УДК 519.8

А. Ю. Брила, В. І. Гренджа (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЯЖНІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ПОТІК

The method of finding of attainable optimum solutions of lexicographic maximum flow problem by reduce it to the problem of onecriterion optimization with a scalar objective function is considered.

Розглядається метод знаходження досяжних оптимальних розв'язків задачі лексикографічної оптимізації про максимальний потік шляхом зведення її до однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією.

Вступ. Задачі лексикографічної оптимізації про максимальний потік виникають у випадку, коли оптимальний розв'язок у класичній задачі про максимальний потік мінімальної вартості необхідно знайти на основі багатьох критеріїв, які строго ранжировані за важливістю. Наприклад, такими критеріями можуть бути вартість транспортування продукту, час транспортування, ймовірність збоїв у мережі та інші. Для розв'язання такої задачі можна застосувати підхід, що ґрунтується на використанні схеми скаляризації [1]. Такий підхід для даної задачі має суттєвий недолік, оскільки на першому кроці розв'язується класична задача про максимальний потік мінімальної вартості з одним (першим) критерієм, але на усіх наступних на множину допустимих розв'язків накладаються додаткові обмеження, які не дозволяють застосувати на цих кроках відомі методи.

У даній статті пропонується підхід до розв'язання лексикографічної задачі про максимальний потік шляхом побудови функціоналу, що представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на множині допустимих розв'язків. Вибравши цей функціонал у якості цільового, досяжні оптимальні розв'язки лексикографічної задачі можна знайти як розв'язки однокритеріальної класичної задачі про максимальний потік.

Аналогічний підхід пропонується також при розв'язанні лексикографічно-лексикографічної задачі про максимальний потік та лексикографічної задачі про максимальний потік з альтернативними критеріями.

1. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про максимальний потік. Розглянемо мережу $G = (N, A)$, де N– множина вузлів, A – множина дуг. Кожна з дуг $(i,j) \in A$ мережі характеризується пропускною здатністю u_{ij} та вектором оцінок $\left(c_{ij}^1, c_{ij}^2, ..., c_{ij}^q\right)$. Таким чином, кожен потік $f = \{f_{ij}\}_{(i,j)\in A}$ оцінюється за q однорідними критеріями з критеріальними функціями

$$c_k(f) = \sum_i \sum_j c_{ij}^k f_{ij}, \quad (i,j) \in A, k = 1, 2, ..., q.$$

На множині критеріїв задано субординацію строгого ранжирування $Rg(1, 2, \ldots, q)$. Позначимо:

N_α– множина джерел,

n_α– кількість джерел,

N_β– множина витоків,
n_β– кількість витоків,
N_g– множина проміжних пунктів,
n_g– кількість проміжних вузлів,
a_i– кількість продукту у i-му джерелі,
b_j– потреби у продукті в j-му вузлі витоку.

Необхідно визначити однопродуктовий потік з джерел у витоки, що протікає через проміжкові вузли і є непокращуваним за згорткою критеріїв у субординації строгого ранжирування $Rg(1, 2, ..., q)$ з векторною функцією оцінок $c(f) = (c_1(f), c_2(f), ..., c_q(f))$.

Дана задача є задачею лексикографічної оптимізації

$$\max{}^L c(f), \quad f \in X, \tag{1}$$

де множина допустимих розв'язків (потоків)X задачі задається системою обмежень

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} \le a_i, \;\; i \in N_\alpha,$$

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = 0, \;\; i \in N_g,$$

$$\sum_j f_{ji} - \sum_j f_{ij} \ge b_i, \;\; i \in N_\beta,$$

$$0 \le f_{ij} \le u_{ij}, \;\; (i,j) \in A.$$

Будемо вважати, що величини a_i, b_j, u_{ij} є цілочисловими, а величини c_{ij}^k є невід'ємними раціональними числами.

Оскільки $0 \le f_{ij} \le u_{ij}$, то можна вважати, що

$$\max_{f \in X} c_k(f) \le \sum_i \sum_j c_{ij}^k u_{ij} = M_k, \;\; (i,j) \in A, \quad k = 1, 2, ..., q,$$

$$\min_{f \in X} c_k(f) \ge 0, \quad k = 1, 2, ..., q.$$

Так, як всі величини c_{ij}^k є невід'ємними раціональними числами, то можна стверджувати, що модуль мінімальної різниці значень критерію з критеріальною функцією c_k при переході від одного допустимого потоку до іншого буде не менше, ніж $\frac{1}{\theta_k}$, де θ_k– найменший спільний знаменник усіх дробів c_{ij}^k, $(i,j) \in A$.

