УДК 512.44

Н. В. Трошкі (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ДЕЯКИХ ДРОБОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

This paper is devoted to construction of models of shot noise processes. The conditions of convergence of the model by probability in the space $C(\mathbf{T})$ are investigated.

Дана робота присвячена побудові моделей дробових випадкових процесів. Також отримано умови збіжності за ймовірністю моделі в просторі $C(\mathbf{T})$.

Вступ.

Дана робота присвячена побудові моделей деяких дробових випадкових процесів, а також питанню точності та надійності побудованих моделей. До цього часу переважна більшість робіт були присвячені моделюванню гауссових випадкових процесів (див. [1], [2], [3] та монографію [4]. В монографії [5] розглядається побудова моделей передгауссових дробових процесів. Основні відомості про дробові випадкові процеси можна знайти в монографії [6].

Робота складається з вступу та трьох розділів. Перший розділ присвячений побудові моделі дробового випадкового процесу. В другому розділі отримані оцінки супремумів норм для $L_2(\Omega)$-процесу. Питання точності та надійності моделювання випадкового процесу розглянуто в третьому розділі.

1. Побудова моделі дробового випадкового процесу

Означення 1. *[6] Дробовим випадковим процесом називається процес вигляду*

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,\lambda)d\eta(\lambda),$$

де $\eta = (\eta(\lambda), t \in \mathbb{R})$ – сепарабельний дійснозначний однорідний центрований випадковий процес з незалежними приростами, $f = (f(t,\lambda), t, \lambda \in \mathbb{R})$ – дійснозначна функція.

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ймовірнісний простір та $\mathbf{T} = [0, T]$ деяка параметрична множина. Нехай $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbf{T}\}$ центрований дробовий випадковий процес, коваріаційна функція якого має вигляд

$$R(t,s) = \int_0^{\infty} f(t,\lambda)f(s,\lambda)dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ - це деяка функція розподілу.

За теоремою Карунепа (див. [7]) процес $\xi(t)$ може бути зображений так:

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} f(t,\lambda)d\eta(\lambda),$$

де $\eta(\lambda)$ процес з незалежними приростами такий, що $\mathbf{E}\eta(\lambda) = 0$, $\mathbf{E}(\eta(\lambda_1) - \eta(\lambda_2))^2 = F(\lambda_1) - F(\lambda_2)$, $\lambda_1 > \lambda_2$.

Виберемо розбиття $L = \{\lambda_0, ..., \lambda_N\}$ множини $[0, \infty)$ таке, що $\lambda_0 = 0, \lambda_k < \lambda_{k+1}, \lambda_{N-1} = \Lambda, \lambda_N = \infty, \Lambda > 0$.

Розглянемо модель випадкового процесу $\xi(t)$

$$\hat{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k f(\zeta_k, t),$$

де η_k, ζ_k незалежні випадкові величини, причому $\eta_k = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\eta(\lambda)$ такі випадкові величини, що $\mathbf{E}\eta_k = 0$, $\mathbf{E}\eta_k^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$, ζ_k – випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ і якщо $b_k^2 > 0$, тоді

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Якщо $b_k^2 = 0$, тоді $\zeta_k = 0$ з ймовірністю одиниця. Вважатимемо, що $b_k^2 > 0$, $k = 0, 1, ..., N$.

Позначимо

$$\theta(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k))\, d\eta(\lambda). \tag{1}$$

Для довільних $t, s \in \mathbf{T}$ розглянемо випадковий процес

$$\theta(t) - \theta(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k) - f(s, \lambda) + f(s, \zeta_k))\, d\eta(\lambda). \tag{2}$$

Припустимо, що для $f(t, \lambda)$ мають місце такі нерівності:

$$| f(t, \lambda) - f(t, u) | \leq S(| \lambda - u |) \cdot Z(t), \tag{3}$$

$$| f(t, \lambda) - f(t, u) - f(s, \lambda) + f(s, u) | \leq S_1(| \lambda - u |) \cdot | Z_1(t) - Z_1(s) |, \tag{4}$$

де $Z(t), Z_1(t), t \in \mathbf{T}$ – деякі неперервні функція, $S(\lambda)$ та $S_1(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ монотонно неспадні функції, такі що $S(\lambda) \to 0$ та $S_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Приклад 1. *Нехай $f(t, \lambda)$ – неперервна, двічі диференційовна функція по t та по λ і нехай $C(t) = \sup\limits_{y \in [0, \Lambda]} \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| < \infty$.*

Розглянемо такі оцінки:

$$|f(t, \lambda) - f(t, u)| = \left| \int\limits_u^{\lambda} \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} dy \right| \leq \int\limits_u^{\lambda} \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| dy \leq |\lambda - u| \cdot C(t).$$

Отже, якщо вибрати $Z(t) = C(t)$, то функція $f(t, \lambda)$ задовольнятиме умову (3).

Покажемо, що якщо існує така стала $C_1(T,\Lambda)$, яка залежить тільки від T та Λ, причому справджується нерівність

$$\left|\frac{\partial^2 f(t,\lambda)}{\partial t\partial\lambda}\right| \le C_1(T,\Lambda), \tag{5}$$

то функція $f(t,\lambda)$ задовольняє і умову (4). Розглянемо область $\Delta = \{s \le l \le t, u \le y \le \lambda\}$, де $s,t \in [0,T]$, $\lambda, u \in [0,\Lambda]$. Для визначеності вважатимемо, що $t > s$, $u > \lambda$. Тоді з властивостей кратних інтегралів та (5) випливають нерівності

$$| f(t,\lambda) - f(t,u) - f(s,\lambda) + f(s,u) | = \left|\int_\Delta\int \frac{\partial^2 f(l,y)}{\partial l\partial y} dl dy\right| \le C_1(T,\Lambda)|t-s||u-\lambda|.$$

Приклад 2. *Якщо $f(t,\lambda) = e^{-(t+v)^2}$, $0 < t \le T$, $0 < v \le \Lambda$, то аналогічно як у прикладі 1 маємо, що умова (3) справджується.*

Доведемо справедливість умови (4)

$$| f(t,\lambda) - f(t,u) - f(s,\lambda) + f(s,u) | = \left|\int_u^\lambda \frac{\partial f(t,v)}{\partial v} dv - \int_u^\lambda \frac{\partial f(s,v)}{\partial v} dv\right| \le$$
$$\le \int_u^\lambda \left|\frac{\partial f(t,v)}{\partial v} - \frac{\partial f(s,v)}{\partial v}\right| dv.$$

Оцінимо підінтегральний вираз

$$\left|\frac{\partial f(t,v)}{\partial v} - \frac{\partial f(s,v)}{\partial v}\right| = 2\left|e^{-(t+v)^2}(t+v) - e^{-(s+v)^2}(s+v)\right| =$$
$$= 2\left|\left(e^{-(t+v)^2}(t+v) - e^{-(s+v)^2}(t+v)\right) + \left(e^{-(s+v)^2}(t+v) - e^{-(s+v)^2}(s+v)\right)\right| =$$
$$= 2\left|(t+v)\left(e^{-(t+v)^2} - e^{-(s+v)^2}\right) + e^{-(s+v)^2}(t-s)\right| \le$$
$$\le 2\left((t+v)e^{-(t+v)^2}\left|1 - e^{-\left((s+v)^2-(t+v)^2\right)}\right| + e^{-(s+v)^2}|t-s|\right) \le$$
$$\le 2\left((t+v)e^{-(t+v)^2}|(s+v)^2 - (t+v)^2| + e^{-(s+v)^2}|t-s|\right) \le$$
$$\le 2\left((t+v)|t-s|(s+t+2v) + |t-s|\right) \le 2|t-s|\left(2(T+\Lambda)^2 + 1\right).$$

Отже,

$$| f(t,\lambda) - f(t,u) - f(s,\lambda) + f(s,u) | \le C_1(T,\Lambda)|\lambda - u| \cdot |t-s|,$$

де $C_1(T,\Lambda) = 2\left(2(T+\Lambda)^2 + 1\right)$.

2. Оцінки супремумів норм в $L_2(\Omega)$ для процесів $\theta(t)$ та $\theta(t) - \theta(s)$

Оскільки $\theta(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t)$ є $L_2(\Omega)$-процесом, тоді $\| \theta(t) \|_{L_2} = (\mathbb{E} \mid \theta(t) \mid^2)^{\frac{1}{2}}$.

Лема 1. *Нехай для функції $f(t,\lambda)$ виконується умова (3), $\theta(t)$ визначений в (1) і нехай $\int_\Lambda^\infty\int_\Lambda^\infty S^2(\mid \lambda - u \mid) dF(\lambda) dF(u) < \infty$, тоді справджується наступне співвідношення*

$$\| \theta(t) \|_{L_2} \le$$
$$\le Z(t)\left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S^2(\mid \lambda_{k+1} - \lambda_k \mid) + \frac{1}{b_{N-1}^2}\int_\Lambda^\infty\int_\Lambda^\infty S^2(\mid \lambda - u \mid) dF(\lambda) dF(u)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Оскільки $\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t,\lambda)-f(t,\zeta_k))d\eta(\lambda)$ незалежні випадкові величини, причому випадкова селичина ζ_k не залежать від $\eta(\lambda)$, тоді за теоремою Фубіні (E_{ζ_k} – умовне математичне сподівання відносно ζ_k), отримаємо

$$\| \theta(t) \|_{L_2} = (\mathbb{E} \mid \theta(t) \mid^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t,\lambda) - f(t,\zeta_k))\, d\eta(\lambda) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t,\lambda) - f(t,\zeta_k)|\, d\eta(\lambda) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}\mathbb{E}_{\zeta_k} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t,\lambda) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(t,\zeta_k)|^2 d\eta(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t,\lambda) - f(t,\zeta_k)|^2\, dF(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S^2(\mid \lambda - \zeta_k \mid) Z^2(t) dF(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S^2(\mid \lambda - u \mid) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\; Z^2(t) dF(\lambda) \right) dF_k(u) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{b_k^2} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S^2(\mid \lambda_{k+1} - \lambda_k \mid) dF(\lambda) \right) dF(u) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int\limits_{\Lambda}^{\infty} \int\limits_{\Lambda}^{\infty} S^2(\mid \lambda - u \mid) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot Z(t) = Z(t) \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S^2(\mid \lambda_{k+1} - \lambda_k \mid) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int\limits_{\Lambda}^{\infty} \int\limits_{\Lambda}^{\infty} S^2(\mid \lambda - u \mid) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лема 2. *Нехай для функції $f(t,\lambda)$ виконується умова (3), різниця $\theta(t) - \theta(s)$ визначена в (2) і нехай $\int\limits_{\Lambda}^{\infty} \int\limits_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(\mid \lambda - u \mid) dF(\lambda) dF(u) < \infty$, тоді справедливе наступне співвідношення*

$$\| \theta(t) - \theta(s) \|_{L_2} \leq |Z_1(t) - Z_1(s)| \times$$
$$\times \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S_1^2(\mid \lambda_{k+1} - \lambda_k \mid) + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int\limits_{\Lambda}^{\infty} \int\limits_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(\mid \lambda - u \mid) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення.

Оскільки $\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t,\lambda) - f(t,\zeta_k) - f(s,\lambda) + f(s,\zeta_k)) d\eta(\lambda)$ незалежні випадкові величини і випадкові величини ζ_k не залежать від $\eta(\lambda)$, тоді за теоремою Фубіні

(E_{ζ_k} – умовне математичне сподівання відносно ζ_k), отримаємо

$$\| \theta(t) - \theta(s) \|_{L_2} = (\mathbb{E} \mid \theta(t) - \theta(s) \mid^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t,\lambda) - f(t,\zeta_k) - f(s,\lambda) + f(s,\zeta_k))\, d\eta(\lambda) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t,\lambda) - f(t,\zeta_k) - f(s,\lambda) + f(s,\zeta_k)|\, d\eta(\lambda) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}\mathbb{E}_{\zeta_k} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t,\lambda) - f(t,\zeta_k) - f(s,\lambda) + f(s,\zeta_k)|^2\, d\eta(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t,\lambda) - f(t,\zeta_k) - f(s,\lambda) + f(s,\zeta_k)|^2\, dF(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Використавши умову (4) матимемо

$$\| \theta(t) - \theta(s) \|_{L_2} \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S_1^2(|\,\lambda - \zeta_k\,|) |Z_1(t) - Z_1(s)|^2 dF(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S_1^2(|\,\lambda - u\,|) |Z_1(t) - Z_1(s)|^2 dF(\lambda) \right) dF_k(u) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{b_k^2} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S_1^2(|\,\lambda_{k+1} - \lambda_k\,|) |Z_1(t) - Z_1(s)|^2 dF(\lambda) \right) dF(u) + \right.$$

$$\left. + \frac{|Z_1(t) - Z_1(s)|^2}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\,\lambda - u\,|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} = |Z_1(t) - Z_1(s)| \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S_1^2(|\,\lambda_{k+1} - \lambda_k\,|) + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\,\lambda - u\,|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Позначимо $\sigma_0 = \sup\limits_{0 \leq t \leq T} \| \theta(t) \|_{L_2}$ та $\sigma(h) = \sup\limits_{|t-s| \leq h} \| \theta(t) - \theta(s) \|_{L_2}$.

Теорема 1. *Для випадкового процесу $\theta(t)$, визначеного в (1) при умові збіжності інтегралу*

$$\int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\,\lambda - u\,|) dF(\lambda) dF(u) < \infty,$$

має місце нерівність

$$\sigma_0 \leq \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S^2(|\,\lambda_{k+1} - \lambda_k\,|) + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\,\lambda - u\,|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{0 \leq t \leq T} Z(t).$$

Доведення. Доведення теореми 1 випливає з леми 1.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 1 і нехай розбиття* $L = \{\lambda_0, ..., \lambda_N\}$ *множини* $[0, \infty)$ *таке, що* $\lambda_0 = 0, \lambda_k < \lambda_{k+1}, \lambda_{N-1} = \Lambda, \lambda_N = \infty$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{N-1}$, *тоді*

$$\sigma_0 \leq \sup_{0 \leq t \leq T} Z(t) \times$$
$$\times \left(S^2 \left(\frac{\Lambda}{N-1}\right) F(\Lambda) + \frac{1}{F(+\infty) - F(\Lambda)} \int_\Lambda^\infty \int_\Lambda^\infty S^2(|\ \lambda - u\ |) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Для випадкового процесу* $\theta(t) - \theta(s)$, *визначеного в (2), при умові збіжності інтегралу* $\int_\Lambda^\infty \int_\Lambda^\infty S_1^2(|\ \lambda - u\ |) dF(\lambda) dF(u) < \infty$, *справедлива наступна нерівність:*

$$\sigma(h) \leq \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S_1^2(|\ \lambda_{k+1} - \lambda_k\ |) + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int_\Lambda^\infty \int_\Lambda^\infty S_1^2(|\ \lambda - u\ |) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \sup_{|t-s| \leq h} |Z_1(t) - Z_1(s)|.$$

Доведення. Доведення теореми 2 випливає з леми 2.

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови теореми 2 і нехай розбиття* $L = \{\lambda_0, ..., \lambda_N\}$ *множини* $[0, \infty)$ *таке, що* $\lambda_0 = 0, \lambda_k < \lambda_{k+1}, \lambda_{N-1} = \Lambda, \lambda_N = \infty$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{N-1}$, *тоді*

$$\sigma(h) \leq \left(S_1^2 \left(\frac{\Lambda}{N-1}\right) F(\Lambda) + \frac{1}{F(+\infty) - F(\Lambda)} \int_\Lambda^\infty \int_\Lambda^\infty S_1^2(|\ \lambda - u\ |) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \sup_{|t-s| \leq h} |Z_1(t) - Z_1(s)|.$$

3. Точність та надійність побудованої моделі

Означення 2. *[4] Скажемо, що випадковий процес* $\hat{\xi}(t)$ *наближує процес* $\xi(t)$ *з надійністю* $1 - \beta$, $0 < \beta < 1$ *та точністю* $\delta > 0$ *в просторі* $C(\mathbf{T})$, *якщо існує таке розбиття* L, *що справедлива нерівність*

$$P\left\{ \sup_{t \in \mathbf{T}} |\xi(t) - \hat{\xi}(t)| > \delta \right\} \leq \beta.$$

Оскільки $\theta(t), t \in \mathbf{T}$ є $L_2(\Omega)$-процесом, то псевдометрика ρ породжена процесом $\theta(t)$ на $\mathbf{T}$ має вигляд

$$\rho(t, s) = \|\theta(t) - \theta(s)\|_{L_2}, t, s \in \mathbf{T}.$$

Означення 3. *[6] Позначимо через* $N_\rho(\mathbf{T}, \varepsilon)$ *число куль у найменшому* ε-*покритті множини* $\mathbf{T}$. *Покладаємо* $N_\rho(\mathbf{T}, \varepsilon) = +\infty$ *якщо не існує скінченного* ε-*покриття множини* $\mathbf{T}$. *Функція* $N_\rho(\mathbf{T}, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ *називається метричною масивністю множини* $\mathbf{T}$ *відносно псевдометрики* ρ.

Означення 4. *[6] Нехай*

$$H_\rho(\mathbf{T},\varepsilon)=\begin{cases}\ln N_\rho(\mathbf{T},\varepsilon), & \text{якщо } N_\rho(\mathbf{T},\varepsilon)<+\infty,\\ +\infty, & \text{якщо } N_\rho(\mathbf{T},\varepsilon)=\infty.\end{cases}$$

Функцію $H_\rho(\mathbf{T},\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ будемо називати метричною ентропією множини $\mathbf{T}$ *відносно псевдометрики ρ.*

Позначимо, для скорочення записів,

$$N(\varepsilon)=N_\rho(\mathbf{T},\varepsilon),\ H(\varepsilon)=H_\rho(\mathbf{T},\varepsilon),$$

де $N_\rho(\mathbf{T},\varepsilon)$ та $H_\rho(\mathbf{T},\varepsilon)$ відповідно метрична масивність та метрична ентропія множини $\mathbf{T}$ відносно псевдометрики ρ.

Теорема 3. *Нехай для $L_2(\Omega)$-процесу $\theta(t)$ виконується умова $\sup\limits_{t\in\mathbf{T}}\|\theta(t)\|<\infty$, простір $(\mathbf{T},\rho)$ є сепарабельним і процес $\theta(t)$ сепарабельний на $(\mathbf{T},\rho)$. Якщо $\int\limits_0^{\varepsilon_0} N^{\frac12}(\varepsilon)d\varepsilon<\infty$, то*

$$\left(\mathbb{E}[\sup_{t\in\mathbf{T}}|\theta(t)|]^2\right)^{\frac12}\le B_2$$

і для будь-якого $\delta>0$

$$P\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|\theta(t)|>\delta\right\}\le\frac{B_2^2}{\delta^2},$$

де

$$B_2=\inf_{t\in\mathbf{T}}\left(\mathbb{E}|\theta(t)|^2\right)^{\frac12}+\inf_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\int\limits_0^{x\varepsilon_0}N^{\frac12}(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Теорема 3 є частинним випадком теореми 3.3 розділу 3 з монографії [6]

Теорема 4. *Нехай у моделі $\hat{\xi}(t)$ розбиття L таке, що для $\delta>0$, $x\in(0,1)$ виконується оцінка*

$$\left(\left(S^2\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)F(\Lambda)+\frac{1}{F(+\infty)-F(\Lambda)}\int\limits_\Lambda^\infty\int\limits_\Lambda^\infty S^2(|\lambda-u|)dF(\lambda)dF(u)\right)^{\frac12}\times\right.$$

$$\times\inf_{0\le t\le T}Z(t)+\inf_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\int\limits_0^{x\varepsilon_0}\left(\frac{T}{2}\left(C^{(-1)}\left(\varepsilon\left(S_1^2\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)F(\Lambda)+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.+\frac{1}{F(+\infty)-F(\Lambda)}\int\limits_\Lambda^\infty\int\limits_\Lambda^\infty S_1^2(|\lambda-u|)dF(\lambda)dF(u)\right)^{-\frac12}\right)\right)^{-1}+1\right)^{\frac12}d\varepsilon\right)^2\le\delta^2\beta,$$

де $\varepsilon_0=\sup\limits_{0\le t\le T}\|\theta(t)\|_{L_2}=\sigma_0$, $\theta(t)=\xi(t)-\hat{\xi}(t)$, $C^{(-1)}(h), h>0$ – функція обернена до $C(h)=\sup\limits_{|t-s|\le h}|Z_1(t)-Z_1(s)|$.

Тоді модель $\hat{\xi}(t)$ наближає процес $\xi(t)$ з заданою точністю $\delta>0$ та надійності $1-\beta$, $0<\beta<1$ в просторі $C([0,T])$.

Доведення. Застосовуючи до $L_2(\Omega)$-процесу $\theta(t)$ теорему 3, а також враховуючи, що для метричної масивності виконується умова $N(\varepsilon) \leq \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1$, отримаємо

$$P\left\{\sup_{t\in\mathrm{T}}|\theta(t)| > \delta\right\} \leq \frac{B_2^2}{\delta^2},$$

де

$$B_2^2 = \left(\inf_{t\in\mathrm{T}}\|\theta(t)\|_{L_2} + \inf_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\int\limits_0^{x\varepsilon_0} N^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)d\varepsilon\right)^2 \leq$$
$$\leq \left(\inf_{t\in\mathrm{T}}\|\theta(t)\|_{L_2} + \inf_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\int\limits_0^{x\varepsilon_0}\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1\right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon\right)^2.$$

Нехай $C(h) = \sup\limits_{|t-s|\leq h}|Z_1(t) - Z_1(s)|$, тоді використовуючи наслідок 2, матимемо

$$\sigma(h) \leq C(h)\times$$
$$\times\left(S_1^2\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)F(\Lambda) + \frac{1}{F(+\infty)-F(\Lambda)}\int\limits_\Lambda^\infty\int\limits_\Lambda^\infty S_1^2(|\lambda-u|)dF(\lambda)dF(u)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Отже, обернена функція до оцінки $\sigma(h)$ матиме вигляд

$$\sigma^{(-1)}(h) = C^{(-1)}\left(h\left(S_1^2\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)F(\Lambda) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{F(+\infty)-F(\Lambda)}\int\limits_\Lambda^\infty\int\limits_\Lambda^\infty S_1^2(|\lambda-u|)dF(\lambda)dF(u)\right)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Використовуючи попередню рівність, а також лему 1 отримаємо, що

$$B_2^2 \leq \left(\left(S^2\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)F(\Lambda) + \frac{1}{F(+\infty)-F(\Lambda)}\int\limits_\Lambda^\infty\int\limits_\Lambda^\infty S^2(|\lambda-u|)dF(\lambda)dF(u)\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\times\inf_{0\leq t\leq T} Z(t) + \inf_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\int\limits_0^{x\varepsilon_0}\left(\frac{T}{2}\left(C^{(-1)}\left(\varepsilon\left(S_1^2\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)F(\Lambda) + \right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\left. + \frac{1}{F(+\infty)-F(\Lambda)}\int\limits_\Lambda^\infty\int\limits_\Lambda^\infty S_1^2(|\lambda-u|)dF(\lambda)dF(u)\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^{-1} + 1\right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon\right)^2.$$

Ми завжди можемо вибрати таке розбиття L, що для довільного $\beta \in (0,1)$

буде виконуватись

$$\frac{1}{\delta^2}\left(\left(S^2\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)F(\Lambda)+\frac{1}{F(+\infty)-F(\Lambda)}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}S^2(|\lambda-u|)dF(\lambda)dF(u)\right)^{\frac{1}{2}}\times\right.$$

$$\times\inf_{0\le t\le T}Z(t)+\inf_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\int\limits_{0}^{x\varepsilon_0}\left(\frac{T}{2}\left(C^{(-1)}\left(\varepsilon\left(S_1^2\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)F(\Lambda)+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.+\frac{1}{F(+\infty)-F(\Lambda)}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}S_1^2(|\lambda-u|)dF(\lambda)dF(u)\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^{-1}+1\right)^{\frac{1}{2}}d\varepsilon\right)^2\le\beta.$$

Тобто $P\left\{\sup\limits_{t\in\mathbf{T}}|\theta(t)|>\delta\right\}\le\beta$. Тоді з означення 2 випливає, що модель $\hat{\xi}(t)$ наближає процес $\xi(t)$ з заданою точністю $\delta>0$ та надійності $1-\beta, 0<\beta<1$ в просторі $C([0,T])$.

Висновки. В роботі побудовано моделі деяких дробових випадкових процесів. Крім цього отримано оцінки супремумів норм цих випадкових процесів. В даній роботі ці оцінки використовуються при дослідженні умов вибору розбиття так, щоб побудована модель наближала процес із заданими точністю та надійністю.

1. *Antonini R.G., Kozachenko Yu.V., Tegza A.M.* Accuracy of simulation in L_p Gaussian random processes // Bulletin of the University of Kiev, Series: Physics and Mathem. – 2002. – Vol.5. – p. 7-14.
2. *Козаченко Ю.В., Тегза А.М.* Застосування теорії $Sub_\varphi(\Omega)$ просторів випадкових величин до знаходження точності моделювання стаціонарних гауссових процесів // Теор. ймовірностей та матем. статист. – 2002. – Вип.67. – p. 71-87.
3. *Troshki N.* Construction models of Gaussian random processes with a given accuracy and reliability in $L_p(T), p\ge 1$ // Journal of Classical Analysis. –2013. –Volume 3, Number 2. – p. 157-165.
4. *Козаченко Ю.В., Погоріляк О.О., Тегза А.М.* Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса. – Уж.:Карпати, 2012.–194 с.
5. *Дарійчук І.В., Козаченко Ю.В., Перестюк М.М.* Випадкові процеси з просторів Орліча. – Ч.: Золоті литаври, 2011. – 212 с.
6. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. – 257
7. *Karhunen K.* Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse // Ann. Acad. Sci. Fenn. –1947. – №34. – p. 7.

Одержано 26.09.2014