$ ?

6.34. Ідеальний двоатомний газ, який займає об'єм 2л адіабатно розширюють в результаті чого його об'єм зростає у 5 разів. Після цього газ ізобарно стискають до початкового

об'єму, а потім в результаті ізохорного нагрівання повертають в початковий стан. Побудувати графік циклу і визначити його ККД.

6.35. Ідеальний двоатомний газ в кількості 3 моля, який займає об'єм 5 л і знаходиться під тиском 1 МПа ізохорно нагрівають до 500К. Після цього газ ізохорно розширюється до початкового тиску, а потім в результаті ізобарного стискування повертається у початковий стан. Побудувати графік циклу і визначити його ККД.

6.36. Цикл двигуна Отто складається із двох ізохор і двох адіабат. Визначити ккд циклу, якщо відомо, що коефіцієнт стиснення робочого тіла  $n = V_2/V_1$ .

6.37. Гумовий шнур, жорсткість якого  $3 \cdot 10^3$  Н/м, під дією вантажу видовжився на 20 см. Вважаючи процес розтягування шнура ізотермічним і таким, що відбувається при температурі  $27^\circ\text{C}$ , визначити зміну ентропії. (0,2 Дж/К)

6.38. Знайти зміну ентропії 1 кг повітря, якщо його тиск збільшився від  $2 \cdot 10^5$  Па до  $10^6$  Па, а температура знизилася від  $327^\circ\text{C}$  до  $127^\circ\text{C}$ .

6.37. У процесі політропічного розширення повітря до нього було підведено 90 кДж тепла, та все ж його температура знизилася від  $25^\circ\text{C}$  до  $-37^\circ\text{C}$ . Маса повітря 4 кг, початковий тиск повітря  $4 \cdot 10^5$  Па. Визначити зміну ентропії в цьому процесі.

6.38. Яку роботу можна одержати від стиснутого повітря при його розширенні? Повітря знаходиться в балоні, і його тиск  $p_0 = 150 \cdot 10^5$  Па. Об'єм балона  $0,04$  м<sup>3</sup>. Температура повітря в балоні 300 К. параметри навколишнього середовища: тиск –  $10^5$  Па, температура 300 К, об'єм безмежний (атмосфера). Повітря вважати ідеальним газом.

6.39. Яку максимальну роботу можуть виконати продукти згорання на повітрі 1 кг палива? Теплота згорання палива  $20000$  кДж·кг<sup>-1</sup>. Температура продуктів згорання палива  $1300^\circ\text{C}$ . Параметри навколишнього середовища (повітря): тиск –  $10^5$

Па, температура – 293 К. теплоємність продуктів згорання вважати постійними.

6.40. Визначити зміну ентропії при ізотермічному стисненні 1 молю кисню від об'єму  $V_0$  до об'єму  $V_0/3$ .

6.41. Макроскопічна система поглинає  $10^{-20}$  Дж енергії. При цьому число доступних станів системи збільшується на 10%. Яка була початкова температура цієї системи?

6.42. 2 молі ідеального газу спочатку ізобарно нагріли так, що об'єм газу збільшився у два рази, а потім ізохорно охолодили, так що тиск зменшився у два рази. Визначити приріст ентропії в ході цих процесів.

6.43. Азот масою 28 г адіабатно розширили у 2 рази, а потім ізобарно стиснули до початкового об'єму. Визначити зміну ентропії газу в ході цих процесів.

6.44. Знайти зміну ентропії при конденсації 1 кг пари при температурі  $100^\circ\text{C}$  у воду з наступним охолодженням води до  $20^\circ\text{C}$ . Теплоємність води вважати сталою величиною. Конденсація відбувається при атмосферному тиску.

6.45. В обмеженій області температур приріст ентропії деякої речовини пропорційна приросту температури  $\Delta S = \alpha T$ . Як залежить теплоємність цієї речовини в цій же області температур?

6.46. Теплоємність кристалічних твердих тіл в області низьких температур підкоряється закону  $C = \alpha T^3$ . Визначити ентропію тіла в цих же умовах.



## 7. РЕАЛЬНІ ГАЗИ. РІДИНИ

### 7.1. Короткі теоретичні відомості

На відміну від ідеального газу в реальному газі не можна знехтувати власними розмірами молекул газу та силами взаємодії між ними. Врахування цих двох факторів приводить до нових рівнянь стану відмінних від рівняння стану ідеального газу, зокрема, рівняння Ван-дер-Ваальса, яке має вигляд

$$\left( p + \frac{m^2 a}{\mu^2 V^2} \right) \cdot \left( V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT, \quad (7.1)$$

де  $a$  і  $b$  – поправки Ван-дер-Ваальса. Поправку  $a/V^2$  – називають внутрішнім тиском, який існує за рахунок сил притягання між молекулами, поправка  $b$  пропорційна сумарному власному об'єму молекул.

Рівняння (7.1) є рівняння 3-го порядку відносно  $V$  і, при заданих  $p$  і  $T$ , має в загальному випадку три корені. Значення тиску і температури, при яких всі три корені рівняння рівні  $V_k$ , називаються критичним тиском  $p_k$  і критичною температурою  $T_k$ , а відповідне значення об'єму  $V_k$  – критичним об'ємом. Ізотерму, яка проходить через точку з координатами  $V_k$ ,  $p_k$  і  $T_k$  називають критичною. Вона відокремлює область температур, вище яких ні за яких умов газ не можна перевести в рідину. Розглядаючи рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу можна одержати

$$T_k = \frac{8a}{27bR}; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad V_{k\mu} = 3b, \quad (7.2)$$

де  $V_{k\mu}$  – критичний молярний об'єм. Для довільної маси критичний об'єм  $V_k = V_{k\mu} m/\mu$ . Газ, який знаходиться при температурі нижче критичної називають парою. При ізотермічному стисненні густина і тиск пари будуть зростати доти, доки пара не стане насиченою. При дальшому зменшенні

об'єму пара почне конденсуватись, перетворюючись у рідину. При цьому густина і тиск несконденсованої пари залишаються постійними (рівними густині і тиску насиченої пари при даній температурі). Значення цих величин беруться з таблиць або обчислюють за формулою

$$\ln p = -\frac{L}{RT} + C, \quad (7.3)$$

де  $L$  – прихована молярна теплота пароутворення,  $C$  – константа, характерна для даної рідини.

Внутрішня енергія реального газу Ван-дер-Ваальса, на відміну від ідеального, залежить від об'єму, який займає газ. Для  $\nu = m/\mu$  молів

$$U = \frac{m}{\mu} c_{\nu\mu} - \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V}. \quad (7.4)$$

Залежність внутрішньої енергії реального газу від об'єму приводить до того, що адіабатичне розширення газу в пустоту супроводжується зміною його температури. Це явище дістало назву ефекту Джоуля-Томсона, який характеризується диференціальним коефіцієнтом

$$\left(\frac{dT}{dP}\right)_H = \frac{1}{c_{p\mu}} \left[ T \left(\frac{dV}{dT}\right)_p - V \right], \quad (7.5)$$

де "H" і "p" вказують, що похідні беруться відповідно при постійній ентальпії  $H = U + pV = const$ , і тиску  $p$ . Коефіцієнт  $(dT/dp)_H$  – залежить від температури. Значення температури при якій  $(dT/dp)_H = 0$  тобто міняє знак називається температурою інверсії –  $T_{inv}$ . Для газу Ван-дер-Ваальса

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_H = \frac{1}{c_{p\mu}} \left( \frac{2a}{RT} - b \right), \quad (7.6)$$

а зміна температури  $\Delta T$  при дроселюванні газу в об'єм з незначним тиском

$$\Delta T = \frac{l}{c_p} \left( RT \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right), \quad (7.7)$$

де  $T_1$ ,  $V_1$  – початкова температура і початковий об'єм газу. Температура інверсії  $T_{інв}$  визначається умовою  $\Delta T=0$  і рівна

$$T_{інв} = \frac{2a}{Rb} \left( 1 - \frac{b}{V_1} \right). \quad (7.8)$$

Зауважимо, що для ідеального газу ( $dV/dT_p=R/p=V/T$  і значить,  $(dP/dT)_H=0$ , тобто ефект Джоуля-Томсона відсутній.

Із рівняння Ван-дер-Ваальса випливає ще один висновок: при температурі меншій критичної шляхом збільшення тиску газоподібну (пароподібну) речовину можна перевести в рідкий стан, характерною особливістю якого є наявність поверхні, що обмежує її об'єм.

Нескомпенсоване притягання, яке діє з боку молекул внутрішнього об'єму рідин на молекули поверхневого шару приводить до поверхневого натягу, який намагається зменшити вільну поверхню рідини. Щоб утримати розтягнену плівку рідини в рівновазі потрібно прикласти силу  $F$ , дотичну до поверхні, причому

$$F = \sigma \cdot l, \quad (7.9)$$

де  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу;  $l$  – довжина периметра плівки, вздовж якого діє сила  $F$ . З термодинамічної точки зору коефіцієнт поверхневого натягу чисельно рівний роботі  $A$ , яку треба затратити, щоб збільшити площу поверхні рідини на одиницю

$$\sigma = \frac{dA}{dS} = \frac{dE_{нов.}}{dS}, \quad (7.10)$$

де  $E_{нов.}$  – вільна енергія поверхні.

Якщо поверхня рідини не плоска, то наявність сил поверхневого натягу приводить до виникнення додаткового тиску зі сторони поверхневого шару, на нижче розміщені шари

рідини. В загальному випадку цей тиск визначається формулою Лапласа

$$p_L = \sigma \cdot \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (7.11)$$

де  $r_1$  і  $r_2$  – два головні радіуси кривизни поверхні. Тиск  $p_L$  додатний, якщо поверхня рідини випукла, і від'ємний, якщо поверхня рідини увігнута.

Пружність (тиск) насиченої пари над увігнутою поверхнею рідини менша ( над опуклою – більша) ніж над плоскою на величину

$$\Delta p_L = \frac{2\sigma}{r} \cdot \frac{\rho_n}{\rho_p}, \quad (7.11a)$$

де  $\rho_n$  і  $\rho_p$  – густини насиченої пари і рідини при даній температурі відповідно.

Висота підняття рідини в капілярі

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g h} \cdot \cos \alpha, \quad (7.12)$$

де  $\alpha$  – кут між дотичною до поверхні рідини і стінкою капіляра. Кут  $\alpha$  називають крайовим кутом змочування. При змочуванні  $\alpha < \pi/2$  і центр кривизни увігнутої поверхні розташований над поверхнею рідини; при  $\alpha > \pi/2$  має місце незмочування і центр випуклої поверхні рідини розміщений під поверхнею рідини.

## 7.2. Якісні задачі

7.1. Який фізичний зміст мають постійні  $a$  і  $b$  у рівнянні Ван-дер-Ваальса (формула 7.1)?

7.2. В координатах  $p$ – $V$  намалюйте ізотерми для речовини, температура якої: менша критичної, рівна критичній та вища критичної.

7.3. При критичній температурі питома теплота пароутворення дорівнює нулю. Чому?

7.4. Газ перетворюється у рідину, якщо його стиснути і понизити температуру. Чому при розширенні газу в пустоту він також може перетворитись у рідину?

7.5. Чим пояснити, що в процесі дроселювання при кімнатній температурі водень нагрівається, а кисень – охолоджується?

7.6. Часто підкреслюють, що при критичній температурі густина рідини дорівнює густині насиченої пари. Чи означає це, що за цих умов густина пари води дорівнює  $1000 \text{ кг/м}^3$ ?

7.7. Чому гострі краї скла при нагріванні до температури розм'якшення стають заокругленими?

7.8. Покажіть, що при злитті малих капель рідини з площею поверхні  $S_0$  кожна в одну велику краплину з площею поверхні  $S$ , повинна виділитися енергія. У якому вигляді?

7.9. У двох капілярах вода знаходиться на різній висоті. Чи зміниться різниця висот, якщо температуру рідини підвищити?

7.10. Чому нижній отвір піпетки повинен бути малим? Чому важко налити рідину у флакончик з вузькою горловиною?

7.11. Чи може поверхневий натяг зменшитись до нуля?

7.12. Як поводитиме себе рідина у капілярі, встановленому у ліфті, який прискорено рухається по вертикалі?

### 7.3. Приклади розв'язування задач

Задача 7.13. У балоні об'ємом  $V=0,4 \text{ л}$  міститься  $\nu=2,72$  моля якогось газу. При температурі  $T_1=300 \text{ К}$  тиск газу становить  $p_1=1,65 \cdot 10^7 \text{ Па}$ , а при  $T_2=200 \text{ К}$  тиск газу –  $p_2=0,819 \cdot 10^7 \text{ Па}$ . Показати, що за даних умов газ не є ідеальним. Обчислити поправки Ван-дер-Ваальса для цього газу.

Розв'язання. Оскільки об'єм та маса газу не змінюються, то у випадку ідеального газу мав би виконуватись

закон Гей-Люсака  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ . З приведених числових даних:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{1,65 \cdot 10^7 \text{ Па}}{300 \text{ К}} = 0,55 \cdot 10^5 \text{ Па / К};$$

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{0,819 \cdot 10^7 \text{ Па}}{200 \text{ К}} = 0,41 \cdot 10^5 \text{ Па / К}.$$

Очевидно, що  $\frac{p_1}{T_1} \neq \frac{p_2}{T_2}$ . Отже, газ не може розглядатись як ідеальний.

Для першого стану згідно (7.1) маємо

$$\left( p_1 + v^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - vb) = \nu RT_1,$$

а для другого

$$\left( p_2 + v^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - vb) = \nu RT_2.$$

Виключаючи з цих рівнянь множник  $(V - vb)$  маємо

$$\left( p_1 + v^2 \frac{a}{V^2} \right) \cdot T_2 = \left( p_2 + v^2 \frac{a}{V^2} \right) \cdot T_1.$$

Звідки

$$a = \frac{(p_2 T_1 - p_1 T_2) V^2}{T_2 - T_1} \cdot \frac{1}{v^2}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$a = \frac{(0,819 \cdot 300 - 1,65 \cdot 200) \cdot 10^7 \text{ Па} \cdot \text{К}}{(200 - 300) \text{ К}} \cdot \frac{16 \cdot 10^{-8} \text{ м}^6}{7,4 \text{ моль}^2} = 0,18 \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2}.$$

Знаючи величину  $a$ , підставимо її у рівняння Ван-дер-Ваальса і знайдемо поправку  $b$  :  $\frac{V}{v} - b = \frac{RT_1}{\left(p_1 + v^2 \frac{a}{V^2}\right)}$ , звідки

$$b = \frac{V}{v} - \frac{RT_1}{\left(p_1 + v^2 \frac{a}{V^2}\right)}.$$

Підставляємо в останню формулу числові значення величин:

$$b = \frac{4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3}{2,72 \text{ моль}} - \frac{8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 300 \text{ К}}{(1,65 \cdot 10^7 + 0,83 \cdot 10^7) \text{ Па}} = 4,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Задача 7.14. Знайти рівняння політропи та обчислити молярні теплоємності і зміну ентропії 1 моля газу Ван-дер-Ваальса.

Розв'язання. Згідно з означенням політропічного процесу, його теплоємність  $C$  є сталою величиною (не залежною від температури). При нагріванні газу він одержує кількість теплоти  $dQ = CdT$ . Врахуємо, що згідно першого начала термодинаміки  $dQ = dU + dA = dU + pdV$ . Внутрішня енергія

реального газу  $U_\mu = \frac{m}{\mu} c_{v\mu} T - \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V}$ , звідки для одного моля

$$dU = c_{v\mu} T + \frac{a}{V^2} dV;$$

Тоді

$$dQ = c_\mu dT = c_{v\mu} dT + \frac{a}{V^2} dV + pdV = c_{v\mu} dT + \left(p + \frac{a}{V^2}\right) dV.$$

З рівняння Ван-дер-Ваальса  $\left(p + \frac{a}{V^2}\right) = \frac{RT}{V - b}$ , отже

$$c_{\mu} dT = c_{\nu\mu} dT + \frac{RT}{V-b} dV,$$

звідки

$$(c_{\mu} - c_{\nu\mu}) \frac{dT}{T} = \frac{R}{V-b} dV.$$

Інтегруючи останнє рівняння одержимо

$$T \left( \frac{c_{\mu} - c_{\nu\mu}}{R} \right) (V-b)^{-1} = \text{const}, \quad \text{або}$$

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V-b)^{\frac{c_{\mu} - (c_{\nu\mu} + R)}{c_{\mu} - c_{\nu\mu}}} = \text{const}.$$

Це і є рівняння політропічного процесу газу Ван-дер-Ваальса.

При сталому об'ємі ( $V = \text{const}$ ) все тепло, яке передається газу йде на зміну його внутрішньої енергії, тобто

$$c'_{\nu\mu} = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{d}{dT} (U_{\mu})_V = \frac{d}{dT} \left( c_{\nu\mu} T - \frac{a}{V} \right)_V = c_{\nu\mu}.$$

Отже, при постійному об'ємі теплоємності газу Ван-дер-Ваальса  $c'_{\nu\mu}$  та ідеального газу  $c_{\nu\mu}$  співпадають.

У випадку ізобаричного процесу

$$c'_{p\mu} = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p = \left( \frac{dU + pdV}{dT} \right)_p = c_{\nu\mu} + \left( \frac{a}{V^2} + p \right) \frac{dV}{dT} = c_{\nu\mu} + \left( \frac{RT}{V-b} \right) \frac{dV}{dT}.$$

З рівняння Ван-дер-Ваальса, при  $p = \text{const}$

$$dV = \frac{R}{p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}} dT.$$

Отже, остаточно

$$c'_{p\mu} = c_{\nu\mu} + \frac{R^2 T}{\left( p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3} \right) (V-b)}.$$



На відміну від ідеального газу для газу Ван-дер-Ваальса теплоємність при постійному тиску залежить від параметрів стану системи.

Для обчислення зміни ентропії згадаємо, що

$$\Delta S_{21} = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Вище було показано, що

$$dQ = c_{v\mu} dT + \frac{RT}{V-b} dV.$$

Отже

$$\Delta S_{21} = \int c_{v\mu} \frac{dT}{T} + \int \frac{R}{V-b} dV = c_{v\mu} \ln T + R \cdot \ln(V-b) + const.$$

Задача 7.15. Дві колби об'ємами  $V_1$  і  $V_2$  з'єднані трубою з краном. У кожній колбі знаходиться по одному молу реального газу при температурі  $T_0$ . Як зміниться температура газу у колбах після відкриття крану? Процес змішування газу вважати адіабатичним.

