МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

Совга Т.С., Балога С.І.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА І СТАТИСТИКА

Частина 1

для студентів медичного факультету,
спеціальності 226 "Фармація, промислова фармація"

УЖГОРОД 2021

Совга Т.С., Балога С.І. Вища математика і статистика: методичні вказівки та завдання до лабораторних занять для студентів 1-го курсу медичного факультету, спеціальності 226 "Фармація, промислова фармація". Частина 1. / Т.С. Совга, С.І. Балога. – Ужгород: видавництво ПП «Аутдор-Шарк», 2021. – 108 с.

Укладачі: Совга Т.С., ст. викладач, Балога С.І., доцент

Рецензенти:
Шпеник О.О., кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін ДВНЗ «УжНУ»
Погоріляк О.О., кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри теорії ймовірності та математичного аналізу ДВНЗ «УжНУ»

Відповідальний за випуск: Горват П.П., кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри комп’ютерних систем та мереж

Дані методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп’ютерних систем та мереж, протокол № 9 від 17 березня 2021 року та методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол № 3 від 29 березня 2021 року.

1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1. Поняття множини

Під *множиною* розуміють сукупність деяких об'єктів, виділених за певною ознакою з інших об'єктів.

Об'єкти, які утворюють множину, називають *елементами множини*.

Множини, звичайно, позначаються великими літерами латинської абетки: $A, B, C, \ldots, Y, Z$, а елементи, з яких складаються множини – малими: $a, b, c, \ldots, y, z$.

Якщо елемент *x* належить множині *X*, тоді користуються записом $x \in X$, а якщо *x* не є елементом множини *X*, тоді записують $x \notin X$.

Універсальна множина (її позначають символом *Ω*) містить усі елементи розглядуваної задачі. *Порожня множина* (її позначають символом $\varnothing$) не містить жодного елемента з універсальної множини Ω. Наприклад, множина дійсних коренів рівняння $x^2+1=0$ є порожня множина.

Якщо множина складається з елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то використовується такий запис: $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$. Наприклад, запис $A = \{1; 5; 10\}$ означає, що множина A складається з трьох чисел: 1, 5 і 10.

Якщо, для всіх елементів множини A і тільки для них виконується властивість P, тоді використовують стандартний запис: $A = \{a \mid P(a)\}$, де $P(a)$ – істинне твердження. Наприклад, запис $X = \{x \mid 0 \le x \le 3\}$ означає, що множина A складається із усіх дійсних чисел, які задовольняють нерівність $0 \le x \le 3$, а запис $X = \{x \mid x - \textit{ціле число}; 10 \le 5x \le 29\}$ задає множину цілих чисел, які діляться на 5 – це множина $X = \{2; 3; 4; 5\}$.

Множина, що складається зі скінченої кількості елементів, називається *скінченою*, у протилежному випадку – *нескінченою*.

Нескінченими множинами є числові множини – це множини, елементами яких є числа. Прикладами числових множин є:

Множина натуральних чисел N – це множина $N = \{1; 2; \ldots; n; \ldots\}$.

Множина цілих чисел Z – це множина $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \pm n; \ldots\}$.

Множина раціональних чисел Q – це множина $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$.

Множина ірраціональних чисел I – це числа вигляду ($\pi = 3{,}1415926\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$; $e = 2{,}7182818\ldots$).

Множина дійсних чисел R – це множина раціональних та ірраціональних множин, тобто $R = Q \cup I$, де символ $\cup$ означає об'єднання елементів двох множин.

Між множинами N, Z, Q і R має місце співвідношення $N \subset Z \subset Q \subset R$. Тут символ $\subset$ означає "є підмножиною".

Дві множини рівні між собою, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто множини містять однакові елементи.

2. Числові проміжки. Окіл точки

Нехай a і b – дійсні числа, причому $a < b$. Підмножину $X \in R$, елементи якої задовольняють:

$X = \{x\text{: } a \le x \le b\}$, називають відрізком і позначають $[a; b]$;

$X = \{x\text{: } a < x < b\}$, називають інтервалом і позначають $(a; b)$;

$X = \{x\text{: } a \le x < b\}$ або $X = \{x\text{: } a < x \le b\}$, називають піввідрізками або півінтервалами і відповідно позначають $[a; b)$ або $(a; b]$.

Поряд із цим розглядають нескінчені інтервали або півінтервали:
$(-\infty; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, а також нескінчені піввідрізки $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$.

Будь-який інтервал, який містить точку a, називається *околом точки* a. Інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, тобто множина точок x таких, що $x \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається *ε-околом точки* a (рис.1).

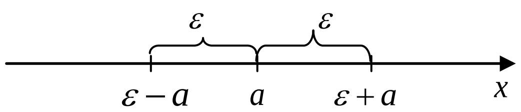


Рис. 1.

3. Числова послідовність

Означення 1. Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ називають ***числовою послідовністю*** (або коротко ***послідовністю***) і позначають символом $\{x_n\}$.

Окремі числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називають ***членами*** або ***елементами послідовності***: x_1 – перший член послідовності, x_2 – другий і т. д. x_n – n-ний, або ***загальний член послідовності***.

Числова послідовність – це функція натурального аргументу $x_n = f(n)$.

За означенням послідовність містить нескінченну кількість членів, причому будь-які два з них відрізняються, принаймні номерами.

Означення 2. Якщо всі елементи послідовності $\{x_n\}$ дорівнюють одному й тому самому числу, то її називають ***сталою***.

Прикладами послідовностей є арифметична та геометрична прогресія.

Приклад 1. Написати перших п'ять членів послідовності заданої її загальним членом $\left\{x_n = \dfrac{1}{1+n^2}\right\}$.

► Підставляючи у формулу n-го члена послідовно числа 1,2,3,4,5 дістанемо $\left\{x_n = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{17}; \dfrac{1}{26}; \ldots\right\}$ ◄

Приклад 2. Написати формулу загального члена послідовності $\left\{\dfrac{2}{3!}; \dfrac{8}{5!}; \dfrac{32}{7!}; \dfrac{128}{9!}; \ldots\right\}$.

► Очевидно, що n-й член обчислюється за формулою $\left\{x_n = \dfrac{2^{2n-1}}{(2n+1)!}\right\}$. ◄

Границя числової послідовності

Нехай змінна x_n приймає значення послідовності $\{x_n\}$.

Означення 3. Число x_0 називається ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Якщо x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, то *пишуть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *або* $\lim x_n = x_0$, $n \to \infty$ і кажуть, що *послідовність* $\{x_n\}$ *має границю, яка дорівнює числу* x_0 або *прямує до* x_0.

Означення 4. Послідовність, яка має границю x_0, називається ***збіжною до*** x_0 (або просто збіжною). Послідовність, яка не є збіжною, називається ***розбіжною***.

Приклади. Знайти границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{2n+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+8n+7}{\sqrt{81n^4-5n^3+9}}$.

►а) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{5}{n}\right)} = \frac{3}{2};$$

б) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+8n+7}{\sqrt{81n^4-5n^3+9}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+8\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{\left(81-\frac{5}{n}+\frac{9}{n^4}\right)}} = \frac{1}{9}.$$

4. Поняття функції. Область визначення та множина значень функції

Означення 1. Величина, числове значення якої при розглядуваних умовах не змінюється, називається *постійною*.

Означення 2. Величина, числове значення якої при розглядуваних умовах може змінюватись, називається *змінною*.

Множина всіх значень змінної x утворює деяку числову множину значень змінної X.

Означення 3. Якщо кожному елементу x з множини X ($x \in X$) ставиться у відповідність певний елемент y з множини Y ($y \in Y$), *то говорять, що на множині X задано функцію $y = f(x)$*.

Множина X називається *областю визначення* (або існування) функції і позначається $D(f)$, а множина Y – *областю значень функції* і позначається $E(f)$.

При цьому x називається *незалежною змінною* (або *аргументом*), y – *залежною змінною* (або *функцією*), а буква f означає закон відповідності.

Якщо спеціально не обумовлено, то під областю визначення функції розуміють область допустимих значень незалежної змінної x, при яких функція $y = f(x)$ має зміст.

Наприклад, областю визначення функції $y = x^2 - \sqrt{10 - x}$ є півінтервал $X = (-\infty; 10]$, оскільки $10 - x \ge 0$; якщо ж змінна x позначає час, то природно розглядати додаткову умову $x \ge 0$ і тоді областю визначення функції буде відрізок X=[0; 10].

Якщо $y = \sqrt{x^2 - 9}$, то y приймає дійсні значення лише при $x^2 - 9 \ge 0 \Rightarrow x^2 \ge 9 \Rightarrow |x| \ge 3$, тобто $x \le -3$ та $x \ge 3$.

Таким чином, областю визначення цієї функції є об’єднання двох півінтервалів $X = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Означення 4. *Множиною значень функції* $y = f(x)$ називається сукупність усіх значень y, коли x змінюється в області визначення функції.

Так, для функції $y = \sqrt{x^2 - 9}$ множиною значень є півінтервал $Y = [0; +\infty)$.

5. Способи задання функції

Існує декілька способів задання функції: аналітичний, табличний, графічний та мовний.

1) *Аналітичний спосіб* – якщо функція задана формулою у вигляді однієї або декількох рівностей, що зв’язують незалежну та залежну змінні.

Наприклад, $a)\quad 3x^2-4y^2-5=0;\quad b)\quad y=2x^3-4;\quad c)\quad y=\begin{cases}2x-1, & x\le 0\\ x+4, & x>0\end{cases}.$

Якщо рівняння, що зв'язує аргумент x із функцією y не розв'язано відносно y, а задано у вигляді $F(x;\, y)=0$ (випадок а), то кажуть, що функцію y задано *неявно*.

2) *Табличний спосіб* полягає в тому, що функція задається таблицею, яка містить значення аргументу x і відповідні значення функції $y=f(x)$, наприклад,

x	0	0.5	1	1.5	2
y	1	1.75	2	2.5	3.5

3) *Графічний спосіб* полягає в зображені функціональної залежності за допомогою лінії, яку називають *графіком функції*.

Графічним способом задання функції досить широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з такими самописними приладами як барограф (для запису змін атмосферного тиску), електрокардіограф (для реєстрації електричних явищ, пов'язаних із серцевою діяльністю людини або тварини) та ін.

Слід зауважити, що не всяка крива в прямокутній системі координат xOy задає функцію $y=f(x)$. Функцією буде тільки така крива, яку кожна пряма, паралельна осі Oy, перетинає не більше ніж в одній точці (рис. 2).

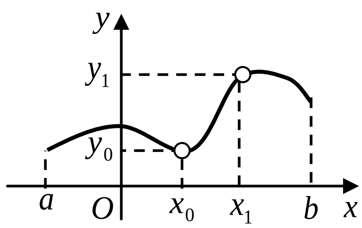


Рис. 2.

Графік функції $y=f(x)$ досить часто можна побудувати за допомогою перетворень (зсуву, розтягування) графіка деякої уже відомої функції.

Зокрема:

1. Графік функції $y=f(x-a)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ зсувом вздовж осі Ox на $|a|$ одиниць (вправо, якщо $a>0$ і вліво, якщо $a<0$).

2. Графік функції $y=f(x)+b$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ зсувом вздовж осі Oy на $|b|$ одиниць (уверх, якщо $b>0$ і вниз, якщо $b<0$).

3. Графік функції $y=f(kx)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ розтягуванням (стисненням) вздовж осі Oy в k раз, якщо $k>1$ та $1/k$ раз, якщо $(k\in(0;1))$.

4. Графік функції $y=kf(x)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ стисненням (розтягуванням) вздовж осі Ox в k раз, якщо $k>1$ та $1/k$ раз, якщо $(k\in(0;1))$.

5. Графік функції $y = f(-x)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ симетричним відображенням відносно осі Oy.

6. Графік функції $y = -f(x)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ симетричним відображенням відносно осі Ox.

6. Парність, непарність і періодичність функцій

Означення 1. Функція називається *парною*, якщо для довільного $x \in D(f)$ справедлива рівність $f(-x) = f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (див. рис. 3).

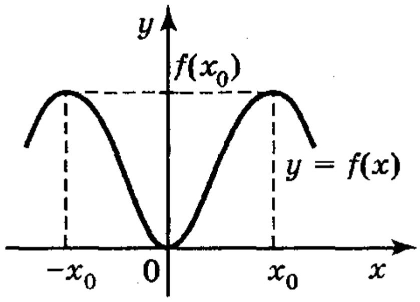


Рис. 3.

Означення 2. Функція називається *непарною*, якщо для довільного $x \in D(f)$ справедлива рівність $f(-x) = -f(x)$ (див. рис. 4).

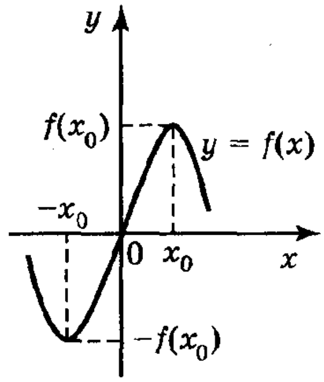


Рис. 4.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функція, яка є ні парною, ні непарною, називається *функцією загального вигляду.*

Означення 3. Функція називається *періодичною*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для всіх $x \in D(f)$ справджуються умови: $x + T \in D(f)$; $f(x+T) = f(x)$.

Число T називається *періодом* функції.

7. Основні елементарні функції та їх графіки

Основними елементарними функціями називаються такі функції:

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.
2. Показникова функція $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$.

Для логарифмічної функції справедливі формули:

а) $a^{\log_a x} = x$ – *основна логарифмічна тотожність*;

б) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ – перехід до іншої основи.

Для додатних u і v справедливі такі рівності:

а) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$; б) $\log_a\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$; в) $\log_a u^b = b \cdot \log_a u$.

Якщо $a = 10$, то функція $\log_{10} x = \lg x$ називається *десятковим логарифмом*. Якщо $a = e$, де $e = 2{,}71828...$ відоме ірраціональне число, $\log_e x = \ln x$ називається *натуральним логарифмом.*

4. Тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\ x$, $y = ctg\ x$.

5. Обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\ x$, $y = arcctg\ x$.

Розв'язування завдань

Приклад 1. Результати вимірювання температури тіла хворого в залежності від часу подано в таблиці:

Час доби x (год)	9	12	15	18	21	24
Температура тіла	39	38,5	38,3	37,3	37,1	37

Розв'язання:

Залежність *y = f(x)* є функцією,

де x – незалежна змінна (аргумент), y – залежна змінна (функція).

За таблицею знайти:

1) значення функції при $x = 9$; $x = 12$; $x = 24$:

$f(9) = 39$, $f(12) = 38.5$, $f(24) = 37$.

2) область визначення функції: $D(f) = \{9;12;15;18;21;24\}$.

3) область значень функції: $E(f) = \{39;\ 38{,}5;\ 38{,}3;\ 37{,}3;\ 37{,}1;\ 37\}$.

Приклад 2. Знайти значення функції:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ у точках 1; –1; 5.

2) $f(x) = \sqrt{x-3}$ у точках 3; 12; 52.

Розв'язання:

1) $f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$; $f(-1) = \frac{-1+1}{-1} = 0$; $f(5) = \frac{5+1}{5} = 1{,}2$.

2) $f(3)=\sqrt{3-3}=0$; $f(12)=\sqrt{12-3}=3$; $f(52)=\sqrt{52-3}=7$.

Приклад 3. Знайти область визначення функції:

1) $y=\frac{x-2}{x+1}$; 2) $y=\sqrt{x-2}$.

Розв'язання:

1) Оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю, то областю визначення функції є множина усіх значень *x*, для яких $x+1\neq 0$, тобто $x\neq -1$. Отже, $D(y) = (-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$.

2) Оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним, то областю визначення функції є множина всіх тих значень *x*, для яких $x-2\geq 0$, тобто $x\geq 2$. Отже, $D(y)=[2;+\infty)$.

Приклад 4. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=x^2+x^3$; б) $y=\frac{x+2}{x-3}$; в) $y=\frac{x^3+1}{x(x+2)}$; г) $y=\frac{x+6}{x^2-5x+4}$; д) $y=\sqrt{x+6}$.

Відповідь:

а) $D(y) = R$; б) $D(y) = (-\infty; 3)\cup(3; +\infty)$; в) $D(y) = (-\infty; -2)\cup(-2; 0)\cup(0; +\infty)$; г) $D(y) = (-\infty; 1)\cup(1; 4)\cup(4;+\infty)$; д) $D(y) = [-6; +\infty)$.

Приклад 5. Знайти область значень $E(y)$ функції :

а) $y=\sqrt{x^2+4}$; б) $y=\sqrt{x^2+4}-1$.

Розв'язання:

а) Знайдемо функцію обернену до даної. Для цього виразимо змінну *x* через *y*, піднесемо ліву і праву частину функції до квадрату: $y^2=x^2+4$;

$x^2=y^2-4$;

$x=\sqrt{y^2-4}$; підкореневий вираз має бути невід'ємним, з умови $y > 0$, тому $y^2-4>0$. Отже, $E(y) = [2; +\infty)$.

б) аналогічно розв'язуємо даний приклад і знаходимо, що $E(y) = [1; +\infty)$.

Приклад 6. Функцію задано формулою $y=\frac{x+3}{x-5}$.

1) Знайти значення функції для $x = 4$.

2) Порівняти $y(0)$ і $y(1)$.

3) Знайти, при якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0.

Розв'язання:

1) $y(4) = \frac{4+3}{4-5} = \frac{7}{-1} = -7$.

2) Оскільки $y(0) = \frac{0+3}{0-5} = -0{,}6$, а $y(1) = \frac{1+3}{1-5} = -1$, то $y(0) > y(1)$.

3) Оскільки $y = 0$, маємо рівняння $\frac{x+3}{x-5} = 0$, звідки $x = -3$.

Приклад 7. Формула описує зміну температури води у баку (p^{o}C) залежно від часу t (у хв.)

$$p(t) = \begin{cases} 2t + 20, & \text{якщо } 0 \le t < 40 \\ 100, & \text{якщо } 40 \le t < 50 \\ -0{,}8t + 140, & \text{якщо } 50 \le t \le 120 \end{cases}$$

Знайти: 1) p(10); 2) p(45); 3) p(80).

Розв'язання:

1) Оскільки 0 < 10 < 40, то $p(10)$ обчислюємо за формулою $p(t) = 2t + 20$. Отже, $p(10) = 2*10 + 20 = 40$.

2) Оскільки 40 < 45 < 50, то $p(45) = 100$.

3) Оскільки 50 < 80 < 120, то $p(80) = -0{,}8*80+140 = 76$.

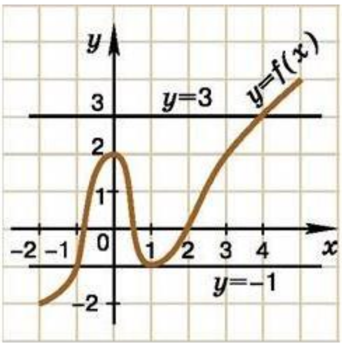
Приклад 8. За графіком функції $y = f(x)$ на малюнку знайти:

1) область визначення функції;

2) множину значень функції;

3) значення функції для $x = -1$; $x = 2$;

4) значення аргументу, при яких $y = -1$; $y = 3$.



Розв'язання:

1) Спроектуємо всі точки графіка на вісь *OX*.
Отримаємо проміжок [–2; 5]. Отже, $D(y) = [-2; 5]$.

2) Спроектуємо всі точки графіка на вісь OY.
Отримаємо проміжок [–2; 4]. Отже, $E(y) = [-2; 4]$.

3) За графіком $y(-1) = -1$; $y(2) = 0$.

4) Оскільки пряма $y = -1$ перетинає графік в точках з абсцисами $x = -1$ і $x = 1$, то $f(x) = -1$ для $x = -1$ або $x = 1$. Пряма $y = 3$ перетинає графік в точці з абсцисою 4. Отже, $f(x) = 3$, якщо $x = 4$.

Приклад 9. Дослідити чи є парна функція $f(x) = x^4 + x^2$?

Оскільки $D(f) = R$ і $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$, функція парна.

Приклад 10. Чи є парна функція $f(x) = x^2 + x$?

Оскільки $D(f) = R$, але $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$, то функція не є парною.

Приклад 11. Дослідити чи є непарна функція $f(x) = x^3 - x^5$?

Оскільки $D(f) = R$ і $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x^5 = -(x^3 - x^5) = -f(x)$, функція непарна.

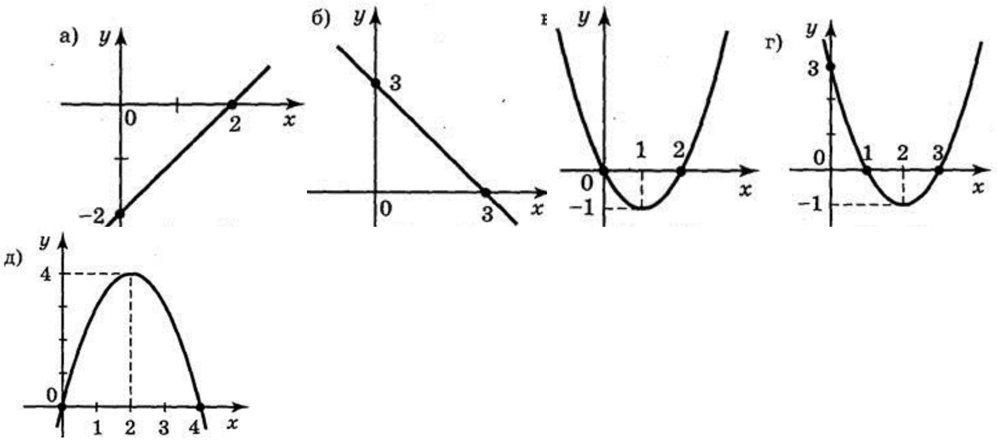
Приклад 12. Чи непарна функція $f(x) = x^3 - x^2$?

Оскільки $D(f) = R$ і $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2 = -(x^3 + x^2) \neq f(x) = -x^3 + x^2$, функція не є непарною.