Нехай $\alpha_q > 0$ – деяке додатне число, а інші додатні числа $\alpha_{q-1}, \alpha_{q-2}, ..., \alpha_1$ поступово знаходяться з умови

$$\alpha_r > \frac{1}{\mu_r} \sum_{k=r+1}^{q} \alpha_k M_k, \quad r = q-1, q-2, ..., 1,$$

де

$$0 < \mu_r \le \frac{1}{\theta_r}.$$

Теорема 1. *Розв'язок задачі*

$$\max \; L(x) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k c_k(f), \quad f \in X, \tag{2}$$

є розв'язком задачі (1).

Доведення теореми легко отримати, враховуючи спосіб вибору коефіцієнтів додатної лінійної згортки.

Оскільки субординація Rg є субординацією строгого ранжирування і визначається перестановкою номерів критеріїв $(k_1, k_2, \ldots, k_q)$ (де $\{k_1, k_2, \ldots, k_q\} = \{1, 2, \ldots, q\}$), то можна утворити стільки різних субординацій строгого ранжирування, скільки існує перестановок номерів критеріїв, а саме – $q!$. Зрозуміло, що різним субординаціям, загалом кажучи, будуть відповідати різні набори додатних чисел α_k, $k = 1, 2, \ldots, q$, за якими оптимальні розв'язки є досяжними за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

У зв'язку з цим постає питання, чи існує такий набір додатних чисел α_k, $k = 1, 2, \ldots, q$, за яким оптимальні розв'язки лексикографічної задачі (1) є досяжними за зваженою сумою з даними коефіцієнтами різноважливих критеріїв у будь-якій із субординацій строго ранжирування, яка визначається довільною перестановкою номерів критеріїв $(k_1, k_2, \ldots, k_q)$, де $\{k_1, k_2, \ldots, k_q\} = \{1, 2, \ldots, q\}$. Позначимо

$$\mu^* = \min\left\{\frac{1}{\theta_k}\middle| k = 1, 2, \ldots, q\right\},$$

$$M^* = \sum_i \sum_j c_{ij}^{\max} u_{ij},\ (i,j) \in A,$$

де

$$c_{ij}^{\max} = \max\left\{c_{ij}^k \middle| k = 1, 2, \ldots, q\right\},\ (i,j) \in A.$$

Нехай α_k^*, $k = 1, 2, \ldots, q$, – набір додатних чисел, де $\alpha_q^* > 0$ вибрано довільним чином, а інші числа $\alpha_{q-1}^*, \alpha_{q-2}^*, \ldots, \alpha_1^*$, поступово визначені згідно умови

$$\alpha_r^* > \frac{1}{\mu^*} \sum_{k=r+1}^{q} \alpha_k^* M^*. \qquad (3)$$

Розглянемо субординацію строгого ранжирування, що визначається перестановкою номерів критеріїв $(k_1, k_2, \ldots, k_q)$. Задача знаходження оптимального розв'язку в заданій субординації строгого ранжирування має вигляд

$$\max{}^L \tilde{c}(f) = \left(c_{k_1}(f), c_{k_2}(f), \ldots, c_{k_q}(f)\right),\ f \in X. \qquad (4)$$

Побудуємо скалярну додатну згортку критеріїв задачі (4) з використанням коефіцієнитів $\alpha_q^*, \alpha_{q-1}^*, \ldots, \alpha_1^*$

$$B(f) = \sum_{l=1}^{q} \alpha_l^* c_{k_l}(f). \qquad (5)$$

Розглянемо задачу однокритеріальної оптимізації

$$\max B(f),\ f \in X. \qquad (6)$$

Теорема 2. *Розв'язок задачі* (6) *є розв'язком задачі лексикографічної оптимізації* (4) *для довільної перестановки* $(k_1, k_2, \ldots, k_q)$ *номерів критеріїв.*

Доведення теореми легко отримати враховуючи вибір коефіцієнтів μ^*, M^* та коефіцієнтів α_k^*, $k = 1, 2, \ldots, q$.

2. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічно-лексикографічної задачі про максимальний потік. Задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації про максимальний потік має вигляд

$$\max{}^{LL} c'(f), \quad f \in X, \tag{7}$$

де множина допустимих розв'язків X така ж, як і у задачі (1), $c'(f) = (\bar{c}_1(f), \bar{c}_2(f), ..., \bar{c}_q(f))$ – векторна згортка критеріїв $\bar{c}_k(f)$, $k = 1, 2, ..., q$ у субординації строгого ранжирування $Rg(1, 2, ..., q)$, а кожен з критеріїв $\bar{c}_k(f) = (c_{k1}(f), c_{k2}(f), ..., c_{kq_k}(f)), k \in 1, 2, ..., q$, в свою чергу, є векторною згорткою скалярних критеріїв c_{ki}, $i = 1, 2, ..., q_k$ в субординації $Rg(1, 2, ..., q_k)$.

У [1] доводиться, що задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації (7) еквівалентна задачі лексикографічної оптимізації

$$\max{}^{L} \tilde{c}'(x), \quad x \in X, \tag{8}$$

де

$$\tilde{c}' = (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1q_1}, c_{21}, c_{22}, ..., c_{2q_2}, ..., c_{q1}, c_{q2}, ..., c_{qq_q}).$$

Тому для розв'язання задачі (8), а отже, і для розв'язання задачі (7) можуть бути використані ті ж самі підходи, що і для розв'язання задачі лексикографічної оптимізації.

3. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про максимальний потік з альтернативними критеріями. Задачу лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями розглянуто у [3]. Відповідна задача лексикографічної оптимізації про максимальний потік з альтернативними критеріями має вигляд

$$\max{}^{L} c(f), \quad f \in \bar{X}, \tag{9}$$

де множина допустимих розв'язків $\bar{X}$ задається системою обмежень

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} \le a_i, \ i \in N_\alpha,$$

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = 0, \ i \in N_g,$$

$$\sum_j f_{ji} - \sum_j f_{ij} \ge b_i, \ i \in N_\beta,$$

$$0 \le f_{ij} \le u_{ij}, \ (i, j) \in A,$$

$$c_k(f) \ge m_k y_k, \ k = 1, 2, ..., q,$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \ k = 1, 2, ..., q,$$

$$\sum_{k=1}^{q} y_k = 1.$$

Розглянемо задачу знаходження максимуму функціонала

$$z(f, \bar{\alpha}) = \bar{\alpha}_1 c_1(f) + \bar{\alpha}_2 c_2(f) + ... + \bar{\alpha}_q c_q(f) \to \max \tag{10}$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} \le a_i,\ i \in N_\alpha, \tag{11}$$

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = 0,\ i \in N_g, \tag{12}$$

$$\sum_j f_{ji} - \sum_j f_{ij} \ge b_i,\ i \in N_\beta, \tag{13}$$

$$0 \le f_{ij} \le u_{ij},\ (i,j) \in A, \tag{14}$$

$$c_k(f) \ge m_k y_k,\ k = 1, 2, ..., q, \tag{15}$$

$$\bar{\alpha}_k = \alpha_k y_k,\ k = 1, 2, ..., q, \tag{16}$$

$$y_k \in \{0, 1\},\ k = 1, 2, ..., q, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{q} y_k = 1. \tag{18}$$

Коефіцієнти $\alpha_k, k = 1, 2, ..., q$ знайдено за правилами, які використано при побудові задачі (2).

Теорема 3. *Розв'язок задачі (10)-(18) є розв'язком задачі (9).*

Доведення теореми легко отримати ґрунтуючись на результатах, одержаних у [3,4].

Якщо знаходження оптимального розв'язку здійснюється на основі d критеріїв найвищого рангу, що задовольняють умову

$$c_k(f) \ge m_k,$$

то, очевидно, обмеження (18) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^{q} y_k = d.$$

Якщо ж кількість допустимих критеріїв не обмежена, то обмеження (18) у задачі (10)-(18) необхідно відкинути.

Висновки. Розглянуті підходи до розв'язання багатокритеріальних задач дають можливість перейти від задачі багатокритеріальної оптимізації до звичайної задачі про максимальний потік з одним скалярним критерієм, для розв'язання якої можна застосувати відомі методи.

1. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір/ Ю.Ю. Червак. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. — 312 с.
2. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Опимизация по последовательно применяемым критериям/ В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. — М.:Наука, 1975. — 192 с.
3. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации с альтернативными критериями в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила// Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". – 2011. – №4. – С. 68-72.
4. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила // Кибернетика и системный анализ. 2008. - № 5. С. 135-138.

Одержано 14.10.2013