УДК 517.95

З. М. Нитребич, В. С. Ільків, П. Я. Пукач (Нац. ун-т "Львівська політехніка")

КОРЕКТНІ БАГАТОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

We give examples of multipoint problems with local time conditions in a layer for partial differential equations expanded into factors that are linear with respect to differentiation symbols. For those problems, the small denominators phenomenon does not appear. We construct the solutions of such problems in the classes of continuously differentiable functions.

Подано приклади багатоточкових задач з локальними за часом умовами у шарі для диференціальних рівнянь із частинними похідними, що розкладені у добуток лінійних відносно символів диференціювання множників. Для вказаних задач відсутня проблема малих знаменників. Побудовано розв'язки таких задач у класах неперервно диференційовних функцій.

Вступ.

У багатьох прикладних задачах виникають задачі про побудову розв'язку звичайного диференціального рівняння з достатньо гладкими коефіцієнтами та правою частиною, коли є відомими значення шуканого розв'язку та його похідних не в одній точці, як у задачі Коші, а у кількох. Така багатоточкова задача зустрічається в літературі як задача Валле-Пуссена. Вперше такі задачі вивчались у працях [1–3].

Природним узагальненням багатоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння, як у математичному сенсі, так і в сенсі фізичної інтерпретації, є задача з багатоточковими умовами за однією виділеною змінною для диференціального рівняння із частинними похідними. Постановка такого роду задач і перші загальні результати щодо їх розв'язності на підставі метричного підходу належать Б.Й. Пташнику [4, 5].

Дослідження багатоточкових задач показує, що ці задачі пов'язані з проблемою малих знаменників і загалом є некоректними крайовими задачами як стосовно області, у якій вивчається задача, так і стосовно коефіцієнтів рівняння [6]. Однак, треба зауважити, що серед багатоточкових задач для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними існують і такі (коректні) задачі, класи існування і єдиності розв'язків яких є цілком аналогічними до класів однозначної розв'язності відповідних задач Коші. Ці класи містять функції експоненційного зростання з порядком, більшим за одиницю. Приклади таких задач подано у праці [7] (так звані задачі з нескінченним типом) та [8]. Поняття типу крайової задачі запропоновано в [9].

Виділенню класів існування і єдиності розв'язків крайових задач із загальними багатоточковими умовами в необмежених областях для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними присвячені також дослідження [10–12].

У даній праці досліджено коректні багатоточкові задачі з локальними за часом умовами у необмеженій області (шарі) для факторизованих диференціальних рівнянь із частинними похідними, для яких відсутня проблема малих знаменників. Розв'язки цих задач за допомогою диференціально-символьного методу [13] знайдено у вигляді аналогу формули Д'Аламбера розв'язку задачі Коші для рівняння коливань струни.

1. Формулювання задачі.

У шарі

$$B_{s,h} = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{s+1}\colon\, t \in [0,h],\, x = (x_1,\ldots,x_s) \in \mathbb{R}^s\right\},\ h > 0,\ s \in \mathbb{N},$$

досліджуються задачі з локальними багатоточковими умовами за змінною t для факторизованих однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними вигляду

$$\prod_{k=1}^{n} L_k\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,x) = 0,$$

де $L_k\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $k = 1,2,\ldots,n$, – лінійні відносно $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}$ диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами.

Встановлюються умови коректної розв'язності задач та будуються їх розв'язки у просторах цілих функцій та неперервно диференційовних до n порядку функцій.

2. Багатоточкова задача для рівняння із частиннми похідними, розкладеного на лінійні множники з різними вільними членами.

У шарі $B_{s,h}$ дослідимо задачу

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{p=1}^{s} a_p \frac{\partial}{\partial x_p} - b_i\right] U(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$U(t_j, x) = \varphi_j(x),\ \ j = \overline{1,n},\quad x \in \mathbb{R}^s, \tag{2}$$

де $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le h$, $a_1, a_2, \ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, причому $b_i \ne b_j$ для $i \ne j$, $i,j = \overline{1,n}$. Зауважимо, що лінійні множники $\frac{\partial}{\partial t} - \sum\limits_{p=1}^{s} a_p \frac{\partial}{\partial x_p} - b_i$, $i = \overline{1,n}$, є комутативними, тому добуток множників можна записувати в довільному порядку і вважати, що $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$.