Приклад 13. Побудуйте графіки функцій

а) $y = x - 2$; б) $y = 3 - x$; в) $y = x^2 - 2x$; г) $y = x^2 - 4x + 3$; д) $y = 4x - x^2$

Відповідь:

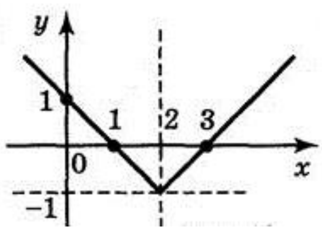


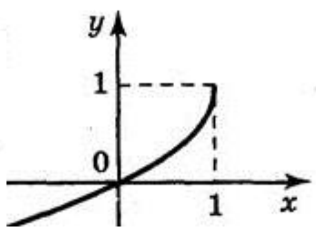
Приклад 14. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = |x - 2| - 1$; б) $y = 1 - \sqrt{1 - x}$;

Відповідь:

а) б)





Завдання для самостійної роботи:

1. Дано функцію $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Знайти:

1) $f(-1)$; 2) $f(0)$; 3) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 4) $f(1)$; 5) $f(2)$.

1. Дано функції $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$, $\varphi(x)=\frac{|x-1|}{x+2}$. Знайти:

1) $f(0)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(1)$; 4) $f(2)$; 5) $\varphi(0)$; 6) $\varphi(1)$; 7) $\varphi(2)$; 8) $\varphi(-1)$.

2. Дано функцію $\varphi(t)=t^2+2$. Знайти:

1) $\varphi(2)$; 2) $\varphi(a)$; 3) $\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$; 4) $\varphi(a+1)$; 5) $\varphi(a^2-1)$.

3. Дано функцію $g(x)=\frac{2-x}{2+x}$. Знайти: 1) $g(-1)$; 2) $g(x)=-5$.

4. Знайдіть область визначення функцій:

1) $f(x)=x-2$; 2) $f(x)=\frac{2-x}{3}$; 3) $f(x)=\frac{3}{2-x}$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$;

5) $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}$; 6) $f(x)=\sqrt{x+3}$; 7) $y=1+2x$; 8) $y=\sqrt{2x+3}$;

9) $y=\frac{x}{x-1}$; 10) $y=\sqrt{x^2+1}$, 11) $y=\ln(x+5)$; 12) $y=\frac{1}{x^2+2}$;

13) $y=\frac{1}{x^2-3}$; 14) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$; 15) $y=\frac{1}{1-x}+\sqrt{x^2-1}$;

16) $y=\log_2(-x)$; 17) $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$; 18) $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$,

19) $y=\ln\sqrt{1-x}$; 20) $y=\frac{1+x^2}{4-x^2}$; 21) $y=\sqrt{x}-\lg_2(2x-3)$.

5. На малюнках функції задано графіками. Для кожної з них встановіть?

1) область визначення; 2) область значень;

3) координати точок перетину з осями координат.

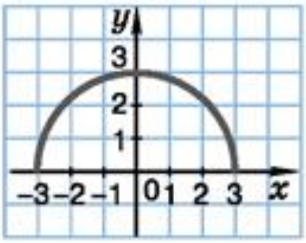


Рис.1

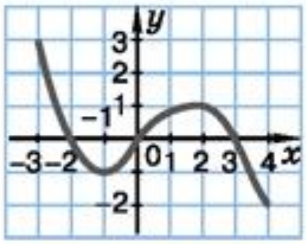


Рис. 2

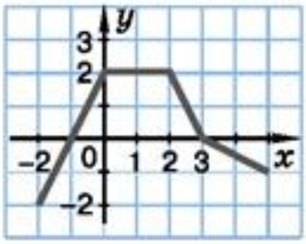


Рис. 3

6. Дано функцію

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4, \text{якщо } x<1,\\ x-3, \text{якщо } x\ge 1\end{cases}.$$

Знайти $f(-2)$; $f(0)$; $f(3)$.

7. Наведіть приклад функції, областю визначення якої є:

1) множина всіх дійсних чисел;

2) множина всіх дійсних чисел, крім числа 2;

3)множина всіх дійсних чисел, крім чисел 1 і –3;

4) множина всіх дійсних чисел, більших або рівних числу 4.

8. Знайдіть множину значень функції:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = x^2 - 3$; 3) $f(x) = x^2 + 4$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$;
5) $f(x) = \sqrt{x} - 2$; 6) $f(x) = \sqrt{x} + 3$; 7) $f(x) = |x|$; 8) $f(x) = |x| + 5$;
9) $f(x) = |x| - 3$.

9. Дослідити на парність та непарність функції:

1) $y = x^4 - x$, 2) $y = x^3 - 3x^2$, 3) $y = x^4 + 2x^2$, 4) $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

10. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -2x^2$, 2) $y = -2(x-3)^2$, 3) $y = -2(x+2)^2 + 1$, 4) $y = -2x^2 + 5x - 2$, 5) $y = \dfrac{3}{x}$,

6) $y = -\dfrac{3}{x}$, 7) $y = \dfrac{3}{x-1}$, 8) $y = \dfrac{3}{x-1} - 2$.

11. Дані множини описати перерахуванням усіх їхніх елементів

а) $A = \{x \in R:\ \ 2x^2 - 7x + 6 = 0\}$; б) $A = \left\{x \in R:\ \ x + \dfrac{1}{x} \le 2,\ x > 0\right\}$;

с) $A = \{x \in R:\ \ x^3 - 3x^2 - 4x = 0\}$.

12. Рівняння $y(x) = 1{,}114 \cdot x^2$ визначає кількість людей, які захворіли під час епідемії протягом дня на 10 тис. населення. а) Визначити на основі даної аналітичної залежності кількість захворівши на 10 тис. населення на другий, третій, п’ятий, восьмий, 11-й та 15-й день від початку розвитку епідемії. б) Визначити у який день кількість захворівши на 10 тис. населення перевищить поріг 1000 чоловік/день.

13. Після викиду отруйної речовини її концентрація (мл/л) у воді змінювалася згідно рівняння $y(t) = -0{,}04t^3 + 0{,}8t^2 - 5{,}3t + 12{,}5$, де t – час (години). Визначити концентрацію речовини через годину, 3 години, 5 годин, 8 годин та 10 годин з моменту викиду речовини. Отримані значення записати у наступну таблицю:

Час з моменту викиду (год.)	1	3	5	8	10
Концентрація речовини (мг/л)					

14. Зробити розрахунок зміни концентрації реагенту A в часі для реакції типу $A \to R$ і побудувати графік залежності $C_A(t) = C_{A0}e^{-Kt}$, де $C_{A0} = 2{,}5\,моль/л$, $K = 0{,}098 с^{-1}$, $t = 0 \ldots 50$ (крок $\Delta t = 5с$).

15. Для реакції синтезу аміаку $N_2 + 3H_2 \cdot 2NH_3$ розрахувати згідно з рівнянням Ареніуса залежності швидкості реакції K від температури

$K(T) = K_0 \cdot e^{-\frac{E}{RT}}$ при $K_0 = 4{,}39 \cdot 10^{13} \dfrac{кмоль}{м^3 \cdot час}$, $E = 170 \dfrac{кДж}{моль}$,

$R = 0{,}00831 \dfrac{кДж}{моль \cdot K}$, $T = 573, 583, \ldots, 773K$.

16. Дано функцію $f(x,y)=\dfrac{x+3y}{x-3y}$. Знайти:

1) $f(1;0)$; 2) $f(0;1)$; 3в) $f(3;-1)$; 4) $f(1;-3)$; 5) $f(-x;-y)$.

17. Дано функцію $f(x,y)=\sin\dfrac{y}{x}$. Знайти:

1) $f(1;0)$; 2) $f\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)$; 3) $f(4;\pi)$; 4) $f\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

18. Побудувати графіки функцій, користуючись перетвореннями графіків основних елементарних функцій:

1) $y=-2x^2$; 2) $y=-2(x-3)^2$; 3) $y=-2(x+2)^2+1$; 4) $y=1-2x$;

5) $y=\left|2-x^2\right|$; 6) $y=-\dfrac{3}{x}$; 7) $y=-(x+1)^3$; 8) $y=\dfrac{3}{x-1}$; 9) $y=\dfrac{3}{x-1}-2$.

19. Побудувати графіки функцій, користуючись перетвореннями графіків основних елементарних функцій:

1) $y=\ln(x-5)$; 2) $y=2^{x-1}$; 3) $y=\dfrac{3}{x}$; 4) $y=3^{-x}+1$; 5) $y=\left|\log_5 x\right|$;

6) $y=\log_2(x+2)-1$; 7) $y=1+\sin x$; 8) $y=-2\sin 3x$; 9) $y=\left|\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$;

10) $y=\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$.

20. Знайти множину визначення і множину значень функцій:

1) $y=\left|\log_5 x\right|$; 2) $y=-2\sin 3x$; 3) $y=1+\sin x$; 4) $y=\left|\dfrac{1}{x}\right|$;

5) $y=1+2x$, 6) $y=\ln(x+5)$, 7) $y=\dfrac{x}{x-1}$, 8) $y=\sqrt{x^2+1}$.

21. Знайти координати вершини параболи та побудувати її графік:

1) $y=x^2-2x+5$,

2) $y=-0{,}05x^2+40x-200$;

3) $y=3x^2-120x+250$,

4) $y=-x^2+10x+12$.

2. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Границя змінної величини. Стале число a є границею змінної величини x, якщо для кожного наперед заданого довільно малого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке значення змінної x, що всі наступні значення змінної будуть задовольняти нерівність $|x-a| < \varepsilon$.

Якщо число a є границею змінної величини x, то кажуть, що x прямує до границі a, і пишуть $x \to a$ або $\lim x = a$.

Якщо порівняти означення границі послідовності й границі змінної, то в означенні границі послідовності йдеться про номер n того члена послідовності $\{f_n\}$, починаючи з якого виконується нерівність $|f_n - a| < \varepsilon$, а в означенні границі змінної x йдеться про числове значення цієї змінної, починаючи з якого виконується нерівність $|x-a| < \varepsilon$.

Границя функції в точці

Нехай функція $y = f(x)$ задана в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення. *Число* b *називається границею функції* $y = f(x)$ при x, що прямує до x_0 (або в точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ (як завгодно малого), знайдеться таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх x, таких, що $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

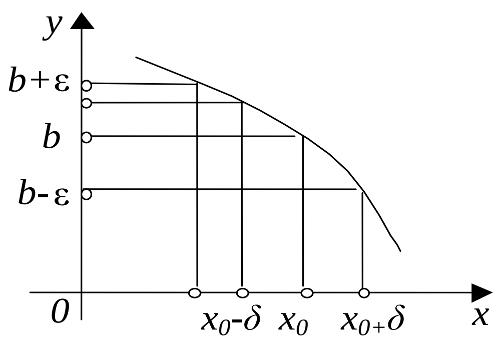


Рис. 1

Коротко це означення записують так $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

На рис. 1 показано геометричну інтерпретацію границі функції в точці: число b є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного ε-околу точки b знайдеться δ-окіл точки x_0, такий, що коли значення аргументу x взяти з множини $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, то відповідні значення функції $f(x)$ лежатимуть в ε-околі точки b.

Основні теореми про границі функції

У наведених раніше прикладах ми бачили, що знаходження границі функції на основі означення границі досить громіздке. Наведемо теореми, які значно полегшують знаходження границі функції.

Теорема 1 (про границю суми, різниці, добутку і частки). *Якщо кожна із функцій* $f(x)$ *та* $g(x)$ *має скінчену границю при* $x \to x_0$ *або при* $x \to \infty$, *то при* $x \to x_0(\infty)$, *існують також границі функцій* $f(x) \pm g(x)$,

$f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(остання за умови, що* $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)\neq 0$*) і справедливі формули*:

1) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)}$.

Наслідки. *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)$ *існує, то виконуються рівності*:

1) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}(Cf(x))=C\cdot \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)$, де C – стала;

2) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\right)^n$, n – натуральне число.

Приклад 1. Знайти границю функції $f(x)=\dfrac{x^2+5x-3}{x^3-2x}$ у будь-якій точці x_0, де знаменник не дорівнює нулю.

Розв'язування. Згідно з теоремою 1 та наслідків до неї, маємо:

$$\lim_{x\to x_0}(x^2+5x-3)=\lim_{x\to x_0}x^2+\lim_{x\to x_0}5x-\lim_{x\to x_0}3=x_0^2+5x_0-3,$$

$$\lim_{x\to x_0}(x^3-2x)=\lim_{x\to x_0}x^3-\lim_{x\to x_0}2x=x_0^3-2x_0,$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+5x-3}{x^3-2x}=\lim_{x\to x_0}\frac{x_0^2+5x_0-3}{x_0^3-2x_0}=f(x_0).$$

Зокрема, при $x_0=1$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-3}{x^3-2x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1^2+5\cdot 1-3}{1^3-2\cdot 1}=-1$.

Розкриття деяких невизначеностей

Як бачимо з прикладу, у найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію граничного значення аргументу x_0. Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такого типу вирази:

1) відношення двох нескінченно малих величин – це невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$;

2) відношення двох нескінченно великих величин – це невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$;

3) різниця двох нескінченно великих величин – це невизначеність вигляду $\infty - \infty$ та інші.

Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності.

Розглянемо деякі окремі випадки.

1. ***Невизначеність вигляду*** $\frac{0}{0}$***, задана відношенням двох многочленів***

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x^2 - 7x + 6}$.

Розв'язування. Маємо:

границя чисельника $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^3 - 5x^2 + 4x\right) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 0$,

границя знаменника $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 - 7x + 6\right) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$,

тому застосувати теорему про границю частки не можна, оскільки маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити дану невизначеність, застосуємо загальний прийом; розкладемо чисельник і знаменник на множники, серед яких обов'язково буде множник (x–1):

$$x^3 - 5x^2 + 4x = x(x-1)(x-4), \quad x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6).$$

Підставивши, одержані розклади в границю дістанемо

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x^2 - 7x + 6} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-6)} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-4)}{(x-6)} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

2. ***Невизначеність вигляду*** $\frac{0}{0}$***, задана ірраціональними виразами***

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - 3}{x - 2}$.

Розв'язування. При $x = 2$ маємо невизначеність $\frac{0}{0}$, отже $x - 2$ – критичний множник. Позбудемося ірраціональності в чисельнику. Маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(2x^2+1-9\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2\left(x^2-4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)}{\sqrt{2x^2+1}+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

3. ***Невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$, задана відношенням двох многочленів***

Нехай потрібно знайти границю дробово-раціональної функції

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}.$$

Розглянемо такі випадки:

1) Нехай $m<n$, тоді, розділивши чисельник і знаменник на x^m, знаходимо

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{a_m}{x^m}}{b_0x^{n-m}+b_1x^{n-m-1}+\ldots+\frac{b_{n-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_n}{x^m}}.$$

Якщо тепер перейти до границі у кожному доданку чисельника і знаменника, то у чисельнику дістанемо число a_0, а у знаменнику – нескінченність. Відношення скінченого числа до нескінченної величини є нескінченно мала величина, тобто $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

2) Нехай $m=n$, тоді, розділивши чисельник і знаменник на $x^m=x^n$, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{a_m}{x^m}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

3) Нехай $m>n$, тоді, розділивши чисельник і знаменник на x^n, знаходимо

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^{m-n}+a_1x^{m-n-1}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_m}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{b_n}{x^n}}.$$

Якщо тепер перейти до границі у кожному доданку чисельника і знаменника, то у чисельнику дістанемо нескінченність, а у знаменнику –

число b_0. Таке відношення дає нескінченно велику величину, тобто $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Отже,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{якщо}\quad m=n.\\ \infty, & \text{якщо}\quad m>n\end{cases}$$

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x^2+4x}{5x^3-7x+6}$.

*Розв'язування***.** Маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+4x}{5x^3-7x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{5-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}}=\frac{2}{5}.$$

Дві важливі (чудові) границі

Перша важлива границя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=1$, при $a\neq 0$.

Розв'язування. Зведемо розглядувану границю до першої важливої границі, помноживши та поділивши дріб на *a* та ввівши позначення $a\cdot x=y$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\sin ax}{a\cdot x}=a\cdot\lim_{a\cdot x\to 0}\frac{\sin ax}{a\cdot x}=a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=a\cdot 1=a.$$

Друга важлива границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, $\quad\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Доведено, що *e* – ірраціональне число і не є коренем ніякого алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами. Його наближене значення з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

При обчисленні границь, пов'язаних з числом *e*, часто застосовують таке твердження: якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, то існує також границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, яка обчислюється за формулою

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

Розв’язування завдань

Границя функції. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині $D(f)$. Число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \epsilon D(f)$, які задовільнять нерівність $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записують: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x\to 6} \frac{4x^2-1}{2x-1}$.

Розв’язання. $\lim_{x\to 6} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \lim_{x\to 6} \frac{4\cdot 36-1}{2\cdot 6-1} = 13$.

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{x\to 0,5} \frac{4x^2-1}{2x-1}$.

Розв’язання.

$$\lim_{x\to 0,5} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0,5} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1} = \lim_{x\to 0,5}(2x+1) = 2\cdot 0,5 + 1 =$$
$$= 2$$

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$.

Розв’язання. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2 - 13x + 5)$

Розв’язання. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2 - 13x + 5) = 5\cdot 2^2 - 13\cdot 2 + 5 = -1$.

Приклад 5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{2x-1}$

Розв’язання. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1+1}{2\cdot 1-1} = 2$.

Приклад 6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2x+5}{3x^3+x^2+1}$

Розв’язання. Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Розділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x+5}{3x^3+x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1+0+0}{3+0+0} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x^2+5}$.

Розв’язання. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x^2+5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}} = \frac{0+0}{3+0} = 0$.

Приклад 8. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\frac{8\cdot 0,5^3-1}{6\cdot 0,5^2-5\cdot 0,5+1}=\frac{0}{0}$;

Розкладемо на множники чисельник і знаменник:

$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1)$;

$6x^2-5x+1=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)=(2x-1)(3x-1)$.

Звідси

$$\lim_{x\to 0,5}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim_{x\to 0,5}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim_{x\to 0,5}\frac{(4x^2+2x+1)}{(3x-1)}=\frac{4\cdot 0,5^2+2\cdot 0,5+1}{3\cdot 0,5-1}=\frac{3}{0,5}=$$
$$=6$$

Приклад 9. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

Домножимо чисельник і знаменник функції на спряжений вираз до чисельника:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{0}{2}=0$$

Приклад 10. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\infty-\infty$.

Домножимо чисельник і знаменник функції на спряжений вираз до чисельника:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\frac{x}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=1$$

Приклад 11. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{x}$.

Розв'язання. Застосуємо формулу першої важливої границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3sin3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{3x}=3\cdot 1=3$$

Приклад 12. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{cosx\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx}=1\cdot\frac{1}{cos0}=1$$

Приклад 13. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$.

Розв'язання. Застосуємо тригонометричну формулу $sin^2x=\frac{1-cos2x}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\ \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot sin\ \frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}sin\ \frac{x}{2}=sin0=0$$

Приклад 14. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Розв'язання.

Застосуємо другу важливу границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-1\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{(2x-1)\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3}{x-2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=e^6$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Користуючись теоремами про границі, обчислити:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\left(3(x+2)-\frac{x}{x-2}\right)$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+9}{x^2-7x+1}$, 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$,

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+9}{x-1}$, 5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2+12}-x\right)^3$.

2. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{5x^2-8x+3}$, 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-6x+4}{x^3-8}$,

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}$, 5) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

3. Знайти границі функцій, позбувшись ірраціональності:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}-2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{16-x^2}{3-\sqrt{5+x}}$, 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$,

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

4. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+8}{x-2}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10x^2-6x+5}{5x^2+8x+3}$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-6x+4}{x^3-8}$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10x-4x^2+5}{8x+3}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{2x^2}$.

5. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $[\infty-\infty]$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)$.

6. Знайти границі функцій, застосувавши першу важливу границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}$, 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,5x}{x}$.

7. Знайти границі функцій, застосувавши другу важливу границю:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^x$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-4x}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, 7) $\lim\limits_{x\to 5}(2x-9)^{\frac{3}{x-5}}$, 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2+2}$.

3. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $X = (a, b)$ (можливо нескінченому). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. Тоді функція $y = f(x)$ в точці x_0 дістане приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення 1. *Похідною функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 називають границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Позначають похідну одним із символів: $y'(x_0),\ f'(x_0),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x_0)}{dx}$. Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то цю похідну позначають y', $f'(x)$ або $\frac{d}{dx} f(x)$.

Означення 2. Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називають *диференційованою в точці* x_0. Функцію, диференційовану в кожній точці $x \in X$ називають *диференційованою на проміжку X.* Операцію відшукання похідної називають ***диференціюванням***.

Правила диференціювання

1. Диференціювання суми, різниці, добутку й частки

Теорема 1. *Якщо функції* $u = u(x)$ *і* $v = v(x)$ *диференційовані в точці* $x \in X$, *то функції* $u(x) \pm v(x),\ u(x) \cdot v(x),\ \frac{u(x)}{v(x)}$ *(в останньому випадку вважається, що* $v(x) \neq 0$*) також диференційовані в цій точці й справедливі такі рівності:*

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

2. Диференціювання складної функції

Теорема 2. *Нехай* $y = f(\varphi(x))$ *– складна функція, де* $y = f(u)$ *і* $u = \varphi(x)$ *– диференційовані функції своїх аргументів. Точніше, зовнішня функція*

$y = f(u)$ *в точці* $u = \varphi(x)$ *має похідну (по* u*)* $y'_u(u) = f'_u(u)$, *а внутрішня функція* $u = \varphi(x)$ *у точці* x *– похідну (по* x*)* $u'_x = \varphi'(x)$. *Тоді складна функція* $y = f(\varphi(x))$ *диференційована в точці* x, *причому її похідна обчислюється за формулою*

$$f'_x(\varphi(x)) = f'_u(u) \cdot \varphi'(x) \text{ або } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

	Похідна основної елементарної функції	Похідна складної елементарної функції $u = u(x)$	Частинний випадок
1	$(C)' = 0$		
2	$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x$, $\alpha \in R$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0,\ a \neq 1$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x$, $a > 0,\ a \neq 1$	$(e^x)' = e^x$
4	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0,\ a \neq 1$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x$, $a > 0,\ a \neq 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$	
6	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$	
7	$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$	
8	$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$	
9	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $(\lvert x \rvert < 1)$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'_x$	
10	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $(\lvert x \rvert < 1)$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'_x$	
11	$(arctg\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}$	$(arctg\, u)' = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'_x$	

12	$\left(arcctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(arcctg\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$	

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x, тобто існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тоді для досить малого околу точки x має місце рівність $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Означення 3. ***Диференціалом функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x називають головну, лінійну відносно Δx частину приросту функції в цій точці

$$dy = f'(x)\Delta x \quad \textit{або} \quad dy = f'(x)dx. \tag{1}$$

Означення 4. ***Другим диференціалом*** $d^2 y$ ***або диференціалом другого порядку*** називається диференціал від диференціала першого порядку

$$d^2 y = d(dy) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2. \tag{2}$$

Приклад 1. Зайти диференціали першого і другого порядків функції $y = arctg\, x$.