Розв'язання. Оскільки загальний об'єм газів не змінюється ( $dV=0$ ) і змішування проходить в адіабатичних умовах ( $dQ=0$ ), то з першого принципу термодинаміки випливає, що сумарна внутрішня енергія газу також залишиться незмінною ( $dU=0$ ). Тобто  $U_1+U_2=U=const$ . З формули (7.4)

внутрішня енергія газів до змішування  $U_1 = v_1 c_{v\mu} T_0 - v_1^2 \frac{a}{V_1}$  і

$U_2 = v_2 c_{v\mu} T_0 - v_2^2 \frac{a}{V_2}$ . Після змішування газів їх об'єм  $V=V_1+V_2$ ,

рівноважна температура  $T$ , тому

$$U = (v_1 + v_2) c_{v\mu} T - \frac{(v_1 + v_2)^2 a}{V_1 + V_2}.$$

Врахувавши, що  $v_1=v_2=1$  знаходимо

$$T_0 - T = \frac{a}{2c_{\text{вм}}} \frac{(V_1 - V_2)^2}{(V_1 + V_2)V_1V_2}.$$

Отже, внаслідок змішування температура реального газу зменшується. Якби газ був ідеальним ( $a=0$ ), його б температура не змінилась .

Задача 7.16. На поліровану скляну пластинку капнули 0,01 г води і зверху накрили тонкою скляною пластинкою. Вода розтекла між пластинками утворивши круг радіусом  $R=3,0$  см не доходячи до країв пластинок. З якою силою потрібно розтягувати обидві пластинки, щоб їх роз'єднати. Вважати, що вода повністю змочує скло. Коефіцієнт поверхневого натягу води  $\sigma = 0,073$  Н/м.

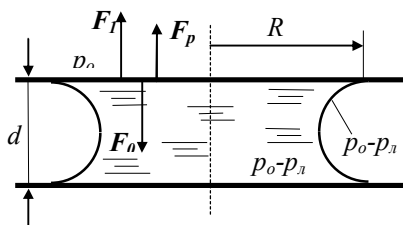


Рис. 18.

#### Розв'язання.

Вияснимо, чому виникає сила притягування між пластинками. Вільна поверхня води між пластинками, внаслідок повного змочування, утворює увігнутий меніск, (рис. 18). Тиск в рідині, що міститься між пластинками,

менший атмосферного  $p_0$  на величину  $p_L$ , що визначається формулою (7.11). Під впливом надлишкового зовнішнього тиску пластинки скла будуть зближуватись, вода буде розтікатись між ними все тоншим шаром. Цей процес припиниться тоді, коли рідина досягне країв пластинок, або коли подальше зближення пластинок стане неможливим внаслідок того, що вони почнуть дотикатися одна одної в деяких точках із-за нерівностей їх поверхні. Очевидно, останній випадок має місце у розглядуваній задачі.

В стані рівноваги на кожну із пластинок діють сили: сила тиску атмосфери  $F_0 = p_o \cdot S$ ; сила тиску рідини  $F_p = (p_o - p_L)S$ ; сила  $F_1$ , яку потрібно прикласти до пластинки, щоб утримувати її в рівновазі.  $S = \pi \cdot R^2$  – площа круга по якому розтеклась вода. Умова рівноваги сил, які діють на пластинку

$$\vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_p = 0.$$

Звідки знаходимо значення сили  $F_1$ , з якою потрібно розтягувати пластинки, щоб їх роз'єднати:  $F_1 = F_0 - F_p = p_o \cdot S - (p_o - p_L) \cdot S = p_L \cdot S = p_L \cdot \pi R^2$ .

Для визначення тиску  $p_L$  розглянемо два взаємно перпендикулярні перерізи поверхні рідини. Один з них зображений на малюнку, площина іншого перерізу паралельна до пластин і знаходиться посередині між ними. Очевидно, що радіус кривизни  $r_1$  першого перерізу рівний половині відстані  $d$  між пластинами, радіус кривизни  $r_2$  другого перерізу є радіус круга  $R$ . Оскільки при цьому  $r_1 \ll r_2$ , то у формулі (7.11) величиною  $1/r_2$  можна знехтувати. Тоді наближено можна вважати, що

$$p_L = \frac{\sigma}{r_1} = \frac{2\sigma}{d},$$

де  $d$  – відстань між пластинками.

Для знаходження  $d$ , врахуємо, що об'єм рідини  $V = m/\rho$  (де  $m$  – маса,  $\rho$  – густина) при розтіканні між пластинками не змінюється, тоді  $V = S \cdot d = m/\rho$  звідки

$$d = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho \cdot \pi R^2}.$$

Сила притягування між пластинками

$$F_1 = p_L S = \frac{2\pi^2 R^4 \sigma \rho}{m}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$F_1 = \frac{2 \cdot 3,14^2 \cdot 81 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \cdot 73 \cdot 10^{-3} \text{ Н / м} \cdot 1000 \text{ кг / м}^3}{1 \cdot 10^{-5} \text{ кг}} = 116 \text{ Н}.$$

**Задача 7.17.** *Конічний капіляр, який звужується зверху опускають на нехтовно малу глибину у змочуючу рідину. У нижній частині капіляр має внутрішній радіус  $r_0$ , а кут при вершині  $2\alpha$ . Визначити висоту підняття рідини у капілярі. Зробіть аналіз розв'язку задачі.*

#### Розв'язання.

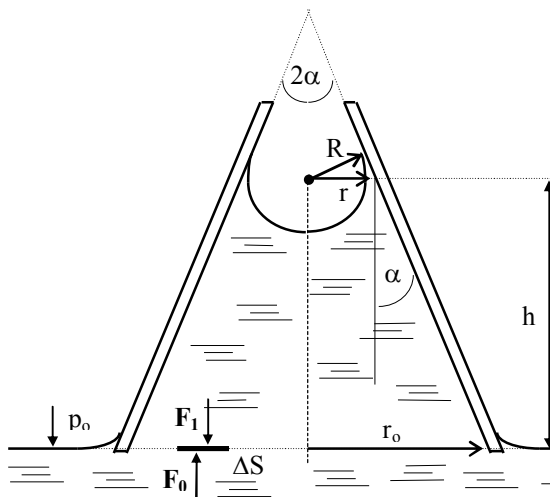


Рис.19

Будемо вважати змочування повним, тому вільна поверхня рідини у капілярі є частиною сферичної поверхні. Радіус цієї поверхні (рис. 19)  $R = r / \cos \alpha$ , де  $r$  – радіус капіляра на тій висоті  $h$ , до якої піднімається рідина. Радіус  $r$  можна визначити через внутрішній радіус  $r_0$  капіляра:  $r = r_0 - h \operatorname{tg} \alpha$ .

Над увігнутою сферичною поверхнею тиск менший від атмосферного на величину лапласівського тиску

$$p_{\text{Л}} = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma \cdot \cos \alpha}{r} = \frac{2\sigma \cdot \cos \alpha}{r_0 - h \cdot \operatorname{tg} \alpha},$$

де  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу.

Висоту підняття рідини в капілярі  $h$  можна знайти із таких міркувань. Розглянемо умову рівноваги невеликої уявної

площадки, яка розміщена горизонтально в середині капіляра на рівні вільної поверхні рідини. На цю площадку, згідно закону Паскаля, діють дві сили  $F_0$  і  $F_1$  (див. мал. 19). Сила тиску атмосфери  $F_0 = p_0 \cdot \Delta S$ , де  $p_0$  – тиск атмосфери;  $\Delta S$  – площа вибраної площадки. Зверху на площадку діє гідростатичний тиск рідини  $p_z = \rho g h$  і тиск повітря, яке знаходиться над увігнутою поверхнею цієї рідини. Тому  $F_1 = p_z \cdot \Delta S + (p_0 - p_L) \cdot \Delta S$ . В стані рівноваги  $F_0 = F_1$ , або  $p_0 \cdot \Delta S = p_z \cdot \Delta S + (p_0 - p_L) \cdot \Delta S$ . Звідки слідує, що  $p_z = p_L$ .

Отже

$$\rho g h = \frac{2\sigma \cdot \cos \alpha}{r_0 - h \cdot \operatorname{tg} \alpha},$$

або

$$\rho g \operatorname{tg} \alpha \cdot h^2 - \rho g r_0 \cdot h + 2\sigma \cos \alpha = 0.$$

Розв'язок цього квадратного рівняння має вигляд

$$h_{1,2} = \frac{r_0 \pm \sqrt{(r_0)^2 - \frac{8\sigma \cdot \sin \alpha}{\rho g}}}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Очевидно, що при  $\rho g r_0^2 > 8\sigma \sin \alpha$  висота підняття рідини в капілярі має два значення.

Для аналізу розв'язку використаємо графічний метод. Накреслимо у координатах  $p$ ,  $h$  графіки залежності гідростатичного тиску  $p_r$  і лапласівського тиску  $p_L$  від висоти підняття рідини  $h$  у капілярі (рис.20).

Графік залежності  $p_z(h)$  є пряма лінія, яка проходить через початок координат, а графік залежності  $p_L(h)$  є крива, що перетинає вісь тиску при

$$p_1 = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r_0}.$$

Точки перетину цих двох ліній визначають висоти  $h_1$  і  $h_2$ , які відповідають положенням рівноваги рідини у капілярі.

Визначимо, яке з цих положень рівноваги є стійким.

Нехай при  $h_2$  рівень рідини з якоїсь випадкової причини трохи підніметься ( $h > h_2$ ). У цьому випадку  $p_2$  зросте більше ніж

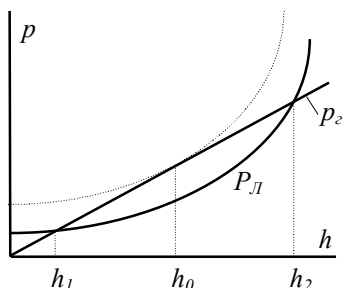


Рис. 20.

$p_л$  і рівень рідини буде продовжувати підніматись поки не досягне верхньої межі капіляру. Якщо  $h$  випадково зменшиться ( $h < h_2$ ), то  $p_л$  буде більше, ніж  $p_2$  і рівень рідини понижуватиметься до значення  $h_1$ . Отже, стан, який відповідає рівню рідини  $h_2$  у капілярі, є нестійким.

Нехай при  $h_1$  рівень рідини випадково зменшиться і стане меншим  $h_1$  ( $h < h_1$ ). При цьому  $p_л$  зменшиться, однак, як видно з графіку менше ніж  $p_2$  і отже  $p_л$  буде більшим ніж  $p_2$ , тобто рівень рідини буде підніматися поки не досягне значення  $h_1$ . Якщо ж висота  $h$  стане більшою ніж  $h_1$  (однак меншою  $h_2$ ), то  $p_2 > p_л$ , отже, поверхня рідини опуститься, повернувшись до рівня  $h_1$ . Це означає, що положення рівноваги

$$h_1 = \frac{r_0 - \sqrt{r_0^2 - \frac{8\sigma \cdot \sin \alpha}{\rho g}}}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha},$$

є стійким.

При  $\rho_0 \cdot gr_0^2 = 8\sigma \cdot \sin \alpha$  або  $\rho_0 = \frac{8\sigma \cdot \sin \alpha}{gr_0^2}$  маємо один

корінь  $h_0$ . У цій точці графіки  $p_л(h)$  і  $p_2(h)$  дотикаються. Очевидно, що при  $\rho < \rho_0$  дійсних розв'язків для  $h$  не існуватиме, що означає відсутність положень рівноваги рідини в капілярі.

#### 7.4. Задачі для аудиторної роботи

7.18. Атмосфера Венери майже повністю складається з вуглекислого газу. На поверхні планети густина газу складає  $0,07 \text{ г/см}^3$ , його температура  $750 \text{ К}$ . Знайти тиск газу вважаючи газ ван-дер-вальсівським. Провести порівняння з тиском ідеального газу в цих же умовах.

7.19. Тиск кисню, що має густину  $=100 \text{ кг/м}^3$ , складає  $7 \cdot 10^6 \text{ Па}$ . Визначити внутрішній тиск і температуру газу, користуючись рівняннями а) Ван-дер-Ваальса і б) Клапейрона-Менделєєва.

7.20. При температурі  $310 \text{ К}$   $1 \text{ кмоль}$  азоту займає об'єм  $2,5 \text{ м}^3$ . Використовуючи критичні параметри азоту, визначити тиск і ефективний діаметр молекул азоту.

7.21. Для демонстрації критичного стану використовують прилад російського фізика Авенаріуса, в якому проводиться нагрівання запаяної ампули з етиловим ефіром. Яку частину об'єму ампули повинен займати ефір при температурі  $20^\circ \text{C}$ , щоб, при досягненні критичної температури весь об'єм ампули був заповнений ефіром в критичному стані? Молярна маса ефіру рівна  $74 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ . Критичні температура і тиск ефіру рівні  $467,0 \text{ К}$  і  $36,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Густина ефіру  $0,714 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

7.22. Визначити для газу, що підкоряється рівнянню Ван-дарВаальса а) молярну теплоємність  $c_{\text{Vm}}$  при постійному об'ємі; б) різницю молярних теплоємностей  $c_{\text{pm}} - c_{\text{vm}}$ .

7.23. У одному балоні знаходиться азот, а в другому – гелій при початковій температурі  $300 \text{ К}$ . В обох балонах гази сильно стиснуті до молярних об'ємів  $100 \text{ см}^3/\text{моль}$ . При дроселюванні вони розширюються до атмосферного тиску (при атмосферному тиску гази можна вважати ідеальними). Використовуючи постійні  $a$  і  $b$  в рівнянні Ван-дер-Ваальса, визначити для кожного з цих газів температуру інверсії і зміну температури при дроселюванні.

7.24. Показати, що ефект Джоуля-Томсона буде завжди від'ємним, якщо дроселюється газ, для якого силами притягання між молекулами можна знехтувати.

7.25. Цикл складається із двох ізохор об'ємами  $V_1$  та  $V_2$  і двох адіабат. Робочою речовиною є газ Ван-дар-Ваальса, постійна  $b$  якого задана, а теплоємність при постійному об'ємі  $C_V$  не залежить від температури. Знайти ккд циклу.

7.26. Яка густина води в краплині радіусом  $10^{-6}$  см при температурі  $4^\circ\text{C}$ ?

7.27. У скляний капіляр з внутрішнім діаметром 2мм вставлена скляна палочка діаметром 1,5 мм так, що проміжок між палочкою і трубкою всюди однаковий. Визначити висоту підняття води між палочкою і трубкою.

7.28. В посудині з повітрям при тиску  $p_0$  знаходиться мильна бульбашка діаметром  $d$ ? Тиск повітря в посудині ізотермічно зменшується в  $n$  раз і в результаті цього діаметр бульбашки зростає в  $k$  разів. Знайти поверхневий натяг мильної води.

7.29. Дві вертикальні пластини, які занурені частково у змочуючу їх рідину, утворюють клин з малим кутом  $\alpha$ . Ребро клина розташоване вертикально. Враховуючи, що густина рідини  $\rho$ , коефіцієнт поверхневого натягу  $\sigma$ , кут змочування  $\theta$ , визначити висоту підняття  $h$  рідини між пластинами як функцію відстані  $x$  від ребра клина.

7.30. При визначенні коефіцієнту поверхневого натягу методом відриву капель число капель гліцерину, які витікають із капіляру, становить 50, а їх загальна маса 1 г. Діаметр шийки каплі в момент відриву 1мм. Визначити за цими даними коефіцієнт поверхневого натягу.

### 7.5. Задачі для самостійної роботи

7.31. У посудині об'ємом  $V=8\text{л}$  знаходяться 0,3 кг кисню при температурі  $279^\circ\text{C}$ . Яку частину тиску газу складає тиск,



обумовлений силами притягання молекул? Яку частину об'єму посудини складає власний об'єм молекул?

7.32. У посудині міститься 1 моль газу. Його тиск 20 разів більше критичного тиску, а об'єм, рівний половини критичного об'єму. Визначити відношення температури цього газу до критичної температури.

7.33. Визначити критичні тиск і температуру а) кисню; б) водяної пари. Використати для цього значення постійних  $a$  і  $b$  в рівнянні Ван-дер-Ваальса.

7.34. Для аргону критичний тиск  $48 \cdot 10^5$  Па та критична температура  $-122^\circ\text{C}$ . Визначити для аргону: а) постійні  $a$  і  $b$  в рівнянні Ван-дер-Ваальса; б) критичний об'єм 1 молю аргону.

7.35. При ізотермічному розширенні 10 г кисню об'єм газу збільшується від 1 до 5 л. Вважаючи газ таким, що підкоряється рівнянню Ван-дер-Ваальса, визначити роботу внутрішніх сил при розширенні газу та приріст ентропії.

7.36. При температурі  $27^\circ\text{C}$  відбувається ізотермічне розширення 1 кмоль кисню від об'єму  $1 \text{ м}^3$  до об'єму  $5 \text{ м}^3$ . Визначити приріст внутрішньої енергії газу, роботу; здійснену газом і кількість поглиненої теплоти, вважаючи газ: а) ідеальним; б) таким що описується рівнянням Ван-дер-Ваальса.

7.37. Два балони, об'єми яких 1 л кожного, сполучені між собою тонкою трубкою з краном В одному балоні повітря знаходиться під нормальним атмосферним тиском, а інший балон відкачаний до граничного, вакууму. Вважаючи, що повітря підкоряється рівнянню Ван-дер-Ваальса, а балони і трубки теплоізовані, визначити зміну температури після встановлення тиску при відкритті крану. Початкова температура  $290 \text{ K}$ , для повітря  $a=0,135 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$ .

7.38. Яку енергію треба підвести до  $\nu$  молей газу, що підкоряється рівнянню Ван-дер-Ваальса, щоб при розширенні в пустоту від об'єму  $V_1$  до об'єму  $V_2$  а) його температура не змінилася; б) його тиск залишився постійним.

7.39. При якій температурі гелій і ксенон в досліді Джоуля-

Томсона, охолоджуватимуться? Критичні температури цих газів відповідно рівні 5,3 К і 290 К.

7.40. Показати, що ефект Джоуля-Томсона буде завжди додатним, якщо дроселюється газ, для якого власним об'ємом молекул можна знехтувати.

7.41. Яку роботу потрібно виконати, щоб видути мильну бульбашку діаметром 24 см? Чому рівний надлишковий тиск у бульбашці?

7.42. Вертикально розміщену капілярну трубку довжиною 20 см із запаєним верхнім кінцем приводять у дотик із водою. На яку висоту підніметься вода у капілярі, якщо його радіус  $2,0 \cdot 10^{-4}$  м? Вважати, що вода повністю змочує трубку.

7.43. Склію капілярну трубку, діаметр внутрішнього каналу якої 0,2 мм, а довжина 20 см, опускають у вертикальному положенні у воду. Верхній кінець трубки запаєний, Який відрізок трубки потрібно занурити у воду, щоб рівні води в капілярі і поза ним були однаковими? Тиск атмосферного повітря 750 мм рт.ст.

7.44. дві скляні трубки, внутрішні діаметри яких 0,2 та 0,3 мм з'єднані знизу резиноюю трубкою. При якій умові рівні води в трубках будуть однаковими?

7.45. У дні посудини із ртуттю зроблено круглий отвір діаметром 70 мкм. При якій максимальній товщині шару ртуті у посудині вона ще не буде витікати через цей отвір?

7.46. На мильній бульбашці радіусом  $a$  „сидить” бульбашка радіусом  $b$ . Який радіус кривизни плівки, що розділяє бульбашки?

