УДК 512.64

Ю. М. Перегуда (*Житомирський військовий ін-т імені С. П. Корольова Держ. ун-ту телекомунікацій*)

ПРО АНТИЛАНЦЮГИ З 1-СТАБІЛЬНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

It is proved that an antichain with positive quadratic Tits form consists of 1-stable elements if and only if its length is 3.

Доведено, що антиланцюг з додатною квадратичною формою Тітса складається із 1-стабільних елементів тоді і лише тоді, коли його довжина дорівнює 3.

Квадратичні форми виникають при розгляді багатьох задач в різних галузях математики. В сучасній теорії зображень важливу роль відіграють квадратичні форми Тітса.

Вперше квадратична форма Тітса була введена у 1972 р. П. Габріелем [1] для скінченних сагайдаків (орієнтованих графів). Він показав, що сагайдак має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли є додатною деяка квадратична форма, яку він назвав квадратичною формою Тітса (зображення сагайдаків також введені П. Габріелем у цій же роботі). Цей результат П. Габріеля став початком нового напрямку в теорії зображень, який пов'язаний з вивченням зв'язків між властивостями зображень та властивостями відповідних квадратичних форм.

У 1974 р. Ю. А. Дрозд [2] розглянув квадратичну форму Тітса для скінченних частково впорядкованих множин і показав, що частково впорядкована множина має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли його форма Тітса є слабо додатною (тобто додатною на векторах із невід'ємними координатами).

У 1977 р. М. М. Клейнер і А. В. Ройтер [3] ввели зображення диференціальних градуйованих категорій, а також відповідну квадратичну форму Тітса, і показали, що вільна трикутна диференціальна градуйована категорія має скінченний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса є слабо додатною.

Квадратичні форми Тітса вивчали також К. Бонгартц, В. М. Бондаренко, Ш. Бреннер, Н. С. Головащук, П. Дрекслер, С. А. Овсієнко, Х. А. де ла Пенья, К. Рінгель, Д. Сімсон та багато інших математиків. При цьому розглядалися як властивості самих форм Тітса для різних об'єктів, так і зв'язки між їх властивостями та властивостями зображень.

В теорії зображень частково впорядкованих множин важливу роль відіграють не лише слабо додатні, а й додатні форми Тітса. В. М. Бондаренко і М. В. Стьопочкіна [4] показали, що у випадку, коли форма Тітса частково впорядкованої множини є додатною, її категорія ін'єктивних зображень має скінченний зображувальний тип. Всі частково впорядковані множини з додатною формою Тітса (що є аналогами графів Динкіна) описано цими ж авторами в роботі [5].

У цій роботі ми продовжуємо вивчати локальні деформації квадратичних форм Тітса скінченних частково впорядкованих множин (див. статті [6] – [9]).

Автор висловлює щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору В. М. Бондаренку за постановку задачі та корисні поради.

1. Основні поняття. Під квадратичною формою будемо розуміти довільну квадратичну форму над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$:

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j.$$

Множину всіх таких квадратичних форм позначимо через $\mathcal{R}$, а множину всіх $f(z) \in \mathcal{R}$ з одиничними коефіцієнтами $f_1, \dots, f_n$ — через $\mathcal{R}_0$.

Нагадаємо деякі означення, введені В. М. Бондаренком.

Нехай $f(z) \in \mathcal{R}_0$ і $s \in \{1, \dots, n\}$; s-деформацією форми $f(z)$ називається форма

$$f^{(s)}(z, a) = f^{(s)}(z_1, \dots, z_n, a) = az_s^2 + \sum_{i \neq s} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j,$$

де a — параметр.

Позначимо через $F_+^{(s)}$ множину всіх $b \in \mathbb{R}$, таких що форма $f^{(s)}(z, b)$ є додатною, і покладемо $F_-^{(s)} = \mathbb{R} \setminus F_+^{(s)}$. Іншими словами, $b \in F_-^{(s)}$ тоді і лише тоді, коли існує ненульовий вектор $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ такий, що $f^{(s)}(r_1, \dots, r_n, b) \leq 0$. Далі, покладемо

$$m_f^{(s)} = \sup \mathrm{F}_-^{(s)} \in \mathbb{R} \cup \infty$$

(оскільки із $x \in F_-^{(s)}$ випливає, що $y \in F_-^{(s)}$ для любого $y < x$, то цей супремум є граничною точкою). Число $m_f^{(s)}$ називається s-им P-граничним числом форми $f(z)$.