За рівнянням (1) для $\nu \in \mathbb{C}^s$ складаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt} - a\cdot\nu - b_i\right] T(t,\nu) = 0, \tag{3}$$

де $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$.

Фундаментальна система розв'язків рівняння (3) має вигляд

$$\left\{e^{(a\cdot\nu + b_j)t}\right\}_{j=\overline{1,n}}.$$

Знайдемо розв'язки $\widehat{T}_k(t,\nu)$, $k = \overline{1,n}$, звичайного диференціального рівняння (3), які задовольняють умови

$$\widehat{T}_k(t_j,\nu) = \delta_{kj},\quad k,j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Подамо $\widehat{T}_k(t,\nu)$, $k = \overline{1,n}$, у вигляді лінійної комбінації елементів фундаментальної системи, тобто

$$\widehat{T}_k(t,\nu) = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}(\nu) e^{(a\cdot\nu + b_i)t},\quad k = \overline{1,n}, \tag{5}$$

де $c_{ki}(\nu)$ – невідомі функції вектор-параметра ν.

Покладаючи у рівностях (5) $t = t_j$ і використовуючи умови (4), одержимо систему алгебричних рівнянь, яку в матричному вигляді можна подати так:

$$E_n = C(\nu)W(\nu), \tag{6}$$

де

$$C(\nu) = \|c_{ki}(\nu)\|_{k,i=\overline{1,n}},$$

$$W(\nu) = \|w_{ij}(\nu)\|_{i,j=\overline{1,n}} = \left\|e^{(a\cdot\nu+b_i)t_j}\right\|_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Матричне рівняння (6) є однозначно розв'язним, якщо $\det W(\nu) \neq 0$. Легко бачити, що

$$\det W(\nu) = d\, e^{(a\cdot\nu)(t_1+t_2+\ldots+t_n)},$$

причому

$$d = \det W(O) = \det \left\|e^{b_i t_j}\right\|_{i,j=\overline{1,n}}.$$

За теоремою Поліа [14] (див. також вправу 8.3 у [15, с. 87]) маємо $d \neq 0$, тому

$$\forall \nu \in \mathbb{C}^s \quad \det W(\nu) \neq 0.$$

З рівняння (6) одержуємо

$$C(\nu) = W^{-1}(\nu) = \frac{W^{\vee}(\nu)}{\det W(\nu)}.$$

Оскільки $w_{ji}^{\vee}(\nu) = d_{ji}^{\vee} e^{(a\cdot\nu)(t_1+t_2+\ldots+t_{i-1}+t_{i+1}+\ldots+t_n)}$ ($d_{ji}^{\vee}$ – алгебричні доповнення елементів d_{ji} матриці $W(O)$), то $c_{ki}(\nu) = \frac{d_{ik}^{\vee}}{d} e^{-(a\cdot\nu)t_k}$, звідки отримуємо, що $\widehat{T}_k(t,\cdot)$ є цілою функцією вигляду

$$\widehat{T}_k(t,\nu) = e^{(a\cdot\nu)(t-t_k)} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_{ik}^{\vee}}{d} e^{b_i t}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Позначимо через A клас аналітичних на $\mathbb{R}^s$ функцій, аналітичне продовження в $\mathbb{C}^s$ яких є цілими функціями.

Теорема 1. *Нехай $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in A$. Тоді у класі цілих функцій $U(t,x)$, які для кожного $t \in [0,h]$ належать до A, існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який можна подати у вигляді*

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right) \left\{\widehat{T}_k(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} \tag{8}$$

де $\widehat{T}_j(t,\nu)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, – функції вигляду (7).

Доведення. Диференціальні вирази нескінченного порядку $\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, …, $\varphi_n\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ визначимо шляхом заміни x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ у рядах Маклорена для функцій $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Тоді вираз (8) є деяким рядом. Цей ряд визначає цілу функцію $U(t,x)$, яка є цілою функцією за змінною t і для кожного фіксованого $t \in [0,h]$ належить до класу A, що випливає з рівностей

$$\varphi_k\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widehat{T}_k(t,\nu)\, e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=0} = \widehat{T}_j\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_k(x), \quad k = \overline{1,n},$$

і того, що функції $\widehat{T}_1(\cdot,\nu),\ldots,\widehat{T}_n(\cdot,\nu)$ – цілі функції експоненційного типу [16].