7.47. Знайти різницю рівнів ртуті в двох сполучених вертикальних капілярах, діаметри яких 0,50 та 2,00 мм, якщо кут змочування  $138^\circ$ .

7.48. Вертикальний капіляр з внутрішнім діаметром 0,50 мм занурили у воду так, що довжина частини капіляру над водою становить 25 мм. Знайти радіус кривизни меніска.

7.49. Між двома скляними горизонтальними пластинами

знаходиться капля ртуті у формі диска радіуса  $R$  і товщини  $h$ . Знайти масу вантажу, яку треба помістити на верхню пластину, щоб відстань між пластинами зменшити в  $n$  раз. Коефіцієнт поверхневого натягу  $\sigma$ , краєвий кут  $\theta$ .

7.50. Вважаючи процес утворення мильної бульбашки ізотермічний, визначити роботу, яку необхідно виконати, щоб збільшити її діаметр від 6 мм до 60 мм. Коефіцієнт поверхневого натягу мильної води 41 мН/м.

7.51. Що відбудуватиметься, якщо у перенасичену водяну пару при температурі  $96^\circ\text{C}$  і тиск  $10^5$  Па попаде краплинка води радіусом  $r$ ? Розглянути випадки а)  $r = 0,50 \cdot 10^{-8}$  м, б)  $r = 1 \cdot 10^{-8}$  м. Тиск насиченої пари при  $96^\circ\text{C}$  над плоскою поверхнею води становить  $0,88 \cdot 10^5$  Па.

7.52. Мильна бульбашка видута через циліндричну трубку із внутрішнім радіусом 1 мм і довжиною 10 см. В той момент, коли радіус бульбашки досягає значення 10 см видування припиняється і повітря із бульбашки починає виходити через трубку. Через який час починаючи із цього моменту бульбашка щезне? Коефіцієнт поверхневого натягу мильної води  $5 \cdot 10^{-2}$  Н/м, в'язкість повітря  $1,8 \cdot 10^{-5}$  Па·с.

7.53. Дві краплини ртуті радіусами 2,5 мм зливаються в одну. Вважаючи цей процес ізотермічним і таким, що відбувається при  $20^\circ\text{C}$ , визначити зміну вільної енергії та ентропії поверхневого шару при такому злитті крапель.

7.54. Знайти зміну температури при адіабатичному злитті 1000 маленьких крапель ртуті діаметром 1 мм в одну велику сферичну краплину.

## 8. ТВЕРДІ ТІЛА

### 8.1. Короткі теоретичні відомості

Найбільш характерною особливістю твердих тіл, як агрегатного стану речовини є збереження ними форми та об'єму.

Ці характеристики твердого тіла змінюються під впливом різних зовнішніх факторів, в тому числі і при прикладенні механічних напружень, які приводять до деформацій. Довільна деформація може бути охарактеризована трьома видовженнями вздовж вибраних осей координат і трьома зсувами, паралельно трьом координатним площинам, тобто всього шістьма величинами, які утворюють тензор деформацій. Деформація розтягу (стиску) характеризується відносним видовженням

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (8.1)$$

При  $\varepsilon > 0$  має місце видовження, а при  $\varepsilon < 0$  – стиск. Деформація зсуву характеризується відносним зсувом

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha, \quad (8.2)$$

де  $\alpha$  – кут на який зміщуються один відносно одного паралельні шари твердого тіла. При малих відносних деформаціях, як показують досліди, їх величина пропорційна прикладеному напруженню

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad (8.3a)$$

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{G} \frac{F_\tau}{S}, \quad (8.3b)$$

де  $F$  – сила, яка діє по нормалі до поверхні з площею  $S$ ,  $F_\tau$  – тангенціальна сила, направлена по дотичній до поверхні з площею  $S$ ,  $\varepsilon$  – деформація вздовж напрямку, який паралельний силі  $F$ .

Вираз (8.3а) у вигляді  $E \cdot \varepsilon = F/S$  дістав назву закону Гука, а величина  $E$  – модуля Юнга. Коефіцієнт  $G$  називають модулем зсуву.

При односторонньому розтягу або стиску твердого тіла змінюються також розміри в напрямку перпендикулярному до прикладеної сили. Відносна зміна поперечних розмірів визначається рівністю  $\varepsilon' = \Delta d/d_0$ , де  $d_0$  і  $\Delta d$  поперечний розмір тіла та його, відповідно.

Величина

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\frac{\Delta d / d_0}{\Delta l / l_0} \quad (8.4)$$

називається коефіцієнтом Пуассона. Легко показати, що  $\mu < 0.5$ .

Відносна зміна об'єму при розтягуванні залежить як від  $E$ , так і від  $\mu$ :

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2 \cdot \mu) \frac{F}{E \cdot S}. \quad (8.5)$$

При всесторонньому стиску або розтягу твердого тіла відносна зміна об'єму тіла

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{K} p, \quad (8.5a)$$

де  $K$  – модуль об'ємної стисливості,  $p$  – прикладений всесторонній тиск.

Модуль об'ємної стисливості  $K$  зв'язаний з модулем Юнга  $E$  співвідношенням

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}, \quad (8.6)$$

а зв'язок між модулем зсуву  $G$  і модулем Юнга  $E$  має вигляд

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (8.7)$$

Максимальні напруження  $F/S$ , при яких зберігається пружний характер деформацій називають межею (границею) пружності. При прикладенні до твердих тіл напружень вищих за межу пружності спостерігається незворотна – пластична

деформація. Напряга, при якій має місце руйнування твердого тіла, одержала назву межі міцності.

Лінійні розміри твердого тіла змінюються також при зміні температури тіла, причому в першому наближенні

$$l = l_0 (1 + \alpha_T \Delta T), \quad (8.8)$$

де  $l_0$  – лінійні розміри тіла при температурі  $T_0$ ;  $l$  – при температурі  $T = T_0 + \Delta T$ ;  $\alpha_T$  – коефіцієнт термічного розширення. Зміна лінійних розмірів при зміні температури тіла є проявом ангармонізму коливань атомів в ґратці твердого тіла. Характер зміни потенціальної енергії взаємодії від віддалі між атомами (молекулами) твердого тіла є індивідуальний для кожної речовини, однак в ряді випадків хорошим наближенням може апроксимуватись потенціалом Ленарда-Джонса

$$E(r) = \frac{a_1}{r^{12}} - \frac{a_2}{r^6}, \quad (8.9)$$

де  $a_1$  і  $a_2$  – деякі константи,  $r$  – відстань між атомами.

Між коефіцієнтом лінійного термічного розширення  $\alpha_T$  і коефіцієнтом об'ємного термічного розширення існує простий зв'язок

$$\beta_T = 3 \alpha_T. \quad (8.10)$$

Відмітимо, що в монокристалічних твердих тілах спостерігається анізотропія – залежність фізичних властивостей від вибраного напрямку. Приведені вище формули справедливі тільки для ізотропних тіл.

У класичному наближенні молярна теплоємність твердого тіла при постійному об'ємі не залежить від температури і визначається законом Дюлонга і Пті

$$c_{\nu\mu} = 3 R. \quad (8.11)$$

Однак експериментальні дані підтверджують цей закон тільки в області високих температур. Згідно моделі Ейнштейна, тверде тіло моделюється сукупністю лінійних незв'язаних осциляторів із енергією коливань  $w$ . У цьому наближенні

$$c_{v\mu} = 3R \left( \frac{w}{kT} \right)^2 \frac{\exp(w/kT)}{[\exp(w/kT) - 1]^2} = 3R \left( \frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{\exp(\theta_E/T)}{[\exp(\theta_E/T) - 1]^2}, \quad (8.12)$$

де  $\theta_E = w/k$  – температура Ейнштейна.

Формула (8.12) дає якісне пояснення експериментальних даних, однак у кількісному відношенні не узгоджується з дослідними даними, оскільки вона передбачає експоненціальне зменшення теплоємності  $c_V$  при  $T \rightarrow 0\text{K}$ , в той час як згідно експерименту  $c_V \sim T^3$ .

Сучасне розуміння теплоємності твердих тіл при низьких температурах ґрунтується на моделі нормальних коливань кристалічної гратки (модель фононів). Виходячи з моделі фононів Дебай одержав таку формулу для внутрішньої енергії твердого тіла:

$$U = 9RT \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{\xi^3 d\xi}{\exp \xi - 1}, \quad (8.13)$$

де  $\theta_D = h\nu_{max}/k$  – температура Дебая;  $h\nu_{max}$  – максимальна енергія фононів твердого тіла;  $\xi = h\nu/kT$ ,  $h\nu$  – енергія фонона.

Диференціюванням останньої формули по температурі можна знайти теплоємність при постійному об'ємі.

$$c_{v\mu} = 3R \left[ 12 \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} - \frac{3 \frac{\theta_D}{T}}{e^{\theta_D/T} - 1} \right]. \quad (8.14)$$

Оскільки вираз (8.14) досить складний для аналізу, розглядаються випадки низьких  $T \ll \theta_D$  і високих  $T \gg \theta_D$  температур.

При  $T \ll \theta_D$

$$c_{v\mu} = \frac{12\pi^4}{5} R \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3. \quad (8.15)$$

При  $T \gg \theta_D$  з формули (8.14) слідує закон Дюлонга і Пті (8.11).

При температурі  $T \approx \theta_D$  інтеграл в (8.14) не може бути обчислений аналітично і для його обчислення використовуються чисельні методи. Значення цього інтегралу

$$\int_0^1 \frac{\xi^3 dx}{e^\xi - 1} = 0,225.$$

Властивості різних матеріалів в моделі теплоємності по Дебаю враховуються значенням  $\theta_D$ , тому формула (8.13) є універсальною для твердих тіл і дає добрі узгодження з експериментальними результатами.

## 8.2. Якісні задачі

8.1. Які властивості кристалів зв'язані з їх симетрією і анізотропією?

8.2. Яка з простих деформацій не приводить до зміни об'єму тіла?

8.3. Дві сталеві дротини однакового перерізу, одна з яких у  $n$  разів довша за другу, розтягаються однаковими силами. Як відносяться їх абсолютні і відносні видовження?

8.4. Чи зміниться абсолютне видовження стержня, якщо та сама сила діятиме на цей стержень, розрізаний навпіл: а) уперек; б) вздовж?

8.5. При яких деформаціях – пружних чи пластичних – більше змінюється температура матеріалу?

8.6. Якщо м'який дріт згинати в одному місці, то з кожним разом згинати стає все важче, і нарешті, він зламається. Як це пояснити?

8.7. Куля, виточена з монокристалу при нагріванні може змінити не тільки свій об'єм, а і форму. Чому?

8.8. З погляду закономірностей взаємодії між частинками твердого тіла поясніть теплове розширення твердих тіл.



8.9. Чи може тверде тіло стискатись від нагрівання?

8.10. Що таке фонон? Який фізичний зміст характеристичної температури Дебая?

### 8.3. Приклади розв'язування задач

**Задача 8.11.** На скільки видовжиться стальна дротина, підвішена за один кінець, під впливом власної ваги і на скільки, при цьому, зміниться її об'єм? Довжина дротини  $L=100$  м, поперечний переріз  $S=1$  мм<sup>2</sup>. Густина сталі  $\rho=7,85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E=2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, коефіцієнт Пуасона  $\mu=0,22$ .

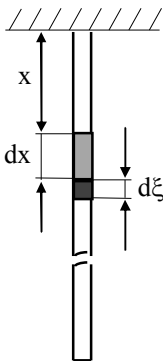


Рис. 21.

**Розв'язання.** Виділимо нескінченно малий елемент дротини завдовжки  $dx$  на відстані  $x$  від закріпленого краю стержня (див. рис. 21). На нього діє сила тяжіння з боку нижньої, відносно нього, частини дротини, яка становить  $F=\rho g(L-x)S$ . Позначимо видовження елемента  $dx$  через  $d\xi$ . За законом Гука (8.3а)

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{\rho g(L-x)S}{E \cdot S}.$$

Щоб знайти повне видовження дротини  $\Delta L$  треба додати всі  $d\xi$ , тобто проінтегрувати по  $x$  від 0 до  $L$

$$\Delta L = \int_0^L d\xi = \int_0^L \frac{\rho g(L-x)}{E} dx = \frac{\rho g L^2}{2E}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$\Delta L = \frac{7,85 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3 \cdot 9,81 \text{ м} / \text{с}^2 \cdot 10^4 \text{ м}^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ Н} / \text{м}^2} = 1,92 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 2 \text{ мм}.$$

Аналогічно можна обчислити зміну об'єму дротини. Для нескінченно малого елемента дротини завдовжки  $dx$  відносна зміна його об'єму описується формулою (8.5)

$$\frac{\Delta V_x}{V} = (1 - 2\mu) \frac{F}{E \cdot S}.$$

Враховавши, що  $V = Sdx$  зміна об'єму  $\Delta V_x$  буде становити

$$\Delta V_x = (1 - 2\mu) S \cdot \frac{\rho g (L - x) S}{ES} \cdot dx.$$

Інтегруючи цей вираз по  $x$  в межах від  $0$  до  $L$ , знаходимо повну зміну об'єму

$$\Delta V = \int_0^L d\Omega = \int_0^L (1 - 2\mu) \frac{\rho g S (L - x)}{E} \cdot dx = \frac{(1 - 2\mu) \rho g L^2 S}{2E}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, маємо

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{(1 - 2 \cdot 0,22) \cdot 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3 \cdot 9,81 \text{ м} / \text{с}^2 \cdot 10^4 \text{ м}^2 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ Н} / \text{м}^2} = \\ &= 1,08 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3. \end{aligned}$$

**Задача 8.12.** Оцініть теоретичну межу міцності германію, вважаючи, що для розриву необхідно відірвати від поверхні один шар молекул і віддалити його на відстань порядку міжатомної. Молярна теплота випаровування германію  $L = 37,65 \cdot 10^4$  Дж/моль, густина германію  $\rho = 5,3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, молярна маса  $\mu = 0,072$  кг/моль.

**Розв'язання.** Для відриву одного атома германію від поверхні необхідно затратити енергію

$$w = \frac{L}{N_A} = \frac{37,65 \cdot 10^4 \text{ Дж} / \text{моль}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 6,25 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Відстань між атомами у кубічному кристалі

$$a = \left( \frac{\mu}{\rho N_A} \right)^{1/3}.$$

Отже, на поверхні на один атом припадає площа

$$S = a^2 = \left( \frac{\mu}{\rho N_A} \right)^{2/3}.$$

Будемо вважати, що сила притягання діє між атомами на відстані порядку міжатомної, тому середня сила, що діє на один атом при його відриванні з поверхні

$$f = \frac{w}{a} = \frac{L}{N_A} \left( \frac{\rho N_A}{\mu} \right)^{1/3}.$$

Отже, межа міцності германію

$$\sigma_{гр.} = \frac{f}{S} = \frac{w}{a^3} = \frac{L}{N_A} \frac{\rho N_A}{\mu} = \frac{L\rho}{\mu}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, маємо

$$\sigma_{гр.} = \frac{37,65 \cdot 10^4 \text{ Дж / моль} \cdot 5,3 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3}{0,072 \text{ кг / моль}} = 2,77 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Одержане значення  $\sigma_{гр.}$  в 100 раз більше за експериментальні значення межі міцності. Це пояснюється неідеальністю кристалів, а саме, наявністю в них дислокацій, рухливість яких визначає реальну міцність матеріалів.

Задача 8.13. Знайти коефіцієнт лінійного розширення в моделі, яка допускає, що відхилення від ангармонічності коливань атомів кристалічної ґратки можна врахувати за допомогою потенціалу виду  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}gx^3$ , де  $x$  – відхилення атомів ґратки від положення рівноваги.

Розв'язання. Графік функції  $U(x) = \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}gx^3$  показаний на рис. 22 суцільною лінією. Пунктирною лінією зображено залежність потенціальної енергії  $U_i(x) = \frac{1}{2}bx^2$  для гіпотетичного кристалу, в якому атоми здійснювали б гармонічні коливання. Допустимо, що  $r_0$  – постійна ґратки, тобто в точках  $x = \pm r_0$  знаходяться сусідні атоми.

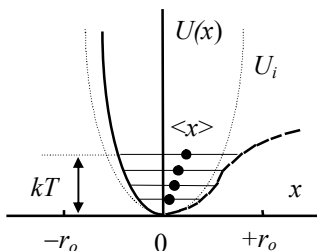


Рис. 22.

З підвищенням температури атом переходить на все більш високі енергетичні рівні ( $U \approx kT$ ), а точка рівноваги атома зміщується в сторону додатних  $x$ , тобто середня відстань між атомами збільшується. Повна енергія (кінетична плюс потенціальна) одномірних коливань атома в середньому складає  $U = kT$ . Враховуючи, що  $\langle U \rangle = b \cdot \langle x^2 \rangle$  можна знайти середній квадрат коливного зміщення атома  $\langle x^2 \rangle = kT/b$ .

При відхиленні атома з положення рівноваги на нього діє сила, напрямлена до положення рівноваги і яку можна знайти по формулі:

$$f = -\frac{U(x)}{dx} = -bx + gx^2.$$

У точці рівноваги середнє значення сили рівне нулю:  $\langle f \rangle = b \langle x \rangle + g \langle x^2 \rangle = 0$ , отже

$$\langle x \rangle = -\frac{g}{b} \langle x^2 \rangle.$$

Враховуючи залежність середнього квадрату зміщення атома від температури одержимо

$$\langle x \rangle = -\frac{g}{b^2} kT.$$

Запишемо коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha$  через розміри однієї комірки

$$\alpha = \frac{1}{r_o} \frac{d(r_o + \langle x \rangle)}{dT} = \frac{1}{r_o} \frac{d \langle x \rangle}{dT}.$$

Підставляючи в цю формулу значення для  $\langle x \rangle$ , одержуємо

$$\alpha = \frac{gk}{r_o b}.$$

Це співвідношення дає зв'язок між експериментальними величинами  $\alpha$  і  $r_o$  з одного боку і параметрами  $g$  і  $b$  теоретичної моделі – з іншого.

Додаток. Виведення формули для  $\langle x \rangle$ .

Середнє значення  $x$  можна розрахувати, використовуючи функцію розподілу Больцмана, за допомогою якої значення будь-якої фізичної величини усереднюють відповідно до її термодинамічної імовірності:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left[-\frac{U(x)}{kT}\right] \cdot dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{U(x)}{kT}\right] \cdot dx}.$$

У випадку невеликих зміщень (енергія, зв'язана з ангармонізмом, є малою) підінтегральні вирази можна розкласти в ряд

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{U(x)}{kT}\right) dx \approx \\ & \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{bx^2}{kT}\right) \cdot \left(x + \frac{gx^4}{kT}\right) dx = \frac{g}{kT} \left(\frac{kT}{b}\right)^{5/2} \frac{3}{4} \pi^{1/2}; \end{aligned}$$

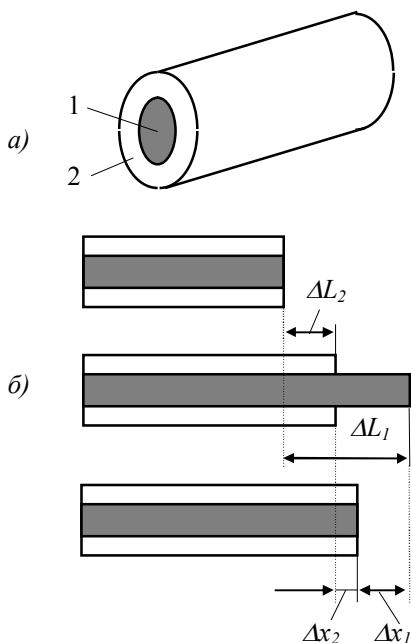
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{U(x)}{kT}\right) dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{bx^2}{kT}\right) dx = \left(\frac{\pi kT}{b}\right)^{1/2}.$$

Звідки

$$\langle x \rangle = \frac{3}{4} \cdot \frac{g}{b^2} kT.$$

Як видно, цей вираз відрізняється від одержаного вище множником  $3/4$ , що не є суттєвим для принципового пояснення термічного розширення на основі ангармонізму коливань атомів ґратки.