За формулами (1), (2) знаходимо: $dy = \dfrac{1}{1+x^2}dx$, $d^2 y = \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2$.

Геометричне застосування похідної

Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то $f'(x_0) = tg\alpha$, де α – кут, який утворює з додатнім напрямком осі Ox дотична до кривої в точці з абсцисою x_0.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \text{ де } y_0 = f(x_0). \tag{3}$$

Нормаллю до кривої називається пряма, перпендикулярна до дотичної, яка проходить через точку дотику.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці дотику $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0. \tag{4}$$

Застосування диференціалу функції до наближених обчислень функцій

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x.

Теорема 1. *Якщо* $y'_x(x) = f'(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$, *тобто* Δy *і* dy *є еквівалентними нескінченно малими.*

На підставі означення диференціалу та сформульованої теореми дістанемо наближені формули:

$$\Delta y \approx dy \text{ або } f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (5)$$

Якщо в рівності (1) покласти $x_0 = 0$, а $\Delta x = x$, то вона набуває вигляду

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x. \qquad (6)$$

Формули (5), (6) часто використовуються для наближених обчислень.

Приклад 2. Наближено обчислити значення $arctg(1.05)$.

Для наближеного обчислення значення $arctg(1.05)$ скористаємось формулою (5), згідно з якою $arctg(x_0 + \Delta x) \approx (arctg\, x_0)' \cdot \Delta x + arctg(x_0)$.

Поклавши $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.05$, одержимо

$$arctg(1.05) \approx \frac{1}{1+1^2} \cdot 0.05 + \frac{\pi}{4} = 0.025 + 0.78539816 = 0.81039816.$$

Задача 1. Розчинення лікарської речовини з таблетки описується функцією $m = m_0 \cdot e^{-kt}$, де $\boldsymbol{m_0}$ – початкова маса таблетки, $\boldsymbol{m}$ – нерозчинена маса в момент часу $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{k}$ – константа швидкості розчинення, $\boldsymbol{t}$ – час. Знайти рівняння швидкості розчинення і визначити швидкість розчинення при $\boldsymbol{m_0}$ = 10г, $\boldsymbol{t}$ = 10 хвилин, $\boldsymbol{k}$ = 0,001 с$^{-1}$.

Розв'язання. Як відомо, похідна функції визначає швидкість її зміни. У цьому полягає фізичний зміст похідної – це швидкість зміни величини, що описується функцією, залежно від зміни аргументу. Таким чином, швидкість розчинення речовини з таблетки є

$$m' = (m_0 \cdot e^{-kt})' = -km_0 \cdot e^{-kt} = -km$$

Отже, швидкість розчинення речовини з таблетки пропорційна нерозчиненій масі таблетки.

Швидкість розчинення, визначаємо підставляючи чисельні значення у вираз похідної. При заданих значеннях параметрів швидкість дорівнює

$$m'(10\min) = -km_0 \cdot e^{-kt} = -0{,}001 \cdot 10 \cdot e^{-0{,}001 \cdot 600} = -0{,}01 \cdot e^{-0{,}6} \approx -0{,}0055 \text{ (г/с)}$$

Задача 2. Зміщення, викликане імпульсним подразненням м'яза, описується рівнянням Релея

$$x = kte^{\frac{-t^2}{2}}, t > 0$$

Знайти швидкість і прискорення залежно від часу.

Розв'язання. З фізичного змісту першої і другої похідної функції витікає, що швидкість скорочення м'яза описується похідною зміщення по часу x', а прискорення – другою похідною зміщення по часу x''. Отже, швидкість дорівнює

$$v = \frac{dx}{dt} = ke^{\frac{-t^2}{2}}(1 - t^2), t > 0$$

і прискорення дорівнює

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = ke^{\frac{-t^2}{2}}(t^3 - 2t).$$

Розв'язування завдань

Похідні простих функцій

Правила диференціювання

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^2 + x - 2$.

Розв'язання. Застосовуючи правило похідної суми функцій та таблицю похідних, отримаємо $y' = (x^2 + x - 2)' = (x^2)' + (x)' - (2)' = 2x + 1$.

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = x^3 sinx$.

Розв'язання. Застосовуючи правило похідної добутку функцій та таблицю похідних, отримаємо

$$y' = (x^3 sinx)' = (x^3)' \cdot sinx + x^3 \cdot (sinx)' = 3x^2 \cdot sinx + x^3 \cdot cosx.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = 5tgx$.

Розв'язання. Застосовуючи таблицю похідних, отримаємо

$$y' = (5tgx)' = 5(tgx)' = 5 \cdot \frac{1}{cos^2x} = \frac{5}{cos^2x}$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = xe^x sinx$

Розв'язання. Згідно формули похідної добутку декількох диференційованих функцій $y' = (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, отримаємо

$$y' = (xe^x sinx)' = (x)'e^x sinx + x(e^x)' sinx + xe^x (sinx)' =$$
$$= e^x sinx + xe^x sinx + xe^x cosx = e^x (sinx + xsinx + xcosx)$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Розв'язання. Застосовуючи правило похідної частки функцій та таблицю похідних, отримаємо

$$y' = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2-1)'\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = \frac{5}{sinx}$.

Розв'язання. Застосовуючи таблицю похідних, отримаємо

$$y' = \left(\frac{5}{sinx}\right)' = \frac{5'\cdot sinx-(sinx)'\cdot 5}{(sinx)^2} = \frac{-5cosx}{(sinx)^2} = \frac{-5ctgx}{sinx}$$

Похідні складених функцій

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = (x^2+1)^4$.

Розв'язання. Маємо складну степеневу функцію. Застосовуючи формулу $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ та таблицю похідних, отримаємо

$$y' = ((x^2+1)^4)' = 4\cdot(x^2+1)^3\cdot(x^2+1)' = 4\cdot(x^2+1)^3\cdot 2x$$
$$= 8x\cdot(x^2+1)^3$$

Приклад 8. Знайти похідну функції $y = sin3x$.

Розв'язання. Маємо складну функцію, так як аргументом синуса є не *x*, а 3*x*. Застосовуючи формулу $(sinu)' = cosu\cdot u'$, отримаємо

$$y' = (sin3x)' = cos3x\cdot(3x)' = 3cos3x.$$

Приклад 9. Знайти похідну функції $y = 3^{sinx}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу $(a^u)' = a^u\cdot lna\cdot u'$, отримаємо

$$y' = \left(3^{sinx}\right)' = 3^{sinx}\cdot ln3\cdot(sinx)' = 3^{sinx}\cdot ln3\cdot cosx.$$

Приклад 10. Знайти похідну функції $y = ln^4 2x$.

Розв'язання. Застосовуючи формули $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, $(lnu)' = \frac{1}{u}\cdot u'$ отримаємо

$$y' = (ln^4 2x)' = 4ln^3 2x\cdot\frac{1}{2x}\cdot(2x)' = \frac{4ln^3 2x}{x}.$$

Приклад 11. Знайти похідну функції $y = arctgx^2$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$, отримаємо

$$y = (arctgx^2) = \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot(x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}$$

Приклад 12. Знайти похідну функції $y = e^{\sqrt{lnx}}$.

Розв'язання. Застосовуючи поступово формули $(e^u)' = e^u\cdot u'$, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$, $(lnu)' = \frac{1}{u}\cdot u'$, отримаємо

$$y' = \left(e^{\sqrt{lnx}}\right)' = e^{\sqrt{lnx}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{lnx}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{\sqrt{lnx}}}{2x \cdot \sqrt{lnx}}$$

Приклад 13. Знайти похідну функції $y = (sin^2x + 1)^4$.

Розв'язання. Маємо складну степеневу функцію

$$y' = ((sin^2x + 1)^4)' = 4(sin^2x + 1)^3 \cdot 2sinx \cdot cosx = 4(sin^2x + 1)^3 \cdot sin2x$$

Приклад 14. Знайти похідну функції $y = log_3(x^2 - 1)$.

Розв'язання. Маємо складну логарифмічну функцію, використовуємо формулу $(log_a u)' = \frac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$:

$$y' = \frac{1}{(x^2 - 1)ln3} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{2x}{(x^2 - 1)ln3}$$

Приклад 15. Знайти похідну функції $y = ln^4(sinx)$.

Розв'язання. Маємо складну логарифмічну функцію:

$$y' = \left(ln^4(sinx)\right)' = 4ln^3(sinx) \cdot \frac{1}{sinx} \cdot cosx = 4ln^3(sinx) \cdot ctgx$$

Приклад 16. Обчислити похідну функції $y = (x+1)(x^3+3)$.

Розв'язання. Згідно правила похідної добутку та формул з таблиці похідних маємо:

$$y' = (x+1)' \cdot (x^3 + 3) + (x+1) \cdot (x^3 + 3)' = (x^3 + 3) + (x+1) \cdot 3x^2 =$$
$$= x^3 + 3 + 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 = 4x^3$$
$$+3x^2 + 3.$$

Приклад 17. Обчислити похідну функції $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

Розв'язання.

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Приклад 18. Обчислити похідну функції $y = 2^{\frac{x}{lnx}}$.

Розв'язання.

$$y' = \left(2^{\frac{x}{lnx}}\right)' = 2^{\frac{x}{lnx}} \cdot ln2 \cdot \left(\frac{x}{lnx}\right)' = 2^{\frac{x}{lnx}} \cdot ln2 \cdot \frac{x' \cdot lnx - x \cdot (lnx)'}{ln^2x} =$$
$$= 2^{\frac{x}{lnx}} \cdot ln2 \cdot \frac{1 \cdot lnx - x \cdot \frac{1}{x}}{ln^2x} = 2^{\frac{x}{lnx}} \cdot ln2 \cdot \frac{lnx - 1}{ln^2x}$$

Приклад 19. Знайти похідну функції $y = 3sin^2x - sin^3x$.

Розв'язання. Маємо складну степеневу функцію, диференціюючи почленно, отримаємо

$$y' = (3sin^2x)' - (sin^3x)' = 3 \cdot 2sinx \cdot cosx - 3sin^2x \cdot cosx =$$
$$= 3 \cdot sin2x - 3sin^2x \cdot cosx$$

Приклад 20. Обчислити похідну функції $y = tg(\ln x)$.

Розв'язання.

$$y' = \frac{1}{cos^2(lnx)} \cdot (lnx)' = \frac{1}{x\,cos^2(lnx)}.$$

Приклад 21. Знайти похідну функції $y = e^{-x^2} \cdot lnx.$

Розв'язання. Маємо складну функцію, диференціюючи за правилом добутку, отримаємо

$$y' = \left(e^{-x^2} \cdot lnx\right)' = \left(e^{-x^2}\right)' \cdot lnx + e^{-x^2} \cdot (lnx)'$$

$$= e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot lnx + e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x} == e^{-x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2xlnx\right)$$

Приклад 22. Обчислити похідну функції $y = log_3(x^2 - sinx).$

Розв'язання.

$$y' = \left(log_3(x^2 - sinx)\right)' = \frac{1}{(x^2 - sinx) \cdot ln3} \cdot (x^2 - sinx)' =$$

$$= \frac{1}{(x^2 - sinx) \cdot ln3} \cdot (2x - cosx)$$

Приклад 23. Обчислити похідну функції $y = 5tg\frac{x}{5} + tg\frac{\pi}{8}.$

Розв'язання.

$$y' = \left(5tg\frac{x}{5}\right)' + \left(tg\frac{\pi}{8}\right)' = 5 \cdot \frac{1}{cos^2\frac{x}{5}} \cdot \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{cos^2\frac{x}{5}}$$

Приклад 24. Обчислити похідну функції $y = x^3 arctgx^3.$

Розв'язання.

$$y' = (x^3 arctgx^3)' = (x^3)' arctgx^3 + x^3 (arctgx^3)' =$$

$$= 3x^2 arctgx^3 + x^3 \cdot \frac{1}{1 + (x^3)^2} \cdot 3x^2 = 3x^2 arctgx^3 + \frac{3x^5}{1 + x^6}$$

Обчислення диференціалів функції

Знаходження диференціала, по суті, зводиться до знаходження похідної цієї функції, помноженої на диференціал незалежної змінної.

Знайти диференціали даних функцій.

Приклад 25. $y = \frac{1}{1-x^2}.$

Розв'язання. Застосуємо формулу $dy = y'dx.$

$$dy = \left(\frac{1}{1 - x^2}\right)' dx = \frac{-2x}{(1 - x^2)^2} dx$$

Приклад 26. $y = e^{-7x}.$

Розв'язання. $dy = (e^{-7x})' dx = -7e^{-7x} dx.$

Приклад 27. $y = \sqrt{x} + 3.$

Розв'язання. $dy = \left(\sqrt{x} + 3\right)' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$

Приклад 28. $y = tg^2 x\,.$

Розв'язання. $dy=(tg^2x)'dx=2tgx\cdot\frac{1}{cos^2x}dx=\frac{2tgx}{cos^2x}dx.$

Приклад 29. $y=5^{\ln(tgx)}$.

Розв'язання.

$$dy=\left(5^{\ln(tgx)}\right)'dx=5^{\ln(tgx)}ln5\cdot\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{cos^2x}dx=\frac{5^{\ln(tgx)}ln5}{tgxcos^2x}dx.$$

Приклад 30. $y=lntg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$.

Розв'язання. За формулами зведення отримаємо $tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)=ctg\frac{x}{4}$.

Отже,

$$dy=\left(lntg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)\right)'dx=\left(lnctg\frac{x}{4}\right)'dx=\frac{1}{ctg\frac{x}{4}}\cdot\left(-\frac{1}{sin^2\frac{x}{4}}\right)\cdot\frac{1}{4}dx=$$

$$=-\frac{dx}{4ctg\frac{x}{4}sin^2\frac{x}{4}}$$

Приклад 31. Обчислити наближено $arctg\,0{,}97$.

Розв'язання. Нехай $arctg\,0{,}97$ є частинне значення функції $f(x)=arctg\,x$ при $x=0{,}97$. Нехай $x_0=1$. Тоді $\Delta x=x-x_0=0{,}97-1=-0{,}03$;

$f(x_0)=f(1)=arctg1=\frac{\pi}{4}$.

Диференціюючи функцію $f(x)=arctg\,x$, знаходимо $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

При $x_0=1$, $f'(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Застосовуючи формулу $\Delta y\approx dy\Rightarrow f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, отримаємо $arctg\,0{,}97\approx\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot(-0{,}03)\approx0{,}785-0{,}015=0{,}77.$

Приклад 32. Обчислити наближено $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$

Розв'язання.

Нехай $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$ є частинне значення функції $f(x)=\sqrt{\frac{(x)^2-3}{(x)^2+5}}$ при $x=2{,}037$.

Поклавши $x_0=2$, $f(x_0)=f(2)=\sqrt{\frac{(2)^2-3}{(2)^2+5}}=\frac{1}{3}$;

$\Delta x=x-x_0=2{,}037-2=0{,}037.$

Знайдемо похідну функції $f(x)=\sqrt{\frac{(x)^2-3}{(x)^2+5}}$, а також її значення при $x_0=2$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{(x)^2-3}{(x)^2+5}}}\cdot\frac{2x(x^2+5)-2x(x^2-3)}{(x^2+5)^2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{(x)^2-3}{(x)^2+5}}}\cdot\frac{8x}{(x^2+5)^2}$$

$f'(x_0) = f'(2) = \dfrac{16}{27}$

Отже, маємо $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}} \approx \frac{1}{3} + \frac{16}{27} \cdot 0{,}037 \approx 0{,}333 + 0{,}022 = 0{,}355.$

Похідні вищих порядків

Приклад 33. Знайти похідну другого порядку y'', якщо $y = (x^2 + 1)^3$

Розв'язання. Маємо явно задану функцію. Спочатку знаходимо похідну першого порядку $y' = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2$; потім знову знаходимо похідну першого порядку від похідної:

$$y'' = (y')' = (6x(x^2 + 1)^2)' =$$
$$= 6(x^2 + 1)^2 + 6x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x = 6(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1 + \cdot 4x^2)$$
$$= 6(x^2 + 1)(5x^2 + 1) = 6(5x^4 + 6x^2 + 1)$$

Приклад 34. Знайти похідну третього порядку y''', якщо $y = cos^2 x$

Розв'язання. Маємо явно задану функцію. Диференціюючи послідовно три рази, знаходимо

$$y' = (cos^2 x)' = 2cosx(-sinx) = -sin2x$$
$$y'' = (y')' = (-sin2x)' = -cos2x \cdot 2 = -2cos2x$$
$$y''' = (y'')' = (-2cos2x)' = -2(-sin2x) \cdot 2 = 4sin2x$$

Приклад 35. Знайти похідну другого порядку y'' в точці $x_0 = 0$, якщо $y(x) = e^{2x-1}$.

Розв'язання. Диференціюючи дану функцію двічі, знаходимо $y''(x)$:

$$y'(x) = (e^{2x-1})' = 2e^{2x-1}$$
$$y''(x) = (2e^{2x-1})' = 4e^{2x-1}$$

При $x_0 = 0$ отримаємо $y''(0) = (2e^{2\cdot 0-1})' = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$.

Приклад 36. Знайти диференціал другого порядку функції $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. Диференціюючи дану функцію двічі та враховуючи, що $d^2y = y''dx^2$, одержимо $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$, $d^2y = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}dx^2$.

Приклад 37. Знайти диференціал третього порядку d^3y, якщо $y = sin^2 x$.

Розв'язання. Диференціюючи дану функцію тричі, знаходимо похідні:

$y' = 2sinxcosx = sin2x$, $y'' = 2cos2x$, $y''' = -4sin2x$.

Тоді, за формулою $d^3y = y'''dx^3 = -4sin2xdx^3$.

Приклад 38. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0\,;\, y_0)$:

1) $y = x^2 - 4x$, $M_0(1;\, -3)$;

2) $y = e^x$, $M_0(0;\ 1)$;

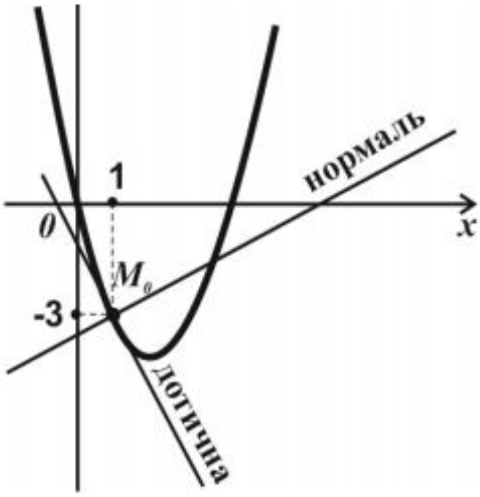
3) $y = 3\ln x - 4$, $M_0(1;\ -1)$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, де $y_0 = f(x_0)$.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці дотику $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0.$$

1) Знайдемо похідну $y' = 2x - 4$. Потім обчислимо похідну в заданій точці $M_0(1;\ -3)$: $y'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$. Маючи на увазі, що $x_0 = 1, y_0 = -3$ запишемо рівняння дотичної $y + 3 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x - 1$.
   Запишемо рівняння нормалі $y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.



На рисунку зображено параболу $y = x^2 - 4x$, дотичну і нормаль, які проведені до кривої в точці $M_0(1; -3)$.

2) Розв'язання аналогічне: $y = e^x$; $y' = e^x$; $y'(0) = e^0 = 1$.
   Запишемо рівняння дотичної $y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$.
   Запишемо рівняння нормалі $y - 1 = -x \Rightarrow y = -x + 1$.

3) Для функції $y = 3\ln x - 4$, знайдемо похідну $y' = \frac{3}{x}$ та її значення в точці $M_0(1;\ -1)$: $y'(1) = \frac{3}{1} = 3$.
   Запишемо рівняння дотичної $y + 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 4$.
   Запишемо рівняння нормалі $y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

Завдання для самостійної роботи:

№	**Знайти похідну** y'	**Знайти** $y',\ dy,\ y'',\ d^2y$
1	$y = x^2 \sin x + \frac{\ln x}{x^3}$	$y = \cos^2 \frac{x}{2}$
2	$y = x^2 tg\, 2x + \frac{x}{e^x}$	$y = \left(5x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$
3	$y = (x^2 - 1)\sin 3x + \frac{2^x}{x}$	$y = tg^4 \frac{x}{4}$
4	$y = x^5 (x^3 - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}) + \frac{2x}{3^x}$	$y = \sin\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)$
5	$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + (x^3 - 1)\cos 3x$	$y = tg^3 \frac{x}{6}$
6	$y = \frac{2x}{x^2 + 4} + x \arccos 3x$	$y = \ln\left(3x + \frac{1}{\ln x}\right)$
7	$y = \frac{\sin x}{x^2} + x^3 (\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + 6\sqrt{x})$	$y = \left(3x - \frac{1}{e^x}\right)^{10}$
8	$y = \frac{4x}{x^2 - 6} + 2x arctg x$	$y = \log_3 (x^2 - 1)$
9	$y = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} + e^x \ln x$	$y = ctg^2 \frac{x}{8}$
10	$y = \frac{x}{2x - 1} + x arcctg x$	$y = \ln\left(x^2 + \ln x\right)$
11	$y = (x^3 - \frac{10}{\sqrt{x}}) tg x + \frac{2x}{e^x + 4}$	$y = 10 e^{\sin(5x^2 + x)}$
12	$y = x^2 \sin x + \frac{\ln x}{x^3}$	$y = \sqrt{tg \frac{x}{2}}$
13	$y = \frac{2x}{\cos x} + x \arcsin 4x$	$y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$
14	$y = \frac{tg x}{x^2} + x^3 (\frac{1}{x^8} + \sqrt[4]{x})$	$y = \sin\sqrt{\frac{x^2}{3} + 1}$

2. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої *f*(*x*):

1) $f(x) = x^3$ у точці $M_0(2;\ 2)$;

2) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ у точці $M(2;\ 2)$;

3) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ у точці $M(1;\ 1)$;

4) $f(x) = \sqrt{x}$ у точці $M_0(4;\ 4)$.

4. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Обчислення границі функції за допомогою правила Лопіталя

Правило Лопіталя.

1. Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$.

