УДК 519.21

М. М. Капустей, П. В. Слюсарчук (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКА БЛИЗЬКОСТІ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН В ТЕРМІНАХ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

The paper contains estimates of approximation of convergence of sums not identically distributed random variables in the term of pseudomoments.

Робота містить оцінки близькості розподілів сум різно розподілених випадкових величин в термінах псевдомоментів.

Основні результати. У даній роботі продовжуються дослідження, аналогічні [1–5]. Для оцінки близькості розподілів двох сум використовуються зрізані псевдомоменти. На випадкові величини однієї із сум накладається обмеження, що використане в [4] (с. 382). Сталі у цих оцінках залежать тільки від α. Як наслідок, аналогічно [1], можна одержати оцінки швидкості збіжності до стійких законів розподілу для нормованих сум різно розподілених випадкових величин.

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ та $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – дві послідовності випадкових величин з функціями розподілу відповідно $F_k(x)$ і $G_k(x)$, характеристичними функціями $f_k(t)$ і $g_k(t)$. $\Phi_n(x)$ і $Q_n(x)$ – відповідно функції розподілу випадкових величин $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ і $\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k$, $H_k(x) = F_k(x) - G_k(x)$, $\rho_n = \sup\limits_{x} |\Phi_n(x) - Q_n(x)|$.

Будемо вимагати виконання умов:
існує число $\alpha \in (0; 2]$ і стала $\lambda > 0$ такі, що ([4], с. 382)

$$|g_k(t)| \leq e^{-\lambda|t|^\alpha}; \tag{1}$$

$$\mu_{kj} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^j dH_k(x) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots; j = \overline{1, m}), \tag{2}$$

де $m = 1$ при $\alpha \leq 1$ і $m = 2$ при $1 < \alpha \leq 2$.

Позначимо для довільного $y > 0$

$$\nu_{k0}^{(1)}(y) = \int\limits_{|x| \leq y} \max(1, |x|^{\alpha+1}) \left| dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|,$$

$$\nu_{k0}^{(2)}(y) = \int\limits_{|x| > y} \max(1, |x|^{m}) \left| dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|,$$

$$\nu_0^{(1)}(y) = \max_{1 \leq k \leq n} \nu_{k0}^{(1)}(y), \ \nu_0^{(2)}(y) = \max_{1 \leq k \leq n} \nu_{k0}^{(2)}(y).$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (1) і (2). Тоді для всіх $n \geq 1$ справедлива нерівність

$$\rho_n \leq C_1 \inf_{y > 0} \left\{ \frac{\nu_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \nu_0^{(2)}(y) \right\}, \tag{3}$$

де C_1 – стала, що залежить тільки від α.

Позначимо через Y множину тих $y>0$, для яких

$$\nu_0^{(2)}(y) \le c, \text{ де } c \in (0; (m^{1+\alpha-m}2^{\alpha-m-2})^2).$$

Із умови (2) випливає існування $y(c)>0$, що множина Y містить всі $y>y(c)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (1) і (2). Тоді для всіх $n \le 1$ справедлива нерівність

$$\rho_n \le C_2 \inf_{y\in Y}\left\{\frac{\nu_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}+\frac{\nu_0^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}}\right\},$$

де C_2 – стала, що залежить тільки від α.

Допоміжні леми.

Лема 1. *Нехай $\mu_{kj}=0$ $j=\overline{1,m}$; $k=1,2,\ldots$, $\omega_k(t)=|f_k(t)-g_k(t)|$. Тоді для будь-яких дійсних t і $y>0$ виконуються нерівності*

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le \frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta}|t|^{\alpha+1}\nu_{k0}^{(1)}(y)+\frac{2}{m!}|t|^m\nu_{k0}^{(2)}(y),$$

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^\alpha\left(\nu_{k0}^{(1)}(y)+\nu_{k0}^{(2)}(y)\right),$$

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le \nu_{k0}^{(1)}(y)+\nu_{k0}^{(2)}(y),$$

де $\delta=\alpha+1-m$.