**Задача 8.14.** Суцільний металевий стержень запресований у металеву трубку, яка виготовлена з іншого матеріалу (рис. 23) і жорстко з'єднаний з нею. Площі поперечного перерізу стержня і трубки однакові і рівні  $S$ . Визначити коефіцієнт лінійного розширення одержаної конструкції.



Мал. 23.

Розв'язання.

Позначимо  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ ,  $E_1$  і  $E_2$  коефіцієнти термічного розширення та модулі Юнга матеріалів 1 і 2.

Нехай  $\alpha_1 > \alpha_2$ . При відсутності жорсткого зчеплення видовження частин:  $\Delta L_1 = \alpha_1 L_0 \cdot \Delta T$  і  $\Delta L_2 = \alpha_2 L_0 \cdot \Delta T$ , звідки

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

За рахунок жорсткого з'єднання, сили пружності, які виникають у стержні і в трубці викликають відповідно їх

стиснення  $\Delta x_1 = \frac{F}{E_1 S} \cdot L_0$  і розтяг  $\Delta x_2 = \frac{F}{E_2 S} \cdot L_0$ , звідки

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{E_2}{E_1}.$$

Як видно з мал. 23б  $\Delta L_1 - \Delta L_2 = \Delta x_2 + \Delta x_1$ , звідки

$$\Delta L_2 \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1 \right) = \Delta x_2 \left( \frac{E_2}{E_1} + 1 \right). \quad \text{Дійсне видовження конструкції}$$

$$\Delta L = \Delta L_2 + \Delta x_2.$$

З приведених вище рівнянь випливає, що

$$\Delta L = \frac{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} \cdot L_0 \cdot \Delta T.$$

Отже, коефіцієнт лінійного розширення

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0 \cdot \Delta T} = \frac{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2}.$$

Задача 8.15. Яку кількість тепла необхідно затратити, щоб нагріти від  $T_1 = \theta_D$  до  $T_2 = \theta_D + 1\text{К}$  кусок міді об'ємом  $V = 5 \text{ см}^3$ . Характеристична температура Дебая для міді  $\theta_D = 320 \text{ К}$ . Густина міді  $\rho = 8,94 \text{ г/см}^3$ , молярна маса  $\mu = 64 \text{ г/моль}$ .

Розв'язання. Кількість тепла, яка надається твердому тілу для зміни його температури затрачується на підвищення його внутрішньої енергії і визначається у загальному випадку формулою

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} c(T) \cdot m \cdot dT,$$

де  $c(T)$  – питома теплоємність речовини, яка є функцією температури  $T$ ,  $m$  – маса тіла. Маса міді  $m = V\rho$ , де  $\rho$  – його густина.

Питома теплоємність міді визначається відношенням молярної (атомної) теплоємності до молярної маси (див. формулу (1.6)  $c = \frac{c_\mu}{\mu}$ ). Враховуючи, що  $\Delta T = T_2 - T_1 = 1K \ll T_1$ , і  $T_2$ , тобто інтервал зміни температури малий, можна вважати питому теплоємність, у малому інтервалі температур, сталою величиною. Тоді

$$\Delta Q = \frac{c_\mu}{\mu} \rho V \cdot \Delta T.$$

Атомну теплоємність при  $\theta_D$  можна обчислити по формулі (8.14)

$$c_{\nu\mu} = 3R \left[ 12 \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} - \frac{3 \frac{\theta_D}{T}}{e^{\frac{\theta_D}{T}} - 1} \right].$$

Оскільки що  $T \approx T_2 \approx T_1 \approx \theta_D$ , то потрібно шукати значення інтегралу  $\int_0^1 \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}$ , в межах від нуля до одиниці. У цьому

випадку це значення рівне 0,225, тому молярна теплоємність

$$c_\mu = 3R \cdot \left( 12 \cdot 1^3 \cdot 0,225 - \frac{3 \cdot 1}{2,72 - 1} \right) = 2,87 \cdot R.$$

Таким чином, кількість теплоти, яку потрібно затратити для нагрівання міді

$$\Delta Q = V \rho \frac{2,87 \cdot R}{\mu} \Delta T.$$

Проводячи обчислення одержимо:

$$\Delta Q = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot 8,94 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3 \cdot \frac{2,87 \cdot 8,35 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})}{0,064 \text{ кг} / \text{моль}} \cdot 1 \text{ К} =$$



= 16,7 Дж.

#### 8.4. Задачі для аудиторної роботи

8.16. Вирахувати густину кристалу літію. Постійна кристалічної ґратки літію  $d=3,53 \cdot 10^{-10}$  м. Структура ґратки – об'ємноцентрований куб. Атомна маса літію  $A=7$ .

8.17. Яку силу потрібно прикласти до кінця сталюгого стержня з площею поперечного перерізу  $S=10 \text{ см}^2$ , щоб не дати йому розширюватись при нагріванні від  $t_1=0^\circ\text{C}$  до  $t_2=30^\circ\text{C}$ ?

8.18. Стальна та латунна смужки товщиною 2 мм зварені на кінцях так, що при температурі  $20^\circ\text{C}$  утворюють плоску біметалеву пластинку. Який буде середній радіус викривлення біметалічної пластинки при  $100^\circ\text{C}$ ?

8.19. При температурі  $10^\circ\text{C}$  стальна каністра повністю заповнюється бензином об'ємом 10 л. На скільки зміниться маса каністри з бензином в приміщенні, де температура  $30^\circ\text{C}$ ? При  $10^\circ\text{C}$  густина бензину  $800 \text{ кг/м}^3$ , коефіцієнт об'ємного розширення  $10^{-3} \text{ К}^{-1}$ .

8.20. На нагрівання мідного стержня масою 1 кг, що знаходився при температурі  $0^\circ\text{C}$ , витрачено 132 кДж тепла. На скільки відсотків при цьому збільшився його об'єм? Теплоємність міді визначити із закону Дюлонга і Пті.

8.21. Вирахувати питомі теплоємності кристалів натрію, нікелю і свинцю при температурі  $T=2 \text{ К}$ , використовуючи закон Дюлонга і Пті та теорію теплоємності Дебая.

8.22. Характеристична температура Дебая для алюмінію 418 К. Визначити питому теплоємність алюмінію при цій температурі.

#### 8.4. Задачі для самостійної роботи

8.23. Кристали міді мають кубічну ґранецентровану елементарну комірку. Скільки атомів міді входить у одну

елементарну комірку? Яка стала гратки міді? Чому рівна відстань між двома сусідніми атомами міді.

8.24. Яку довжину при  $0^{\circ}\text{C}$  повинні мати сталевий і мідний стержні, щоб при довільній температурі різниця їх довжин складала 10 см.

8.25. Два маятники, один – мідний, другий – сталевий, мають період коливань 1с при температурі  $0^{\circ}\text{C}$ . На скільки коливань зробить менше за добу мідний маятник ніж сталевий у приміщенні з температурою  $18^{\circ}\text{C}$ ?

8.26. При нагріванні сталеві кулі до  $800^{\circ}\text{C}$  її поверхня збільшилася на  $1\text{см}^2$ . Визначити діаметр кулі при  $20^{\circ}\text{C}$ .

8.27. У скляний циліндр налита ртуть масою 1кг. Іншу частину циліндра займає повітря, причому об'єм простору над ртуттю при всіх температурах від  $0^{\circ}\text{C}$  до  $100^{\circ}\text{C}$  залишається сталим.. Визначити об'єм циліндра.

8.28. Мідний брусок, який має температуру  $t_1$  притиснутий до алюмінієвого з температурою  $t_2$  і такою ж масою, як мідний. Яка буде відносна зміна загального об'єму брусків після вирівнювання їх температури?

8.29. Яку кількість теплоти потрібно затратити на одиницю маси металічної кулі радіуса  $R$  із питомою теплоємністю  $c$ , щоб збільшити її об'єм на  $z\%$ ? Коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha$ , тиск атмосфери  $p$ .

8.30. Два кубики масами  $m_1$  та  $m_2$  розташовані поряд на підставці. На скільки зміниться загальна теплоємність кубиків, якщо один покласти зверху на другий? Перший кубик залізний, другий – мідний.

8.31. Знайти значення максимальної енергії фонона в кристалах алюмінію, якщо його температура Дебая 418 К.

8.32. Коефіцієнт теплопровідності срібла  $490\text{Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ . Яка середня довжина вільного пробігу фононів у сріблі?

---

8.33. Для нагрівання металічної кулі масою 10 г від  $20^{\circ}\text{C}$  до  $50^{\circ}\text{C}$  затратили 62,8 Дж теплоти. Користуючись законом Дюлонга і Пті визначити матеріал кулі.

## 9. ФАЗОВІ РІВНОВАГИ ТА ФАЗОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ. РОЗЧИНИ

### 9.1. Короткі теоретичні відомості

Фазою називається макроскопічна фізично однорідна частина системи (речовини), яка відділена від інших частин системи чіткою межею розділу. Дві фази будуть знаходитись у рівновазі одна з одною, якщо їх питомі термодинамічні потенціали  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  будуть рівними

$$\Phi_1(p, T) = \Phi_2(p, T). \quad (9.1)$$

Питомий термодинамічний потенціал  $\Phi_1(p, T)$  знаходиться шляхом інтегрування виразу

$$d\Phi = Vdp - SdT, \quad (9.2)$$

де  $S$  – ентропія,  $T$  – температура  $V$  і  $p$  об'єм і тиск у системі.

Перехід з фази 1 в фазу 2 може проходити як з виділенням (поглинанням) тепла так і без нього. В першому випадку за класифікацією Еренфеста спостерігаються фазові переходи I-го роду, в другому – II роду.

Для фазових переходів I-го роду справедливе рівняння Клапейрона-Клаузіуса, яке описує залежність температури фазового перетворення  $T$  від тиску  $p$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_1 - V_2)}, \quad (9.3)$$

де  $L$  – питома теплота фазового перетворення,  $V_1$  і  $V_2$  – питомі об'єми до і після фазового переходу. Зміна ентропії при фазовому перетворенні I-го роду

$$\Delta S = \frac{L}{T}. \quad (9.4)$$

При фазових перетвореннях II-го роду терплять розрив другі похідні від термодинамічного потенціалу, тому вони супроводжуються стрибкоподібною зміною питомої

теплоємності, коефіцієнту теплового розширення, коефіцієнту ізотермічного стиснення.

Площина  $p - T$  з лініями залежності температури фазових перетворень від тиску між різними фазами називається діаграмою стану.

Якщо термодинамічна система складається із кількох компонент (речовин), згідно правила Гіббса число фаз  $n$ , які можуть знаходитись в рівновазі між собою, може перевищувати число компонент  $k$  не більше як на два

$$n < k + 2. \quad (9.5)$$

Тобто, число степеней вільності (варіантність) системи

$$f = k + 2 - n. \quad (9.6)$$

Фізичний стан систем визначається тиском  $p$ , температурою  $T$  і концентраціями компонент. При  $k=1$ , як вже вказувалось стан системи можна задати в двовимірному просторі  $p-T$  (на площині). У випадку  $k=2$  стан системи задається в тривимірному просторі  $p-T-x$  (де  $x$  – концентрація). Найбільш часто розглядаються перерізи цього тривимірного простору площинами  $p = const$ . У цьому випадку одержується діаграма стану типу температура – концентрація.

Фізично однорідні суміші двох або більше речовин (компонент) називаються розчинами.

Для двокомпонентних рідких розчинів у випадку коли розчин відділений від розчинника напівпроникною перегородкою, молекули розчинника переходять в область, яка заповнена розчином. Це явище носить назву осмоса. Різниця тисків між розчином і чистим розчинником при якому припиняється осмос називають осмотичним тиском. В слабкоконцентрованих розчинах згідно закону Вант-Гоффа осмотичний тиск

– для молекул, які не зазнають дисоціації при розчиненні

$$P_{осм.} = v \frac{RT}{V}, \quad (9.7)$$

– у випадку дисоціації молекул

$$p_{осм.} = v[1 + \alpha(m-1)] \frac{RT}{V} \quad (9.7a)$$

де  $v$  – кількість молів розчиненої речовини в об'ємі  $V$  розчину,  $\alpha$  – доля дисоційованої речовини,  $m$  – число іонів, які утворюються при дисоціації однієї молекули.

Згідно закону Рауля відносно зменшення тиску насиченої пари розчинника над поверхнею слабого розчину нелетучої речовини рівне

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{v'}{v_0}, \quad (9.8)$$

де  $v'$  і  $v_0$  – число молей розчиненої речовини і розчинника в одиниці об'єму розчину. Закон Рауля можна сформулювати і у вигляді запропонованого Генрі: при незмінній температурі розчинність газу пропорційно його парціальному тиску над розчином.

Наявність розчиненої речовини у розчиннику приводить до підвищення температури кипіння і пониження температури замерзання на відповідні величини

$$\Delta T_{кип.} = \frac{v'}{v} \frac{R(T_{кип.})^2}{\mu q_{1,2}} = \frac{p_{осм.} T_{кип.}}{v \mu q_{1,2}}; \quad (9.10a)$$

$$\Delta T_{зам.} = \frac{v'}{v} \frac{R(T_{зам.})^2}{\mu q_{1,2}} = \frac{p_{осм.} T_{зам.}}{v \mu q_{1,2}}, \quad (9.10б)$$

де  $T_{кип.}$  і  $T_{зам.}$  – температури кипіння і замерзання чистого розчинника,  $\mu$  – його молекулярна маса,  $q_{1,2}$  і  $q_{2,3}$  – питомі теплоти пароутворення і плавлення,  $v'/v$  – молярна доля розчиненої речовини і розчинника в одиниці об'єму.

## 9.2. Якісні задачі

9.1. Рідина переходить в пару при певній температурі. Як при цьому змінюється термодинамічний потенціал системи, ентропія та внутрішня енергія?

9.2. У довідниках температура плавлення і питома теплота плавлення для склоподібних речовин не приводиться. Чому?

9.3. Пароутворення при кипінні проходить при постійній температурі, а пароутворення при випаровуванні – з пониженням температури рідини. Чим обумовлена така різниця?

9.4. Що буде з ненасиченою парою: а) якщо її ізотермічно стискувати; б) якщо її ізохорно охолоджувати?

9.5. Користуючись правилом Гіббса покажіть, що потрійна точка води є нонваріантною.

9.6. Рідини, що легко випаровуються (наприклад, ефір), мають поверхневі натяги менші, ніж рідини нелеткі (наприклад, ртуть). Поясніть, цю закономірність?

9.7. Чому пересичена пара не конденсується без наявності додаткових чинників (центрів конденсації)?

9.8. Чому при  $0^{\circ}\text{C}$  морська вода не замерзає?

9.9. Чому при відкриванні пляшки з мінеральною водою спостерігається інтенсивне утворення і виділення бульбашок вуглекислого газу?

### 9.3. Приклади розв'язування задач

Задача 9.11. У термосі з нехтовно малою теплоємністю знаходиться вода масою  $m_g$  при температурі  $T_B=90^{\circ}\text{C}$ . У воду напускають пару масою  $m_n$  при температурі  $T_n=110^{\circ}\text{C}$ . Визначіть, при якому співвідношенні  $\frac{m_n}{m_g}$  реалізуються такі стани після вирівнювання температури: а) вода при  $100^{\circ}\text{C}$ ; б) суміш води і пари при  $100^{\circ}\text{C}$  без зміни кількості води; в) пара при  $100^{\circ}\text{C}$ . Питома теплоємність води  $c_g=4,2\cdot 10^3$  Дж/(кг·К), питома теплота випаровування  $L=2,26\cdot 10^6$  Дж/кг, питома теплоємність пари  $c_n=1,59\cdot 10^3$  Дж/(кг·К).

Розв'язання. Позначимо:  $T_K=373$  К;  $\Delta T_B=T_K - T_B$  і  $\Delta T_n=T_n - T_K$ . Оскільки система вода – пара є замкнутою, то поглинута (віддана) нею теплота зовнішнім тілам, для всіх випадків, рівна нулю.

Стан а). Вода з температурою  $100^\circ\text{C}$  утвориться, якщо вся пара конденсується і буде в стані рідини з температурою  $T_K$ . Тоді рівняння теплового балансу буде мати вигляд:

$$c_в m_в \Delta T_в = c_n m_n \Delta T_n - L m_n.$$

Звідки

$$\frac{m_n}{m_в} = \frac{c_в \cdot \Delta T_в}{c_n \cdot \Delta T_n + L}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, маємо

$$\frac{m_n}{m_в} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К}) \cdot 10 \text{ К}}{1,59 \cdot 10^3 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К}) \cdot 10 \text{ К} + 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж} / \text{кг}} = 0,018.$$

Стан б). Утворюються вода при  $100^\circ\text{C}$  і водяна пара при  $100^\circ\text{C}$  без зміни агрегатного стану. Для реалізації цього стану потрібно, щоб вода лише нагрілась до температури  $T_K$ , але не випарувалась, а пара охолодилась до  $T_K$ , але не конденсувалась. Тоді рівняння теплового балансу буде мати вигляд:

$$c_в m_в \Delta T_в = c_n m_n \Delta T_n.$$

Звідки

$$\frac{m_n}{m_в} = \frac{c_в \cdot \Delta T_в}{c_n \cdot \Delta T_n};$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, маємо

$$\frac{m_n}{m_в} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К}) \cdot 10 \text{ К}}{1,59 \cdot 10^3 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К}) \cdot 10 \text{ К}} = 2,64.$$

Стан в) Утвориться пара при  $T_K$ , тобто, вся вода випарується. Рівняння теплового балансу буде мати вигляд:



$$c_6 m_6 \Delta T_6 + L m_6 = c_n m_n \Delta T_n.$$

Звідки

$$\frac{m_n}{m_6} = \frac{c_6 \cdot \Delta T_6 + L}{c_n \cdot \Delta T_n}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, маємо

$$\frac{m_n}{m_6} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) \cdot 10 \text{ К} + 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}}{1,59 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) \cdot 10 \text{ К}} = 144,7$$

Задача 9.12. Скільки тепла потрібно надати льоду масою  $m=1$  кг, температура якого  $T_1=-20^\circ\text{C}$ , для того, щоб перетворити його у пару з температурою  $T_4=110^\circ\text{C}$ . Зобразіть описаний процес на графіку “час-температура”. Потужність нагрівника вважати постійною і рівною  $N=1,4$  кВт. Питома теплоємність льоду  $c_l=2,09 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ; Питома теплоємність води  $c_6=4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ; питома теплоємність пари  $c_n=1,59 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ; питома теплота плавлення льоду  $L_{пл.}=3,34 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$ , питома теплота випаровування води  $L_{вип.}=2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$ .