Теорема 1. *Нехай функції* $f(x),\varphi(x)$ *визначені і диференційовані в околі точки* x_0*, за винятком, можливо самої точки* x_0*, причому* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, *і у вказаному околі* $\varphi'(x)\neq 0$. *Тоді якщо існує границя відношення похідних* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то існує і границя відношення функцій* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *і ці границі рівні між собою:* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження 1. Теорема справедлива і втому випадку, коли $x_0=\infty$.

Зауваження 2. Якщо похідні $f'(x)$ *і* $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі умови, що і функції $f(x),\varphi(x)$, то теорему 1 можна застосувати ще раз. При цьому дістанемо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Взагалі, теорему 1 можна застосовувати доти, поки не прийдемо до відношення похідних $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, яке має певну границю при $x\to x_0$. Цю саму границю матиме й відношення функцій:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$$

2. Розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 2. *Нехай функції* $f(x),\varphi(x)$ *визначені і диференційовані в околі точки* x_0 *і в цьому околі* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$. *Тоді якщо існує границя* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *і* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауважимо, що правило Лопіталя застосовується лише для розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$, які називаються ***основними***. Відомі ще й такі невизначеності, як $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0, які зводяться до основних.

Покажемо, як ці невизначеності зводяться до основних:

а) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то невизначеність виду $0\cdot\infty$ можна звести до основних так:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\varphi(x)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}=\frac{0}{0}$$

або

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\varphi(x)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}=\frac{\infty}{\infty}.$$

б) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то невизначеність виду $\infty-\infty$ зводиться до невизначеності $\frac{0}{0}$:

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{1/\varphi(x)-1/f(x)}{1/f(x)\cdot 1/\varphi(x)}.$$

в) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)\ln f(x))}$$

і невизначеність виду 0^0 зводиться до невизначеності $0\cdot\infty$, розглянутої вище. Аналогічно розкриваються невизначеності 1^∞ і ∞^0.

Таким чином, щоб розкрити невизначеності $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0, їх треба спочатку звести до основних і лише після цього застосувати правило Лопіталя.

Розв’язування завдань

Обчислити границі функції за допомогою правила Лопіталя.

Розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$.

Приклад № 1. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$.

Розв’язання. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(sinx)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx}{1}=\frac{cos0}{1}=1.$

Маємо частку двох нескінченно малих функцій, тобто невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Для розкриття невизначеності продиференціюємо чисельник та знаменник дробу (тобто знаходимо похідну окремо від чисельника і від знаменника), а далі підставимо значення аргументу.

Приклад № 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{5x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2x)'}{(5x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2}{5}=\frac{2}{5}$$

Приклад № 3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{7+x}}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2\sqrt{7+x}}=\frac{1}{2\sqrt{7+2}}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

Приклад № 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{x^3}$.

Розв'язання.

Для розкриття невизначеності два рази використовуємо правило Лопіталя, розкладаємо в чисельнику різницю кубів за формулами скороченого множення, застосовуємо першу чудову границю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(tgx-sinx)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2x}-cosx}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^3x}{3x^2cos^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+cosx+cos^2x)}{3cos^2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)}{x^2}\cdot\frac{(1+cos0+cos^20)}{3cos^20}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{2x}=\frac{1}{2}$$

Приклад № 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx+x^3-x^5}{4x-x^4}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx+x^3-x^5}{4x-x^4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(sinx+x^3-x^5)'}{(4x-x^4)'}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx+3x^2-5x^4}{4-4x^3}=$$

$$=\frac{1+0-0}{4-0}=\frac{1}{4}$$

Приклад № 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{sin4x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{sin4x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(tgx-1)'}{(sin4x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{cos^2x}}{4cos4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4cos4xcos^2x}=$$

$$=\frac{1}{4cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4\cdot(-1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}$$

Приклад № 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-2^{-x}}{\ln(1+2x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-2^{-x}}{\ln(1+2x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-2^{-x})'}{(\ln(1+2x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x ln2+2^{-x}ln2}{\frac{2}{1+2x}}=\frac{ln2+ln2}{2}$$
$$=ln2$$

Приклад № 8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x lna}{1}=lna$$

Приклад № 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg7x}{e^{3x}-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg7x}{e^{3x}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(arctg7x)'}{(e^{3x}-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{1+49x^2}}{3e^{3x}}=\frac{7}{3}$$

Приклад № 10. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(8-2x^2)'}{(x^2+4x-12)'}=\lim_{x\to 2}\frac{-4x}{2x+4}=\frac{-4\cdot 2}{2\cdot 2+4}=\frac{-8}{8}$$
$$=-1$$

Приклад № 11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{sin^2\frac{x}{2}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x^2)'}{\left(sin^2\frac{x}{2}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2x}{2sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{20x}{sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{20x}{sin(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(20x)'}{(sin(x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{20}{cosx}=\frac{20}{cos0}=20$$

Приклад № 12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sinx\cdot cosx}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sinx\cdot cosx}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(sinx\cdot cosx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{(sinx)'\cdot cosx+sinx\cdot(cosx)'}$$
$$==\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{cosx\cdot cosx+sinx\cdot(-sinx)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{cos^2x-sin^2x}=\frac{1+1}{1-0}$$
$$=2$$

Приклад № 13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sinx}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sinx}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-sinx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-cosx}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-cosx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sinx}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(sinx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{cosx}$$
$$=$$
$$=\frac{1+1}{1}=2$$

Приклад № 14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln(1+x)}{e^{3x}-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(1+x)}{e^{3x}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\ln(1+x))'}{(e^{3x}-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{1+x}}{3e^{3x}}=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$$

Приклад № 15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos2x}{1-tgx}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos2x}{1-tgx}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(cos2x)'}{(1-tgx)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2sin2x}{-\frac{1}{cos^2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}2sin2x\cdot cos^2x=$$
$$=2sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos^2\frac{\pi}{4}=2\cdot 1\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$$

Розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$.

Приклад № 16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2-3x-5)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{1}=\lim_{x\to\infty}(4x-3)$$
$$=\infty$$

Приклад № 17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+x}{x^3+10x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x}{x^3+10x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^3+x)'}{(x^3+10x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+1}{3x^2+20x}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(9x^2+1)'}{(3x^2+20x)'}==\lim_{x\to\infty}\frac{18x}{6x+20}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(18x)'}{(6x+20)'}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{18}{6}=3$$

Приклад № 18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{lnx}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(lnx)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

Приклад № 19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ln^2x}{x^3}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ln^2x}{x^3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(ln^2x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2lnx\cdot\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2lnx}{3x^3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2lnx)'}{(3x^3)'}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{9x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{9x^3}=\frac{2}{\infty}=0$$

Приклад № 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{ln^3x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{ln^3x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(ln^3x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3ln^2x\cdot\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x}{ln^2x}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(ln^2x)'}==\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2lnx\cdot\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{lnx}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(\ln x)'}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}==\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

Приклад № 21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$$

Приклад № 22. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(2^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\cdot ln2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(2^x\cdot ln2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2^x\cdot ln^2 2}=0$$

Приклад № 23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx}{ctgx}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(ctgx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{sin^2x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot sinx=-1\cdot 0=0$$

Розкриття невизначеності $\infty-\infty$

Приклад № 24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{lnx}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Розв'язання.

Спочатку дану невизначеність зводимо до основних, потім застосовуємо правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{lnx}-\frac{1}{x-1}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-lnx}{(x-1)lnx}\right)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-lnx)'}{((x-1)lnx)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{lnx+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{xlnx+(x-1)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(xlnx+(x-1))'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{lnx+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}$$

Приклад № 25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{sinx}-\frac{1}{x}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sinx}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-sinx}{x\cdot sinx}\right)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-sinx)'}{(x\cdot sinx)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{sinx+xcosx}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)'}{(sinx+xcosx)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{cosx+cosx-xsinx}=0$$

Інші типи невизначеностей

Приклад № 26. Знайти границю функції за правилом Лопіталя: $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$.

Розв'язання. Тут невизначеність виду $0\cdot\infty$. Зведемо дану невизначеність до основних і застосовуючи правило Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}} = 0.$$

Приклад № 27. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}-1)ctgx$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}(e^{x}-1)ctgx = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)}{\frac{1}{ctgx}} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)}{tgx} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)'}{(tgx)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x})}{\frac{1}{cos^2x}} = \frac{(e^{0})}{\frac{1}{cos^2 0}} = 1$$

Приклад № 28. Знайти границю функції за правилом Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0} x^{x}$.

Розв'язання. Тут невизначеність виду 0^{0}. Зведемо дану невизначеність до основних і застосовуючи правило Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0} x^{x} = \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-x)} = e^{0} = 1$$

Приклад № 29. $\lim\limits_{x\to 0}(sinx)^{\frac{1}{\ln(sinx)}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}(sinx)^{\frac{1}{\ln(sinx)}} = [0^0] = e^{\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(sinx)^{\frac{1}{\ln(sinx)}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln sinx\cdot\frac{1}{\ln(sinx)}} = e.$$

Завдання для самостійної роботи:

Обчислити границі функції за допомогою правила Лопіталя:

№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$		№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	
1.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$	**8.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{\sin 4x}$
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$	**9.**	$\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}$
3.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{5^x-4^x}$	**10.**	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-1}{\sin x}$
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctg\ x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^3-x^5}{4x-x^4}$	**11.**	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x-2^{-x}}{\ln(1+2x)}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$
5.	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg\ x}{tg\ 3x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+3x-2}{x^5+3x^2-2x-1}$	**12.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{tg\frac{\pi x}{6}}{\ln\lvert x-3\rvert}$
6.	$\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\frac{x}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$	**13.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{5}{x+1}$
7.	$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)tg\frac{\pi x}{4}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}+3x^2-1}{3x-tg^3x}$	**14.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{5x-tg5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 2x^2)}{\ln(\sin x^2)}$

5. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

1. Зростання і спадання функції. Екстремуми функції

Означення 1. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками,* або *критичними точками першого роду.*

Означення 2. Зростаюча або спадна функція називається *монотонною*. Проміжки, на яких задана функція зростає або спадає називаються *проміжками монотонності*.

Правило знаходження проміжків монотонності функції $y = f(x)$:

1) знайти область визначення функції $y = f(x)$;
2) знайти похідну $f'(x)$;
3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує;
4) розділити критичними точками область визначення функції $f(x)$ на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної $f'(x)$;
5) за одержаними знаками похідної зробити висновки: де похідна додатна, в тих інтервалах функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Приклад 1. Знайти проміжки монотонності функції $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$.

Розв'язування. 1) Область визначення заданої функції $x \in (-\infty;+\infty)$.

2) Знайдемо похідну: $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$.

3) Знайдемо стаціонарні точки з рівняння $f'(x) = 6(x^2 - 1) = 0$:
$x_1 = -1; \quad x_2 = 1$.

Ці точки поділяють область визначення на інтервали $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ і $(1;+\infty)$. В кожному з цих інтервалів досліджуємо знак похідної $f'(x)$:

при $x \in (-\infty;-1)$ $\quad f'(x) > 0$,

при $x \in (-1;1)$ $\quad f'(x) < 0$,

при $x \in (1;+\infty)$ $\quad f'(x) > 0$.

Отже, функція зростає на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(1;+\infty)$, а спадає на інтервалі $(-1;1)$.

Локальний екстремум функції

Означення 3. Точка x_0 називається *точкою локального максимуму (мінімуму) функції* $y = f(x)$, якщо в деякому околі точки x_0 виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$ – для максимуму ($f(x) \ge f(x_0)$ – для мінімуму).

Узагальненим терміном поняття максимуму та мінімуму є *екстремум***.** Значення аргументу $x = x_0$ (тобто точка x_0), при якому функція $y = f(x)$ має екстремум (максимум чи мінімум) називають *точкою екстремуму функції.*

Зауважимо, що екстремальні точки, згідно з означенням, це такі точки, в яких функція набуває відповідно найбільшого чи найменшого значень порівняно із значеннями функції, що їх вона набуває в точках, досить близьких до екстремальної точки. Такий екстремум функції часто називають *локальним* (від лат. lokalis, що означає “місцевий”).

Повна необхідна умова існування локального екстремуму:

Для того, щоб функція $y = f(x)$ *мала локальний екстремум в точці* x_0, *необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю (* $f'(x_0) = 0$*) або не існувала.* Таким чином, точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, є *критичними* (або *стаціонарними*) і тому їх іноді називають *точками можливого екстремуму*.

Приклад 2. Знайти критичні точки наступних функцій і переконатися в наявності або відсутності локального екстремуму в цих точках:

1) $y = x^2$, $y' = 2x = 0$. Точка $x = 0$ – критична точка (точка мінімуму).

2) $y = x^3$, $y' = 3x^2 = 0$. Точка $x = 0$ – критична точка (екстремум відсутній).

3) $y = \sqrt[3]{x}$, $y' = (x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $y'(0) = \infty$. Точка $x = 0$ – критична точка (екстремум відсутній).

Правило дослідження функції на екстремум

Для дослідження функції $y = f(x)$ на екстремум доцільно дотримуватись такого порядку дій:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну $y' = f'(x)$;
3) знайти критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує;
4) дослідити знак похідної зліва і справа від кожної критичної точки;
5) якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y = f(x)$, а якщо з мінуса на плюс – то точкою мінімуму.
6) знайти екстремуми функції.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$.

*Розв’язування***.** Використаємо правило.

Область визначення функції: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Похідна функції $y' = 6x^2 - 18x + 12$.

Знаходимо критичні точки, розв'язавши рівняння $6x^2 - 18x + 12 = 0$. Такими точками є: $x_1 = 1, x_2 = 2$. Інших критичних точок немає.

Будуємо таблицю, за допомогою якої досліджуємо знак похідної і знаходимо екстремуми функції. Графік досліджуваної функції подано на рис. 1.

x	$(-\infty;\ 1)$	1	$(1;\ 2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	**max**	$\searrow$	**min**	$\nearrow$

$y_{\max} = f(1) = 2 - 9 + 12 + 7 = 12$.

$y_{\min} = f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 7 =$
$= 16 - 36 + 24 + 7 = 11$.

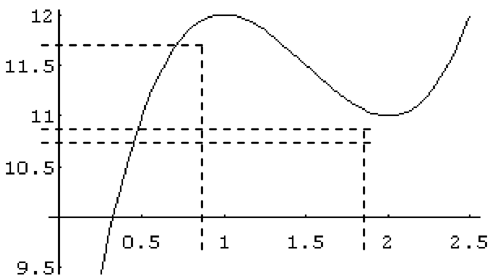


Рис. 1

Теорема (друга достатня умова локального екстремуму). *Нехай* x_0 – *стаціонарна точка функції* $f(x)$, *тобто* $f'(x_0) = 0$ *і нехай в околі точки* x_0 *існує друга неперервна похідна, причому* $f''(x_0) \neq 0$. *Тоді, якщо* $f''(x_0) > 0$, *то* x_0 *є точкою мінімуму, а якщо* $f''(x_0) < 0$, *то* x_0 *є точкою максимуму функції* $f(x)$.

Приклад 4. Користуючись другою достатньою умовою, знайти локальні екстремуми функції $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$.

Розв'язування. 1. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x) = 6x^2 - 30x - 84$.

2. Прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо рівняння $6x^2 - 30x - 84 = 0$. Корені рівняння $x_1 = -2$ і $x_2 = 7$ є стаціонарними точками.

3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x) = 12x - 30$ і обчислюємо значення другої похідної в стаціонарних точках: $f''(-2) = -54 < 0$, $f''(7) = 54 > 0$. Отже, в точці $x_1 = -2$ функція має максимум $f(-2) = 100$, а в точці $x_2 = 7$ – мінімум $f(7) = -629$.

Приклад 5. Залежність добового надою y (в літрах) від віку корів x (в роках) описується рівнянням $y = -9.53 + 6.86x - 0.49x^2$, $x > 2$. Знайти вік дійних корів, при якому добові надої будуть найбільшими.

Розв'язування. За правилом 1.4. знаходимо похідну функції $y' = 6.86 - 0.98x$ та критичну точку $x = \frac{6{,}86}{0{,}98} = 7$. Складаємо таблицю і досліджуємо знаки на проміжках $(2;\ 7)$ і $(7;\ +\infty)$:

x	$(2;\ 7)$	7	$(7;\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	$\nearrow$	**max**	$\searrow$

Бачимо, що функція y в точці $x = 7$ має максимум.

Отже, у віці корів семи років надої будуть найбільшими: $y = -9.53 + 6.86 \cdot 7 - 0.49 \cdot 7^2 = 14{,}48$ літрів.

Найбільше і найменше значення функції

Нехай на відрізку $[a; b]$ задано неперервну функцію $f(x)$.

Правило знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$:

1) знайти всі критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $(a; b)$;

2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і на кінцях відрізка;

3) із одержаних значень вибрати найменше та найбільше.

Приклад 6. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1;\ 3]$.

Розв'язування. Знаходимо критичні точки заданої функції. Для цього знаходимо похідну $f'(x) = 4x^3 - 16x$ і розв'язуючи рівняння $4x^3 - 16x = 0$ знайдемо критичні точки: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Відрізку $[-1;\ 3]$ належать тільки точки $x_2 = 0$ та $x_3 = 2$. Обчислимо значення функції в цих точках і на кінцях відрізка:

$f(-1) = -7$, $f(0) = 0$, $f(2) = -16$, $f(3) = 9$.

Отже, найбільше значення функції дорівнює $f(3) = 9$, а найменше – $f(2) = -16$.

Приклад 7. Нехай маємо квадратний лист картону із стороною *a*. Треба в кожному куті його вирізати такі квадрати, щоб після згинання країв отримати коробку найбільшої місткості.

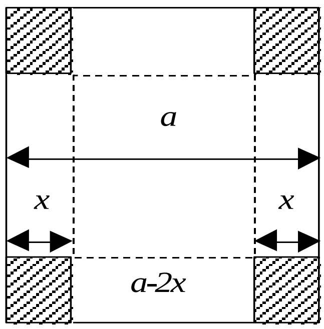


Рис. 2.

Розв'язування. Позначимо через *x* довжину сторони квадрата, який слід вирізати (рис. 2.), а через *V* – об'єм коробки. Тоді *V* є функція від *x*, яка виражається формулою

$V(x) = (a-2x)^2 x$, причому x змінюється на відрізку $\left[0; \frac{a}{2}\right]$. Оскільки функція $V(x)$ є неперервна на відрізку $\left[0; \frac{a}{2}\right]$, то вона набуває на ньому найбільшого значення. На кінцях відрізка функція $V(x)$ не може набувати найбільшого значення, бо в цих точках $V = 0$.

Отже, шукана точка знаходиться всередині відрізка. Для її знаходження знайдемо похідну

$$V'(x) = -4(a-2x)x + (a-2x)^2 = (a-2x)(a-6x)$$

і прирівняємо її до нуля

$$(a-2x)(a-6x) = 0.$$

Розв'язавши одержане рівняння, дістанемо корені: $x_1 = \frac{a}{2}$ і $x_2 = \frac{a}{6}$. Точка x_1 не є стаціонарною, бо це кінець відрізка, на якому розглядається функція $V(x)$. Точка x_2 міститься всередині відрізка, а отже, вона є стаціонарною. Оскільки це єдина стаціонарна точка, то вона і є точкою максимуму. Таким чином функція $V(x)$ набуває найбільшого значення, яке дорівнює $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^2$.

Приклад 8. Нехай електрична лампочка рухається (наприклад, на блоці) вздовж вертикальної прямої *OB* (рис. 3.). На якій висоті від горизонтальної площини слід розмістити лампочку, щоб в точці *A* цієї площини ($OA = a$) освітленість була найбільшою.

Розв'язування. З курсу фізики відомо, що освітленість *I* обчислюється за формулою $I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$, де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від сили світла лампочки; $r=BA$ – відстань від лампочки до точки *A*.

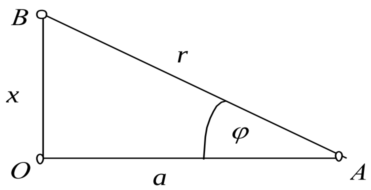


Рис. 3.

Нехай шукана висота $x=OB$, тоді $\sin\varphi = \frac{x}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. Тому $I(x) = \frac{kx}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, причому за змістом задачі $0 < x < +\infty$.

Знайшовши похідну від $I(x)$ і прирівнявши її до нуля, дістанемо рівняння $I'(x) = \frac{k(a^2 - 2x^2)}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{5}{2}}} = 0$, з якого знаходимо критичну точку $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Оскільки функція $I(x)$ має тільки одну критичну точку, а в умові задачі сказано, що існує положення лампочки, при якому освітлення в точці A найбільше, то x є шуканою точкою.

2. Побудова графіків функції

Опуклість та вгнутість графіка. Точки перегину

Означення 4. *Крива* $y = f(x)$ називається *опуклою на інтервалі* $(a;b)$, якщо усі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної точки дотику на цьому інтервалі (рис. 4.).

Означення 5. *Крива* $y = f(x)$ називається *вгнутою на інтервалі* $(a;b)$, якщо усі її точки крім точки дотику, лежать вище довільної точки дотику на цьому інтервалі (рис. 5.).

Означення 6. *Точкою перегину графіка неперервної функції* називається така точка, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої (рис. 6.).

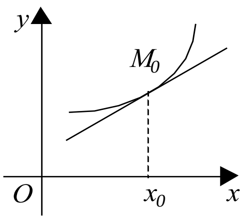


Рис. 4.

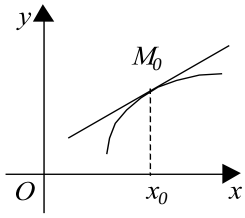


Рис. 5.

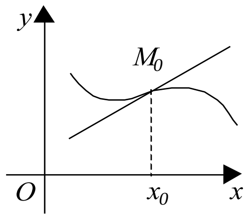


Рис. 6.

Теорема 1. *Нехай функція* $y = f(x)$ *є двічі диференційовною в усіх точках інтервалу* $(a;b)$*, тоді:*

1) *якщо* $f''(x) > 0,$ *то крива* $y = f(x)$ *є вгнутою на цьому інтервалі;*

2) *якщо* $f''(x) < 0$*, то крива* $y = f(x)$ *є опуклою на цьому інтервалі.*

Із сформульованої теореми випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю (якщо вона існує). Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує (наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[3]{x}$).

Означення 7. Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду функції* $f(x)$.

Теорема 2 (достатні умови існування точки перегину). *Нехай* x_0 *– критична точка другого роду функції* $y = f(x)$. *Якщо при переході через точку* x_0 *похідна* $f''(x)$ *змінює знак, то точка* $(x_0; f(x_0))$ *є точкою перегину кривої* $y = f(x)$.