Функція (8) задовольняє рівняння (1) та умови (2), оскільки функції (7) є відповідно розв'язками рівняння (3), що задовольняють умови (4).

Покажемо тепер, що у класі цілих функцій задача (1), (2) не має інших розв'язків, окрім (8).

Припустимо, що для $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in A$ у класі цілих функцій існує два розв'язки задачі (1), (2) у шарі $B_{s,h}$. Тоді їх можна подати за формулою (8) у вигляді

$$U_j(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widehat{T}_{kj}(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O},\quad j=1,2,$$

де $\widehat{T}_{1j}(t,\nu),\ldots,\widehat{T}_{nj}(t,\nu)$, $j=1,2$, – розв'язки задачі (3), (4). Тоді різниця функцій

$$V(t,x)=U_1(t,x)-U_2(t,x)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(\widehat{T}_{k1}(t,\nu)-\widehat{T}_{k2}(t,\nu)\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}$$

є розв'язком рівняння (1) і, очевидно, задовольняє однорідні n-точкові умови

$$V(t_i,x)=0,\ i=\overline{1,n}.$$

Тоді функції $\widehat{T}_{k1}(t,\nu)-\widehat{T}_{k2}(t,\nu)$, $k=\overline{1,n}$, є розв'язками рівняння (3) і задовольняють однорідні умови

$$T(t_i,\nu)=0,\quad i=\overline{1,n}. \tag{9}$$

Оскільки задача (3), (9) має лише тривіальний розв'язок, то для $k=\overline{1,n}$ $\widehat{T}_{k1}(t,\nu)-\widehat{T}_{k2}(t,\nu)\equiv 0$ на $[0,h]\times\mathbb{C}^s$.

Отже, $V(t,x)\equiv 0$ на $B_{s,h}$. Теорему доведено.

Зауваження 1. *З формули* (8) *та вигляду функцій* (7) *на підставі рівності*

$$\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)e^{\nu\cdot x}=\psi(x)e^{\nu\cdot x} \tag{10}$$

для довільної аналітичної функції $\psi(x)$ отримуємо розв'язок задачі (1), (2) *у вигляді*

$$U(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_1+a_1(t-t_k),\ldots,x_s+a_s(t-t_k))\sum_{i=1}^{n}\frac{d_{ik}^{\vee}}{d}e^{b_it}. \tag{11}$$

Для існування розв'язку (11) *задачі* (1), (2) *у класі $C^{n,n}(\mathbb{R}^{s+1})$ досить вимагати, щоб $\varphi_j\in C^n(\mathbb{R}^s)$, $j=\overline{1,n}$.*

Приклад 1. *У смузі $B_{1,h}$, де $h\geq 1$, знайти розв'язок рівняння*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}+1\right)U(t,x)=0,$$

що задовольняє локальні двоточкові умови

$$U(0,x)=\varphi_1(x),\quad U(1,x)=\varphi_2(x).$$

Для даної задачі як задачі (1), (2) маємо $s=1$, $n=2$, $b_1=1$, $b_2=-1$, $t_1=0$, $t_2=1$, $a=a_1=1$,

$$d = \begin{vmatrix} 1 & e^{-1} \\ 1 & e \end{vmatrix} = 2\,\mathrm{sh}\,1,$$

$$d_{11}^{\vee} = e,\ \ d_{12}^{\vee} = -1,\ \ d_{21}^{\vee} = -e^{-1},\ \ d_{22}^{\vee} = 1.$$

За формулою (11) отримуємо

$$U(t,x) = \varphi_1(x+t)\frac{e^{-t+1}-e^{t-1}}{2\,\mathrm{sh}\,1} + \varphi_2(x+t-1)\frac{-e^{-t}+e^{t}}{2\,\mathrm{sh}\,1},$$

тобто

$$U(t,x) = \varphi_1(x+t)\frac{\mathrm{sh}[1-t]}{\mathrm{sh}\,1} + \varphi_2(x+t-1)\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{sh}\,1}.$$

Розв'язок задачі існує у класі $C^{2,2}(\mathbb{R}^2)$, якщо $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(\mathbb{R})$.