Розв'язання. Розділимо весь процес фазових перетворень на частини, що відповідають різним фазовим складам і температурам системи (див. Табл. 9.1). Загальна кількість теплоти, яку одержує система

$$Q=Q1+Q2+Q3+Q4+Q5=$$

$$m[c_l(T_2 - T_1) + L_{пл.} + c_6(T_3 - T_2) + L_{вип.} + c_n(T_4 - T_3)] = 3,072 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Аналізуючи дані таблиці 9.2 можна бачити, що найбільша частина використаної енергії йде на випаровування води. Графік процесу зображений на рис. 24.

Таблиця. 9.1.

№ п/п	Температура	Фазовий склад системи	Надана системі теплота	Необхідний час
1.	$T_1 \dots T_2$	лід	$Q_1 = c_{л}m(T_2 - T_1)$	$\tau_1 = Q_1/N$
2.	$T_2 = 273K (0^\circ C)$	лід – вода	$Q_2 = mL_{пл.}$	$\tau_2 = Q_2/N$
3.	$T_2 \dots T_3$	вода	$Q_3 = c_{в}m_{в}(T_3 - T_2)$	$\tau_3 = Q_3/N$
4.	$T_3 = 373K (100^\circ C)$	вода – пара	$Q_4 = mL_{вип.}$	$\tau_4 = Q_4/N$
5.	$T_3 \dots T_4$	пара	$Q_5 = c_{п}m(T_4 - T_3)$	$\tau_5 = Q_5/N$

Підставляючи числові значення отримаємо:

Таблиця 9.2.

№ п/п	$T, ^\circ C$	$Q, \text{кДж}$	$t, \text{хв}$
1.	$-20 \div 0$	42	0.5
2.	0	334	4.0
3.	$0 \div 100$	420	5.0
4.	100	2260	26.9
5.	$100 \div 110$	16	0.2

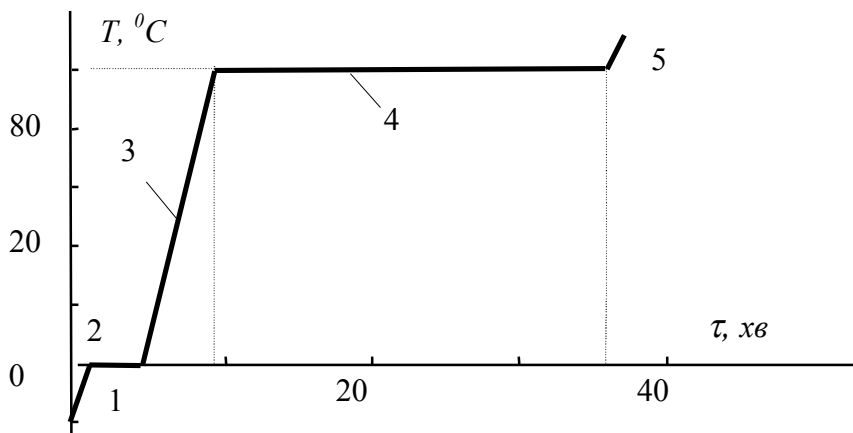


Рис. 24

Задача 9.13. Яка енергія необхідна для випаровування однієї молекули рідини, якщо відомо, що при температурі  $T_1$  рідина випаровується в  $n$  раз швидше ніж при температурі  $T_2 < T_1$ . Знайдіть молярну теплоту випаровування.

Розв'язання. Імовірність випаровування (відриву із поверхні) молекули, якщо її енергія зв'язку  $w_3$ , і не залежить від температури задається формулою Больцмана.

$$P = \frac{N}{N_0} = e^{-\frac{w_3}{kT}}.$$

Тоді кількість частинок, що покидають поверхню за одиницю часу при температурах  $T_1$  і  $T_2$ :  $N_1 = N_0 e^{-\frac{w_3}{kT_1}}$ ;

$N_2 = N_0 e^{-\frac{w_3}{kT_2}}$ . По умові задачі

$$n = \frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{w_3}{kT_2}} \cdot e^{-\frac{w_3}{kT_1}} = e^{\frac{w_3}{k} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)}.$$

Звідки

$$\ln n = \frac{w_3}{k} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).$$

Отже

$$w_3 = \frac{k T_2 T_1 \ln n}{T_1 - T_2}.$$

Тоді молярна теплота випаровування

$$L_\mu = N_A w_3 = \frac{R T_2 T_1 \ln n}{T_1 - T_2}.$$

Задача 9.14. *Визначити питому теплоту випаровування води при  $T=200^{\circ}\text{C}$ , користуючись першим принципом термодинаміки та параметрами води в критичному стані ( $T_{\text{кр.}}=647\text{K}$ ,  $p_{\text{кр.}}=2,17\cdot 10^7\text{Па}$ ). Яка частина знайденої енергії витрачається на роботу проти зовнішніх сил? Тиск насиченої пари при  $200^{\circ}\text{C}$   $p_n=16,2\cdot 10^5\text{Па}$ , зміну густини води із зміною температури не враховувати.*

Розв'язання. Згідно першого принципу термодинаміки, енергія, що підводиться до системи для випаровування 1 моля води, витрачається на збільшення внутрішньої енергії системи вода – пара і на роботу розширення проти зовнішнього тиску:

$$Q_{\mu} = \Delta U_{\mu} + A_{\mu}$$

Зміна внутрішньої енергії при одній і тій же температурі води і одержаної пари визначається роботою, виконаною проти сил взаємодії молекул

$$\Delta U_{\mu} = a \cdot \left( \frac{1}{V_p} - \frac{1}{V_n} \right),$$

де  $V_p$  і  $V_n$  – молярні об'єми рідини і пари,  $a$  – поправка на сили притягання в рівнянні Ван-дер-Ваальса.

Робота по розширенню пари проти зовнішнього тиску визначається формулою  $A_{\mu} = p_n (V_n - V_p)$ . Враховуючи, що  $V_p \ll V_n$  одержимо

$$Q_{\mu} = \frac{a}{V_p} + p_n \cdot V_n.$$

Тоді, питома теплота випаровування води при  $200^{\circ}\text{C}$  рівна

$$L = \frac{Q_{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \left( \frac{a}{V_p} + p_n \cdot V_n \right).$$

Молярний об'єм рідини рівний  $V_p = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / \text{моль}$ . Молярний об'єм пари можна визначити з рівняння Клапейрона-Менделєєва

$$V_n = \frac{RT}{p_n}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, маємо

$$V_n = \frac{8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 473 \text{ К}}{16,21 \cdot 10^5 \text{ Па}} = 2,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}.$$

Поправку  $a$  визначимо за параметрами речовини в критичному стані

$$a = \frac{27 \cdot T_{\text{кр.}}^2 \cdot R^2}{64 \cdot p_{\text{кр.}}} = \frac{27 \cdot 647^2 \text{ К}^2 \cdot 8,31^2 [\text{Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})]^2}{2,17 \cdot 10^7 \text{ Па}} = 0,556 \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2}.$$

Підставляючи в формулу для питомої теплоти випаровування води числові значення величин, маємо

$$L = \frac{l}{18 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}} \cdot \left( \frac{0,556 \text{ Па} \cdot \text{м}^6 \cdot \text{моль}^{-2}}{18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / \text{ммоль}} + 16,21 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 2,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \right) = 1,92 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

Частина енергії, яка витрачається на роботу проти зовнішніх сил визначається формулою

$$\gamma = \frac{A_\mu}{\mu \cdot L} = \frac{p_n \cdot V_n}{\mu \cdot L} = 0,113.$$

Таким чином, при випаровуванні енергія, в основному, витрачається на розривання зв'язків між атомами, а не на роботу розширення пари.

Задача 9.15. Використовуючи рівняння Клапейрона-Клаузіуса, визначіть нахили кривих фазової рівноваги вода – лід і вода – пара на  $p - T$  діаграмі поблизу потрійної точки. Як зміниться тиск насиченої пари води

при нагріванні її на  $1K$  при нормальному атмосферному тиску.

Розв'язання. Для води потрійна точка лежить на  $0,008K$  вище температури плавлення при нормальному атмосферному тиску. Так як температура потрійної точки дуже мало відрізняється від  $0^{\circ}C$ , то необхідні значення параметрів системи можна одержати з таблиць для  $0^{\circ}C$ : питомий об'єм насиченої пари  $V_1=206 \text{ м}^3/\text{кг}$ ; питомий об'єм води  $V_2=10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг}$ ; питомий об'єм льоду  $V_3=1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг}$ ; питома теплота плавлення льоду  $L_2 = 3,34 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$ ; питома теплота пароутворення води  $L_1=2,498 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$ . Криві випаровування,

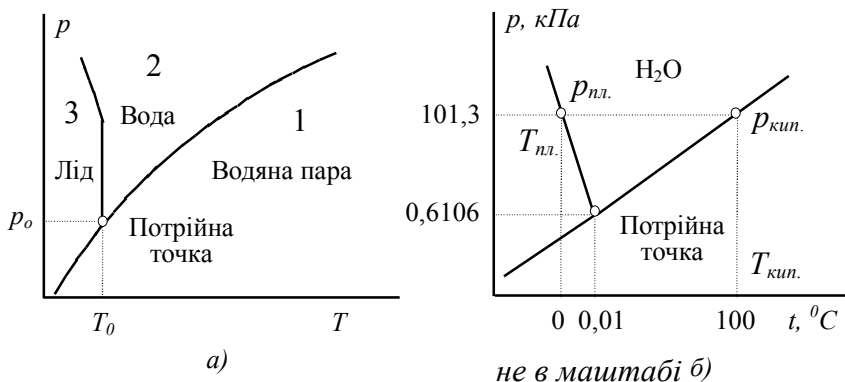


Рис. 25.

плавлення і сублімації ділять площину  $p$ - $T$  на три області (рис. 25). Область 1 відповідає газоподібному стану, 2 – рідкому, 3 – твердому. Нахил кривих випаровування та плавлення визначається рівнянням Клаузїуса-Клапейрона (9.3). Для кривої випаровування

$$\frac{dp_{12}}{dT} = \frac{L_1}{T(V_1 - V_2)},$$

а нахил кривої плавлення

$$\frac{dp_{23}}{dT} = \frac{L_2}{T(V_2 - V_3)}.$$

Підставляючи в останні формули числові значення величин, одержимо

$$\frac{dp_{12}}{dT} = \frac{2,498 \cdot 10^6 \text{ Дж / кг}}{273 \text{ К} \cdot (206 \text{ м}^3 / \text{кг} - 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{кг})} = 44,4 \frac{\text{Па}}{\text{К}};$$

$$\frac{dp_{23}}{dT} = \frac{3,34 \cdot 10^5 \text{ Дж / кг}}{273 \text{ К} \cdot (10^{-3} \text{ м}^3 / \text{кг} - 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{кг})} = -12,2 \cdot 10^6 \frac{\text{Па}}{\text{К}}.$$

Отже, криві фазової рівноваги для води з паром і води з льодом мають різні нахили, причому кут нахилу кривої рівноваги лід–вода до осі тисків по модулю в  $10^6$  раз менший ніж кривої рівноваги вода–пара. Аномальна поведінка кривої рівноваги лід–вода пояснюється тим, що густина льоду менша ніж густина води. Для більшості речовин густина у твердій фазі більша ніж густина в рідкій фазі і обидві криві фазової рівноваги нахилені однаково.

Для знаходження зміни тиску насиченості пари води при її нагріванні на 1К при нормальному атмосферному тиску (див. рис. 25, б) врахуємо, що питома теплота пароутворення води слабо залежить від температури. Тоді рівняння (9.3) може бути переписане у вигляді

$$\frac{dp_{12}}{dT} = \frac{L_1}{T_{\text{кип.}}(V_n - V_2)}.$$

Для знаходження питомого об'єму пари застосуємо рівняння Клапейрона-Менделєєва  $p_{\text{кип.}} V = \frac{m}{\mu} RT_{\text{кип.}}$  звідки

$$V_n = \frac{V}{m} = \frac{RT_{\text{кип.}}}{\mu \cdot p_{\text{кип.}}}, \text{ тоді}$$

$$\frac{dp_{12}}{dT} = \frac{L_1 p_{\text{кип.}} \cdot \mu}{R \cdot T_{\text{кип.}}^2},$$

або

$$\Delta p = \frac{L_1 p_{\text{кип.}} \cdot \mu}{R \cdot T_{\text{кип.}}^2} \cdot \Delta T.$$

Підставляючи числові значення, врахувавши, що  $dT=1$  К одержимо:

$$\Delta p = \frac{2,4 \cdot 10^6 \text{ Дж / кг} \cdot 101,3 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}}{8,31 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)} \cdot 373^2 \text{ К}} \cdot 1 \text{ К} = 3,8 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

Отже при нагріванні насиченої пари води на 1 К біля 373К її тиск зростає на 3,8%.

Задача 9.16. У воді об'ємом  $V=0,5$  л розчинено  $m=20$  г кухонної солі при кімнатній температурі  $T_{\text{к}}=17^\circ\text{C}$ . Осмотичний тиск при цьому виявився рівним  $p_{\text{осм.}}=2,3 \cdot 10^6$  Па. Визначити ступінь дисоціації солі. На скільки зміниться температура замерзання такого розчину. Питома теплота плавлення льоду  $L=3,34 \cdot 10^5$  Дж/кг. Молярна маса кухонної солі  $58,5 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Розв'язання. Нехай  $\alpha$ -та частина молекул кухонної солі (NaCl) дисоціює на іони  $\text{Na}^+$  та  $\text{Cl}^-$ . Якщо розчинено  $\nu$  молів солі, то, очевидно, в розчині буде  $(1-\alpha)\nu$  молів недисоційованої солі,  $\alpha\nu$  молів іонів  $\text{Na}^+$  та  $\alpha\nu$  іонів  $\text{Cl}^-$ . Отже, в цілому, у розчині буде  $(1-\alpha)\nu + \alpha\nu + \alpha\nu = (1+\alpha)\nu$  молів розчиненої речовини.

Тоді, згідно закону Вангт-Гоффа і формули (9.7а) осмотичний тиск розчиненої і частково дисоційованої солі буде

$$p_{\text{осм.}} = (1+\alpha)\nu \frac{RT}{V},$$

де  $V$  – об'єм розчину. Звідси легко знайти  $\alpha$



$$\alpha = \frac{P_{осм} \cdot V}{\nu \cdot RT} - 1.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$\alpha = \frac{2,3 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{\frac{20}{58,5} \cdot 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 290 \text{ К}} - 1 = 0,4$$

Отже, у розчині дисоційовані 40% молекул кухонної солі.

Для знаходження на скільки зміниться температура замерзання розчину скористаємося формулою (9.10б)

$$\Delta T_{зам.} = \frac{P_{осм} \cdot T_3}{\nu_p \cdot \mu \cdot L},$$

де  $T_3$  – температура замерзання чистого розчинника, тобто води.

$\nu_p$  – кількість молів розчинника в одиниці об'єму, тобто

$\nu_p = \frac{m}{\mu V}$ , де  $m$  – маса розчинника. Припускаючи, що

розчинність і ступінь дисоціації не змінюються з температурою, одержимо

$$\Delta T_{зам.} = T_3 \cdot \frac{P_{осм} \cdot V}{m \cdot L}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, та виконуючи обчислення, маємо

$$\Delta T_{зам.} = 273 \text{ К} \cdot \frac{2,3 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{20 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 3,34 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}} = 47 \text{ К}.$$

#### 9.4. Задачі для аудиторної роботи

9.17. При температурі  $T=96,5^\circ\text{C}$  в сірці спостерігається структурний фазовий перехід. Кристалічна структура з ромбічної

сингонії переходить в моноклінну. При тиску  $10^5$  Па питома теплота фазового перетворення  $L=10^4$  Дж/кг, зміна питомого об'єму  $\Delta V=0,014$  см<sup>3</sup>/кг. Знайти зміщення температури фазового переходу  $\Delta T_c$  при зміні тиску на  $\Delta p=1$  атм.

9.18. В закритому мідному калориметрі масою 0,2 кг знаходиться 1 кг льоду при температурі  $-10^\circ\text{C}$ . В калориметр впустили водяну пару масою 0,2 кг при температурі  $110^\circ\text{C}$ . Яка температура встановиться в калориметрі? Питома теплоємність парів води в інтервалі  $100^\circ\text{C} - 110^\circ\text{C}$  можна вважати сталою і рівною  $1,7 \cdot 10^3$  Дж/(кгК).

9.19. При певних умовах вода може бути переохолоджена до  $-10^\circ\text{C}$ . Скільки льоду утвориться із такої води масою 1кг, якщо в неї кинути невеличкий кусочок льоду і цим викликати замерзання води? До якої температури необхідно переохолодити воду, щоб вона повністю перетворилася в лід?

9.20. Лід масою 1 кг розміщений у теплоізоляційному калориметрі і піддається тиску 690 атм. Скільки льоду розплавиться при цьому, якщо для зміни температури плавлення на 1К необхідно змінити тиск на 380 Па? Пониження температури плавлення льоду від  $0^\circ\text{C}$  вважати пропорційним збільшенню тиску понад атмосферного.

9.21. Свинцева пуля, яка летить із швидкістю 400 м/с попадає у сталеву плиту і відскакує від неї із швидкістю 300 м/с. Яка частина пулі розплавиться, якщо в момент удару її температура 380К і на нагрівання пулі тратиться 0,8 всієї роботи, виконаної при ударі.

9.22. Поблизу потрійної точки тиск  $p$  насиченої пари двоокису вуглецю залежить від температури як  $\lg p = a + b/T$ , де  $a$  і  $b$  постійні. Якщо  $p$  задано в атмосферах, то для процесу сублімації  $a = 9,05$ , і  $b=1800\text{K}$ , а для процесу випаровування –  $a = 6,78$  і  $b = 1310\text{K}$ . Знайти температуру і тиск у потрійній точці, значення питомих теплот сублімації випаровування і плавлення поблизу потрійної точки.

9.23. Воду масою 1 кг нагріли до від  $10^{\circ}\text{C}$  до  $100^{\circ}\text{C}$ , при якій вона вся перетворилась у пару. Знайти приріст питомої ентропії системи.

9.24. Знайти осмотичний тиск у розчині при  $27^{\circ}\text{C}$  у розчині, що складається із 8 г нафталіну ( $\text{C}_{10}\text{H}_8$ ) та 100 г бензолу. Врахувати, що нафталін у бензолі не дисоціює.