Приклад 9. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:

а) $f(x)=x^3-x+1$; б) $f(x)=1+(x-2)^{\frac{5}{3}}$; в) $f(x)=x^4+1$.

Розв'язування. а) Область визначення функції $(-\infty;+\infty)$. Знаходимо $f'(x)=3x^2-1$. Оскільки $f''(x)=6x=0$ при $x=0$, то точка $x=0$ є критичною точкою другого роду. Інших критичних точок ця функція не має, бо $f''(x)$ існує на всій числовій осі.

Розбиваємо область визначення функції критичною точкою на інтервали і досліджуємо зміну знака другої похідної: якщо $x\in(-\infty;0)$, то $f''(x)<0$ – крива опукла; якщо $x\in(0;+\infty)$, то $f''(x)>0$ – крива вгнута. Точка $(0;\ 1)$ – точка перегину кривої.

б) Область визначення функції $(-\infty;+\infty)$. Оскільки $f''(x)=\dfrac{10}{9\sqrt[3]{x-2}}\neq 0$ і не існує при $x=2$, то єдиною критичною точкою другого роду є точка $x=2$.

Так як для всіх $x\in(-\infty;2)$ друга похідна $f''(x)<0$, а для $x\in(2;+\infty)$ – $f''(x)>0$, то крива опукла на інтервалі $(-\infty;2)$ і вгнута на інтервалі $(2;+\infty)$; точка $(2;\ 1)$ – точка перегину.

в) Область визначення функції $(-\infty;+\infty)$. Друга похідна $f''(x)=12x^2=0$ при $x=0$, тому точка $x=0$ є критичною точкою другого роду. Але $f''(x)>0$ як на інтервалі $(-\infty;0)$, так і на інтервалі $(0;+\infty)$, тому точка $x=0$ не є точкою перегину кривої.

Асимптоти кривої

Означення 8. Пряму лінію називають *асимптотою кривої* $y=f(x)$, якщо відстань від точки *M* кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка *M*, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченість.

Асимптоти бувають *вертикальні, горизонтальні* та *похилі*.

Пряма $x=x_0$ є вертикальною асимптотою, якщо хоча б одна із границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty.$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty.$ Якщо лише $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=b$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=b$, то функція має лише односторонню асимптоту.

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді $y=kx+b$, де k і b деякі коефіцієнти, які обчислюємо за формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Зауваження 1. Якщо хоча б одна з границь (не існує, або дорівнює нескінченості, то крива похилої асимптоти немає.

Зауваження 2. Якщо $k=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, тому $y=b$ – рівняння горизонтальної асимптоти.

Приклад 10. Знайти асимптоти кривої $y=x+e^{-x}$.

Розв'язування. Похилу асимптоту будемо шукати у вигляді $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{e^{-x}}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{xe^{x}}\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[x+e^{-x}-x\right]=\lim_{x\to\infty}e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}}=0.$$

Отже, асимптотою є пряма $y=x$. Знайдемо екстремальні точки. Знаходимо похідну і прирівнюємо її до нуля $y'=1-e^{-x}=0$.

Знаходимо розв'язок рівняння: $1-\frac{1}{e^{x}}=0 \to$ $e^{x}=1=e^{0} \to x=0$. Точка $x=0$ є екстремальною точкою.

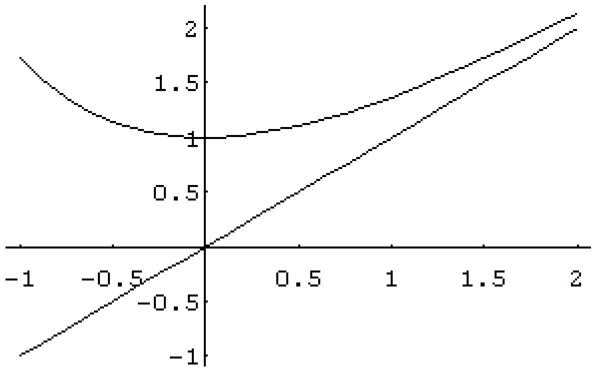


Рис. 7.

Дослідимо знак другої похідної в екстремальній точці:
$y''=e^{-x}$. Поклавши $x=0$, одержимо, що $y''(0)>0$, отже, в точці $x=0$ функція має мінімум (рис. 7).

3. Загальна схема дослідження функцій і побудова їх графіків

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки перетину з осями координат і, можливо, деякі додаткові точки, які уточнюють графік функції.
3. Дослідити функцію на парність-непарність, періодичність.
4. Знайти точки розриву та дослідити їх.
5. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції.
6. Знайти інтервали опуклості та вгнутості, і точки перетину.
7. Знайти асимптоти кривої.
8. Побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведені в пунктах 1-7.

Приклад 11. Дослідити функцію $y=\frac{2x-1}{(x-1)^{2}}$ та побудувати її графік.

Розв'язування. Область визначення функції $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, тому що є розрив у точці $x = 1$.

Перевірка парності. $f(-x) = \dfrac{-2x-1}{(-x-1)^2} = -\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$. Це означає, що дана функція не буде ні парною, а ні непарною.

Знайдемо екстремуми:

$$f'(x) = \left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{2\,(x-1)^2 - (2x-1)\cdot 2\,(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = -\frac{2x}{(x-1)^3} = 0.$$

Звідси $2x = 0$, а отже, $x = 0$ – точка екстремуму.

Результати досліджень зведемо в таблицю

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;\ 1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	*не існує*	–
f(x)	↘	min	↗	*не існує*	↘

Таким чином, задана функція на інтервалі $(0;\ 1)$ – зростає, а на інтервалах $(-\infty;0)$ і $(1;+\infty)$ – спадає. В точці $x = 0$ приймає мінімальне значення $y_{\min} = f(0) = -1$.

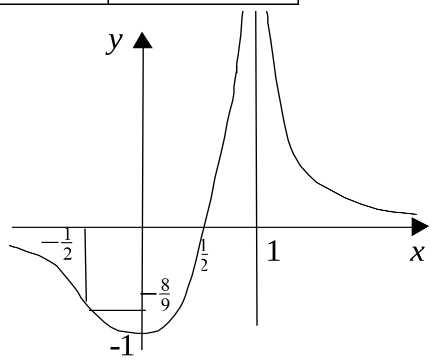


Рис. 8.

Знайдемо вертикальні асимптоти: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$. Це означає, що дана функція має вертикальну асимптоту $x = 1$.

Знайдемо похилі та горизонтальні асимптоти $y = kx + b$ за формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x\,(x-1)^2} = 0,$$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - k \cdot x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$ Отже $y = 0$ – горизонтальна асимптота.

Знайдемо інтервали опуклості, вгнутості і точки перегину за допомогою другої похідної:

$$y'' = \left(-\frac{2x}{(x-1)^3}\right)' = -\left[\frac{2(x-1)^3 - 2x(3(x-1)^2)}{(x-1)^6}\right] = -\left[\frac{2(x-1) - 6x}{(x-1)^4}\right] = \frac{4x+2}{(x-1)^4}.$$

З умови рівності другої похідної нулю знаходимо: $4x + 2 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

x	$(-\infty; \frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2};1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	–	0	+	*не існує*	+
f(x)	$\cap$	*точка перегину*	$\cup$	*не існує*	$\cup$

З наведеної таблиці видно, що ця точка є точкою перегину. Графік функції подано на рис. 8.

Приклад 12. Дослідити та побудувати графік функції $y=\frac{a}{1+ce^{-bx}}$, яка називається логістичною кривою. В економіці її використовують для визначення тенденції росту виробництва предметів споживання. Дослідження провести при $a=6, b=1, c=2$.

Розв'язування:

1) область визначення функції: уся дійсна числова вісь;

2) точки розриву відсутні;

3) вертикальні асимптоти відсутні, але є горизонтальні вигляду $y=kx+b$:

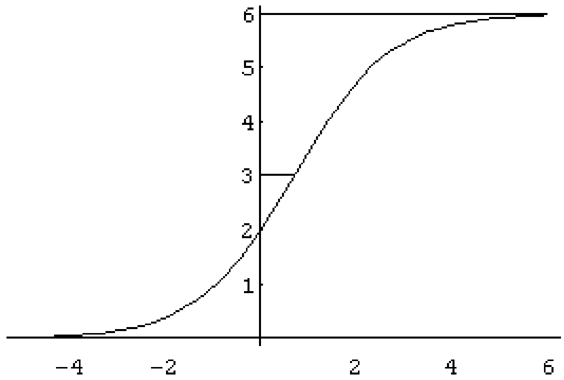


Рис. 9.

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x(1+2e^{-x})} = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{(1+2e^{-x})} = 6,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x(1+2e^{-x})} = 0,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{(1+2e^{-x})} = 0.$$

Таким чином, крива має дві горизонтальні асимптоти: $y=6$ – правостороння і $y=0$ – лівостороння;

4) точки перетину з віссю абсцис відсутні, функція додатна для всіх *x*;

5) похідна $y'=\frac{12e^{-x}}{(1+2e^{-x})^2}>0$ для всіх *x*, це означає, що функція зростаюча у всій області, а отже, не має екстремумів;

6) друга похідна $y''=\frac{12e^{-x}(2e^{-x}-1)}{(1+2e^{-x})^3}=0$ при $x=\ln 2$, це означає, що точка з координатами $(\ln 2; 3)$ є точкою перегину, оскільки друга похідна міняє знак при переході через $\ln 2$;

7) точка перетину графіка функції з віссю ординат: $y=2$;

8) графік функції подано на рис. 9.

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти інтервали зростання і спадання функцій:

1) $y=(x-1)^2$, 2) $y=2-x^3$, 3) $y=x\ln x+3x$, 4) $y=(x-2)\sqrt{x}$,

5) $y=x^4-2x^2-3$, 6) $y=\sqrt{x^3-3x}$, 7) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

2. Знайти локальні екстремуми функцій:

1) $y=4x-x^2$, 2) $y=2x^3+6x^2-12x+100$, 3) $y=\dfrac{4}{x}+x$, 4) $y=3x^4-4x^3$,

5) $y=(x+1)\sqrt{x}$, 6) $y=x^4(x-12)^2$, 7) $y=x\sqrt[3]{x-3}$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функцій:

1) $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3$ на відрізку $[-1;2]$, 2) $y=x^4-8x^2+3$ на відрізку $[-2;2]$,

3) $y=\dfrac{1}{3}x^3-6x^2+32x$ на відрізку $[0;9]$.

4. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину кривих:

1) $y=3x^4-8x^3+6x^2+12$, 2) $y=x^4-6x^2+5$, 3) $y=\ln\left(1+x^2\right)$, 4) $y=(x+1)^3(x-1)$.

5. Знайти асимптоти кривих:

1) $y=x+\dfrac{1}{x}$, 2) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, 3) $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$, 4) $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$, 5) $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

6. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

1) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, 2) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$, 3) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, 4) $y=x^3e^{-3x}$.

7. Залежність між віком корів x (роки) та добовим надоєм y (літри) описується функцією $y=-9{,}53+6{,}86x-0{,}49x^2$. Як зміняться середньодобові надої корів, якщо їхній вік збільшився від трьох до п'яти років?

8. Потрібно викопати силосну яму об'ємом $V=32$ м^3 з квадратним дном таких розмірів, щоб на обробку її дна та стін витратили найменшу кількість матеріалів. Знайдіть розміри ями.

9. Швидкість розмноження y популяції x описується функцією $y=0{,}001x\cdot(100-x)$. При якому значенні x швидкість розмноження популяції буде максимальною?

6. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла

Означення 1. *Функція* $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і в кожній точці $x\in(a;b)$ $F'(x)=f(x)$.

Теорема 1. *Якщо функція* $F(x)$ *є первісною для функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, *то всяка інша первісна функції* $f(x)$ *на цьому самому проміжку має вигляд* $F(x)+C$, *де* C *– довільна стала*.

Означення 2. Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для заданої функції $f(x)$ називають *невизначеним інтегралом* і позначають $\int f(x)\,dx$, отже

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C. \qquad (1)$$

Тут символ $\int$ – це знак інтеграла, $f(x)\,dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування, C – стала інтегрування.

2. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

3. $\int dF(x) = F(x)+C$.

4. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = F(u)+C$.

5. $\int C\,f(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$, де C – стала.

6. $\int [C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)+\ldots+C_n f_n(x)]dx = C_1\int f_1(x)\,dx + C_2\int f_2(x)\,dx+\ldots+C_n\int f_n(x)\,dx$.

3. Таблиця основних інтегралів

№ п/п	$\int f(x)\,dx = F(x)+C$	Перевірка умовою $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$
1	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)' = x^n$
2	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$	$(\ln x + C)' = \dfrac{1}{x}$
3	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$	$\left(\dfrac{a^x}{\ln a}+C\right)' = \dfrac{\ln a\cdot a^x}{\ln a} = a^x$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$
5	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$

6	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
7	$\int tg\,x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\left(-\ln\lvert\cos x\rvert + C\right)' = tg\,x$
8	$\int ctg\,x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\left(\ln\lvert\sin x\rvert + C\right)' = ctg\,x$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = tg\,x + C$	$(tg\,x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -ctg\,x + C$	$(-ctg\,x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\left(\arcsin\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
12	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$	$\left(\frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{x^2 + a^2}$
13	$\int \frac{dx}{\sin x} dx = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$	
14	$\int \frac{dx}{\cos x} dx = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	
15	$\int \sqrt{a + x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a + x^2} + \frac{a}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{a + x^2}\right\rvert + C$	
16	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$	
17	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x - a}{x + a}\right\rvert + C$	
16	$\int \frac{dx}{\sqrt{A + x^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + A}\right\rvert + C$	

4. Методи інтегрування

4.1. Метод безпосереднього інтегрування

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці основних інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням.*

4.2. Метод заміни змінної. Внесення функції під знак диференціала

Суть цього методу полягає у введені під знак інтеграла нової змінної, що після підстановки і заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної дістають табличний інтеграл, або інтеграл, який легко зводиться до табличних. Обґрунтування такого методу дається теоремою.

Теорема. *Нехай* $F(x)$ *– первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, *тобто* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ *і нехай функція* $x = \varphi(t)$, $(dx = \varphi'(t)\,dt)$ *визначена і* *диференційована на проміжку* $(\alpha;\beta)$, *причому множина значень цієї функції є проміжок* $(a;b)$. *Тоді справедлива формула*

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \qquad (2)$$

***Наслідок* 1**. *Якщо підінтегральний вираз можна розкласти на множники* $f(\varphi(x))$ *та* $\varphi'(x)dx$, *то доцільно зробити заміну* $\varphi(x)=t$. *Тоді* $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)dt$.

***Наслідок* 2**. *Якщо підінтегральна функція має вигляд* $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, *тобто, у чисельнику є похідна від знаменника, то за допомогою заміни* $\varphi(x)=t$, $\varphi'(x)dx = dt$ *інтеграл зводиться до табличного.*

Справді, $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(\varphi(x)) + C$.

4.3. Метод інтегрування частинами

Цей метод застосовується, якщо під інтегралом є добуток функцій.

Нехай $u=u(x)$, $v=v(x)$, тоді $d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$. Інтегруємо обидві частини $\int d(u\cdot v) = \int u\cdot dv + \int vdu$. Звідки, з врахуванням властивості 3^0 невизначеного інтеграла, отримаємо формулу для інтегрування частинами

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (3)$$

Розв’язування завдань

Обчислити інтеграли методом безпосереднього інтегрування

Безпосереднє обчислення невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції, властивостях невизначеного інтеграла та використання формул з таблиці інтегралів.

Обчислити невизначені інтеграли:

Приклад № 1. Довести, що $\int dx = x + C$.

Розв’язання: $\displaystyle\int dx = \int 1dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$.

Приклад № 2. Довести, що $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$.

Розв’язання: $\displaystyle\int x\,dx = \int x^1\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$.

Приклад № 3. Довести, що $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Розв’язання: $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$.

Приклад № 4. Довести, що $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

Приклад № 5. Довести, що $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$.

Приклад № 6. Обчислити $\int \sqrt{x}\,dx$.

Розв'язання: $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$.

Приклад № 7. Обчислити $\int \frac{dx}{x^3}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$.

Приклад № 8. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$.

Приклад № 9. Обчислити $\int 2^x\,dx$.

Розв'язання: $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Приклад № 10. Обчислити $\int \frac{dx}{2^x}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{2^x} = \int \frac{1}{2^x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C = \frac{\frac{1}{2^x}}{-\ln 2} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C$

Приклад № 11. Обчислити $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

Розв'язання: Зведемо до табличного інтеграла при $a = 3$:

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

Приклад № 12. Обчислити $\int \frac{dx}{x^2-5}$.

Розв'язання: Зведемо до табличного інтеграла ($a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{dx}{x^2-5} = \int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C .$$

Приклад № 13. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$.

Розв'язання: Використаємо табличний інтеграл ($a=-5$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+(-5)}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+(-5)}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right| + C .$$

Приклад № 14. Обчислити $\int \frac{dx}{4-x^2}$.

Розв'язання: Скористаємося табличним інтегралом при $a=2$

$$\int \frac{dx}{4-x^2} = \int \frac{dx}{-\left(x^2-4\right)} = -\int \frac{dx}{x^2-2^2} = -\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

Приклад № 15. Обчислити невизначений інтеграл

$$\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)\, dx$$

Розв'язання:

$$\int 8x^7 dx - \int 3x^2\, dx + \int 3x dx + \int 10\, dx$$
$$= 8\int x^7 dx - 3\int x^2\, dx + 3\int x dx + 10\int dx$$
$$= 8\frac{x^8}{8} - 3\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 10x + C = x^8 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 10x + C$$

Приклад № 16. Обчислити $\int\left(6x^2+\pi\sin x\right) dx$ $(\pi \approx 3{,}14)$.

Розв'язання: Застосуємо послідовно властивості 6 та 5:

$$\int\left(6x^2+\pi\sin x\right) dx = \int 6x^2\, dx + \int \pi \sin x\, dx = 6\int x^2\, dx + \pi\int \sin x\, dx .$$

Для обчислення інтегралів у правій частині рівності використовуємо табличні інтеграли ($n=2$) і дістаємо

$$\int\left(6x^2+\pi\sin x\right) dx = 6\frac{x^3}{3} + \pi\left(-\cos x\right) + C = 2x^3 - \pi\cos x + C .$$

Приклад № 17. Обчислити $\int\left(4-\frac{3}{x}+\frac{e^x}{2}\right) dx$.

Розв'язання: Застосовуємо властивості та формули з таблиці інтегралів:

$$\int\left(4-\frac{3}{x}+\frac{e^x}{2}\right) dx = \int 4\, dx - \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{1}{2} e^x\, dx =$$

$$=4\int dx-3\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int e^x\,dx=4x-3\ln|x|+0,5\,e^x+C.$$

Приклад № 18. Обчислити $\int x\left(8x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx$.

Розв'язання: Спочатку розкриємо дужки:

$$\int x\left(8x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int\left(8x^2\cdot x+\frac{x}{x^3}\right)dx=\int\left(8x^3+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Далі застосуємо властивості і табличний інтеграл відповідно при $n=3$ та $n=-2$:

$$\int\left(8x^3+\frac{1}{x^2}\right)dx=8\int x^3\,dx+\int\frac{dx}{x^2}=8\frac{x^4}{4}+\left(-\frac{1}{x}\right)+C=2x^4-\frac{1}{x}+C.$$

Приклад № 19. Обчислити

$$\int\frac{\sqrt{x}-x^2e^x+x^5}{x^2}dx$$

Розв'язання:

$$\int\frac{\sqrt{x}-x^2e^x+x^5}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx-\int\frac{x^2e^x}{x^2}dx+\int\frac{x^5}{x^2}dx$$
$$=\int x^{-\frac{3}{2}}dx-\int e^x\,dx+\int x^3\,dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-e^x+\frac{x^4}{4}+C$$
$$=-2x^{-\frac{1}{2}}-e^x+\frac{x^4}{4}+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}-e^x+\frac{x^4}{4}+C$$

Приклад № 20. Обчислити

$$\int(1-\sqrt{x}-x)(1+\sqrt{x})dx$$

Розв'язання: Спочатку відкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$(1-\sqrt{x}-x)(1+\sqrt{x})=1+\sqrt{x}-\sqrt{x}-x-x-x\sqrt{x}=1-2x-x^{\frac{3}{2}}$$

Тоді

$$\int(1-\sqrt{x}-x)(1+\sqrt{x})dx=\int\left(1-2x-x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$
$$=\int(1)\,dx-\int(2x)\,dx-\int\left(x^{\frac{3}{2}}\right)dx=x-x^2-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$$

Приклад № 21. Обчислити $\int\frac{3x^4-2}{x^3}dx$.

Розв'язання: Спочатку поділимо почленно (окремо) чисельник на знаменник:

$$\int \frac{3x^4-2}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{3x^4}{x^3} - \frac{2}{x^3} \right)\,dx = \int \left(3x - \frac{2}{x^3} \right)\,dx\,.$$

Далі застосуємо властивості і табличний інтеграл:

$$\int \left(3x - \frac{2}{x^3} \right)\,dx = 3\int x\,dx - 2\int \frac{dx}{x^3} = 3\frac{x^2}{2} - 2\left(-\frac{1}{2x^2} \right) + C = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} + C\,.$$

Приклад № 22. Обчислити $\int \frac{x^2+5}{x^2-1}\,dx$.

Розв'язання: Підінтегральна функція $\frac{x^2+5}{x^2-1}$ – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x^2+5}{x^2-1} = \frac{\left(x^2-1\right)+6}{x^2-1} = 1 + \frac{6}{x^2-1}$. Тоді, застосувавши властивості, матимемо

$$\int \frac{x^2+5}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{6}{x^2-1} \right) dx = \int 1\,dx + 6\int \frac{1}{x^2-1}\,dx =$$

$$= x + 6 \cdot \frac{1}{2}\ln\left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C = x + 3\,\ln\left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

Приклад № 23. Обчислити $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$.

Розв'язання: Скориставшись відомою з тригонометрії формулою, дістанемо

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(1+\cos x\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos x\,dx \right) = \frac{1}{2}\left(x + \sin x \right) + C\,.$$

Приклад № 24. Обчислити $\int \sin 4x\,dx$.

Розв'язання: Оскільки $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (табличний інтеграл), то дістанемо

$$\int \sin 4x\,dx = \frac{1}{4}\left(-\cos 4x\right) + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C\,.$$

Приклад № 25. Обчислити $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$.