Приклад 2. *У шарі $B_{2,h}$, де $h \geq 1$, знайти розв'язок рівняння*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2} + 1\right)U(t,x_1,x_2) = 0,$$

що задовольняє локальні двоточкові умови

$$U(0,x_1,x_2) = \varphi_1(x_1,x_2),\ \ U(1,x_1,x_2) = \varphi_2(x_1,x_2).$$

За формулою (11), в якій $s=2$, $n=2$, $a_1=2$, $a_2=-3$, $b_1=1$, $b_2=-1$, отримуємо розв'язок задачі у вигляді

$$U(t,x_1,x_2) = \varphi_1(x_1+2t, x_2-3t)\frac{\mathrm{sh}[1-t]}{\mathrm{sh}\,1} + \varphi_2(x_1+2t-2, x_2-3t+3)\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{sh}\,1}.$$

Розв'язок задачі існує у відповідному класі функцій, якщо $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

3. Багатоточкова задача для рівняння із частинними похідними, розкладеного на однакові лінійні множники.

У шарі $B_{s,h}$ дослідимо задачу

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{p=1}^{s} a_p \frac{\partial}{\partial x_p} - b\right]^n U(t,x) = 0, \tag{12}$$

$$U(t_j,x) = \varphi_j(x),\ \ j=\overline{1,n},\quad x \in \mathbb{R}^s, \tag{13}$$

де $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq h$, $a_1, a_2, \ldots, a_s, b \in \mathbb{R}$.

Запишемо звичайне диференціальне рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - a\cdot\nu - b\right)^n T(t,\nu) = 0, \tag{14}$$

у якому $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{C}^s$.

Фундаментальна система розв'язків рівняння (14) має вигляд

$$\left\{t^k e^{(a\cdot\nu+b)t}\right\}_{k=\overline{0,n-1}}.$$

Знайдемо сукупність $\left\{\widehat{T}_k(t,\,\nu)\right\}_{k=\overline{1,n}}$ розв'язків рівняння (14), які задовольняють умови

$$\widehat{T}_k(t_j,\,\nu)=\delta_{kj},\quad k,j=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Шукаючи цю систему розв'язків у вигляді

$$\widehat{T}_k(t,\,\nu)=\sum_{i=0}^{n-1}c_{ki}(\nu)\,t^i e^{(a\cdot\nu+b)\,t},\quad k=\overline{1,n},$$

де $c_{ki}(\nu)$, $k=\overline{1,n}$, $i=\overline{0,n-1}$, – невідомі функції параметра $\nu\in\mathbb{C}^s$, і задовольняючи умови (15), одержуємо систему лінійних рівнянь

$$\sum_{i=0}^{n-1}c_{ki}(\nu)t_j^i\,e^{(a\cdot\nu+b)\,t_j}=\delta_{kj},\quad k,j=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Визначник цієї системи має вигляд:

$$\Delta(\nu)=\begin{vmatrix} e^{(a\cdot\nu+b)\,t_1} & e^{(a\cdot\nu+b)\,t_2} & \dots & e^{(a\cdot\nu+b)\,t_n}\\ t_1e^{(a\cdot\nu+b)\,t_1} & t_2e^{(a\cdot\nu+b)\,t_2} & \dots & t_ne^{(a\cdot\nu+b)\,t_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_1^{n-1}e^{(a\cdot\nu+b)\,t_1} & t_2^{n-1}e^{(a\cdot\nu+b)\,t_2} & \dots & t_n^{n-1}e^{(a\cdot\nu+b)\,t_n}\end{vmatrix}.$$

Введемо у розгляд поліном від n дійсних змінних

$$\omega(y_1,y_2,\dots,y_n)=\prod_{n\geq i>k\geq 1}(y_i-y_k).$$

Легко бачити, що цей поліном має степінь $n-1$ за кожною змінною. Значення цього полінома в точці $(t_1,t_2,\dots,t_n)$ позначимо через ω, тобто

$$\omega\equiv\omega(t_1,t_2,\dots,t_n). \tag{17}$$

Число ω, очевидно, можна розглядати як значення визначника Вандермонда з визначальними елементами $t_1,t_2,\dots,t_n$, а тому $\omega\neq 0$.

Розглянемо також одержані за функцією $\omega(y_1,y_2,\dots,y_n)$ поліноми однієї змінної t степеня $n-1$:

$$\omega_k(t)\equiv\omega(t_1,t_2,\dots,t_{k-1},t,t_{k+1},\dots,t_n),\quad k=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Значення визначника $\Delta(\nu)$ дорівнює

$$\Delta(\nu)=\omega e^{(a\cdot\nu+b)(t_1+t_2+\ldots+t_n)},$$

а, отже, $\Delta(\nu)\neq 0$ і система (16) є однозначно розв'язною.

Запишемо тепер шукану систему розв'язків, яка задовольняє умови (15):

$$\widehat{T}_k(t,\,\nu)=\omega^{-1}\omega_k(t)e^{(a\cdot\nu+b)(t-t_k)},\quad k=\overline{1,n}. \tag{19}$$

Аналогічно, як у п. 2, з рівності (10) випливає, що розв'язок задачі (12), (13) можна подати у вигляді

$$U(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k(t)}{\omega}e^{b(t-t_k)}\varphi_k(x_1+a_1(t-t_k),\ldots,x_s+a_s(t-t_k)). \tag{20}$$

Для існування розв'язку (20) задачі (12), (13) у класі $C^{n,n}(\mathbb{R}^{s+1})$ досить вимагати, щоб $\varphi_j\in C^n(\mathbb{R}^s)$, $j=\overline{1,n}$.

Приклад 3. *У смузі* $B_{1,h}$ *знайти розв'язок рівняння*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-2\frac{\partial}{\partial x}-1\right)^2 U(t,x)=0,$$

що задовольняє локальні двоточкові умови

$$U(t_1,x)=\varphi_1(x),\quad U(t_2,x)=\varphi_2(x),$$

де $0\le t_1<t_2\le h$.

Для даної задачі як задачі (12), (13) маємо

$$s=1,\ n=2,\ b=1,\ a=a_1=2.$$

За формулою (20) розв'язок задачі зображається у вигляді

$$U(t,x)=\frac{t_2-t}{t_2-t_1}\varphi_1(x+2t-2t_1)e^{t-t_1}+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\varphi_2(x+2t-2t_2)e^{t-t_2}.$$

Розв'язок задачі існує у класі $C^{2,2}(\mathbb{R}^2)$, якщо $\varphi_1,\ \varphi_2\in C^2(\mathbb{R})$.

Висновки.

Досліджено дві багатоточкові задачі з локальними за часом умовами у шарі для диференціальних рівнянь із частинними похідними, що розкладені у добуток різних та однакових лінійних відносно символів диференціювання множників. Ці задачі є коректними і для них відсутня проблема малих знаменників. Розв'язки задач за допомогою диференціально-символьного методу знайдено у вигляді аналогу формули Д'Аламбера розв'язку задачі Коші для рівняння коливань струни. Праві частини багатоточкових умов при цьому належать до простору неперервно диференційовних до деякого порядку функцій.

1. *Vallee-Poussin de la Ch. J.* Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n // Journ. Math. de pura et appl. – 1929. – V. 9, № 8. – P. 125–144.
2. *Picone M.* Sui valori eccezionali di un parametro do cui dipend un equazione differentiale lineare ordinaria del secondo ordine. – Pisa, 1909. – 176 p.
3. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Пг., 1917. – 308 с.
4. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // ДАН УРСР. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.
5. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле-Пуссена для лінійних гіперболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами // ДАН УРСР. – 1967. – № 2. – С. 127–130.
6. *Пташник Б. Й., Кміть І. Я., Ількiв В. С., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

7. *Антыпко И. И., Перельман М. А.* О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1972. – Вып. 16. – С. 98–109.
8. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.
9. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Мат. сб. – 1969. – Т. 79, № 2. – С. 293–304.
10. *Антыпко И. И., Борок В. М.* Критерий безусловной корректности краевой задачи в слое // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1976. – Вып. 26. – С. 3–9.
11. *Борок В. М., Перельман М. А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.
12. *Віленць І. Л.* Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // ДАН УРСР. – Сер. А. – 1974. – № 3. – С. 195–197.
13. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально–символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту „Львівська політехніка", 2002. – 292 с.
14. *Polya G.* On the mean value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1922. – V. 24. – P. 312–324.
15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
16. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Про дію диференціального виразу нескінченного порядку у класах цілих функцій багатьох комплексних змінних // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 11–16.

Одержано 24.11.2014