Доведення. Із умови (2) випливає рівність

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-\sum_{j=0}^{m}\frac{(itx)^j}{j!}\right)dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|. \tag{4}$$

Далі будемо використовувати відому нерівність (Золотарьов [4], с. 372)

$$\left|e^{iz}-\sum_{j=0}^{m}\frac{(iz)^j}{j!}\right| \le \frac{2^{1-\delta}|z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^\gamma},\ 0\le\gamma\le 1,\ m=0,1,2,\ldots. \tag{5}$$

Із рівності (4) і нерівності (5) (у якій покладемо $\gamma=\alpha+1-m>0$, якщо $|x|\le y$ і $\gamma=0$, якщо $|x|>y$), одержуємо

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-\sum_{j=0}^{m}\frac{(itx)^j}{j!}\right)dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\le$$

$$\le\int_{|x|\le y}\left|e^{itx}-\sum_{j=0}^{m}\frac{(itx)^j}{j!}\right|\left|dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|+\int_{|x|>y}\left|e^{itx}-\sum_{j=0}^{m}\frac{(itx)^j}{j!}\right|\left|dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\le$$

$$\le\int_{|x|\le y}\frac{2^{1-\delta}|tx|^{m+\delta}}{m!(m+1)^\delta}\left|dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|+\int_{|x|>y}\frac{2|tx|^m}{m!}\left|dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|=$$

$$= \frac{2^{1-\delta}|t|^{m+\delta}}{m!(m+1)^{\delta}} \int\limits_{|x|\le y} |x|^{m+\delta} \left|dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| + \frac{2|t|^m}{m!} \int\limits_{|x|>y} |x|^m \left|dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^{\delta}}|t|^{\alpha+1}\nu_{k0}^{(1)}(y) + \frac{2}{m!}|t|^m \nu_{k0}^{(2)}(y).$$

Із рівності (4)

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le \nu_{k0}^{(1)}(y) + \nu_{k0}^{(2)}(y).$$

Підставляючи в (4) $m-1$ замість m, а $\gamma = \alpha + 1 - m$, одержуємо

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(itx)^j}{j!}\right) dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{1-\delta}|tx|^{m-1+\delta}}{(m-1)!m^{\delta}} \left|dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le \frac{2^{1-\delta}}{m^{\delta}}|t|^{\alpha}\left(\nu_{k0}^{(1)}(y) + \nu_{k0}^{(2)}(y)\right).$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* (1) і (2), $\nu_0(y) = \max\left\{\nu_0^{(1)}(y); \nu_0^{(2)}(y)\right\}$, $c \in \left(0; (m^{\delta}2^{\delta-3})^2\right)$, $\delta = \alpha + 1 - m$, а також $\nu_0^{(2)}(y) \le c$. Тоді при $\nu_0(y) \le c$ і $|t| \le T_1 = (-\ln \nu_0(y))^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-c_1|t|^{\alpha}}, \tag{6}$$

де $c_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{c}\frac{2^{2-\delta}}{m^{\delta}} > 0$.

Якщо $\nu_0(y) \le c$ і $|t| > T_1$, то

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le 3\nu_0(y). \tag{7}$$

Якщо $\nu_0(y) > c$, тобто $\nu_0^{(1)}(y) > c$, і $|t| \le T_2 = \frac{c}{\nu_0^{(1)}(y)}$, тоді виконується нерівність

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-c_2|t|^{\alpha}}, \tag{8}$$

де $c_2 = 1 - ce\frac{4}{m!} > 0$.