Розв'язання: Оскільки $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (табличний інтеграл), то дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}} = \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{5}x} = \frac{1}{\frac{1}{5}}\left(-\operatorname{ctg}\frac{1}{5}x\right) + C = -5\operatorname{ctg}\frac{x}{5} + C.$$

Приклад № 26. Обчислити $\int \frac{dx}{9x^2+1}$.

Розв'язання: Оскільки $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$ (табличний інтеграл), то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, маємо

$$\int \frac{dx}{9x^2+1} = \int \frac{dx}{(3x)^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C$$

Приклад № 27. Обчислити $\int (x-1)^4 \, dx$.

Розв'язання: Оскільки $\int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} + C$, то

$$\int (x-1)^4 \, dx = \int \left(x + (-1)\right)^4 \, dx = \frac{\left(x+(-1)\right)^5}{5} + C = \frac{(x-1)^5}{5} + C.$$

Приклад № 28. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$.

Розв'язання: Розглянемо табличний інтеграл, при $a = 2$: $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C$. Тоді, виконавши тотожне перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(\sqrt{3}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + C.$$

Приклад № 29. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Розв'язання: Оскільки $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, то виконавши тотожні перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-1\cdot x+1}} = \frac{1}{-1}\cdot 2\sqrt{-1\cdot x+1} + C = -2\sqrt{1-x} + C$$

Приклад № 30. Обчислити $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$.

Розв'язання: Оскільки $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$, то маємо

$$\int \frac{dx}{(4x+5)^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4x+5}\right) + C = -\frac{1}{4(4x+5)} + C.$$

Приклад № 31. Обчислити $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Розв'язання: Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно x:

$$x^2+4x+13=\left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)+9=\left(x+2\right)^2+9$$

(скористалися формулою $a^2+2ab+b^2=\left(a+b\right)^2$). Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13}=\int \frac{dx}{\left(x+2\right)^2+9}=\int \frac{dx}{\left(x+2\right)^2+3^2}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C$$

(скористалися табличним інтегралом при $a=3$ ($b=2$)).

Приклад № 32. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

Розв'язання: Спочатку виділимо повний квадрат відносно x:

$$6x-x^2-8=-\left(x^2-6x+8\right)=-\left[\left(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2\right)-1\right]=$$

$$=-\left[\left(x-3\right)^2-1\right]=1-\left(x-3\right)^2$$

(скористалися формулою $a^2-2ab+b^2=\left(a-b\right)^2$). Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}=\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-3\right)^2}}=\arcsin(x-3)+C$$

(скористалися табличним інтегралом ($b=-3$)).

Приклад № 33. Обчислити

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$$

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}=\int \frac{dx}{(2-5x)^{\frac{1}{5}}}=-\frac{1}{5}\int (2-5x)^{-\frac{1}{5}}d(2-5x)=-\frac{1}{5}\frac{(2-5x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}+\boldsymbol{C}$$

$$=-\frac{\sqrt[5]{(2-5x)^4}}{\mathbf{4}}+\boldsymbol{C}$$

Приклад № 34. Обчислити

$$\int \frac{dx}{1+9x}$$

Розв'язання: Застосуємо спосіб внесення функції під знак диференціалу

$$\int \frac{dx}{1+9x}=\frac{1}{9}\int \frac{d(1+9x)}{1+9x}=\frac{1}{9}ln|1+9x|+C$$

Приклад № 35. Обчислити

$$\int cos(4x-5)\,dx$$

Розв'язання:

$$\int cos(4x-5)\,dx = \frac{1}{4}\int \cos(4x-5)\,d(4x-5) = \frac{1}{4}\sin(4x-5)+C$$

Приклад № 36. Обчислити $\int \frac{x-3}{5x-4}\,dx$.

Розв'язання: Підінтегральна функція $\frac{x-3}{5x-4}$ – це неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x-3}{5x-4}=\frac{\frac{1}{5}(5x-4)-\frac{11}{5}}{5x-4}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{11}{5x-4}\right)$. Тоді отримаємо

$$\int \frac{x-3}{5x-4}\,dx = \frac{1}{5}\int\left(1-\frac{11}{5x-4}\right)dx = 0,2\left(\int dx - 11\int\frac{dx}{5x+(-4)}\right)=$$

$$=0,2\left(x-11\cdot\frac{1}{5}\ln\left|5x+(-4)\right|\right)+C=0,2\;x-0,44\;\ln\left|5x-4\right|+C.$$

Приклад № 37. Обчислити $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$.

Розв'язання: Розкладемо підінтегральну функцію на доданки:

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)x^2}=\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)x^2}=$$

$$=\frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)x^2}-\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}.$$

Тоді матимемо

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2}=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$$

Приклад № 38. Обчислити $\int \sin 5x\,\cos 2x\,dx$.

Розв'язання: Скориставшись формулою

$$\sin\alpha\;\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

та властивостями невизначеного інтеграла, дістанемо

$$\int\sin 5x\,\cos 2x\,dx=\int\frac{1}{2}\left[\sin(5x-2x)+\sin(5x+2x)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin 3x+\sin 7x)\,dx=\frac{1}{3}\left(\int\sin 3x\,dx+\int\sin 7x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{7}\cos 7x\right)+C=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{14}\cos 7x+C.$$

Приклад № 39. Обчислити

$\int(5x^3+\sqrt{x}-\frac{4}{x}+2sinx)\,dx$

Розв'язання: Використовуючи властивість лінійності, розіб'ємо даний інтеграл на простіші інтеграли, кожний з яких знайдемо за допомогою таблиці інтегралів.

$$\int(5x^3+\sqrt{x}-\frac{4}{x}+2sinx)\,dx=5\int x^3dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int\frac{4}{x}dx+2\int sinxdx=$$

$$=5\frac{x^4}{4}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-4ln|x|-2cosx+C=\frac{5x^4}{4}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-4ln|x|-2cosx+C$$

Приклад № 40. Обчислити

$$\int\left(3^x-\frac{5}{sin^2x}\right)dx$$

Розв'язання: Використовуючи властивість лінійності, розіб'ємо даний інтеграл на два табличні інтеграли.

$$\int\left(3^x-\frac{5}{sin^2x}\right)dx=\int 3^x\,dx-\int\frac{5}{sin^2x}dx=\frac{3^x}{ln3}+5ctgx+C$$

Приклад № 41. Обчислити невизначений інтеграл: $\int\frac{dx}{x^2+5}$.

Розв'язання: Даний інтеграл є табличним.

$$\int\frac{dx}{x^2+5}=\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{5}^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$$

Приклад № 42. Обчислити

$\int\left(sin\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

Розв'язання: Після піднесення підінтегральної функції в квадрат і використання основної тригонометричної тотожності і формули синуса подвійного кута, отримаємо

$$\int\left(sin\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right)^2dx=\int\left(sin^2\frac{x}{2}-2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\int(1-sinx)\,dx==x+cosx+C$$

Приклад № 43. Обчислити

$\int\frac{x^3+3x+5}{\sqrt{x}}dx.$

Розв'язання:

Поділимо почленно чисельник на знаменник і використаємо властивості степеня. Тоді

$$\int \frac{x^3+3x+5}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{3x}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{5}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= \int x^{\frac{5}{2}}\,dx + 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 5\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 10x^{\frac{1}{2}} + C$$

Приклад № 44. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{dx}{sin^2xcos^2x}$$

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{sin^2xcos^2x} = \int \frac{1}{sin^2xcos^2x}dx = \int \frac{sin^2x+cos^2x}{sin^2xcos^2x}dx$$

$$= \int \frac{sin^2x}{sin^2xcos^2x}dx + \int \frac{cos^2x}{sin^2xcos^2x}dx = \int \frac{dx}{cos^2x} + \int \frac{dx}{sin^2x}$$

$$= tgx - ctgx + C$$

Обчислити інтеграли методом підстановки (заміна змінної)

Приклад № 45. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int x^2\sqrt{x-1}dx$; б) $\int \frac{ln^2x}{x}dx$

Розв'язання:

а) Зробимо підстановку $t^2 = x-1$. Тоді підінтегральний вираз спрощується, тому що $\sqrt{x-1} = \sqrt{t^2} = t$. Знайдемо *x* і *dx*:

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \left| \begin{matrix} t^2 = x-1; x = t^2+1; \quad t = \sqrt{x-1} \\ dx = 2tdt; \qquad x^2 = (t^2+1)^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int (t^2+1)^2 \cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int (t^6+2t^4+t^2)\,dt$$

$$= \frac{2}{7}t^7 + \frac{4}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C =$$

$$= \frac{2}{7}\left(\sqrt{x-1}\right)^7 + \frac{4}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + C$$

б) Помітимо, що $\frac{dx}{x} = \frac{1}{x}dx = (lnx)'dx = d(lnx)$. Внесемо $\frac{1}{x}$ під знак диференціалу:

$$\int \frac{ln^2x}{x}dx = \int ln^2x\frac{dx}{x} = \int ln^2xd(lnx) = |lnx = t| = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}ln^3x + C$$

Приклад № 46. Обчислити

$$\int \frac{x^2}{x^6+16}dx$$

Розв'язання: Помітимо, що

$$x^2dx = \frac{1}{3}\cdot 3x^2dx = \frac{1}{3}(x^3)'dx = \frac{1}{3}d(x^3)$$

Внесемо x^2 під знак диференціалу:

$$\int \frac{x^2}{x^6+16}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^6+16}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+4^2} = |x^3 = t| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t)^2+4^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}arctg\frac{t}{4} + C$$

$$= \frac{1}{12}arctg\frac{x^3}{4} + C$$

Приклад № 47. Обчислити $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання: Оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то дістанемо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

Приклад № 48. Обчислити $\int \frac{\cos x\;dx}{\sin^2 x}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{\cos x\;dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\;dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$$

Приклад № 49. Обчислити $\int \frac{x\;dx}{x^2-1}$.

Розв'язання: Оскільки $\left(x^2-1\right)' = 2x$, то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\int \frac{x\;dx}{x^2-1} = \int \frac{2x\;dx}{2\left(x^2-1\right)} = \left| \begin{matrix} t = x^2-1 \\ dt = 2x\;dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C.$$

Приклад № 50. Обчислити

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$$

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \begin{vmatrix} t^2 = x+1; & t = \sqrt{x+1} \\ x = t^2 - 1; & dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{2t}{1+t}dt = 2\int \frac{1+t-1}{1+t}dt$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\int dt - 2\int \left(\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= 2t - 2ln|1+t| + C == 2\sqrt{x+1} - 2ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C$$

Приклад № 51. Обчислити

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \begin{vmatrix} t^2 = e^x + 1; \quad e^x = t^2 - 1 \\ 2tdt = e^x dx, \qquad dx = \dfrac{2tdt}{e^x} = \dfrac{2tdt}{t^2-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t^2-1)} = 2\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C$$

Приклад № 52. Обчислити $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-3}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-3} = \begin{vmatrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2-3} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2-3} = 2\int \frac{(t^2-3)+3}{t^2-3}dt =$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{3}{t^2-3}\right)dt = 2\left(\int dt + 3\int \frac{dt}{t^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}\right) =$$

$$= 2\left(t + 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right) + C = 2t + \sqrt{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + \sqrt{3}\,\ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Приклад № 53. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

Розв'язання: Перетворимо вираз, виділяючи повний квадрат за формулою $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Тоді отримаємо

$$x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 2\,2\,x + 4) + 1 = (x+2)^2 + 1$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \begin{vmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg\,t + C =$$
$$= arctg(x+2) + C$$

Обчислення інтегралів методом інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Приклад № 54. Обчислити

$$\int arctgx\,dx$$

Розв'язання: Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \;\Rightarrow\; v = \displaystyle\int dx \;\Rightarrow\; v = x \end{vmatrix} = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$= xarctgx - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$$

Приклад № 55. Обчислити

$$\int xcosx\,dx$$

Розв'язання: Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x \cdot cosx\,dx = \begin{vmatrix} u = x \qquad\qquad \Rightarrow du = dx \\ dv = cosxdx;\; v = \displaystyle\int cosxdx \Rightarrow v = sinx \end{vmatrix}$$
$$= xsinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + C$$

Приклад № 56. Обчислити

$$\int (x^2+1)e^x\,dx$$

Розв'язання: Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int (x^2+1)\cdot e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+1 & \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dx;\ v = \int e^x dx & \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right|$$
$$= (x^2+1)\cdot e^x - 2\int x\, e^x dx$$

Скористаємося ще раз цією формулою:

$$\int x\, e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx;\ v = \int e^x dx & \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x\, dx$$
$$= xe^x - e^x$$

Отже,

$$\int (x^2+1)e^x\, dx = (x^2+1)\cdot e^x - 2\cdot(xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 3) + C$$

Приклад № 57. Обчислити

$$\int x^2 sin3x\, dx$$

Розв'язання:

$$\int x^2\cdot sin3x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = sin3xdx;\ v = \int sin3xdx & \Rightarrow v = -\frac{1}{3}cos3x \end{matrix} \right|$$
$$= -\frac{1}{3}x^2cos3x - \int \left(-\frac{1}{3}cos3x\right)\cdot 2xdx$$
$$= -\frac{1}{3}x^2cos3x + \frac{2}{3}\int xcos3x\, dx$$

Проміжні обчислення розташовуємо між вертикальними дужками. До останнього інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int xcos3x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = cos3xdx;\ v = \int cos3xdx & \Rightarrow v = \frac{1}{3}sin3x \end{matrix} \right|$$
$$= \frac{1}{3}xsin3x - \frac{1}{3}\int sin3x\, dx = \frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x$$

Таким чином, отримаємо:

$$\int x^2\cdot sin3x\, dx = -\frac{1}{3}x^2cos3x + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x\right) + C$$
$$= -\frac{1}{3}x^2cos3x + \frac{2}{9}xsin3x + \frac{2}{27}cos3x + C$$

Приклад № 58. Обчислити

$$\int x^3 \ln x\, dx$$

Розв'язання:

$$\int x^3 \cdot \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & \Rightarrow\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx;\ v = \int x^3 dx & \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int x^3 dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{16}x^4 + C$$

Приклад № 59. Обчислити

$$\int x \cdot arctg x\, dx$$

Розв'язання:

$$\int x \cdot arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2}{1+x^2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}(x^2 \cdot acrtgx - x + arctgx) + C.$$

Приклад № 60. Обчислити $\int (3x-1)e^x\, dx$.

Розв'язання: Покладемо $u = 3x-1$, $dv = e^x\, dx$. Тоді

$du = (3x-1)'\, dx = 3dx$,

$v = \int dv = \int e^x\, dx = e^x$

$$\int (3x-1)e^x\, dx = (3x-1)e^x - \int e^x 3\, dx = (3x-1)e^x - 3\int e^x\, dx =$$

$$= (3x-1)e^x - 3e^x + C = e^x(3x-4) + C.$$

Приклад № 61. Обчислити $\int xe^{2x}\, dx$.

Розв'язання: Покладемо $u = x$, $dv = e^{2x}\,dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int xe^{2x}\,dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C.$$

Приклад № 62. Обчислити $\int \ln x\,dx$.

Розв'язання: Покладемо $u = \ln x$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = \int dx = x$.

$$\int \ln x\,dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Приклад № 63. Обчислити невизначений інтеграл

$$\int xlnx\,dx$$

Розв'язання:

$$\int xlnx\,dx = \left| \begin{matrix} u = lnx & \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx;\ v = \int xdx & \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{x^2 lnx}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2 lnx}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2 lnx}{2} - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти загальну первісну:

1) $\int 5dx$;	2) $\int 2x^2 dx$;	3) $\int 2x^{-1}dx$;
4) $\int (3x-4)^{-\frac{1}{4}}dx$;	5) $\int \frac{1}{4}x^3 dx$;	6) $\int (3x^3 + 4x^{\frac{1}{2}} + 5)dx$;
7) $\int (2x-3)^{\frac{1}{3}}dx$;	8) $\int 4x^{-\frac{1}{3}}dx$;	9) $\int (7x - x^{-\frac{3}{4}})dx$;
10) $\int (3x-1)^{-2}dx$;	11) $\int e^{-5x}dx$;	12) $\int 2\cdot 7^{4x-3}dx$;
13) $\int 6\cdot 5^{-2x}dx$;	14) $\int 2^{4x+5}dx$;	15) $\int (2x+3)^2 dx$;
16) $\int 5\sqrt[5]{x^4}$;	17) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;	18) $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$.

2. Застосовуючи підстановку (заміну змінної), знайти інтеграли:

1) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$;	2) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$;	3) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
4) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;	5) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;	6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.
7) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$	8) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$	9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$
10) $\int \frac{dx}{2\cdot\sqrt{2-x}}$	11) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-2}}dx$	12) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

3. Застосовуючи метод інтегрування частинами, знайти наступні інтеграли:

1) $\int \ln x dx$;	2) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$;	3) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$;
4) $\int xe^{-x}dx$;	5) $\int x\cos x dx$;	6) $\int x\sin 2x dx$.
7) $\int x\cos^2 x dx$	8) $\int x^3 e^x dx$	9) $\int \ln(x^2+1)dx$
10) $\int x\cdot\cos 4x dx$	11) $\int 3x\cdot\cos x dx$	12) $\int x\cdot\cos 2x dx$

7. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Означення 1. ***Інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ називається сума вигляду

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

де $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$

Означення 2. ***Визначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ називається границя інтегральної суми (1) при умові, що довжина найбільшого із елементарних відрізків прямує до нуля

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\ . \tag{2}$$

Геометрично інтегральна сума або визначений інтеграл (у даному випадку) виражають площу криволінійної трапеції.

Основні властивості визначеного інтеграла

1⁰. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;

2⁰. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3⁰. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

4⁰. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

5⁰. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a;b]$;

6⁰. Якщо m та M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ $(a<b)$, тобто $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

7⁰. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$ і т.д.

Правила обчислення визначеного інтеграла

Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то визначений інтеграл обчислюється за формулою

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\cdot \qquad (3)$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Зробимо підстановку $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна разом з своєю похідною $\varphi'(t)$ на $\alpha \le t \le \beta$, $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$. Тоді, якщо складна функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha,\beta]$, то має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (4)$$

Інтегрування частинами. Нехай функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a,b]$. Тоді має місце формула

$$\int_a^b u dv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (5)$$

Застосування визначеного інтегралу.

1. Обчислення площ плоских фігур

1^0. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=f(x)\ge 0$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ обчислюється за формулою

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (6)$$

2^0. Площа фігури, обмеженої лініями $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ ($f_2(x)\ge f_1(x)$), $x=a$, $x=b$, знаходиться за формулою

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \qquad (7)$$

2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Якщо крива задана явно $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (8)$$

3. Об’єм тіла обертання

Об’єм тіла, що утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, прямими $x=a$ і $x=b$ та віссю Ox ($y=0$), обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (9)$$

Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ і прямими $x = a$ і $x = b$, обертається навколо осі Ox, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx. \qquad (10)$$

4. Обчислення площі поверхні обертання

Нехай крива задана неперервною функцією $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, обертається навколо осі Ox. Тоді, площа поверхні, яка утворюється при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо осі Ox, обчислюють за формулою

$$S = 2\pi \int f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \qquad (11)$$

5. Обчислення роботи

Нехай під дією сили $F = F(x)$ матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота виконана цією силою при переміщені точки від точки a до точки b, обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x) dx. \qquad (12)$$

6. Обчислення шляху при нерівномірному русі

Нехай час руху змінюється від t_0 до T. При рівномірному русі, пройдений шлях дорівнює добутку швидкості v на час руху $T - t_0$, тобто

$$s = v \cdot (T - t_0), \; v - const.$$

У випадку нерівномірного руху ця формула не дійсна. Розіб'ємо інтервал $[t_0; T]$ на частинні інтервали $\Delta t_1 = t_1 - t_0$; $\Delta t_2 = t_2 - t_1$; …, $\Delta t_n = T - t_{n-1}$. При малих Δt_i, $i = 1,2,...,n$ швидкість $v_t = |v(t)|$ буде змінюватися не суттєво, тому її можна вважати сталою. Обчислимо на кожному частинному інтервалі швидкість $|v(c_i)|$, $t_{i-1} \le c_i \le t_i$ і знайдемо величину пройденого шляху: $\Delta S_i \approx |v(c_i)| \cdot \Delta t_i$, $i = 1,2,...,n$. Точне значення отримаємо як границю суми, тобто

$$S = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} |v(c_i)| \cdot \Delta t_i$$

У правій частині знаходиться границя інтегральної суми функції $v(t)$ на інтервалі $[t_0; T]$, що дорівнює відповідному визначеному інтегралу

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t) dt \qquad (13)$$

Розв'язування завдань

Приклад № 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 x^2 dx$

Розв'язання: Спочатку знаходимо первісну функцію, потім за формулою Ньютона-Лейбніца обчислюємо визначений інтеграл.

$$\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Приклад № 2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^\pi sin\,x \quad dx$

Розв'язання:

$$\int_0^\pi sin\,x \quad dx = -cosx|_0^\pi = -cos\pi - (-cos0) = -(-1) + 1 = 2$$

Приклад № 3. Обчислити визначений інтеграл, користуючись властивостями, таблицею інтегралів та формулою Ньютона-Лейбніца.

$$\int_0^1 (3x^2 + 8)dx$$

Розв'язання:

$$\int_0^1 (3x^2 + 8)dx = \int_0^1 (3x^2)dx + \int_0^1 8dx = \left.\left(3 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot x\right)\right|_0^1 = 1^3 + 8 \cdot 1 - 0 = \\ = 9$$

Приклад № 4. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-1}^2 (2x + 3x^2 + 1)dx$$

Розв'язання:

$$\int_{-1}^1 (2x + 3x^2 + 1)dx = \left.\left(2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x\right)\right|_{-1}^1 = (x^2 + x^3 + x)|_{-1}^1 = \\ = (1^2 + 1 + 1) - \left((-1)^2 + (-1)^3 + (-1)\right) = 4$$

Приклад № 5. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_2^3 (5x^2 - 4x + 11)dx$$

Розв'язання:

$$\int_2^3 (5x^2-4x+11)dx = \left(5\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+11x\right)\Big|_2^3 =$$
$$= \left(5\cdot\frac{3^3}{3}-4\cdot\frac{3^2}{2}+11\cdot 3\right)-\left(5\cdot\frac{2^3}{3}-4\cdot\frac{2^2}{2}+11\cdot 2\right)=$$
$$= (45-18+33)-\left(\frac{40}{3}-8+22\right)=\frac{98}{3}=32\frac{2}{3}$$

Приклад № 6. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Розв'язання:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = arcsin\frac{x}{2}\Big|_1^2 = arcsin1 - arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

Приклад № 7. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 (3x+1)^7 dx$$

Розв'язання: Застосуємо метод внесення функції під знак диференціалу

$$\int_0^1 (3x+1)^7 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (3x+1)^7 d(3x+1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^8}{8}\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{24}((3\cdot 1+1)^8-(3\cdot 0+1)^8) = \frac{1}{24}(4^8-1^8)=\frac{65535}{24}$$

Приклад № 8. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)dx$$

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)dx = -\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)d\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)$$
$$= -\frac{1}{5}\cdot\left(-cos\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}\right)-cos\left(\frac{3\pi}{4}-0\right)\right) = \frac{1}{5}\cdot\left(cos\frac{\pi}{2}-cos\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Приклад № 9. Обчислити визначений інтеграл
$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}} dx$

Розв'язання:

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}} dx = \int_1^3 (2x-1)^{-\frac{4}{5}} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (2x-1)^{-\frac{4}{5}} d(2x-1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{(2x-1)^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}}\right|_1^3 = \frac{5}{2} \cdot \left((2\cdot 3-1)^{\frac{1}{5}} - (2\cdot 1-1)^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{5}{2}\left(\sqrt[5]{5}-1\right)$$

Приклад № 10. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-sin\left(\frac{x}{4}\right)}\, dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-sin\left(\frac{x}{4}\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)} dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\right| dx$$

У процесі перетворення були використані формули зведення та формули пониження степеня:

$$sin\alpha = cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right); \quad 1-cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Отже, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-sin\left(\frac{x}{4}\right)}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\right| dx$

Кут належить до I чверті, тоді синус набуває тільки додатних значень.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-sin\left(\frac{x}{4}\right)} dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right) dx = -\sqrt{2}\cdot(-8)cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 8\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{32}\right) - cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{7\pi}{32}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 8\sqrt{2}cos\left(\frac{7\pi}{32}\right) - 8$$

Приклад № 11. Обчислити визначений інтеграл

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(sinx-3cosx)\,dx$

Розв'язання:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(sinx-3cosx)\,dx=(-cosx-3sinx)|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=(-cos\pi-3sin\pi)-\left(-cos\frac{\pi}{2}-3sin\frac{\pi}{2}\right)=1-0+0+3=4$$

Приклад № 12. Обчислити інтеграл методом внесення функції під знак диференціала

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{sinx}cosx\,dx$$

Розв'язання:

$$\int_{0}^{\pi/2}e^{\sin x}\cos x dx=\int_{0}^{\pi/2}e^{\sin x}d(\sin x)=\int_{0}^{1}e^{y}dy=e^{y}\Big|_{0}^{1}=e-1.$$

Обчислення визначеного інтеграла методом заміни змінної

Приклад № 13. Обчислити визначений інтеграл

$\int_{1}^{3}x^{3}\sqrt{x^{2}-1}\,dx$

Розв'язання: Підкореневий вираз замінимо через нову змінну *t*:

$$\int_{1}^{3}x^{3}\sqrt{x^{2}-1}\,dx=\left|\begin{matrix}t=x^{2}-1; & x^{2}=t+1;\ \ x=1\ \Rightarrow t=1-1=0\\ dt=2xdx;\, dx=\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}dt; & x=3\ \Rightarrow t=3^{2}-1=8\end{matrix}\right|$$

$$=$$

$$=\int_{0}^{8}\frac{\sqrt{t+1}^{3}\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{8}(t+1)\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{8}(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{0}^{8}$$

$$=\frac{464\sqrt{2}}{15}$$

Приклад № 14. Обчислити визначений інтеграл

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2sinx}{(1-cosx)^{2}}dx$

Розв'язання: За формулою заміни змінної маємо

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2sinx}{(1-cosx)^2}dx = \left| \begin{matrix} t = 1 - cosx; & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 - cos\frac{\pi}{2} = 1 \\ dt = sinxdx; dx = \frac{1}{sinx}dt; & x = \pi \Rightarrow t = 1 - cos\pi = 2 \end{matrix} \right| = \int_1^2 \frac{2dt}{t^2} = -2t^{-1}|_1^2 = -1 + 2 = 1$$

Приклад № 15. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{ln6} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx$$

Розв'язання:

$$\int_0^{ln6} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx = \left| \begin{matrix} t = e^x + 3, & x = 0 \Rightarrow t = e^0 + 3 = 4 \\ dt = e^x dx, & x = ln6 \Rightarrow t = e^{ln6} + 3 = 9 \end{matrix} \right| = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{t}\Big|_4^9 = 2\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = 2$$

Приклад № 16. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}dx$$

Розв'язання:

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}dx = \left| \begin{matrix} t^2 = 2x+1;\ t_1 = 1, t_2 = 3 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = \frac{2t}{2}dt = tdt \end{matrix} \right| = \int_1^3 \frac{t}{1+t}dt =$$

$$= \int_1^3 \frac{t+1-1}{1+t}dt = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = t - ln|t+1|\Big|_1^3 = 3 - ln4 - (1 - ln2) = 2 - ln2$$

Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами

$$\int_a^b udv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Приклад № 17. Знайти інтеграл

$$\int_2^4 x \cdot e^{2x} dx$$

Розв'язання:

$$\int_2^4 x\cdot e^{2x}dx = \left|\begin{matrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx;\ v = \int e^{2x}dx & \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_2^4 - \frac{1}{2}\int_2^4 e^{2x}\,dx = \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_2^4 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_2^4 = \frac{7}{4}e^8 - \frac{3}{4}e^4$$

Приклад № 18. Знайти інтеграл $\int_0^{\frac{1}{3}} x\cdot arctg3xdx$**.**

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} x\cdot arctg3xdx = \left|\begin{matrix} u = arctg3x \ \Rightarrow\ du = \dfrac{3}{1+9x^2}dx \\ dv = xdx \ \Rightarrow\ v = \int xdx \ \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctg3x|_0^{\frac{1}{3}} - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{3}{1+9x^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}arctg1 - \frac{3}{2}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{9x^2}{1+9x^2}dx = \frac{1}{18}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1+9x^2-1}{1+9x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{72} - \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{1+9x^2}\right)dx = \frac{\pi}{72} - \frac{1}{6}\cdot\left(x - \frac{1}{9}\cdot 3arctg3x\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{72} - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot arctg3\cdot\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{\pi}{72} - \frac{1}{18} + \frac{1}{18}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{18}$$

Приклад № 19. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot cos2x\,dx$$

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot cos2x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = cos2xdx;\ v = \int cos2xdx & \Rightarrow v = \frac{1}{2}sin2x\end{matrix}\right| =$$

$$= \left(\frac{x}{2}sin2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2xdx = \frac{1}{2}\left(xsin2x + \frac{1}{2}cos2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}sin\pi + \frac{1}{2}cos\pi\right) - \left(0\cdot sin0 + \frac{1}{2}cos0\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Приклад № 20.

$$\int_1^2 x^2 \cdot lnx\,dx$$

Розв'язання:

$$\int_1^2 x^2 \cdot lnx\,dx = \left| \begin{matrix} u = lnx & \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx;\ v = \int x^2dx & \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| = \frac{x^3 lnx}{3}\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3x}\,dx$$

$$= \frac{x^3 lnx}{3}\Bigg|_1^2 - \frac{x^3}{9}\Bigg|_1^2 = \frac{8ln2}{3} - \frac{ln1}{3} - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{8ln2}{3} - \frac{7}{9}$$

Приклад № 21. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^\pi x \cdot sinx\,dx$$

Розв'язання:

$$\int_0^\pi x \cdot sinx\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = sinxdx;\ v = \int sinxdx & \Rightarrow v = -cosx \end{matrix} \right| =$$

$$= (-xcosx)|_0^\pi - \int_0^\pi (-cosx)\,dx = (-xcosx + sinx)|_0^\pi =$$

$$= \big((-\pi cos\pi + sin\pi) - (0 \cdot cos0 + sin0)\big) = -\pi \cdot (-1) = \pi$$

Приклад № 22. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^\pi x \cdot sin2x\,dx$$

Розв'язання:

$$\int_0^\pi x \cdot sin2x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = sin2xdx;\ v = \int sin2xdx & \Rightarrow v = -\frac{1}{2}cos2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(-\frac{x}{2}cos2x\right)\Bigg|_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2}cos2x\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left(xcos2x - \frac{1}{2}sin2x\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left(\pi cos2\pi - \frac{1}{2}sin2\pi\right) - \left(0 \cdot cos0 - \frac{1}{2}sin0\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Застосування визначеного інтегралу

Приклад № 23. Знайти приріст чисельності популяції і середню швидкість розмноження бактерій за проміжок часу від t_1=10 *хв* до t_2=120 *хв,* якщо швидкість приросту визначається формулою

$$V(t) = Ce^{kt},$$

де *C=10000* бактерій – початкова чисельність, $k=0,0015c^{-1}$ – показник швидкості розмноження.

Розв'язання. Приріст числа бактерій ***ΔN*** за проміжок часу $[t_1,\ t_2]$ дорівнює $\Delta N = \int\limits_{t_1}^{t_2} Ce^{kt}dt$,

а середня швидкість розмноження на проміжку $[t_1, t_2]$ $V_{сер}$

$$V_{сер} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int\limits_{t_1}^{t_2} Ce^{kt}dt = \frac{\Delta N}{t_2 - t_1}$$

Переходячи до проміжків часу у секундах (оскільки показник швидкості розмноження задано у $с^{-1}$), отримуємо

$$\Delta N = \int\limits_{600}^{7200} 10000 \cdot e^{0,0015t}dt = \frac{10000}{0,0015} \cdot e^{0,0015t}\Big|_{600}^{7200} = \frac{10000}{0,0015} \cdot \left(e^{0,00157200} - e^{0,0015600}\right) =$$

$$= \frac{10000}{0,0015} \cdot \left(e^{10,8} - e^{0,9}\right) \approx 3267889435\ 55$$

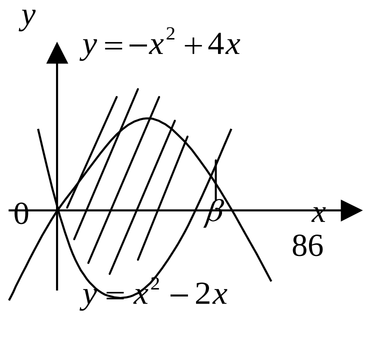
$$V_{сер} = \frac{\Delta N}{t_2 - t_1} = \frac{326788943555}{7200 - 600} = \frac{326788943555}{6600} \approx 49513476(c^{-1})$$

Таким чином, приріст числа бактерій становить 326788943555 штук, середня швидкість розмноження становить приблизно 49513476 бактерій на секунду.

<u>*Зауваження.*</u> Число бактерій є, очевидно, дискретною величиною, для якої, взагалі кажучи, безпосереднє застосування визначеного інтегралу є некоректним, оскільки в інтегральному численні припускається неперервна змінна. Але при дослідженні явищ з великими числами (як чисельність популяції бактерій) дискретністю можна знехтувати. При цьому слід мати на увазі випадковий характер таких масових явищ і розуміти, що отримане чисельне значення не можна розглядати як абсолютно точне.

Приклад № 24. Обчислити площу фігури обмежену лініями $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.

Розв'язування. Побудуємо дві параболи: $y = x^2 - 2x$ і $y = -x^2 + 4x$ (див. рис.). Знайдемо абсциси



перетину даних ліній. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = -x^2 + 4x, \end{cases}$$

дістанемо $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Це і є межі інтегрування.

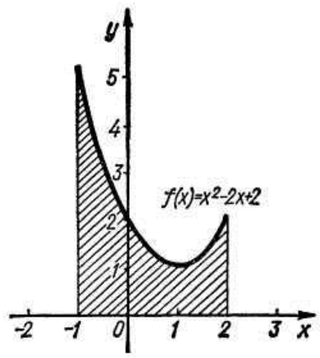
За формулою (7) знаходимо площу:

$$S = \int_0^3 \left[(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)\right]dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right)\Bigg|_0^3 = -18 + 27 = 9 \text{ (кв. од.)}$$

Приклад № 25. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = f(x) = x^2 - 2x + 2,\ x = -1,\ x = 2$ та вісю *Ох*.

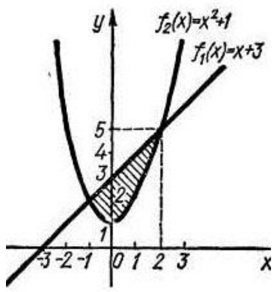
Розв'язання. Побудуємо параболу та прямі. Ця плоска фігура являє собою криволінійну трапецію, тому площу обчислюють за формулою (6):



$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 2)dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} - x^2\Bigg|_{-1}^{2} + 2x\Bigg|_{-1}^{2} = 6. \text{(кв. один.)}$$

Приклад № 26. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x) = x + 3$ і $y = f_2(x) = x^2 + 1$.

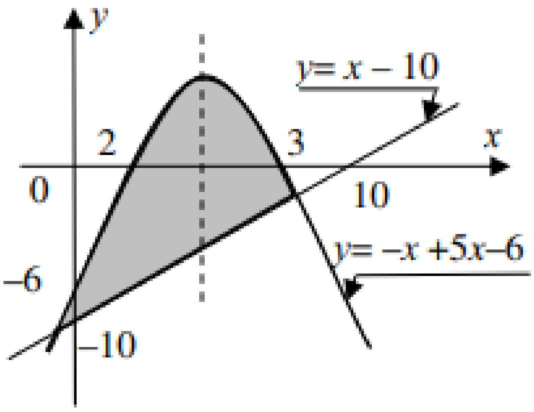
Розв'язання. Розв'язавши рівняння $x + 3 = x^2 + 1$, знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій f_1 і f_2: $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$. Використовуючи формулу (7), обчислимо площу фігури:



$$S = \int_{-1}^{2} (x + 3 - (x^2 + 1))dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = -\frac{1}{3}x^3\Bigg|_{-1}^{2} + \frac{1}{2}x^2\Bigg|_{-1}^{2} + 2x\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Приклад № 27. Знайти площу фігури, обмеженою лініями $y = -x^2 + 5x - 6$ та $x - y = 10$.

Розв'язання: Побудуємо задану фігуру. Рівняння $y = -x^2 + 5x - 6$ визначає параболу, яка перетинає вісь *OX* у точках $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; вершина її знаходиться у точці (2,5 ; 0,25); вітки параболи направлені вниз. Рівняння $x - y = 10$ визначає пряму, яка перетинає осі *OX* та *OY* відповідно у точках (10; 0) та (0; – 10).



Площа фігури обчислюється за формулою (7):

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx,$$

де $f_2(x) = -x^2 + 5x - 6, \ \ f_1(x) = x - 10.$

Для знаходження меж інтегрування a і b треба розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x - 6 \\ y = x - 10 \end{cases} \Rightarrow \quad -x^2 + 5x - 6 = x - 10.$$

Отримаємо квадратне рівняння $-x^2 + 4x + 4 = 0$; $D = b^2 - 4ac = 32.$

Коренями цього рівняння є числа $x_1 = 2 - 2\sqrt{2}$; $x_1 = 2 + 2\sqrt{2}$. Тоді

$$S = \int_{2-2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{2}} (-x^2 + 5x - 6 - x + 10)dx = \int_{2-2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{2}} (-x^2 + 4x + 4)dx =$$

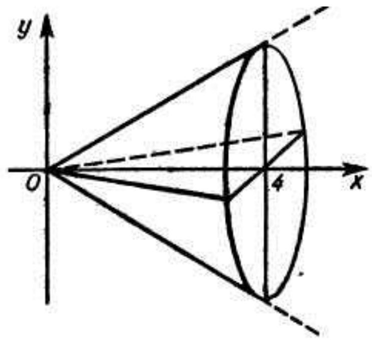
$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{2-2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{2}}$$

$$= \left(-\frac{(2+2\sqrt{2})^3}{3} + \frac{2(2+2\sqrt{2})^2}{1} + 4 \cdot (2+2\sqrt{2}) \right) -$$

$$- \left(-\frac{(2-2\sqrt{2})^3}{3} + \frac{2(2-2\sqrt{2})^2}{1} + 4 \cdot (2-2\sqrt{2}) \right) = \frac{64\sqrt{2}}{3} (\text{кв. одиниць})$$

Приклад № 28. Нехай фігура, обмежена прямими $y = \frac{3}{4}x$, $x = 4$ і віссю Ox, обертається навколо осі Ox. Одержане тіло обертання – конус. Знайти його об’єм.

Розв’язання:



Межами інтегрування є абсциси точок перетину прямих $y = \frac{3}{4}x$ і x=4 з віссю Ox. Знаходимо з системи

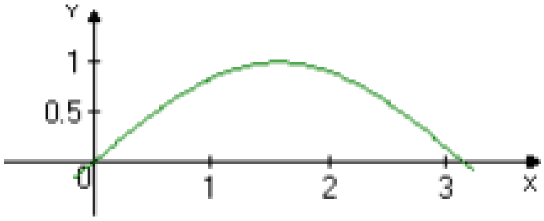
$\begin{cases} y = \dfrac{3}{4}x, \\ y = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 4, \\ y = 0 \end{cases}$ Отже, $a = 0, b = 4$ Далі знаходимо об'єм

$$V = \int_0^4 \pi \left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx = \frac{9}{16}\pi \frac{x^3}{3}\bigg|_0^4 = \frac{9}{4^2}\frac{4^3}{3}\pi = 12\pi .$$

Приклад № 29. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням дуги синусоїди $y = \sin x$ навколо осі Ox для $x \in [0; \pi]$.

Розв'язання:

Розв'язання: Візьмемо дугу синусоїди, зображену на рисунку для $x \in [0; \pi]$.Згідно формули (9), отримаємо:



$$V = \pi \int_0^{\pi} sin^2 x\, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - cos2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} sin2x\right)\bigg|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{\pi^2}{2} (\text{куб. один})$$

Приклад № 30.

Тіло рухається прямолінійно із швидкістю $v(t) = 0{,}1t^3$ (м/с). Обчислити шлях, пройдений тілом за перші 10 секунд.

Розв'язання: Згідно формули (13):

$$S = \int_0^{10} 0{,}1t^3\, dt = 0{,}1 \cdot \frac{t^4}{4}\bigg|_0^{10} = \frac{10^4}{40} = 250 \text{ (м)}.$$

Приклад № 31.

Тіло рухається прямолінійно із швидкістю $v(t) = (3t^2 + 4t + 1)$ (м/с). Знайти шлях, пройдений тілом за три секунди.

Розв'язання:

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 4t + 1)\, dt = (t^3 + 2t^2 + t)_0^3 = 48 \text{ (м)}.$$

Приклад № 32.

Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 100 Н розтягує її на 1 см?

Розв'язання: Згідно закону Гука, пружна сила F, яка діє на пружину зростає пропорційно розтягу x пружини, тобто F = kx. Для визначення коефіцієнта пропорційності, маємо F = 100 Н, x = 0,01м.
Звідси 100 = 0,01k, тобто k = 10000.
Отже, F = 10000x. Тоді шукана робота, згідно формули (12), рівна

$$A=\int_0^{0,05}10000x\,dx=5000x^2|_0^{0,05}=12,5\text{ Дж.}$$

Приклад № 33.

Яка робота виконується під час стиснення гвинтової пружини на 5 *см*, якщо для стиснення пружини на 1 *см* витрачається сила 4*Н*. Вважається, що сила пропорційна переміщенню (стисненню)?

Розв'язування. За умовою $F=kx$, де $k-$ стала. При $x=0.01$ *м*, $F=4H$. Тому з рівності $4=0.01k$ знаходимо $k=400$. Таким чином, $F(x)=400x$, $0\le x\le 0.05$. Тому за формулою (12) маємо

$$A=400\int_0^{0.05}xdx=400\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0.05}=0.5\ \text{Дж}.$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, знайти інтеграли:

1) $\int_{-1}^{3}\sqrt[3]{x+1}dx$;	2) $\int_0^2(1-x)^3dx$;	3) $\int_0^{\ln 2}xe^{-x}dx$;
4) $\int_1^2\frac{4}{x}dx$;	5) $\int_2^3\frac{12x^2}{2x^3-3}dx$;	6) $\int_1^2\frac{2+\ln x}{x}dx$.
7) $\int_0^1\ln(x+1)dx$	8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx$	9) $\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$
10) $\int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$	11) $\int_0^1e^{3x}dx$	12) $\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$

2. Побудувати рисунок та обчислити за допомогою визначеного інтегралу площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=x^2-2;\quad y=0$;	2) $y=x^2-6x+5;\quad y=0$;	3) $y=x^3;\quad y=x^2$;
4) $y=x;\quad y=-x+2;\quad y=0$;	5) $y=\sqrt{x};\quad y=2-x;\quad y=0$;	6) $y=x^3;\ y=1;\ x=0$;
7) $y=\ln x;\ x=1;\ x=e^2;\ y=0$;	8) $y=20x-x^2;\ x=0;\ x=4;$ $y=0$;	9) $y^2=2x+1;$ $x-y-1=0.$
10) $y=3x^2+1$, $y=3x+7$	11) $y=\frac{1}{4}(x^2-3x)$, віссю абсцис та прямою $x=5$	12) $y=\ln x$, $x=e,\ x=e^2,\ y=0$

3. 1) Знайти шлях, пройдений від початку руху до кінця третьої секунди, якщо швидкість руху тіла задана рівнянням $v(t)=\left(4t^2+1\right)$ м/с.
2) Швидкість тіла задається формулою $V=\left(3t^2+2t\right)$ м/с. Знайти шлях, який пройде тіло за перші 7 секунд після початку руху.
3) Швидкість тіла задається формулою $V=\left(t^2+4t+2\right)$ м/с. Знайти шлях, який пройде тіло за перші 5 секунд після початку руху.

4. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *OX* фігури, обмеженої лініями:

1) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$;
2) $y=2\sqrt{x}, x=0, x=9, y=0$;
3) $y=\sin x, x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$.
4) $y=x^2-9,\ y=0$.
5) $y=2x-x^2,\ y=0$.
6) $y=3x-x^2$, $y=0$.
7) $y=6x-x^2$ $y=0$.
8) $y=x^2-4,\ y=0$.

8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Диференціальні рівняння першого порядку.

Рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y', називають *диференціальним рівнянням першого порядку* або *неявним диференціальним рівнянням*. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно похідної y', то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

і називають *диференціальним рівнянням першого порядку*, розв'язаним відносно похідної, або *рівнянням в нормальній формі*.

Рівняння (1) може не містити явно x або y, але обов'язково має містити похідну y' (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням).

2. Рівняння вигляду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \tag{3}$$

називається рівнянням з *відокремлюваними* змінними.

Шляхом ділення рівняння на добуток $\varphi_1(y) f_2(x) \neq 0$, воно зводиться до рівняння із *відокремленими* змінними.

Диференціальне рівняння вигляду

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \tag{4}$$

називається рівнянням з *відокремленими* змінними, тому що в цьому диференціальному рівнянні змінні відокремлені, бо при dx є функція тільки від x, а при dy – функція тільки від y. Загальний інтеграл (або розв'язок) цього рівняння має вигляд неявної функції:

$$\int P(x)dx + \int Q(x)dy = C. \tag{5}$$

3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6}$$

називається *лінійним однорідним* рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Нехай дано лінійне однорідне рівняння із сталими коефіцієнтами, тобто рівняння вигляду $y'' + py' + qy = 0$, де p і q – деякі сталі.

Рівняння вигляду

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (7)$$

називається *характеристичним рівнянням* даного лінійного однорідного рівняння, а многочлен $k^2 + pk + q$ – його характеристичним многочленом.

Під час розв'язування однорідного диференціального рівняння спочатку розв'язують відповідне йому характеристичне рівняння – це квадратне рівняння розв'язуємо за допомогою дискримінанта ($D = b^2 - 4a \cdot c$). Можливі **три випадки**:

1. Характеристичне рівняння має різні, дійсні корені k_1 і k_2 ($D > 0$).Тоді функції $e^{k_1 x}$ і $e^{k_2 x}$ утворюють фундаментальну систему його розв'язків і загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

2. Корені характеристичного рівняння дійсні, однакові числа ($D = 0$). Тоді фундаментальну систему функцій даного рівняння утворюють функції e^{kx} і xe^{kx}, а його загальний розв'язок має вигляд:

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Характеристичне рівняння має комплексні корені $\alpha + i\beta$ і $\alpha - i\beta$ ($D < 0$). Тоді фундаментальну систему розв'язків даного рівняння утворюють функції $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

k_1, k_2 – **корені характеристичного рівняння**	y_1, y_2 – **частинні розв'язки**	$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – **загальний розв'язок**
k_1, k_2 – дійсні, різні числа $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2$ – дійсні, однакові числа	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = xe^{k_1 x}$	$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно-спряжені числа, $i^2 = -1$– уявна одиниця, α, β – дійсні числа.	$y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$

Розв'язування завдань

Приклад № 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $xdx - ydy = 0$

Розв'язання: Це рівняння з відокремленими змінними, тоді інтегруємо обидві частини:

$\int xdx - \int ydy = C_1$ або $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C_1$.

Позначимо $\frac{C}{2} = C_1$. Тоді $x^2 - y^2 = C$ – загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад № 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $x^2dx + y^2dy = 0$

Розв'язання: Дане рівняння з відокремленими змінними, тоді інтегруємо обидві частини:

$\int x^2dx + \int y^2dy = C$ або $\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = C$, $x^3 + y^3 = 3C$.

Отримали загальний розв'язок рівняння.

Приклад № 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y' = 2x + 2$

Розв'язання: Це рівняння з відокремлюваними змінними. Тоді підставивши $y' = dy / dx$ в задане рівняння та домноживши обидві частини на dx, одержимо рівняння з відокремленими змінними:

$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$, $dy = (2x + 2)dx$.

Інтегруємо обидві частини рівняння, отримаємо його загальний розв'язок: $y = \int(2x + 2)dx = x^2 + 2x + C$.

Приклад № 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.

Розв'язання: Дано рівняння з відокремлюваними змінними. Його можна записати у вигляді

$y(1 + x)dx + x(1 - y)dy = 0$

Зведемо його до рівнянням з відокремленими змінними. Поділимо обидві його частини на $xy \neq 0$:

$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$

Інтегруємо обидві частини:

$\int \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = C$

Одержимо загальний інтеграл $ln|x| + x + ln|y| - y = C$,тобто $ln|xy| + x - y = C.$

Приклад № 5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x^2y^2y' + y = 1.$$

*Розв'язання***.** Підставивши $y' = dy/dx$ в задане рівняння, одержимо

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = 1 - y.$$

Помножимо обидві частини рівняння на dx й розділимо на $x^2(y-1)$. Перевіримо, що $y = 1$ при цьому є розв'язком, а $x = 0$ розв'язком не є. Тому

$$\frac{y^2}{y-1}dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{y^2}{y-1}dy = -\int\frac{dx}{x^2},$$

далі

$$\int\left(\frac{y^2-1}{y-1} + \frac{1}{y-1}\right)dy = \frac{1}{x} + C.$$

Отримаємо загальний розв'язок

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = \frac{1}{x} + C.$$

Приклад № 6. Розв'язати диференціальне рівняння

$y' = \frac{y}{cos^2x}$

Розв'язання: Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = \frac{y}{cos^2x}$$

Замінимо $y' = dy/dx$, відокремимо змінні, отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{cos^2x}$$

Проінтегруємо обидві частини даного рівняння

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{cos^2x}$$

Інтегруємо та отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$ln|y| = tgx + lnC.$$

Приклад № 7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xsin^2ydx + (1 + x^2)dy = 0$$

Розв'язання: Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$xsin^2ydx + (1 + x^2)dy = 0$$

Замінимо $y' = dy / dx$, відокремимо змінні, отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x}{1 + x^2}dx + \frac{1}{sin^2y}dy = 0$$

Проінтегруємо обидві частини даного рівняння та отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{sin^2y}dy = C.$$

$$\frac{1}{2}ln|1 + x^2| - ctgy = lnC$$

Приклад № 8. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{cos2x}{y^2}$$

Розв'язання: Замінимо $y' = dy / dx$. Отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos2x}{y^2}$$

Помножимо обидві частини рівняння на y^2dx, отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$y^2dy = cos2xdx.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int y^2dy = \int cos2xdx + C$$

Одержимо загальний інтеграл

$$\frac{y^3}{3} = \frac{1}{2}sin2x + C.$$

Приклад № 9. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$$

Розв'язання: Поділимо обидві частини даного рівняння на добуток функцій $(y^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)$.

Отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0$$

Проінтегруємо дане рівняння

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{y}{y^2-1}dy=C,$$

$$\frac{1}{2}ln|1+x^2|+\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\frac{1}{2}lnC,$$

$ln|1+x^2|\cdot|y^2-1|=lnC$ або $|1+x^2|\cdot|y^2-1|=C$.

Приклад № 10. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(y-xy)dx+(x+xy)dy=0$$

Розв'язання: Винесемо спільні множники в обох дужках

$$y(1-x)dx+x(1+y)dy=0$$

Отримане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділимо його почленно на $xy\neq 0$ і отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{1-x}{x}dx+\frac{1+y}{y}dy=0$$

Виконаємо інтегрування:

$$\int\frac{1-x}{x}dx+\int\frac{1+y}{y}dy=C$$

Одержимо загальний інтеграл $ln|x|-x+ln|y|+y=C$,тобто

$$ln|xy|-x+y=C.$$

Приклад № 11. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову $y(1)=2$.

$$y'=\frac{y}{x},$$

*Розв'язання***.** Представимо похідну y' у вигляді dy/dx та підставимо в рівняння. Одержимо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

Розділимо змінні й проінтегруємо

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$\ln|y|=\ln|x|+C_1,$$

де C_1 – довільна постійна. Зручно представити її у вигляді $C_1 = \ln C_2$, де $C_2 > 0$. Запишемо

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_2.$$

Користуючись властивостями логарифмічної функції, одержимо $\ln|y| = \ln(C_2|x|)$ або $|y| = C_2|x|$. Звідси

$$y = \pm C_2 x = Cx,$$

де C – будь-яке число.

Отже, $y = Cx$ – загальний розв'язок.

Щоб знайти частинний розв'язок, скористаємося початковою умовою $y(1) = 2$.

Підставивши у формулу загального розв'язку $y = Cx$ значення x й y ($x = 1$ і $y = 2$), одержимо рівняння: $2 = C \cdot 1$, тобто $C = 2$.

Таким чином, у результаті отримаємо частинний розв'язок диференціального рівняння $y = 2x$.

Приклад № 12. Знайти частинний інтеграл диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

$$y' cosx = \frac{y}{lny}$$

Розв'язання: Перетворимо рівняння з урахуванням $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$cosx\frac{dy}{dx} = \frac{y}{lny}$$

$$\frac{lnydy}{y} = \frac{dx}{cosx}$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{lnydy}{y} = \int \frac{dx}{cosx} + C$$

$$\frac{1}{2} ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

Скориставшись початковою умовою $y = 1$, $x = 0$, знайдемо $C = 0$ і підставивши у загальний розв'язок, отримаємо частинний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{1}{2} ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Приклад № 13. Знайти частинний інтеграл диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову .

$y'ctgx = -y$

Розв'язання: Перетворимо рівняння з урахуванням $y' = \frac{dy}{dx}$:

$ydx + ctgxdy = 0$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$tgxdx + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int tgxdx + \int \frac{dy}{y} = lnC$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int tgxdx + lnC$$

Знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$ln|y| = ln|cosx| + lnC$

Враховуючи властивості логарифмів, виразимо функцію *y*:

$y = C \cdot cosx$

Підставляємо в загальний розв'язок початкову умову $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $y_0 = -1$, знаходимо довільну сталу С:

$-1 = C \cdot cos\frac{\pi}{3} \;\; \Rightarrow$ С = –2.

Отже, при цьому значенні С із загального розв'язку отримаємо частинний розв'язок, що задовольняє заданій початковій умові: $y = -2cosx$

Приклад № 14. Знайти частинний інтеграл диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову

$(x^2y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx, \qquad y(1) = 1$

Розв'язання: Для того, щоб відокремити змінні, треба спочатку винести за дужки співмножники в кожній з частин рівняння, тобто x^2 та y^2 з лівої і правої частин рівняння відповідно, а потім розділити рівняння на $(x^2 \cdot y^2)$ і проінтегрувати

$$x^2(y-1)dy = y^2(x+1)dx,$$

$$\frac{x^2(y-1)}{x^2y^2}dy = \frac{y^2(x+1)}{x^2y^2}dx,$$

$$\int \frac{(y-1)}{y^2}dy = \int \frac{(x+1)}{x^2}dx,$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx,$$

Отримали загальний розв'язок рівняння:

$$ln|y| + \frac{1}{y} = ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

$$ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = C$$

Підставимо початкові умови в загальний розв'язок, отримаємо частинний розв'язок рівняння:

$$ln\left|\frac{1}{1}\right| + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = C \Rightarrow \ C = 2$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2$$

Приклад № 15. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ та відокремимо змінні: $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$. Інтегруючи обидві частини, $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$.

Отримаємо загальний розв'язок даного рівняння: $arctg\, y = arctg\, x + C$.

Щоб знайти частинний розв'язок даного рівняння, знаходимо константу С. Для цього в загальний розв'язок рівняння підставимо початкову умову: $x = 0, y = 1$. Отримаємо $arctg\,1 = arctg\,0 + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$.

Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд: $arctg\, y = arctg\, x + \frac{\pi}{4}$.

Приклад № 16. При внутрішньовенному введенні лікарського препарату концентрація його у крові швидко (з достатньою точністю можна вважати – миттєво) набуває максимального значення $\boldsymbol{C_0}$, а потім поступово зменшується внаслідок виведення препарату видільною системою організму, причому швидкість зменшення концентрації прямо пропорційна поточній концентрації препарату $\boldsymbol{C}$ з коефіцієнтом пропорційності $\boldsymbol{k_e}$, що називається коефіцієнтом елімінації.

Скласти диференційне рівняння, що описує зміну концентрації препарату у часі, знайти його загальний розв'язок та частинний розв'язок при умові $\boldsymbol{C(0) = 20}$ ***мг/л***, $\boldsymbol{k_e = 2\cdot 10^{-6} c^{-1}}$.

Розв'язання. Як відомо, фізичний зміст похідної функції, що описує деякий процес, – це швидкість зміни функції залежно від аргументу. Отже, виходячи з цього, можемо записати, позначивши швидкість зміни концентрації через $\boldsymbol{V_C}$

$$V_C = \frac{dC}{dt}$$

З іншого боку, з того, що, за умовою, швидкість зміни концентрації пропорційна поточній концентрації препарат, можемо записати

$$V_C = -k_e \cdot C\,,$$

де $\boldsymbol{C}$ – поточна концентрація. Знак „–" означає, що концентрація з часом зменшується.

Прирівнюючи праві частини отриманих виразів для швидкості $\boldsymbol{V_C}$ отримуємо шукане диференційне рівняння:

$$\frac{dC}{dt} = -k_e \cdot C$$

Для розв'язання рівняння виконаємо відокремлення змінних, домноживши рівняння на $\boldsymbol{dt/C}$ і перейдемо до еквівалентного рівняння

$$\frac{dC}{C} = -k_e \cdot dt\,.$$

Проінтегруємо отримане рівняння:

$$\int \frac{dC}{C} = \int -k_e \cdot dt$$

і отримаємо його загальний інтеграл у неявному вигляді:

$$\ln C = -k_e t + A.$$

Експонуючи вираз загального інтегралу, отримуємо шуканий загальний розв'язок у явному вигляді:

$$C = C_0 e^{-k_e t}\,,$$

де $\boldsymbol{C_0 = e^A}$ – початкова концентрація препарату (при $\boldsymbol{t = 0}$).

Частинний розв'язок, знаходимо за допомогою початкової умови:

$$C(0) = C_0 e^{-k_e \cdot 0} = 20(мг/л),$$

звідки $\boldsymbol{C_0 = 20}$ ***мг/л***. Таким чином, частинний розв'язок є

$$C(t) = 20 \cdot e^{-0{,}000002t}(мг/л).$$

Приклад № 17. Визначити періодичність внутрішньовенного введення лікарського препарату, якщо одноразово вводиться 1 г препарату і концентрація його в крові повинна постійно бути не нижчою 10 мг/л. Коефіцієнт елімінації $\boldsymbol{k_e=3{,}2\cdot 10^{-5}c^{-1}}$, об'єм крові дорівнює 5 л.

Розв'язання. Скористаємось залежністю концентрації препарату від часу

$$C = C_0 e^{-k_e t},$$

знайденою у прикладі 4.4. З цієї залежності час $\boldsymbol{t}$, коли концентрація досягає деякого значення $\boldsymbol{C}$, визначається за формулою

$$t = \frac{\ln \frac{C}{C_0}}{-k_e}.$$

Початкова концентрація $\boldsymbol{C_0}$ дорівнює

$$C_0 = C(0) = 1г/5л = 200(мг/л).$$

Таким чином, залежність концентрації препарату від часу описується рівнянням

$$C(t) = 200 \cdot e^{-0{,}000032t}(мг/л).$$

Для визначення часу, коли концентрація препарату зменшиться до мінімально припустимої $\boldsymbol{C_{min} = 10мг/л}$, складемо рівняння

$$10 = 200 \cdot e^{-0{,}000032t}.$$

Розв'язуючи рівняння відносно $\boldsymbol{t}$, знаходимо

$$t = \frac{\ln \frac{10}{200}}{-0{,}000032} = 93617(сек) = \frac{93617}{3600} \approx 26(годин)$$

Таким чином, для підтримання концентрації препарату у крові не нижче мінімально припустимої необхідно виконувати введення його з періодом не більше 26 годин. Фактично, виходячи з природної періодичності процесів можна призначити проведення ін'єкцій раз на добу приблизно в один і той самий час.

Розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами

Приклад № 18. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 7y' + 12y = 0.$$

*Розв'язання***.** Дане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 7k + 12 = 0$$

Дискримінант $D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 > 0$. Знайдемо корені характеристичного рівняння

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}, \quad k_1 = 4, k_2 = 3$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}$.

Приклад № 19. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$k^2 - 6k + 8 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4;$

$k_1 = \frac{6-\sqrt{4}}{2} = 2;$

$k_2 = \frac{6+\sqrt{4}}{2} = 4$ – корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тобто загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$.

Приклад № 20. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = 0$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 7k + 6 = 0$$

Дискримінант $D = 49 - 24 = 25 > 0$. Знайдемо корені характеристичного рівняння

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}, \quad k_1 = 6, \ k_2 = 1$$

Отже, e^{6x} та e^x – частинні лінійно незалежні розв'язки. Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$$

Приклад № 21. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Розв'язання. характеристичне рівняння має вигляд

$k^2 + 6k + 9 = 0$

$D = (6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0;$

$k_{1,2} = \frac{-6}{2} = -3$ – корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тобто загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x).$$

Приклад № 22. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Розв'язання. Маємо характеристичне рівняння

$k^2 + 4k + 13 = 0$

$D = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36;$

$k_1 = \frac{-4-\sqrt{-36}}{2} = -2 - 3i;$

$k_2 = \frac{-4+\sqrt{-36}}{2} = -2 + 3i, \Rightarrow \alpha = -2, \beta = 3$ – корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені (уявні), тобто загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{-2x}(C_1 cos3x + C_2 sin3x).$$

Приклад № 23. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

має два комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = 2 \pm 3i$.

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = e^{2x}(C_1 cos3x + C_2 sin3x)$$

Приклад № 24. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання.

Дане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

Дискримінант $D = 16 - 16 = 0$. Отже, рівняння має один корінь $k = 2$ подвійної кратності. Тому загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Щоб знайти частинний розв'язок, скористаємося початковими умовами. Спочатку використовуємо умову $y(0) = 1$, тобто замість x підставимо 0, а замість y підставимо 1. Одержимо рівняння $y(x) = C_1 + C_2 0 = C_1$. Отже, $C_1 = 1$.

Щоб скористатися другою початковою умовою, знайдемо похідну y':

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + C_2 \left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right).$$

За умовою $y'(0) = 0$, тобто підставивши $x = 0$, повинні одержати $y' = 0$:

$$0 = 2C_1 e^0 + C_2 \left(e^0 + 0\right) = 2C_1 + C_2.$$

Отже, отримаємо частинний розв'язок при $C_1 = 1$ й $C_2 = -2$:

$$y(x) = e^{2x} - xe^{2x}.$$

Приклад № 25. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 7$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1;$

$k_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2;$

$k_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$ – корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тобто загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Для того, щоб знайти частинний розв'язок, треба визначити C_1 та C_2.Знайдемо похідну y' від загального розв'язку

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$$

Використовуючи початкові умови, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ 7 = 2C_1 e^0 + 3C_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ 2C_1 + 3C_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = 2e^{2x} + e^{3x}$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними:

1.	$y' = e^{-2x}$	$y' = \dfrac{1}{sin^2 2x}$
2.	$y' = \dfrac{1}{x^2+4}$	$y' = sin5x$
3.	$\dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dx}{x^2}$	$y' = e^{x+y}$
4.	$y' = \sqrt[3]{x^5 y^2}$	$xyy' = 1 - x^2$
5.	$\sqrt{x^3}y' = y^2 x$	$y' = y\sqrt[4]{xy}$
6.	$y' = 10^{2x+y}$	$y' = \sqrt[3]{x^8 y}$
7.	$\sqrt{xy}y' = y^2$	$\sqrt[3]{x}y' = \sqrt[4]{xy}$
8.	$y' = (2y+1)ctgx$	$y' = y\sqrt[5]{x^3 y^2}$
9.	$y' = y\sqrt[4]{x^3 y}$	$y' = tgx$
10.	$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dx = 0$	$y' = y\sqrt[4]{x^3 y}$

2. Знайти загальний та частинний розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку:

№	Лін. однорідні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами	
1.	$y'' - 7y' + 10y = 0$	$9y'' - 12y' + 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$
2.	$y'' + 3y' = 0$	$y'' - 2y' + 1y = 0$, $y(0) = 3,\ y'(0) = 2$
3.	$2y'' + 5y' + 2y = 0$	$6y'' + y' - y = 0$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 4$
4.	$y'' + 6y' + 13y = 0$	$y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 5,\ y'(0) = 1$
5.	$y'' + 3y' + 2y = 0$	$y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$
6.	$4y'' + 12y' + 9y = 0$	$y'' + 9y' + 20y = 0$, $y(0) = -2,\ y'(0) = 2$
7.	$y'' + 2y' - 3y = 0$	$y'' - 6y' + 8y = 0$, $y(0) = 3,\ y'(0) = -2$
8.	$y'' + 4y' + 13y = 0$	$4y'' - 4y' + y = 0,\quad y(0) = 5, y'(0) = -1$
9.	$y'' + 3y' - 4y = 0$	$y'' - 7y' + 12 = 0,\quad y(0) = 4, y'(0) = 13$
10.	$y'' + 4y' + 5y = 0$	$y'' + y = 0,\quad y(0) = 4,\quad y'(0) = 0$
11.	$2y'' - 5y' = 0,$	$6y'' + y' - y = 0$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА
Основна література

1. Вища математика: підручник / за ред. Е.І. Личковського, П.Л. Свердана. – Вінниця: Нова книга, 2014, – 632 с.
2. Свердан П.Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей: Підручник. – К: Знання, 2008. – 450 с.
3. Личковський Е.І. Вища математика. Теорія наукових досліджень. У фармації та медицині: підручник / Е.І. Личковський, П.Л. Свердан. – К: Знання, 2012. – 476 с.
4. Горбуненко Б.Ф. Теорія ймовірностей і статистичні методи обробки результатів спостереження. Навч. посіб. для студ. вищ. фармац. та мед. закладів III-IVрівнів акредитації/ Б.Ф. Горбуненко, Ф.Г. Дягілева, Г.В. Жиронкіна та ін. – Х.: вид-во НФАУ: Золоті сторінки, 2002. – 188 с.

Додаткова

1. Чалий О.В. Вища математика: Навч. посібник для студ. мед. та фарм. Навч. закладів. / О.В. Чалий, Н.Ф. Стучинська, А.В. Меленєвська – К.: Техніка, 2001. – 204 с.
2. Дягілева Ф.Г. Вища математика: Навч. посіб. / Ф.Г. Дягілева, Г.В. Жиронкіна, В.О. Тіманюк, Б.Ф. Горбуненко. – Х.: Вид-во НФАУ: Золоті сторінки, 2001. – 84 с.
3. Свердан П.Л. Вища математика. Аналіз інформації у фармації та медицині: Підручник. – Львів: Світ, 1998. – 332 с.

ЗМІСТ