9.25. На скільки Кельвін потрібно нагріти розчин, щоб, не змінюючи його концентрацію, одержати таке ж збільшення осмотичного тиску, як при збільшенні концентрації на 20%. Початкова температура розчину  $20^{\circ}\text{C}$ .

9.26. У колбі, що містить воду об'ємом  $500\text{cm}^3$  розчинено 15 г цукру ( $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$ ). На скільки зменшиться тиск парів води над розчином при  $100^{\circ}\text{C}$ ?

9.27. При температурі  $20^{\circ}\text{C}$  в одному літрі води розчиняється  $28\text{cm}^3$  кисню. Яка густина кисню у воді, вільна поверхня якої межує з атмосферним повітрям. Вважати, що кисень становить 23% масової долі повітря.

### **9.5. Задачі для самостійної роботи**

9.28. В колбі знаходиться вода при температурі  $0^{\circ}\text{C}$ . Викачуванням з колби повітря і парів води заморозили всю воду. Яка частина води при цьому випарувалася?

9.29. В кусочку льоду, який має температуру  $0^{\circ}\text{C}$  зроблено заглиблення, об'єм якого  $160\text{cm}^3$ . В це заглиблення наливають 60 г води, температура якої  $75^{\circ}\text{C}$ . Який об'єм буде мати вільна від води частина заглиблення, коли вода охолоне до  $0^{\circ}\text{C}$ ?

9.30. На скільки зміниться питома теплота плавлення речовини при пониженні температури плавлення на  $\Delta t$ , якщо теплоємності речовини у рідкій і твердій фазах відповідно рівні  $c_1$  та  $c_2$ ?

9.31. З якою швидкістю повинні летіти назустріч одна одній два однакових кусочки льоду, які мають температуру мінус  $10^{\circ}\text{C}$ , щоб після удару вони повністю перетворились у пару? Розв'язати задачу при умові, що кусочки льоду мають маси  $m_1$  та  $m_2$ .

9.32. Насичена водяна пара знаходиться при температурі  $100^{\circ}\text{C}$  в циліндричній посудині під невагомим поршнем. При повільному переміщенні поршня невелика кількість пари масою  $0,70$  г сконденсувалась. Яка робота була виконана над газом. Пар можна вважати ідеальним газом, а об'ємом з конденсованої рідини можна знехтувати.

9.33. Простір в циліндрі під поршнем, який має об'єм  $5,0$  л, займає насичена водяна пара, температура якої  $100^{\circ}\text{C}$ . Знайти масу рідкої фази, яка утворюється в результаті ізотермічного зменшення об'єму під поршнем до  $1,6$  л. Насичену пару можна вважати ідеальним газом.

9.34. Лід з початковою температурою  $0^{\circ}\text{C}$  в результаті нагрівання перетворили спочатку у воду, а потім і пару при  $100^{\circ}\text{C}$ . Знайти приріст питомої ентропії системи.

9.35. В калориметр з великою кількістю льоду, що має температуру  $0^{\circ}\text{C}$ , вилили  $5$  г розплавленого свинцю, який має температуру плавлення  $327^{\circ}\text{C}$ . Знайти приріст ентропії системи свинець – лід до моменту встановлення теплової рівноваги.

9.36. Водяну пару, яка знаходиться в просторі під поршнем в циліндрі, стискають (або розширюють) так, що вона залишається весь час насиченою, знаходячись на грані конденсації. Знайти молярну теплоємність, як функцію температури, вважаючи пару ідеальним газом і нехтуючи питомим об'ємом рідини в порівнянні з питомим об'ємом пари.

9.37. В Антарктиді під трьохкілометровою товщею льоду виявлені озера прісної води. Визначити температуру води в цих озерах, якщо прийняти, що відношення густини льоду до густини води становить  $0,917$ .

9.38. Знайти приріст питомої теплоти пароутворення води при підвищенні температури від 323К до 373К. Вважати теплоємність води постійною, а водяну пару ідеальним газом.

9.39. На дно посудини з двома літрами водного розчину глюкози ( $C_6H_{12}O_6$ ) опущена закрита знизу тонка циліндрична трубка із напівпроникними стінками. При температурі  $20^{\circ}C$  вода налита в трубку знаходиться в рівновазі, якщо її рівень на 37 см нижчий ніж рівень розчину. Скільки глюкози знаходиться у розчині?

9.40. Яку масу NaCl потрібно розчинити в у воді, щоб отримати такий же осмотичний тиск як при розчиненні 0.4 г  $CuCl_2$  в такому ж об'ємі води при тій же температурі? Вважати, що в обох випадках солі повністю дисоціюють.

9.41. Колба наполовину заповнена водою, яка повністю дегазована кип'ятінням, і наполовину газоподібним азотом при тиску 760 мм рт. ст. Який тиск встановиться в колбі після досягнення рівноваги. Температура постійна і рівна  $20^{\circ}C$  і при цій температурі в 1 л води розчинюється  $14 \text{ см}^3$  азоту.

## 10. ПРИКЛАДИ ЗАЛІКОВИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

### Контрольна робота № 1

#### Варіант 1

1. Є два однакових кубики пофарбованих в сини й і червоний колір, На гранях обох кубиків нанесені цифри 1, 2, ..., 6. Яка імовірність того, що при одночасному кидані обох кубиків сума цифр, які випадуть, буде рівна 10?

2. Випадкова величина представлена таким законом розподілу:

$x_i$	1	3	5	7	9
$p_i$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Визначити середнє значення, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини  $x$ .

3. Фізична величина  $x$  в межах від 0 до 10 одиниць задана функцією розподілу  $f(x)=Vx^2$ . Знайти середнє значення, дисперсію і середнькватратичне відхилення фізичної величини  $x$ .

4. При спостереженні в мікроскоп у рідині частинок гуммігугу знайдено, що середнє число їх у шарах, які розміщені на відстані 40 мкм, відрізняються одне від одного в 2 рази. Температура рідини 290 К. Діаметр частинок 0,4 мкм, а їх густина на  $0,2 \text{ г/см}^3$  більша за густину рідини. Знайти із цих даних число Авогадро.

5. У балоні знаходиться 2,5 г кисню при температурі 400 К. Знайти середню арифметичну, середню квадратичну та найбільшімовірну швидкості молекул. Яке число молекул мають швидкості, які перевищують значення середньої квадратичної швидкості?

**Варіант 2**

1. Два стрільці одночасно і незалежно стріляють у мішень. Імовірність влучення в мішень першим стрільцем 0,8, а другим – 0,7. Знайти ймовірність того, що мішень не буде пошкоджена (мішень пошкоджена коли хоча б один із стрільців попадає в ціль).

2. Випадкова величина представлена наступним законом розподілу:

$x_i$	1	2	3	4	5
$p_i$	0,05	0,1	0,3	0,4	0,15

Визначити середнє значення, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини  $x$ .

3. Розподіл імовірності для деякої випадкової величини  $x$  має вигляд:  $dp(x) = C \exp(-\lambda x) \cdot dx$ ,  $\lambda > 0$   $0 \leq x < \infty$ . Пронормувати розподіл. Знайти середні значення  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$  та флуктуацію випадкової величини  $x$ .

4. Перен, спостерігаючи за допомогою мікроскопу залежність концентрації завислих у рідині частинок гуммігуту від висоти та використавши розподіл Больцмана, експериментально знайшов значення числа Авогадро. В одному із своїх дослідів Перен знайшов, що при відстані між двома шарами в 100 мкм число завислих частинок в одному шарі в два рази більше ніж в іншому. Температура рідини  $20^\circ\text{C}$ . Діаметр частинок  $0,3 \cdot 10^{-4}$  см, густина рідини на  $0,2 \text{ г/см}^3$  менше густини частинок. Знайти із цих даних значення числа Авогадро.

5. У посудині знаходиться 8 г кисню при температурі 1600К. Яке число молекул кисню мають кінетичну енергію поступального руху, яка перевищує значення  $W_0 = 6,65 \cdot 10^{-20}$  Дж?

**Варіант 3**

1. Із колоди з 36 картами навмання виймають 3. Яка імовірність того, що серед цих карт буде один ( все рівно який) туз?

2. Випадкова величина представлена наступним законом розподілу:

$x_i$	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$p_i$	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Визначити середнє значення, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини  $x$ .

3. Частинка здійснює гармонічні коливання вздовж осі  $x$ , при цьому її координата змінюється з часом по закону:  $x = a \cos \omega t$ . Знайти імовірність  $dp(x)$  знайти частинку при випадковому спостереженні в середині відрізка

$[x, x+dx]$ . Вирахувати середні значення  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$  та флуктуацію координати частинки.

4. У повітрі знаходяться частинки, які мають масу  $m = 8 \cdot 10^{-22}$  кг і об'єм  $V = 5 \cdot 10^{-22}$  м<sup>3</sup>. Знайти зменшення їх концентрації на висотах  $h_1 = 3$  м та  $h_2 = 30$  м. Температура повітря 0°C, густина повітря 1,3 кг/м<sup>3</sup>.

5. Користуючись розподілом Максвелла визначити число молекул водню, які проходять за 1 секунду через площадку площею 1 см<sup>2</sup>, яка розміщена перпендикулярно до напрямку руху молекул. Водень знаходиться при нормальних умовах.

#### Варіант 4

1. У коробці є  $n=30$  білих і  $m=10$  чорних куль, які в іншому повністю ідентичні між собою. Кулі добре перемішані. Знайти ймовірність виймання чорної  $P(ч)$  і білої  $P(б)$  кулі із коробки при одному випробуванні. Перевірити умову нормування. Знайти ймовірності послідовного виймання двох чорних, двох білих, чорної і білої, білої та чорної кулі, якщо кулі після першого випробування повертаються в коробку.

2. Випадкова величина представлена наступним законом розподілу:

$x_i$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$p_i$	0,05	0,2	0,5	0,2	0,05



Визначити середнє значення, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини  $x$ .

3. Розподіл імовірності значень деякої випадкової величини  $x$  описується функцією  $f(x)=Ax(5-x)$  при  $0 \leq x \leq 5$ . Поза цим інтервалом  $f(x)=0$ .  $A$  – стала величина. Знайти середні значення  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$  та флуктуацію випадкової величини  $x$ .

4. Знайти середню потенціальну енергію молекул повітря в полі тяжіння Землі. На якій висоті потенціальна енергія молекул рівна середній потенціальній енергії? Температура повітря рівна  $0^\circ\text{C}$  і стала по висоті. Молярна маса молекул повітря  $29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

5. У посудині знаходиться 8 г кисню при температурі 600К. Знайти середню арифметичну, середню квадратичну та найбільш імовірну швидкості молекул. Яке число молекул мають швидкості в інтервалі  $[a_1, a_2]$ , де  $a=v/v_m$ ,  $v_m$  – найбільш імовірна швидкість,  $a_1=1$ ,  $a_2=2$ .

**Варіант 5**

1. Із колоди з 36 картами навмання виймають 3. Яка імовірність того, що серед цих карт буде не менше, як один (любий) туз?

2. Випадкова величина представлена наступним законом розподілу:

$x_i$	2	4	6	8	10
$p_i$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Визначити середнє значення, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини  $x$ .

3. Випадкова величина  $x$  неперервно змінюється на проміжку  $[0,10]$ . Знайти середні значення  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$  та флуктуацію випадкової величини  $x$ , якщо густина імовірності розподілу величини  $x$  на цьому проміжку стала.

4. На якій висоті густина газу складає 50% від густини його над рівнем моря? Температура газу рівна  $0^\circ\text{C}$  і стала по

висоті. Задачу розв'язати для 1) повітря і 2) водню. Молярна маса молекул повітря  $29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

5. У посудині знаходяться молекули азоту при температурі 600 К Знайти за допомогою функції розподілу Максвелла: а) функцію розподілу молекул за кінетичними енергіями; б) найбільшмовірне значення кінетичної енергії.

## Контрольна робота № 2.

### Варіант 1.

1. Визначіть кількість молекул водню в 1л, якщо тиск дорівнює 2 Па, а середня квадратична швидкість молекул становить 2400м/с.

2. Газ з молярною масою  $M=0.029$ кг/моль знаходиться під тиском  $P=1$ атм. між двома однаковими паралельними пластинами. Температура газу зростає лінійно від  $T_1$  біля однієї пластини до  $T_2$  біля другої ( $T_1=270$ К,  $T_2=300$ К). Об'єм газу між пластинами  $V=0.2$ м<sup>3</sup>. Знайти його масу.

3. Оцінити масу  $M$  зрідженого повітря, яка випаровується за час  $\tau=1$  год. із посудини Дюара, якщо тиск повітря, яке знаходиться між стінками (при кімнатній температурі  $T_0=293$ К), рівний  $p=10^{-3}$  мм.рт.ст. Площа поверхні посудини Дюара  $S=600$ см<sup>2</sup>, питома теплота випаровування зрідженого повітря  $g=2 \cdot 10^5$  Дж/кг, а його температура  $T=93$  К. Відстань між стінками посудини мала порівняно з довжиною вільного пробігу молекул.

4. Аеростат наповнений воднем при температурі 15°C при незмінному тиску атмосфери під впливом сонячної радіації температура підвищилась до 37°C, і надлишок газу ввійшов через випускний вентиль, внаслідок чого маса аеростата зменшилась на 6.05кг. Визначити об'єм аеростату.

**Варіант 2.**

1. У двох балонах об'ємами 5 та 3 літри знаходяться різні гази при тисках 3 і 4 атм. відповідно. При цьому в першому балоні знаходиться 0.5 кг, а в другому 0.4.кг газу. У якого з газів більша середня квадратична швидкість молекул?

2. Поршневим повітряним насосом відкачують посудину об'ємом  $V$ . За один цикл (хід поршня) насос захоплює об'єм  $v$ . Через скільки циклів тиск в посудині зменшиться в  $\eta$  раз. Процес вважати ізотермічним, гази ідеальним.

3. Простір між двома довгими коаксіальними циліндрами заповнений газом при великому тиску. Радіуси циліндрів рівні  $R_1=2$  см і  $R_2=5$  см. Визначити розподіл температури в просторі між циліндрами, якщо температури обох циліндрів стали і дорівнюють відповідно  $T_1=373$  К і  $T_2=273$  К.

4. Балон ємністю 40 л містить 1.97 кг вуглекислого газу. Балон витримує тиск не більше 30 атм . При якій температурі виникає небезпека вибуху?

**Варіант 3**

1. Обчисліть число молекул в 1 кг газу, середня квадратична швидкість руху яких при  $100^\circ\text{C}$  становить 540 м/с.

2. Густина суміші азоту і водню при температурі  $47^\circ\text{C}$  тиску 2 атм. рівна 0.30 г/л. Знайти концентрацію молекул азоту і водню в суміші.

3. Визначити кут  $\varphi$ , на який повернеться диск, підвішений на пружній нитці, якщо під ним на відстані  $h=10^{-2}$  м обертається другий такий самий диск з кутовою швидкістю  $\omega=50$ рад/сек. Радіуси дисків  $R=10$ см, модуль кручення нитки  $E=10^5$ Н/рад, коефіцієнт внутрішнього тертя повітря  $\eta=1,8 \cdot 10^5$ Пас. Крайовими ефектами знехтувати. Рух повітря між дисками вважати ламінарними.

4. З балона із стиснутим воднем ємністю 10 л внаслідок пошкодження вентиля витікає газ. При  $7^\circ\text{C}$  манометр показував

в МПа. Через деякий час при температурі  $17^{\circ}\text{C}$  манометр показав такий же тиск. Яка маса газу витекла з балона?

#### **Варіант 4**

1. Який тиск на стінки посудини чинять молекули газу, якщо маса газу 3 г, об'єм 0.5 л, а середня квадратична швидкість молекул 500 м/с.

2. У ртутному барометрі з циліндричною трубкою відстань від рівня ртуті у чашці до запаяного кінця трубки дорівнює  $L$ . В трубку при нормальному тиску  $H_0$  і температурі  $T_1$  потрапила певна кількість повітря за рахунок чого довжина ртутного стовпчика зменшилась і дорівнює  $h_1$ . Обчислити поправку  $\Delta h$ , яку треба додавати до показів барометра  $h$  при будь-яких температурах  $T$ .

3. В'язкість аргону (молярна маса  $\mu=40\cdot 10^{-3}$  кг/моль)  $\eta=2,1\cdot 10^{-5}$  Пас. Вирахувати такі величини для аргону при нормальних умовах: 1) середню довжину вільного пробігу атомів; 2) середнє число зіткнень атомів в  $1\text{ см}^3$  за 1с; 3) ефективний переріз атома  $\sigma$ ; 4) радіус атома  $g$ .

4. В посудину об'ємом 10 л, наповнену сухим повітрям при нормальних умовах ( $p=10^5$  Па,  $T=273\text{K}$ ), вводять 3г води. Посудину щільно закупорюють і нагрівають до  $100^{\circ}\text{C}$ . Визначити тиск вологого повітря в посудині при цій температурі.

#### **Варіант 5**

1. Середня квадратична швидкість молекул газу становить 400 м/с. Визначити об'єм, що займає газ при тиску 100 кПа, якщо його маса становить 1 кг.

2. Дві посудини А і В з повітрям, об'єми яких дорівнюють  $V_1$  і  $V_2$  з'єднані між собою вузькою трубкою з краном. Температура посудин відповідно дорівнюють  $T_1$  і  $T_2$  під час досліду підтримуються сталими. При закритому крані, тобто

роз'єднаних посудинах тиск повітря в посудинах А і В дорівнювали відповідно  $p_1$  і  $p_2$ . Потім крани відкрили. Який тиск установиться в системі, якщо  $p_1=0.5$  атм.,  $p_2=0.2$  атм.,  $V_1=0.25$  л.,  $V_2=0.4$  л.,  $T_1=373$  К,  $T_2=253$  К?

3. В тонкостінній посудині об'ємом  $V$ , стінки якої підтримуються при постійній температурі, знаходиться ідеальний газ. Посудина поміщена у вакуум. Як буде змінюватись концентрація молекул  $n$  газу в середині посудини, якщо в його стінці виникне малий отвір площею  $S$ . Визначити час  $\tau$ , через який тиск газу в середині посудини зменшиться в два рази.

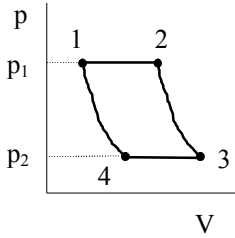
4. По газопроводу тече вуглекислий газ при тиску  $10^5$  Па і температурі  $17^\circ\text{C}$ . Яка середня швидкість руху газу в трубі, якщо за 5 хвилин через площу поперечного перерізу труби рівну  $6\text{ см}^2$  протікає  $2.5$  кг вуглекислого газу?

### Контрольна робота № 3

#### Варіант 1

1. Визначити зміну внутрішньої енергії  $\Delta U$  маси азоту при його адіабатичному розширенні від об'єму  $V_1=10$  л, який він займає при нормальному тиску  $p_0$ , до об'єму  $V_2=320$  л.