Доведення. Із умови (1)

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le \left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| + \left|g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-|t|^{\alpha}} + \omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right). \tag{9}$$

Нехай $\nu_0(y) \le c$ і $|t| \le T_1$. Із (9) і леми 1

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-\frac{1}{2}|t|^{\alpha}}\left(e^{-\frac{1}{2}|t|^{\alpha}} + e^{\frac{1}{2}|t|^{\alpha}}\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right) \le$$

$$\leq e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1+e^{\frac{1}{2}|t|^\alpha}\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^\alpha\left(\nu_{k0}^{(1)}(y)+\nu_{k0}^{(2)}(y)\right)\right)\leq e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1+e^{\frac{1}{2}T_1^\alpha}\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^\alpha 2\nu_0(y)\right)=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1+\sqrt{\nu_0(y)}\,\frac{2^{2-\delta}}{m^\delta}|t|^\alpha\right)\leq e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1+\sqrt{c}\,\frac{2^{2-\delta}}{m^\delta}|t|^\alpha\right)\leq e^{-c_1|t|^\alpha}.$$

У випадку $\nu_0(y)\leq c$ і $|t|>T_1$ із (9) і леми 1 одержуємо

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\leq e^{-|t|^\alpha}+\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\leq e^{-T_1^\alpha}+\nu_{k0}^{(1)}(y)+\nu_{k0}^{(2)}(y)\leq 3\nu_0(y).$$

Нехай $\nu_0(y)>c$. Оскільки $\nu_0^{(2)}(y)\leq c$, то це означає, що $\nu_0^{(1)}(y)>c$. Тоді із (9) і леми 1 при $|t|\leq T_2=\frac{c}{\nu_0^{(1)}(y)}$ (враховуємо, що $T_2\leq 1$ і $m-\alpha\geq 0$)

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\leq e^{-|t|^\alpha}+\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)=e^{-|t|^\alpha}\left(1+e^{|t|^\alpha}\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\leq$$

$$\leq e^{-|t|^\alpha}\left(1+e^{|t|^\alpha}\left(\frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta}|t|^{\alpha+1}\nu_{k0}^{(1)}(y)+\frac{2}{m!}|t|^m\nu_{k0}^{(2)}(y)\right)\right)\leq$$

$$\leq e^{-|t|^\alpha}\left(1+e^{T_2^\alpha}|t|^\alpha\left(\frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta}\frac{c}{\nu_0^{(1)}(y)}\nu_{k0}^{(1)}(y)+\frac{2}{m!}|t|^{m-\alpha}c\right)\right)\leq$$

$$\leq e^{-|t|^\alpha}\left(1+ce|t|^\alpha\left(\frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta}+\frac{2}{m!}\right)\right)\leq e^{-|t|^\alpha}\left(1+ce|t|^\alpha\frac{4}{m!}\right)\leq e^{-c_2|t|^\alpha}.$$

Лема 2 доведена.

Доведення теорем. Ми наведемо доведення тільки теореми 1, бо теорема 2 доводиться аналогічно. Нехай $y>0$ і виконується умова $\nu_0^{(2)}(y)\leq c$, де стала c визначена у лемі 2. Оскільки у випадку $\nu_0^{(2)}(y)\leq c$ теорема стає очевидною: $\rho\leq 1\leq\frac{\nu_0^{(2)}(y)}{c}$.

Використаємо нерівність ([7], с. 299)

$$|F(x)-G(x)|\leq\frac{2}{\pi}\int_0^T|f(t)-g(t)|\,\frac{dt}{t}+\frac{24\sup_x|G'(x)|}{\pi T}. \tag{10}$$

Оскільки

$$\rho_n=\sup_x|\Phi_n(x)-Q_n(x)|=\sup_x\left|\Phi_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)-Q_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|,$$

то в (10) покладемо

$$F(x)=\Phi_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right),\ G(x)=Q_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

$$f(t)=\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right),\ g(t)=\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Із (1) випливає, що випадкові величини η_i мають щільність розподілу, а $G(x) = Q_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ є функцією розподілу випадкової величини $\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}(\eta_1 + \cdots + \eta_n)$, тоді

$$|G'(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-n|t|^\alpha}dt = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right).$$