Легко бачити, що має місце наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай $f(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{R}_0$. Тоді*

1) $m_f^{(s)} \geq 0$;

2) $m_f^{(s)} = \infty$, *якщо форма*

$$f_{-s}(z_1, \dots, z_{s-1}, z_{s+1}, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_{s-1}, 0, z_{s+1}, \dots, z_n)$$

не є додатною.

У роботі [6] доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $f(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{R}_0$ і нехай $m_f^{(s)} \neq \infty$. Тоді*

1) $m_f^{(s)} \in F_-^{(s)}$, *а тому* $m_f^{(s)}$ *— найбільше число множини* $F_-^{(s)}$.

2) *форма* $f^{(s)}(z, m_f^{(s)})$ *є невід'ємною.*

Приведемо ще деякі означення.

Нехай S — частково впорядкована множина. Квадратичною формою Тітса множини S називається квадратична форма, яка задається наступною рівністю:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

(з формальних міркувань потрібно вважати, що ні один із елементів S не позначений символом 0).

Число $m_f^{(i)}$, де $f = q_S(z)$, а i — елемент із S, будемо позначати через $m_S(i)$ або просто через $m(i)$, якщо S фіксоване. Елемент $i \in S$ називається r-стабільним відносно форми Тітса, якщо $m_S(i) \neq \infty$ і існує частково впорядкована множина $T \supset S$ порядку $|S| + r$, така що $m_S(i) = m_{S_N}(i)$; запис $T \supset S$ означає, що S — повна підмножина T (відносно часткової впорядкованості на T).

Ці поняття також введено В. М. Бондаренком.

2. Формулювання основного результату.

Нагадаємо, що антиланцюгом називається частково впорядкована множина, кожні два елементи якої непорівняльні. Число елементів антиланцюга називається його довжиною. Очевидно (в силу симетрії), що якщо антиланцюг містить 1-стабільний елемент, то всі його елементи 1-стабільні.

Мета цієї статті — доведення наступної теореми.

Теорема 2. *Антиланцюг з додатною квадратичною формою Тітса складається із 1-стабільних елементів тоді і лише тоді, коли його довжина дорівнює* 3.

3. Допоміжні леми.

Нехай S — частково впорядкована множина, елементами якої є натуральні числа: $1, 2, \ldots, n$. Будемо вважати, що елемент n, для якого ми обчислюємо число $m(n)$, буде найбільшим серед $i \in S$ як натуральних чисел. Тоді матриця квадратичної форми $q_S^{(p)}(z, a)$ — це симетрична матриця розміру $(n+1) \times (n+1)$ такого вигляду:

$$M_a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ -1 & 2 & * & \ldots & * & * \\ -1 & * & 2 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & * & * & \ldots & 2 & * \\ -1 & * & * & \ldots & * & 2a \end{pmatrix}.$$

Оскільки для обчислення чисел $m(i)$ ми будемо користуватися лише критерієм Сільвестра (для додатності квадратичної форми), то замість матриці M_a можна розглядати матрицю M_a°, яка отримується із M_a шляхом множення останньої на 2 та подальшого множення її першого рядка і першого стовпця на -1:

$$M_a^\circ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & * & \ldots & * & * \\ 1 & * & 2 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & \ldots & 2 & * \\ 1 & * & * & \ldots & * & 2a \end{pmatrix}$$

Зауважимо ще, що коли ми розглядаємо частково впорядковану множину S з додатною формою Тітса, то всі головні мінори матриці M_1° — додатні (за критерієм Сільвестра), а значить $m_S(n)$ є розв'язком відносно a лінійного рівняння $\Delta(n,a)=0$, де

$$\Delta(n,a)=|M_a^\circ|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & * & \dots & * & * \\ 1 & * & 2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & 2 & * \\ 1 & * & * & \dots & * & 2a \end{vmatrix}$$

Очевидно, що в цьому випадку коефіцієнт при a не дорівнює нулю (і навіть додатний).

Введемо наступні частково впорядковані множини: $S_1=\{1\}$ (антиланцюг довжини 1), $S_2=\{1,2\,|\,1\prec 2\}$, $S_3=\{1,2\}$ (антиланцюг довжини 2), $S_4=\{1,2,3\,|\,2\prec 3\}$, $S_5=\{1,2,3\,|\,1\prec 2, 1\prec 3\}$, $S_6=\{1,2,3\}$ (антиланцюг довжини 3).

Легко показати (див., наприклад, [10]), що квадратична форма Тітса для для кожної із цих частково впорядкованих множин є додатною.

Очевидно (в силу симетрій), що для $S=S_2,S_3$ виконується рівність $m_S(1)=m_S(2)$, для $S=S_4,S_5$ виконується рівність $m_S(2)=m_S(3)$, а для $S=S_6$ виконуються рівності $m_S(1)=m_S(2)=m_S(3)$.

Лема 1. *Нехай $S=S_1$. Тоді $m_S(1)=1/4$.*

Доведення. Оскільки визначикто

$$\Delta_1(1,a)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2a \end{vmatrix}$$

дорівнює $4a-1$, то $m_S(1)=1/4$.

Лема 2. *Нехай $S=S_2$. Тоді $m_S(1)=m_S(2)=1/3$.*

Доведення. Розкладаючи визначник

$$\Delta_2(2,a)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

по останньому рядку, маємо: $\Delta_2(2,a)=-1-1+6a=-2+6a$. Отже, $m_S(2)=1/3$.

Лема 3. *Нехай $S=S_3$. Тоді $m_S(1)=m_S(2)=1/3$.*

Доведення. Розкладаючи визначник

$$\Delta_3(2,a)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2a \end{vmatrix}$$

по останньому рядку, маємо: $\Delta_3(2,a)=-2+6a$. Отже, $m_S(2)=1/3$.

Лема 4. *Нехай $S=S_4$. Тоді $m_S(1)=3/8$ і $m_S(2)=m_S(3)=3/8$.*

Доведення. Розкладаючи визначник

$$\Delta_4(3,a)=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&2&1\\1&0&1&2a\end{vmatrix}$$

по останньому рядку і враховуючи, що

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{vmatrix}=2,\quad\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&0\\1&0&1\end{vmatrix}=1$$

і $\Delta_3(2,1)=4$, маємо: $\Delta_4(3,a)=-2-1+8a$. Отже, $m_S(3)=3/8$.

Далі, для обчислення $m_S(1)$ зробимо наступну перенумерацію елементів S: $1\to3, 2\to1, 3\to2$ (щоб можна було дослівно застосувати вказану вище схему). Тоді (в нових позначеннях), розкладаючи визначник

$$\Delta_4'(3,a)=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&0\\1&1&2&0\\1&0&0&2a\end{vmatrix}$$

по останньому рядку і враховуючи, що $\Delta_2(2,1)=4$, маємо: $\Delta_4'(3,a)=-3+8a$. Отже, $m_S(3)=3/8$ або, в старих позначеннях, $m_S(1)=3/8$.

Лема 5. *Нехай* $S=S_5$. *Тоді* $m_S(2)=m_S(3)=1/2$.

Доведення. Розкладаючи визначник

$$\Delta_5(3,a)=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&0\\1&1&0&2a\end{vmatrix}$$

по останньому рядку і враховуючи, що

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&2&0\end{vmatrix}=2,\quad\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&2&0\end{vmatrix}=-2$$

і $\Delta_2(2,1)=4$, маємо: $\Delta_5(3,a)=-2-2+8a$. Отже, $m_S(3)=1/2$.

Лема 6. *Нехай* $S=S_6$. *Тоді* $m_S(1)=m_S(2)=m_S(3)=1/2$.

Доведення. Розкладаючи визначник

$$\Delta_6(3,a)=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\1&0&0&2a\end{vmatrix}$$

по останньому рядку і враховуючи, що

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

і $\Delta_3(2,1) = 4$, маємо: $\Delta_6(3,a) = -4 + 8a$. Отже, $m_S(3) = 1/2$.

4. Доведення теореми 2.

Покажемо спочатку, що елемент антиланцюга $P = \{b\}$ довжини 1 не є 1-стабільним.

Нехай, T — частково впорядкована множина порядку 2, яка містять P як повну підмножину; елемент $x \in T$, відмінний від b, позначимо через d. Тоді, застосовуючи лему 2, якщо b та d порівняльні, і лему 3, якщо b та d непорівняльні, маємо $m_T(b) = 1/3$. З іншого боку, за лемою 1 маємо рівність $m_P(b) = 1/4$. Отже, (єдиний) елемент автоланцюга P не є 1-стабільним.

Покажемо тепер, що антиланцюг $P = \{b, c\}$ довжини 2 не містить 1-стабільних елементів. В силу симетрії достатньо показати, що один із його елементів, наприклад, b, не є 1-стабільним.

Нехай T — частково впорядкована множина порядку 3, яка містять P як повну підмножину; елемент $x \in T$, відмінний від b і c, позначимо через d. Тоді, застосовуючи леми 4 – 6 і враховуючи (в ситуації леми 5), що $x \in T$ має те ж саме число $m(x)$ як в T, так і в дуальній до T частково впорядкованій множині T^{op}, маємо:

$m_T(b) = 3/8$, якщо d порівняльне з b і непорівняльне з c;
$m_T(b) = 3/8$, якщо d непорівняльне з b і порівняльне з c;
$m_T(b) = 1/2$, якщо d порівняльне як з b, так і з c;
$m_T(b) = 1/2$, якщо d непорівняльне як з b, так і з c.

З іншого боку, за лемою 3 маємо рівність $m_P(b) = 1/3$. Отже, елемент b не є 1-стабільним.

Оскільки квадратична форма Тітса антиланцюга довжини $l > 3$ не є додатною (див. [5]), то для завершення доведення теореми 2 залишилося показати, що антиланцюг довжини 3 містить 1-стабільний елемент (а тоді, як говорилося вище, всі його елементи є 1-стабільними).

Нехай P — такий антиланцюг, елементи якого нам зручно позначити числами $2, 3, 4$. За лемою 6 маємо рівність $m_P(4) = 1/2$. Розглянемо частково впорядковану множину $T = \{1, 2, 3, 4 \,|\, 1 \prec 2, 1 \prec 3\}$. Обчислимо число $m_T(4)$.

Розкладаючи визначник

$$\Delta(4,a) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2a \end{vmatrix}$$

по останньому рядку, а потім перший із нових визначників по останньому стовпцю, а другий — по останньому рядку, маємо:

$$\Delta(4,a) = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2a\left\{-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \Delta_3(2,1) = 4, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta_2(2,1) = 4,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

то $\Delta(4,a) = -4 + 2a(-2-2+8) = -4 + 8a$, а отже $m_T(4) = 1/2$.

Таким чином, $m_P(4) = m_T(4)$, а значить 4 є 1-стабільним елементом антиланцюга P.

Теорема 2 доведена.

1. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. –6, N 1. – P. 71-103.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – 8. – С. 34–42.
3. *Клейнер М. М., Ройтер А. В.* Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С.5-70.
4. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно-конечного типа // Науковий вісник Ужгородського університету (серія: математика і інформатика). – 2005. – 9. – С. 15-25.
5. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – 2, N3. – С. 18-58.
6. *V. M. Bondarenko, Yu. M. Peregudа.* On P-numbers of quadratic forms // Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – 6, N2. – С. 474-477.
7. *Ю. М. Перегуда.* Про R-стабільні елементи скінченних частково впорядкованих множин // Науковий вісник Ужгород-ського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2009. – вип 19. –С. 81-86.
8. *В. М. Бондаренко, Ю. М. Перегуда.* Опис Р-чисел для вузлових точок частково впорядкованих множин з додатно визначеною формою Тітса // Науковий вісник Ужгородсько-го ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2010. – вип 21. – С. 35-39.
9. *В. М. Бондаренко, В. В. Бондаренко, Ю. Н. Перегуда.* Локальные деформации положительно определенных квадратичных форм // Укр. мат. журнал. – 2012. – №7. – С. 892-907.
10. *Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В.* Про серійні частково впорядковані множини з додатно визначеною квадратичною формою Тітса // Нелінійні коливання. – 2006. – 9, N3. – С. 320-325.

Одержано 07.11.2014