2. Один моль кисню здійснює цикл, який складається з двох ізобар 1–2 і 3–4 при тисках  $p_1$  і  $p_2$  та двох ізотерм при температурах  $T_1$  і  $T_2$  (див. рис.). Визначити коефіцієнт корисної дії циклу, якщо  $p_1=6p_2$ ,  $T_1=200$  К,  $T_2=600$  К. Покажіть, що к.к.д. цього циклу менший за к.к.д. циклу Карно.

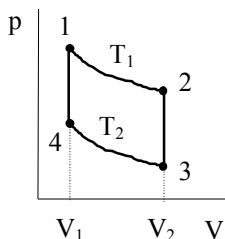


3. При зміні стану кисню в політропічному процесі його молярна теплоємність  $C=-9,6$  Дж/(моль·К). Маса кисню  $m=4$  кг. Визначити зміну внутрішньої енергії, зміну ентропії та виконану

газом роботу, якщо початкові параметри кисню  $p_1=5 \cdot 10^5$  Па,  $T_1=350$  К і під час цього процесу газу було передано 100 кДж тепла.

### Варіант 2

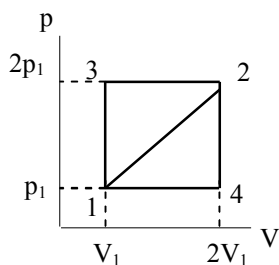
1. Зміна стану ідеального газу відбувається по політропічному процесі  $p=kV^2$ . Визначити роботу, яку виконує 1 моль газу при підвищенні його температури від  $T_1$  до  $T_2$ .



2. Один моль азоту здійснює цикл, який складається з двох ізохор 2–3 і 1–4 при об'ємах  $V_1$  і  $V_2$  та двох ізоterm при температурах  $T_1$  і  $T_2$  (див. рис.). Визначити коефіцієнт корисної дії циклу, якщо:  $V_2=2,7V_1$ ,  $T_1=500$ К,  $T_2=300$ К. Покажіть, що к.к.д. цього циклу менший за к.к.д. циклу Карно.

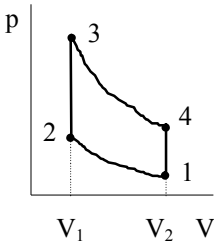
3. Холодильник споживає з електричної мережі 200 Вт. Температура повітря в кімнаті  $T_0=293$  К. Знайти температуру в морозильній камері холодильника  $T_1$ , якщо кількість тепла, яке відводиться з камери, в 5 раз перевищує кількість споживаної енергії. Холодильник працює по циклу Карно.

### Варіант 3



1. Моль ідеального газу з молярною теплоємністю  $C_V=5/2R$  тричі зворотно переводиться із стану 1 в стан 2 шляхом виконання трьох різних процесів: 132, 142, 12 (див. рисунок). Знайти кількості теплоти  $Q_{132}$ ,  $Q_{142}$  і  $Q_{12}$ , які передані газу при виконанні кожного із вказаних процесів. Знайти молярну

теплоємність  $C_{12}$  газу для процесу 12. Всі результати виразити через газову постійну  $R$  і температуру  $T_1$  газу в стані 1.

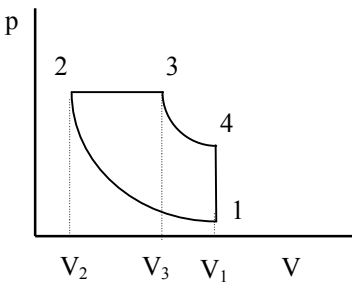


2. На рисунку зображений цикл двигуна Отто, що складається з двох ізохор 2–3 і 1–4 при об'ємах  $V_1$  і  $V_2$  та двох адіабат 1–2 та 3–4. Відомий коефіцієнт стиснення робочого тіла  $(V_2/V_1)=n$ . Визначити коефіцієнт корисної дії циклу, якщо:  $n=3$ ,  $\gamma=1,3$ .

3. Два моли водню розширюються в пустоту, в наслідок чого об'єм газу збільшується від значення  $V_1=2$  л до значення  $V_2=10$  л. Яку кількість теплоти потрібно надати газу, щоб його температура не змінилася? ( $a = 0,024$  Па м<sup>6</sup>/моль<sup>2</sup>).

### Варіант 4

1. Для визначення  $\gamma = C_p/C_v$  методом Клемана-Дезорма в посудину через кран нагнітають газ, щоб тиск у ній  $p_1$  став вищий атмосферного  $p_0$ . Потім відкривають і швидко закривають кран. При цьому газ адіабатично розширюється до тиску  $p_0$ . Через певний час, коли газ у посудині нагріється до кімнатної температури, цього тиск стане  $p_2$ . На основі цих даних знайти формулу для  $\gamma$ .

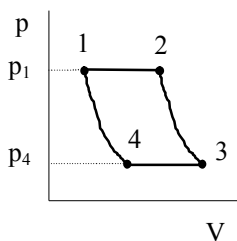


2. На рисунку зображений цикл, який складається із ізобари 2–3, ізохори 4–1 та двох адіабат 1–2 і 3–4 (цикл двигуна Дизеля). Відомі: коефіцієнт адіабатичного стиснення  $n=V_1/V_2$  і коефіцієнт ізобаричного розширення  $k=V_3/V_2$ . Визначити коефіцієнт корисної дії циклу, якщо:  $n=16$ ,  $k=2,5$  і  $\gamma=1,3$ .

3. Ідеальна теплова машина, яка працює за циклом Карно, виконує за один цикл роботу  $A=7,35 \cdot 10^4$  Дж. Температура нагрівника  $100^\circ\text{C}$ , температура холодильника  $0^\circ\text{C}$ . Визначити: 1) коефіцієнт корисної дії машини; 2) кількість тепла, яке отримує машина за один цикл від нагрівника; 3) кількість тепла, яке віддається за один цикл холодильнику.

### Варіант 5

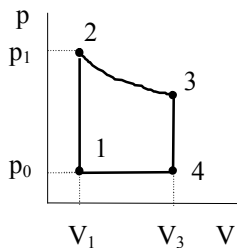
1. Побудуйте графік залежності молярної теплоємності  $c_m$  ідеального газу від показника  $n$  політропічного процесу. При яких значеннях  $n$  теплоємність газу є від'ємною величиною?



2. На рисунку зображений цикл, який складається із двох ізобар 1–2 і 3–4 та двох адіабат 4–1 і 2–3. Відомі: коефіцієнт адіабатичного стиснення  $n=p_1/p_4$ . Визначити коефіцієнт корисної дії циклу, якщо:  $n=16$  і  $\gamma=1,3$ .

3. У скляну трубку з внутрішнім діаметром  $d_1=2$  см вставлена скляна паличка діаметром  $d_2=1,8$  см так, що відстань між паличкою і внутрішньою поверхнею трубки всюди однакова. Нижній кінець трубки з паличкою помістили в посудину з водою. Визначити на яку висоту підніметься вода в скляній трубці,  $\alpha=7,28 \cdot 10^{-2}$  Н/м.

### Варіант 6



1. На рисунку зображений цикл, який складається з ізобари 1–4, двох ізохор 1–2 та 3–4 та адиабати 2–3. Відомі: коефіцієнт стиснення  $n=p_1/p_0$  і відношення  $k=V_3/V_1$ . Визначити коефіцієнт корисної дії циклу, якщо:  $n=16$ ,  $k=2$  і  $\gamma=1,3$ .

2. На нагрівання мідного стержня масою 1 кг, що знаходився



при температурі  $0^{\circ}\text{C}$ , витрачено 132 кДж тепла. Визначити відносну зміну об'єму стержня? Теплоємність міді визначити із закону Дюлонга і Пті. ( $\alpha=1,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ).

### Самостійна робота №4.

#### Варіант 1.

1. Які сили потрібно прикласти до кінців сталю стержня з площею поперечного перерізу 10 см, щоб не дати йому розширитись при нагріванні від 273 К до 303 К? Модуль Юнга сталі  $21 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ , коефіцієнт лінійного теплового розширення  $2,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

2. 10 г гелію займає об'єм 0.1 л при тиску  $10^8 \text{ Н/м}^2$ . Знайти температуру газу вважаючи його а) ідеальним; б) реальним.

#### Варіант 2.

1. Яку довжину повинні мати мідний та сталевий стержні при  $0^{\circ}\text{C}$ , щоб при довільній температурі сталю стержень був довший ніж мідний на 5 см? Коефіцієнт лінійного теплового розширення сталі  $2,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , міді –  $1,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

2. 1 моль азоту знаходиться при температурі 300 К тиску  $5 \cdot 10^6 \text{ Па}$ . Знайти об'єм цього газу вважаючи його реальним.

#### Варіант 3.

1. Обчислити по класичній теорії теплоємності питому теплоємність кристалів алюмінію та міді, якщо їх молярні маси відповідно рівні 27 та 64 г/моль, а густини 2.6 та  $8.6 \text{ г/см}^3$ .

2. Визначити тиск 280 г азоту при температурі 300 К в посудині об'ємом а)  $1.00 \text{ м}^3$ ; б) 0.50 л.

#### Варіант 4.

1. Один моль азоту розширюється адіабатично в пустоту, в результаті чого об'єм газу збільшується від 1 л до 10 л. На скільки зміниться температура газу?

2. Дві вертикальні паралельні один одному скляні пластини занурені частково у воду. Щілина між пластинами 0.5 мм, розмір пластини по горизонталі 10 см. Вважаючи змочування повним визначити висоту підняття води в щілині, та силу з якою пластини притягуються одна до одної. Коефіцієнт поверхневого натягу води 0.073 Н/м.

**Варіант 5.**

1. Яку кількість теплоти необхідно підвести до 1 молю вуглекислого газу при його розширенні в пустоту від об'єму 1 л до об'єму 10 л, щоб його температура не змінилась. Газ вважати реальним.

2. Сферична крапля ртуті була розділена на а) 10, б) 100, в) 1000 однакових крапель. Як змінився при цьому лапласівський тиск в середині крапель? Коефіцієнт поверхневого натягу ртуті – 0.5 Н/м.

## 11. ВІДПОВІДІ

- |  |   |
|--|---|
| 1.13 $0,67 \cdot 10^3$ молекул                   | 2.22 500 м/с;                               |
| 1.14 $2,7 \cdot 10^{10}$ с $\cong$ 865 років     | 575 м/с;                                    |
| 1.15 $26,95 \cdot 10^{23}$ електронів            | 625 м/с                                     |
| 1.16 $1,04 \cdot 10^{12}$ іонів                  | 2.23 10 км;                                 |
| 1.17 $3,87 \cdot 10^{18}$ молекул                | 136 км                                      |
| 1.18 $8,7 \cdot 10^{13}$ молекул                 | 2.24 $10^8$                                 |
| 1.19 $3,3 \cdot 10^{-27}$ кг,                    | 2.25 $11904/42840 \approx 0,28$             |
| $53 \cdot 10^{-27}$ кг                           | 2.26 $a - 0,028,$                           |
| 1.20 $3 \cdot 10^3$ см                           | $b - 0,056$                                 |
| 1.21 $2,7 \cdot 10^{11}$ сек $\approx$           | 2.27 3,34, 255                              |
| 8500 років                                       | 2.28 0,2; 0,2; 0,6;                         |
| 1.22 0,038%                                      | 0,8; 0,4; 0,8                               |
| 1.23 $3,12 \cdot 10^{19}$ нейтронів,             | 2.29 $\langle \mu \rangle = \mu_0(2p - 1),$ |
| $2,90 \cdot 10^{19}$ ел. і прот.                 | $\langle \mu^2 \rangle = \mu_0^2$           |
| 2.16 $P(a) = 0,75;$                              | 2.31 $2,88 \cdot 10^{-3}$ с/м               |
| $P(b) = 0,25;$                                   | 2.32 $1,12 \cdot 10^{24}$                   |
| $P(ac) \approx 0,56;$                            | 2.33 2050 м/с,                              |
| $P(bb) \approx 0,58;$                            | 2240 м/с,                                   |
| $P(cb) = P(bc) \approx 0,19$                     | водень                                      |
| 2.17 $p_1=1/32, p_2=5/32,$                       | 2.35 6900м                                  |
| $p_3=10/32, p_4=5/32,$                           | 2.36 0,61                                   |
| $p_5=1/32$                                       | 3.16 $24000$ ч/см <sup>3</sup> ,            |
| 2.18 0,25;                                       | $7,2 \cdot 10^7$ м,                         |
| $0,98 \cdot 10^{-3};$                            | $1,51 \cdot 10^5$ с                         |
| $0,56 \cdot 10^{23}$                             | 3.17 $7 \cdot 10^{28}$                      |
| 2.19 0,79; 1, 0,49; 0,122                        | 3.18 $4,6 \cdot 10^{-2}$ мм рт.ст.          |
| 2.20 $\frac{2}{a}; \frac{2}{3}a; \frac{1}{2}a^2$ | 3.19 $2,53 \cdot 10^{-2}$ еВ                |
| 2.21 5,1   | 3.20 $p \leq 1,35$ Па                       |
|  | 3.21 3,14                                   |
|  | 3.22 $1,68 \cdot 10^{25}$ м <sup>-3</sup> , |
|  | $0,98 \cdot 10^{25}$ м <sup>-3</sup>        |

3.23	$\rho \mu \ln(T_2/T_1)/R(T_2-T_1)$ .	4.16	$8,65 \text{ г/м}^3$ ,
3.24	$8,63 \text{ м}^3/\text{кг}$		$8,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$
3.25	$768 \text{ Па}$	4.17	$28,6^\circ\text{C}$
3.26	$79$	4.18	$12 \text{ см}$
3.27	$1,32 \text{ кг}$ .	4.19	$12 \text{ см}$
3.28	$0,9 \text{ м/с}$	4.20	$2/3 \sqrt{3}$
3.29	$1,03 \cdot 10^5 \text{ Па}$	4.21	$5,7 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^2$
3.30	$051 \text{ кг}$	4.22	Збільшиться у 2 рази
3.31	$3,7 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ,	4.23	$7,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,
	$12 \text{ разів}$		$1,27 \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$ ,
3.32	$9,3 \cdot 10^{-8} \text{ с}$		$3,96 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$
3.33	$6 \cdot 10^{-3} \text{ ммрт.см.}$ .	4.24	$40 \text{ Вт/м}^2$
3.34	$0,23$	4.25	$2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$
3.35	$11600 \text{ К}$ .	4.26	$6,9 \cdot 10^7 \text{ с}$
3.36	$1,5 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$	4.27	$\approx 6 \text{ год}$ .
3.37	$10^{21}$ ,	4.28	$930 \text{ К}$
	$4,7 \cdot 10^{-5} \text{ кг}$ ,	4.29	$0,36 \text{ К}$
	$4,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ .	4.31	$0,83 \text{ МДж}$
3.38	$0,75 \text{ МПа}$ ,	5.17	$600 \text{ Дж}$
	$3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	5.18	$1,47$
3.39	$637$	5.19	$21,8^\circ\text{C}$
3.40	$2,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$	5.20	$-0,7 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$
3.41	$2 \text{ см}$ ,	5.21	$C_v - R$
	$1,05 \cdot 10^5 \text{ Па}$	5.22	$3,15 \cdot 10^7 \text{ Дж}$
3.42	$2,53 \text{ г}$ ,	5.23	$1690^\circ\text{C}$ , $20,3 \cdot 10^5 \text{ Па}$
	$45 \text{ г/моль}$	5.24	$a - 1,5$ ; $b - 0,8$ .
3.43	$2 \cdot 10^5 \text{ Па}$	5.25	$Ve^{-\alpha T/R} = \text{const}$
3.44	$1,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$	5.26	а) $C = C_v + R/\alpha V$
3.45	$0,22 \cdot 10^5 \text{ Па}$		б) $C = C_p + RT_0/\alpha V$
3.46	$1,76 \text{ г}$	5.27	Для $\text{O}_2$ :
4.13	$T = T_1 + (T_2 - T_1) \times$ $\times \frac{(R - R_1)R_2}{(R_2 - R_1)R}$		$C_p = 908 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ ,
			$C_v = 649 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ ;
4.14	$0,15 \text{ Па}$		для $\text{N}_2$ :
			$C_p = 1040 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ ,

	$C_v = 741 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	6.28	4%
5.28	5950 Дж	6.29	$\eta_1 = 0,4,$
5.29	$a - 3,5 \text{ кДж},$ $b - 3,5 \text{ кДж}$		$\eta_2 = 0,5,$ $\eta_1/\eta_2 = 0,8$
5.30	$a - 2 \text{ Кдж},$ $b - 7 \text{ кДж}$	6.30	140 Дж
5.31	5,5 м <sup>3</sup>	6.31	244,1 К
5.32	$a - \Delta U = 253 \text{ Дж},$ $\Delta Q = - 658 \text{ Дж},$ $\Delta A = - 912 \text{ Дж};$ $b - \Delta U = 253 \text{ Дж},$ $\Delta Q = - 51 \text{ Дж},$ $\Delta A = - 304 \text{ Дж}.$	6.32	0,352 кДж
		6.33	12,5 кДж
		6.34	34,3%
		6.35	13,3%
		6.36	$1 - 1/n^{\gamma-1}$
		6.37	-55 Дж/К
		6.38	0,34 кДж/К
5.33	32 атм, 491°С, 4,3 кДж	6.39	2480 кДж
		6.40	- 9,1 Дж/К
5.34	37,8 кВт	6.41	725 К
5.35	17,3	6.42	11,5 Дж/К
5.36	а) $T e^{R/\alpha V} = \text{const},$ б) $V - \kappa T = \text{const},$ в) $p V^\gamma e^{[\beta(\gamma-1)/pV]} = \text{const}$	6.43	-20,2 Дж/К
		6.44	-7 кДж/К
		6.45	$C = \alpha T$
		6.46	$S = C/3$
5.37	а) $C = C_v + R/(1 + \alpha V),$ б) $C = \gamma R/(\gamma - 1) +$ $+ \alpha R/(p_0 V) .$	7.18	$p_s = 90 \text{ атм},$ $p_i = 100 \text{ атм}$
6.17	441 Дж	7.19	$a - 1,34 \cdot 10^6 \text{ Па}, 291 \text{ К};$ $b - 0 \text{ Па}, 270 \text{ К}$
6.18	1/3	7.20	$10,2 \cdot 10^5 \text{ Па}, 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
6.19	$T_w/T_x = 3/2$	7.21	0,25
6.20	30,7%	7.22	$iR/2,$ $R/(1 - 2a(V-b)/RTV^2$
6.21	30 кДж		
6.22	4,1 кВт	7.23	гелій – $T_i = 26,6 \text{ К},$ $\Delta T = 16 \text{ К},$ азот – $480 \text{ К},$ $\Delta T = - 38 \text{ К}$
6.23	$1 - (1/\gamma)((k^\gamma - 1)/(n^{\gamma-1}(k - 1))$		
6.24	9,87 Дж/К	7.25	$1 - [(V_1 - b)/(V_2 - b)]^{R/C_v}$
6.25	1,45	7.26	$1007 \text{ кг/м}^3$
6.26	16 МДж		
6.27	$2 \cdot 10^{-9} \text{ Дж/К}$		