Із (10) отримаємо

$$\rho_n \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{T}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{n^{\frac{1}{\alpha}}T\pi^2}. \tag{11}$$

В нерівності

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}|a_i - b_i|\prod_{k=1}^{i-1}|b_k|\prod_{k=i+1}^{n}|a_k|$$

покладемо $a_k = f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$, $b_k = g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$. Тоді із леми 1 і леми 2 при $|t| \le T_l$ ($l = 1$ при $\nu_0(y) \le c$ і $l = 2$ при $\nu_0(y) > c$) одержимо:

$$\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{i=1}^{n} g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\prod_{k=1}^{i-1}\left|g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\prod_{k=i+1}^{n}\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta}|t|^{\alpha+1}\nu_{k0}^{(1)}(y) + \frac{2}{m!}|t|^m\nu_{k0}^{(2)}\right)e^{-|t|^\alpha(i-1)}e^{-c_l|t|^\alpha(n-i)} \le$$

$$\le \left(\frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta}|t|^{\alpha+1}\nu_0^{(1)}(y) + \frac{2}{m!}|t|^m\nu_0^{(2)}(y)\right)ne^{-c_l|t|^\alpha(n-1)}. \tag{12}$$

Нехай $\nu_0(y) > c$ $(l = 2)$. Покладемо в (11) $T = T_2$. Тоді для інтеграла в (11), із використанням нерівності (12), при $n > 1$ одержимо

$$I = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{T_2}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}n\int\limits_{0}^{T_2}\left(\frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta}t^\alpha\nu_0^{(1)}(y) + \frac{2}{m!}t^{m-1}\nu_0^{(2)}\right)e^{-c_2t|^\alpha(n-1)}dt \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}n\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta}t^\alpha\nu_0^{(1)}(y) + \frac{2}{m!}t^{m-1}\nu_0^{(2)}\right)e^{-c_2t|^\alpha(n-1)}dt =$$

$$=\frac{\nu_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}+1}\frac{2^{2-\delta}}{\pi\alpha(c_2)^{\frac{1}{\alpha}+1}m!(m+1)^{\delta}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)+$$

$$+\frac{\nu_0^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{m}{\alpha}}\frac{4}{m!\pi\alpha(c_2)^{\frac{m}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{m}{\alpha}\right)\leq\frac{\nu_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}C_5+\frac{\nu_0^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}}C_6. \qquad (13)$$

Через C_k будемо позначати сталі, що залежать тільки від c і α.

Із (11) та (13) при $n>1$ і $\nu_0(y)>c$

$$\rho_n\leq C_7\left(\frac{\nu_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}+\frac{\nu_0^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}}\right). \qquad (14)$$

Із умови $\nu_0(y)>c$ випливає справедливість теореми і при $n=1$.

У випадку $\nu_0(y)>c$ нерівність (3) доведена.

Нехай $\nu_0(y)\leq c$, $n>1$. В (11) покладемо $T=\frac{c}{\nu_0(y)}$, $T'=\min(T_1,T)$. Тоді

$$I=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)-\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t}\leq$$

$$\leq\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T'}\left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)-\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t}+\frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^T\left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^T\left|\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t}=I_1+I_2+I_3. \qquad (15)$$

Враховуючи, що $T'\leq T_1$ та (12) при $n>1$, аналогічно до (13), одержимо:

$$I_1\leq C_8\left(\frac{\nu_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}+\frac{\nu_0^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}}\right). \qquad (16)$$

Будемо вважати, що $T'=T_1$, бо у випадку $T'=T$ $I_2=0$, $I_3=0$ і це значно спрощує доведення.

Із леми 2, нерівність (7), одержуємо:

$$I_2=\frac{2}{\pi}\int\limits_{T_1}^T\left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t}\leq\frac{2}{\pi}\int\limits_{T_1}^T(3\nu_0(y))^n\frac{dt}{t}.$$

Із умови $\nu_0(y)\leq c<\left(m^{\delta}2^{\delta-3}\right)^2\leq\frac{1}{4}$ випливає, що $T_1=(-\ln\nu_0(y))^{\frac{1}{\alpha}}>1$. Тому

$$I_2\leq\frac{2}{\pi}(3\nu_0(y))^n\int\limits_{T_1}^T t^{-1}dt\leq\frac{2}{\pi}(3\nu_0(y))^n\frac{T}{T_1}\leq\frac{6}{\pi}(3\nu_0(y))^{n-1}c\leq$$

$$\leq\nu_0(y)\frac{6}{\pi}(3c)^{n-1}=\frac{\nu_0(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}n^{\frac{1}{\alpha}}\frac{6}{\pi}(3c)^{n-1}.$$

Оскільки $0 < c \leq 2^{-2}$, то функція $y = x^{\frac{1}{\alpha}}(3c)^x$ при $x \geq 2$ є обмеженою, тому

$$I_2 \leq C_9 \frac{\nu_0(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{17}$$

Для оцінки I_3 використаємо нерівність

$$\int_a^\infty e^{-t} t^u dt \leq a^u e^{-a} \ (a > 0,\ u \leq 0).$$

Тоді із (1) і $T_1 > 1$ одержимо:

$$I_3 = \frac{2}{\pi} \int_{T_1}^{T} \left| \prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} \int_{T_1}^{T} e^{-nt^\alpha} \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} \int_{T_1}^{\infty} e^{-nt^\alpha} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} \int_{n(T_1)^\alpha}^{\infty} e^{-z} z^{-1} dz \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(n(T_1)^\alpha\right)^{-1} e^{-n(T_1)^\alpha} \leq \frac{1}{n\alpha} \left(\nu_0(y)\right)^n \frac{2}{\pi} \leq$$

$$\leq \frac{\nu_0(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{1}{\alpha} n^{\frac{1}{\alpha}-1} c^{n-1} \frac{2}{\pi} \leq C_{10} \frac{\nu_0(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{18}$$

Із (11), (15)–(18), одержуємо справедливість нерівності (3) у випадку $n > 1$ і $\nu_0(y) < c$.

Нехай $n = 1$.

$$\rho_1 = \sup_x |\Phi_1(x) - Q_1(x)| = \sup_x |H_1(x)| = \sup_x \left| H_1\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right| =$$

$$= \sup_x \left| \int_{-\infty}^{x} dH_1\left(y\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| dH_1\left(y\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right| =$$

$$= \int_{|x| \leq y} \left| dH_1\left(y\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right| + \int_{|x| > y} \left| dH_1\left(y\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right| \leq \nu_{10}^{(1)}(y) + \nu_{10}^{(2)}(y).$$

Теорема 1 доведена.

1. *Капустей М. М., Слюсарчук П. В.* Про одну форму псевдомоментів і їх застосування для оцінки близькості функцій розподілу двох сум випадкових величин // Науковий вісник Ужгород. нац. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2013.– Вип. 24, № 2. – С. 69–76.
2. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка близькості розподілів двох сум для різно розподілених випадкових величин // Науковий вісник Ужгород. нац. ун-ту. Серія матем. – 2001. – Вип. 6. – С. 4–8.
3. *Золотарев В. М.* О близосты распределений двух сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и её применения. – 1965. – Т. 10, вып. 3. – С. 519–526.
4. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин.– М.: Наука, 1986. – 416 с.
5. *Нагаев С. В.* Оценка погрешности приближения устойчивыми законами // Теорія ймовірностей та математична статистика. – Вип. 56. – 1997. – С. 145–160.
6. *Ігнат Ю. І., Слюсарчук П. В.* Про збіжність до стійких законів розподілу // ДАН УРСР, серія "А". – 1977.– № 10. – С. 910–911.
7. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 720 с.

Одержано 10.10.2014