- 7.27 57 мм
- 7.28  $\rho_0 d(1 - k^3)/8(k^2 - 1)$
- 7.29  $h = 2 \sigma \cos \theta / \rho g x \alpha$
- 7.30 62,5 мН/м
- 7.31 6,6%,  
0,88%
- 7.32 2
- 7.33 а –  $5,65 \cdot 10^6$  Па,  
163 К;  
б –  $2,25 \cdot 10^7$  Па,  
650 К
- 7.34 а –  
 $a = 0,137 \text{ Н м}^4/\text{моль}^2$ ,  $b$   
 $= 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ ;  
б –  
 $9,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3/\text{моль}$ )
- 7.35 10,7 Дж, 4,21 Дж/К
- 7.36 а –  $\Delta U = 0$ ,  
 $\Delta A = \Delta Q = 4 \cdot 10^6$  Дж;  
б –  $\Delta U = 1,1 \cdot 10^5$  Дж,  $\Delta A$   
 $= 3,9 \cdot 10^6$  Дж,  
 $\Delta Q = 4 \cdot 10^6$  Дж
- 7.37 - 056К
- 7.39 гелій –  $T \leq 35,7$  К, ксенон  
–  $T \leq 1940$  К)
- 7.41  $5 \cdot 10^{-3}$  Дж, 2,3 Па
- 7.42 14 мм
- 7.43 2,8 мм
- 7.44 тиск у вузькому коліні  
повинен бути на 3,5 мм  
рт. ст. більший ніж у  
широкому
- 7.45 21 см
- 7.46  $a b/(a - b)$
- 7.47 11мм
- 7.48 0,6 мм
- 7.49  $2\pi R^2 \sigma(-\cos\theta)(n^2-1)/gh$
- 7.50 896 мкДж
- 7.51 а – краплина  
випариться,  
б – пересичений пар  
конденсуватиметься на  
краплині поки не стане  
насиченим
- 7.52  $7,2 \cdot 10^3$  с
- 7.53  $1,6 \cdot 10^{-5}$  Дж,  
 $5,45 \cdot 10^{-8}$  Дж/К
- 7.54 1,4К
- 8.16  $528 \text{ кг}/\text{м}^3$
- 8.17 6,6 кН
- 8.18 5м
- 8.19 0,29кг
- 8.20 (1,6%)
- 8.21 За законом Дюлнга і  
Пті  
 $C_{pNa} = 1084 \text{ Дж}/\text{кгК}$ ,  
 $C_{pNi} = 523 \text{ Дж}/\text{кгК}$ ,  $C_{pPb} =$   
 $120 \text{ Дж}/\text{кгК}$ ;  
за законом Дебая  
 $C_{pNa} = 0,2 \text{ Дж}/\text{кгК}$ ,  
 $C_{pNi} = 0,004 \text{ Дж}/\text{кгК}$ ,  
 $C_{pPb} = 0,1 \text{ Дж}/\text{кгК}$
- 8.22  $867 \text{ Дж}/\text{кгК}$
- 8.23  $4, 3,62 \cdot 10^{-10}$  м,  
 $2,56 \cdot 10^{-10}$  м
- 8.24  $l_{0c} = 32$  см,  
 $l_{0m} = 32$  см
- 8.25 4,3 с
- 8.26 2,18 см
- 8.27  $490 \text{ см}^3$

- 8.28 
$$\frac{3(c_a \rho_a \alpha_m)}{(\rho_a + \rho_m)(c_a + c_m)} - \frac{c_m \rho_m \alpha_a (t_2 - t_1)}{(\rho_a + \rho_m)(c_a + c_m)}$$
- 8.29 
$$\frac{z}{100\%} \left( \frac{c}{3\alpha} + \frac{p}{\rho} + \frac{gR}{3} \right)$$
- 8.30  $\alpha_1 m_2 g (m_1 / \rho_1)^{1/3}$
- 8.31  $0,58 \cdot 10^{-20}$  Дж
- 8.32  $3,4 \cdot 10^{-7}$  м
- 8.33  $\mu = 0,119$  кг/моль,  
олово
- 9.17  $4,8 \cdot 10^{-5}$  К
- 9.18  $37^\circ$  С
- 9.19  $0,12$  кг,  
 $-160^\circ$  С
- 9.20  $11,3$  г
- 9.21  $5\%$
- 9.22  $216$  К,  
 $5,1$  атм.,  
 $780$  кДж/кг,  
 $570$  кДж/кг,  
 $210$  кДж/кг
- 9.23  $7,2$  кДж/кгК
- 9.24  $12$  атм.
- 9.25  $55$  К
- 9.26  $1,2$  мм рт.ст.
- 9.27  $7,7$  г/м<sup>3</sup>
- 9.28  $11,7\%$
- 9.29  $106$  см<sup>3</sup>
- 9.30  $(c_2 - c_1) \Delta t$
- 9.31  $2,4$  км/с,  
 $(m_1 + m_2)((\lambda + r + c_n 10K + c_6 l$   
 $00K) / m_1 m_2)^{1/2}$
- 9.32  $1,2$  Дж
- 9.33  $2$  г
- 9.34  $8,6$  кДж/кгК
- 9.35  $0,48$  Дж/К
- 9.36  $C = c_p - q\mu/T,$   
 $de c_p = R\gamma/(\gamma - 1)$
- 9.37  $2$  К
- 9.38  $2,3$  кДж/кг
- 9.39  $0,54$  г
- 9.40  $0,26$  г
- 9.41  $750$  мм рт.ст.

## 12. ДОДАТКИ

### I. Деякі фізичні постійні

1. Об'єм 1 моля ідеального газу при нормальних умовах

$$V_0 = 22,4207 \text{ л}$$

2. Універсальна газова постійна

$$R = 8,314 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$$

3. Число Авогадро

$$N_A = 6,02209 \text{ моль}^{-1}$$

4. Число Лошмідта

$$n_0 = 2,68719 \text{ м}^{-3}$$

5. Постійна Больцмана

$$k = 1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} = 0,86 \cdot 10^{-4} \text{ еВ/К}$$

### II. Густина деяких речовин<sup>1</sup>

Речовина	Густина $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Речовина	Густина $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Азот	1.25	Керосин	$0.78 \cdot 10^3$
Алюміній	$2.69 \cdot 10^3$	Кисень	1.43
Вода	$0.998 \cdot 10^3$	Лід	$0.9 \cdot 10^3$
Вуглекислий газ	1.98	Ртуть	$13.6 \cdot 10^3$
Водяна пара	0.0048	Спирт (етиловий)	$0.77 \cdot 10^3$
Гелій	0.18	Сталь	$7.85 \cdot 10^3$
Гліцерин	$1.23 \cdot 10^3$	Повітря	1.29

<sup>1</sup>Для твердих тіл і рідин – при температурі 20<sup>0</sup>С; для газів – при нормальних умовах.



**III. Молярна маса газів і  
середній ефективний діаметр молекул.**

Газ	Молярна маса $\mu$ , $\times 10^{-3}$ кг/моль	Середній ефективний діаметр молекул $d$ , $\times 10^{-10}$ м
Азот	28	3.6
Водень	2	2.2
Водяна пара	18	2.6
Повітря	29	3.6
Гелій	4	2.0
Кисень	32	2.7
Вуглекислий газ	44	4.0

**IV. Питома теплоємність твердих і рідких речовин**

Речовина	Питома теплоємність $c_p$ , Дж / (кг К)
Алюміній	$8,96 \cdot 10^2$
Вода	$4,18 \cdot 10^3$
Гліцерин	$2,43 \cdot 10^3$
Керосин	$2,14 \cdot 10^3$
Лід	$2,09 \cdot 10^3$
Ртуть	$1,38 \cdot 10^2$
Спирт	$2,43 \cdot 10^3$
Сталь	$4,69 \cdot 10^2$

## V. Фізичні параметри деяких твердих тіл.

Назва	Масове число A	Густина $\rho$ , $\times 10^3$ кг/м <sup>3</sup>	Модуль Юнга E, $\times 10^{10}$ Н/м <sup>2</sup>	Модуль зсуву G, $\times 10^{10}$ Н/м <sup>2</sup>	Характерис- тична температура Дебая $\theta_D$ , К
Алюміній	27	2.7	6.8	2.6	390
Берилій	9	1.83			1100
Ванадій	51	5.96			
Золото	197	19.27	8	2.8	170
Калій	39	0.86			100
Літій	7	0.53			
Мідь	64	8.94	12.3	4.5	320
Натрій	23	0.97			150
Нікель	59	8.9	20.2	7.7	410
Платина	195	21.5	16.8	6.1	229
Рубідій	85	1.53			
Свинець	207	11.37	1.62	0.56	88
Срібло	108	10.5	7.9	2.86	165
Цезій	133	1.87			

## VI. Питома теплоємність газів

Газ	Питома теплоємність, Дж/(кг·К)	
	$c_p$	$c_v$
Азот	1040	741
Водень	1409	1000
Водяна пара	1820	1380
Повітря	1020	728
Гелій	2080	1250
Кисень	912	649
Вуглекислий газ	847	653

**VII. Коефіцієнт поверхневого натягу**

Рідина	Коефіцієнт поверхневого натягу $\sigma$ при 20°C, $\times 10^{-2}$ Н/м.
Вода	7.28
Гліцерин	6.6
Керосин	2.4
Ртуть	49.0
Спирт	2.2

**VIII. Температура кипіння і питома теплота пароутворення при температурі кипіння<sup>1</sup>**

Речовина	Температура кипіння $T_K$ , °C	Питома теплота пароутворення при температурі кипіння $q$ , $\times 10^5$ Дж /кг
Азот	-195.8	2.01
Вода	100	22.6
Водень	-252.7	4.61
Повітря	-193	2.09
Гліцерин	290	
Кисень	-183	2.14
Ртуть	356.7	2.88
Спирт	78.3	8.46
Вуглекислий газ	-78.5	5.95

<sup>1</sup>Температуру кипіння і питому теплоту пароутворення наведено для нормального тиску.

### ІХ. Критичні параметри і поправки Ван-дер-Вальса для реальних газів

Газ	Критичні величини		Поправки Ван-дер-Вальса	
	$p_{кр},$ $\times 10^5$ Па	$T_{кр},$ К	$a,$ $\text{Н м}^4/\text{моль}^2$	$b,$ $\times 10^{-5}$ $\text{м}^3/\text{моль}$
Азот	33.9	126.1	0.133	4.0
Водень	12.9	33.0	0.024	2.6
Водяна пара	217.7	547	0.547	3.0
Повітря	37.6	132.5	0.131	3.8
Гелій	2.26	5.0	0.0033	2.3
Кисень	49.7	154.2	0.137	3.0
Вуглекислий газ	73.8	304.0	0.36	4.3

### Х. Коефіцієнт теплопровідності

Речовина	Коефіцієнт теплопровідності при нормальних умовах $\lambda,$ Вт/(м К)
Азот	$2.37 \cdot 10^{-2}$
Алюміній	$2.01 \cdot 10^2$
Водяна пара	$1.58 \cdot 10^{-2}$
Водень	$1.68 \cdot 10^{-1}$
Повітря	$2.37 \cdot 10^{-2}$
Гелій	$1.41 \cdot 10^{-2}$
Кисень	$2.39 \cdot 10^{-2}$
Лід	2.51
Сталь	$4.61 \cdot 10$
Вуглекислий газ	$2.32 \cdot 10^{-2}$

**ХІ. Насичена водяна пара**

Температура $t, ^\circ\text{C}$	Тиск $p$ , $\times 10^5 \text{ Па}$	Густина $\rho$ , $\text{кг/м}^3$	Питома теплота пароутворення $q$ , $\text{кДж/кг}$
0	0.00608	0.004843	2498.3
10	0.01228	0.009398	2468.1
20	0.02824	0.01730	2446.3
30	0.04246	0.03037	2425.0
40	0.07375	0.05118	2403.2
50	0.12337	0.08320	2378.1
60	0.19888	0.13026	2356.7
70	0.31136	0.1982	2332.5
80	0.47336	0.2936	2307.3
90	0.70098	0.4219	2281.8
100	1.01332	0.5974	2257.4
110	1.43245	0.8254	2228.8
120	1.98505	1.122	2213.5
130	2.70064	1.497	2169.6
140	3.61226	1.968	2139.0
150	4.75787	2.547	2109.3
160	6.16207	3.253	2079.2
170	7.91495	4.114	2049.9
180	9.83065	5.141	2018.9
190	12.53794	6.353	1997.5
200	16.21737	7.770	1955.3
210	19.05422	9.443	1920.9
220	23.26319	11.38	1884.9

## XII. Температура плавлення і питома теплота плавлення

Речовина	Температура плавлення $T_{п}$ , °С	Питома теплота плавлення $q$ , $\times 10^5$ Дж/ кг
Алюміній	658.7	3.22
Лід	0	3.34
Ртуть	-39.8	0.117
Сталь	1300	0.837

## XIII. Співвідношення між деякими одиницями

1 мм рт.ст.=0.01316 атм=133.3 Па

1 атм=760 мм рт. ст.= $1.013 \cdot 10^5$  Па

1 Дж=0.239 кал= $6.242 \cdot 10^{18}$  еВ

1 еВ= $1.602 \cdot 10^{-19}$  Дж= $4.45 \cdot 10^{-26}$  кВт год

1 атм л= $101.3$  Дж= $24.1$  кал

### 13. ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика: Фізичні основи механіки: Молекулярна фізика і термодинаміка: Навч. посібник. –2-ге вид., – К. : Вища шк., 1993. – 431с.
2. Матвеев А. Н. Молекулярная физика: Учеб. для физ. спец. вузов.–2-е изд. –М.: Высш. шк., 1987. –360 с.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика. –М.: Наука, 1975. –480 с.
4. Кікоїн І. К., Кікоїн А. К. Молекулярна фізика. –К.: Радянська школа, 1968. –477 с.
5. Рейф Ф. Статистическая физика. Пер. с англ. –3-е изд. –М.: Наука, 1986. –336 с.
6. Сахаров Д.И. Сборник задач по физике для вузов. – 13-е изд. – М.: ООО „Издательський дом ”ОНИКС 21век“: ООО „Издательство „Мир и Образование”, 2003. –400с.
7. Новодворская Е.М. Сборник задач по физике с решениями для втузов./ Новодворская Е.М., Дмитриев Э.М. – М.: ООО „Издательський дом ”ОНИКС 21век“: ООО „Издательство „Мир и Образование”, 2003. –368с.
8. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики для втузов./ Трофимова Т.И. –3-е изд.– М.: ООО „Издательський дом ”ОНИКС 21век“: ООО „Издательство „Мир и Образование”, 2003. –384с.
9. Бабаджан Е. И., Гервидс В. И., Дубовик В. М. и др. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике.–М.: Наука, 1990. –400 с.
10. Иродов И. Е. Задачи по общей физике. –2-е изд. –М.: Наука, 1988. –416с.
11. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике: Учеб. пособие. -2-е изд. –М., Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. –288с.

12. Козел.С.М., Рашба Э.И., Славатинский С.А. Сборник задач по физике. Задачи МФТИ: Учеб. пособие. –2-е изд. –М., Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. –304с.

13. Касандрова О. Н. и др. Методика решения задач по молекулярной физике /О. Н. Касандрова, А. Н. Матвеев, В. В. Попов. Под общей ред. А. Н. Матвеева. –М.: Изд-во МГУ, 1982. –192 с.

11. Горбунова О. И. и др. Задачник-практикум по общей физике. Термодинамика и молекулярная физика / О. И. Горбунова, А. М. Зайцева, С. Н. Красников. Под. ред. проф. Н. В. Александрова.–М.: Просвещение, 1978. –120 с.

14. Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика / Гинзбург В. Л., Левин Л. М., Сивухин Д. В. и др. Под ред. Д. В. Сивухина,– М.: Наука, 1976. –208 с.

15. Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвелих М. Г., Цященко Ю. П. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум.-К.: Радянська школа, 1966.–503 с.



## З М І С Т

ПЕРЕДМОВА .....	
1. МАСИ І РОЗМІРИ МОЛЕКУЛ. ЧИСЛО АВОГАДРО .....	
1.1. Короткі теоретичні відомості .....	
1.2. Якісні задачі .....	
1.3. Приклади розв'язування задач .....	
1.4. Задачі для аудиторної роботи .....	
1.5. Задачі для самостійної роботи .....	
2. СТАТИСТИЧНИЙ ОПИС СИСТЕМ З ВЕЛИКОЮ КІЛЬКІСТЮ ЧАСТИНОК .....	
2.1. Короткі теоретичні відомості .....	
2.2. Якісні задачі .....	
2.3. Приклади розв'язування задач .....	
2.4. Задачі для аудиторної роботи .....	
2.5. Задачі для самостійної роботи .....	
3. МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ІДЕАЛЬНИХ ГАЗІВ .....	
3.1. Короткі теоретичні відомості .....	
3.2. Якісні задачі .....	
3.3. Приклади розв'язування задач .....	
3.4. Задачі для аудиторної роботи .....	
3.5. Задачі для самостійної роботи .....	
4. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ .....	
4.1. Короткі теоретичні відомості .....	
4.2. Якісні задачі .....	
4.3. Приклади розв'язування задач .....	
4.4. Задачі для аудиторної роботи .....	
4.5. Задачі для самостійної роботи .....	
5. ПЕРШЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ .....	
5.1. Короткі теоретичні відомості .....	
5.2. Якісні задачі .....	

- 5.3. Приклади розв'язування задач .....
- 5.4. Задачі для аудиторної роботи .....
- 5.5. Задачі для самостійної роботи .....

---

6. ЕНТРОПІЯ. ДРУГЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ. КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ ЦИКЛІВ .....	
6.1. Короткі теоретичні відомості .....	
6.2. Якісні задачі .....	
6.3. Приклади розв'язування задач .....	
6.4. Задачі для аудиторної роботи .....	
6.5. Задачі для самостійної роботи .....	
7. РЕАЛЬНІ ГАЗИ. РІДИНИ .....	
7.1. Короткі теоретичні відомості .....	
7.2. Якісні задачі .....	
7.3. Приклади розв'язування задач .....	
7.4. Задачі для аудиторної роботи .....	
7.5. Задачі для самостійної роботи .....	
8. ТВЕРДІ ТІЛА .....	
8.1. Короткі теоретичні відомості .....	
8.2. Якісні задачі .....	
8.3. Приклади розв'язування задач .....	
8.4. Задачі для аудиторної роботи .....	
8.5. Задачі для самостійної роботи .....	
9. ФАЗОВІ РІВНОВАГИ ТА ФАЗОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ. РОЗЧИНИ .....	
9.1. Короткі теоретичні відомості .....	
9.2. Якісні задачі .....	
9.3. Приклади розв'язування задач .....	
9.4. Задачі для аудиторної роботи .....	
9.5. Задачі для самостійної роботи .....	
10. ПРИКЛАДИ ЗАЛІКОВИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ ...	
Контрольна робота № 1 .....	
Контрольна робота № 2 .....	
Контрольна робота № 3 .....	
Самостійна робота № 4 .....	
11 ВІДПОВІДІ .....	

12. ДОДАТКИ .....

13. ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА .....