УДК 519.21; 519.62; 519.718

І. В. Малик (Чернівецький нац. ун-т)

СТІЙКІСТЬ ПРОЦЕСІВ У СХЕМІ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ НАПІВМАРКОВСЬКИХ ЕВОЛЮЦІЙ

The sufficient conditions for asymptotic stability with probability 1 for semi-Markov random evolutions in averaging scheme in conditions of exponential stability of limit evolution are obtained.

Одержано достатні умови асимптотичної стійкості з ймовірністю 1 для випадкових напівмароквських еволюцій у схемі усереднення за умови експоненціальної стійкості граничної еволюції.

Вступ. Питанню збіжності випадкових процесів ξ^ε до деякого процесу ξ^0 при $\varepsilon \downarrow 0$ в різних сенсах (за ймоівірністю, з ймовірністю 1, слабка збіжність, збіжність скінченновимірних розподілів) присвячена велика кількість робіт, серед яких слід відзначити роботи [1, 2]. Задачі, присвячені збіжності, умовно можна розділити на дві групи:

F) збіжність на скінченному інтервалі часу $[0, T]$;

I) збіжність на нескінченному інтервалі $[0, \infty)$.

У даній роботі розглянуто задачу I) для напівмароквських процесів(НМП) у схемі усереднення [2,3]. Зауважимо, що хоча дані задачі і є подібними, проте містять ряд відмінностей:

1) задача I) вимагає тих же умов, що і задача F) і на перший погляд може скластися враження, що розв'язавши задачу I) можна говорити про те, що задача F) також розв'язана. Проте це не так, оскільки у задачі F явно використовується оцінка інтегралів на скінченному інтервалі [0,T];

2) для розв'язання задачі I) у більшості робіт припускається асимптотична (експоненціальна) стійкість граничного процесу ξ^0. Дана умова при розв'язанні задачі F) природно не використовується.

Отже, при розв'язанні задачі I) всі умови умовно можна поділити на 3 групи:

1) умови, які забезпечують асимптотичну (експоненційну) стійкість граничного процесу ξ^0. Їх будемо позначати літерами A1, A2,...;

2) умови, що гарантують розв'язання задачі F). Оскільки розглядається проблема усереднення, то дані умови будемо позначати літерами U1,U2,.... Дані умови будуть сформульовані у теоремі 1;

3) умови, що гарантують близькість допграничних процесів ξ^ε та граничного процесу ξ^0 на нескінченному інтервалі часу при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, де ε_0 – деяке маленьке число. Дані умови будемо позначати, як L1, L2.

1. Постановка задачі та позначення. Як і в роботах [2, 3], розглянемо напівмарковську випадкову еволюцію (НМВЕ) у R^d, що задається стохастичним адитивним функціоналом [2]:

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \eta(ds; x(s)) + \int_0^t \gamma(ds; x(s)), t \geq 0.$$

Однорідний ергодичний марковський стрибковий процес перемикань $x(t)$, $t \geq 0$ розглядається у просторі $(E, \mathcal{E})$ зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{E}$ та визначений напівгрупою $Q_t\varphi(x) := \int_E \varphi(y)P_t(x, dy), t \geq 0$ [2, 4, 5], де $P_t(x, A) := \mathbb{P}\{x(t) \in A | x(0) = x\}$. Напівгрупа $Q_t, t \geq 0$ породжується генератором $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}\varphi(x) := q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $P(x, A) := \mathbb{P}\{x_{k+1} \in A | x_k = x\}$ – ймовірність переходу для вкладеного ланцюга Маркова $x_k, k \geq 0$; $q(x)$ – інтенсивність стрибків [2, 6]. Позначимо через Π – проектор марковського процесу $x(t), t \geq 0$, R_0 – його потенціал(див. [2, 5]):

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \pi(dx)\varphi(x), \qquad R_0\varphi(x) := \int_0^\infty (Q_t - \Pi)\varphi(x)dt.$$

Напівмарковські процеси [2] $\eta(t; x), t \geq 0, x \in E$ в евклідовому просторі R^d, $d \geq 1$ породжуються процесами марковського відновлення(ПМВ) (η_n, τ_n), $n \geq 0$, де $\eta_n := \eta(\tau_n; x_n)$, $x_n := x(\tau_n)$, $\tau_n, n \geq 0$ – моменти відновлення напівмарковського процесу. ПМВ задаються напівмарковськими ядрами [2, 4]:

$$G(u, dv, t; x) := G(u, dv; x)F_u(t), u \in R_d, dv \in \mathcal{R}^d, t \geq 0, x \in E,$$

де умовні розподіли приростів вкладеного ланцюга Маркова $\eta_n, n \geq 0$ визначаються співвідношенням:

$$G(u, dv; x) := \mathbb{P}\{\Delta\eta_{n+1} \in dv | \eta_n = u, x_n = x\}, \Delta\eta_{n+1} := \eta_{n+1} - \eta_n;$$

умовна функція розподілу часу перебування в станах $\theta_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n$ визначається співвідношенням

$$F_u(t) := \mathbb{P}\{\theta_{n+1} \leq t | \eta_n = u\} = P(\theta_u \leq t), t \geq 0.$$

Неперервна складова еволюції $\gamma(t), t \geq 0$ між моментами відновлення τ_n та τ_{n+1}, за умови $x(\tau_n) = x, x \in E$, задається напівгрупами $\Gamma_t(x), t \geq 0$ з генераторами

$$\Gamma(x)\varphi(u) := a(u; x)\varphi'(u) + \int_{R^d} (\varphi(u + v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\Gamma(u, dv; x).$$

Введемо позначення

$$m_k(u) := \int_0^\infty t^k dF_u(t), k = 1, 2; \lambda(u) := 1/m_1(u);$$

$$\eta(t) := \int_0^t \eta(ds; x(s)), \gamma(t) := \int_0^t \gamma(ds; x(s))ds;$$

$$G(x)\varphi(u) := \int_{R^d} G(u, dv; x)\varphi(u + v), u \in R^d,$$

$$b(u; x) := \int_{R^d} uG(u, dv; x), c(u; x) := a(u; x) + \lambda(u)b(u; x).$$

З вищенаведених означень зрозуміло, що розглядаються однорідні напівмарковські процеси. Позначимо через $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \le t\}$ – рахуючий процес. Тоді згідно [2, 6]

$$\tau(t) := \tau_{\nu(t)}.$$

Отже, напівмарковська випадкова еволюція (НМВЕ) розглядається у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ у такому нормуванні:

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi(0) + \varepsilon^3[\eta^\varepsilon(t) + \gamma^\varepsilon(t)], \tag{1}$$

$$\eta^\varepsilon(t) := \int_0^{t/\varepsilon^3} \eta(ds; x(\varepsilon s)),\ \gamma^\varepsilon(t) = \int_0^{t/\varepsilon^3} \gamma(ds; x(\varepsilon s)).$$

У роботі [3] розглянуто достатні умови слабкої збіжності для сім'ї НМВЕ (1) у схемі усереднення при $\varepsilon \downarrow 0$:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

U1) марковський процес переключень є рівномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{E}$;

U2) функція $c(u; x)$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця з константою L, що не залежить від x;

U3) справедлива оцінка

$$\sup_{x\in E, u\in R^d}\left(\left|\int_{R^d} v^2 G(u, dv; x)\right| + \left|\int_{R^d} v^2 \Gamma(u, dv; x)\right| + \int_0^\infty s^2 F_u(ds)\right) < \infty;$$

U4) збіжність початкових умов та їх обмеженість:

$$\xi^\varepsilon(0) \to \xi^0(0), \sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}|\xi^\varepsilon(0)| \le K < \infty.$$

Тоді стохастичний адитивний функціонал $\xi^\varepsilon(t), t \ge 0$ (1) слабко збігається при $\varepsilon \to 0$ до розв'язку диференціального рівняння

$$d\xi^0(t) = c(\xi^0(t))dt, \tag{2}$$

що задовольняє початкову умову

$$\xi^0(0) = \xi_0,$$

де

$$c(u) := \int_E \pi(dx)(a(u;x) + \lambda(u)b(u;x)).$$

2. Основне твердження. Теорема 1 розв'язує задачу F) (див. ст. 93). Сформулюємо твердження, яке дає достатні умови для визначення стійкості дограничних процесів, тобто розв'язує задачу I) для НМВЕ (1) у схемі усереднення:

Теорема 2. *Нехай:*

U) виконуються умови теореми 1;

A) існує функція Ляпунова $V(u), u \in R^d$ для усередненої системи, яка має наступні властивості:

A1) умова експоненціальної стійкості для розв'язку усередненого рівняння (2):

$$c(u)V'(u) \leq -c_0 V(u), c_0 > 0;$$

A2) додаткові умови:

$$|c(u,x)V'(u)| + |c(u,x)[c(u,x)V'(u)]'| \leq c_0 V(u), c_0 > 0;$$

A3) функція розподілу $F_u(t), t \geq 0$ часу перебування в стані θ_u задовольняє умову Крамера рівномірно по $u \in R^d$: існує $A > 0$, що для всіх $h \in (0, A)$ справедливе співвідношення

$$\sup_{u \in R^d} Ee^{h\theta_u} < \infty;$$

R1) має місце оцінка

$$\inf_{u \in R^d} E\theta_u > 0.$$

Тоді для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, де ε_0 – достатньо мале, НМВЕ (1) при достатньо малих початкових даних $|\xi^\varepsilon(0)| \leq c_3$ задовольняє співвідношення

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} |\xi^\varepsilon(t)| = 0\right\} = 1. \tag{3}$$

Доведення. Згідно [3] компенсуючий оператор(КО) L^ε має вигляд

$$L^\varepsilon \varphi(u,x,t) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[\int_0^\infty F_u(ds) Q_{\varepsilon^2 s} G^\varepsilon(x) \Gamma_s^\varepsilon(x)\varphi(u,x,t+\varepsilon^3 s) - \varphi(u,x,t)\right],$$

де I – одиничний оператор, оператори $G^\varepsilon(x), x \in E$ визначені наступним чином:

$$G^\varepsilon(x)\varphi(u) := \int_{R^d} G(u,dv;x)\varphi(u+\varepsilon^3 v),$$

напівгрупи $\Gamma_s^\varepsilon(x), x \in E$ породжуються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) := \varepsilon^3 a(u;x)\varphi'(u) + \int\limits_{R^d} (\varphi(u+\varepsilon^3 v) - \varphi(u) - \varepsilon^3 v\varphi'(u))\Gamma(u,dv;x)$$

та володіє наступним асимптотичним представленням

$$L^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}\mathbb{Q}\varphi(\cdot,x) + C(x)\varphi(u,\cdot) + l^\varepsilon\varphi(u,x) \tag{4}$$

на тест-функціях $\varphi \in C^2(R^d \times E)$, де

$$C(x)\varphi(u) := c(u;x)\varphi'(u),$$

$$l^\varepsilon\varphi(u,x) := \Bigg[\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\,[G^\varepsilon(x) - I]\,[Q_{\varepsilon^2 s}\Gamma_s^\varepsilon(x) - I]\,\varphi(u,x) +$$

$$+\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\,(\Gamma_s^\varepsilon(x) - I)\,(Q_{\varepsilon^2 s} - I)\,\varphi(u,x) + \tag{5}$$

$$+\varepsilon^{-3}\lambda(u)\Bigg(\int\limits_{R^d}(\varphi(u+\varepsilon^3 v) - \varphi(u) - \varepsilon^3 v\varphi'(u))\,\Gamma(u,dv;x) +$$

$$+\Gamma^\varepsilon(x)\int\limits_0^\infty \overline{F}_u(s)(\Gamma_s^\varepsilon(x) - I)ds\varphi(u;x)\Bigg) + \varepsilon\lambda(u)\mathbb{Q}^2\int\limits_0^\infty F_u^{(2)}(s)Q_{\varepsilon^2 s}ds\varphi(u;x)\Bigg],$$

$$\sup_{u\in R^d, x\in E} |l^\varepsilon\varphi(u,x)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \varphi \in C^2(R^d \times E). \tag{6}$$

Розглянемо збурену функцію Ляпунова

$$V^\varepsilon(u,x) := V(u) + \varepsilon V_1(u,x), \tag{7}$$

де $V(u), u \in R^d$ – функція Ляпунова описана у Теоремі 2, $V_1(u,x)$ визначається як розв'язок проблеми сингулярного збурення [2] для оператора

$$L_0^\varepsilon\varphi(u,x) := \varepsilon^{-1}\mathbb{Q}\varphi(\cdot,x) + C(x)\varphi(u,\cdot). \tag{8}$$

Згідно [2] (див. лема 5.1) розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (8) визначається співвідношенням

$$L_0^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = CV(u) + \varepsilon C(x)V_1(u,x), \tag{9}$$

де

$$CV(u) = c(u)V'(u), \qquad V_1(u,x) := R_0\widetilde{C}(x)V(u), \widetilde{C}(x) := C(x) - C.$$

Лема 1. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для компенсуючого оператора L^ε (4) на збуреній функції Ляпунова V^ε (7) визначається співвідношенням*

$$L^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = CV(u) + l_0^\varepsilon(x)V(u), \tag{10}$$

де

$$\sup_{u\in R^d, x\in E} |l_0^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0 \ \text{при}\ \varepsilon \to 0, \varphi \in C^2(R^d). \tag{11}$$

Доведення. Розглянемо наступне представлення

$$L^\varepsilon = L_0^\varepsilon + l^\varepsilon,$$

де l^ε задається співвідношенням (5). Згідно (9) та останньої рівності, отримаємо співвідношення

$$L^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = CV(u) + \varepsilon C(x)V_1(u,x) + l^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) =$$
$$= CV(u) + \varepsilon C(x)R_0\widetilde{C}(x)V(u) + l^\varepsilon V(u) + \varepsilon l^\varepsilon R_0\widetilde{C}(x)V(u) =$$
$$= CV(u) + (\varepsilon C(x)R_0\widetilde{C}(x) + l^\varepsilon + \varepsilon l^\varepsilon R_0\widetilde{C}(x))V(u) =$$
$$= CV(u) + l_0^\varepsilon(x)V(u).$$

Використовуючи (6) та умови U1, A2, пересвідчуємося у вірності тверджень леми 1 (10) та (11).

Використовуючи умови U2-U3, A2, виберемо ε настільки малим, щоб виконувалося співвідношення

$$L^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) \le -c_2 V(u), c_2 > 0. \tag{12}$$

Використовуючи умови U1, A2, приходимо до висновку, що має місце оцінка

$$b_1 V(u) \le V^\varepsilon(u,x) \le b_2 V(u), b_1, b_2 > 0.$$

Розглянемо розширений ПМВ

$$\xi_n^\varepsilon := \xi^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon := x^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon, n \ge 0. \tag{13}$$

Лема 2. *Розширений ПМВ* (13) *характеризується мартингалом*

$$\mu_n^\varepsilon := \varphi(\xi_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1}\varphi(\xi_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon), n \ge 1. \tag{14}$$

Доведення. Мартингальна властивість випливає з однорідності КО:

$$E\big(\varphi(\xi_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon) - \varphi(\xi_{n-1}^\varepsilon, x_{n-1}^\varepsilon, \tau_{n-1}^\varepsilon)|F_{n-1}^\varepsilon\big) =$$
$$= E\left(\varphi(\xi_1^\varepsilon, x_1^\varepsilon, \tau_1^\varepsilon) - \varphi(\xi_0^\varepsilon, x_0^\varepsilon, \tau_0^\varepsilon)|F_0^\varepsilon\right),$$

де F_n^ε – натуральна фільтрація розширеного ПМВ (13).

Введемо позначення

$$\Phi^\varepsilon(t) := \varphi(\xi^\varepsilon(\tau^\varepsilon(t)), x^\varepsilon(\tau^\varepsilon(t)), \tau^\varepsilon(t)),$$
$$\Phi_+^\varepsilon(t) := \varphi(\xi^\varepsilon(\tau_+^\varepsilon(t)), x^\varepsilon(\tau_+^\varepsilon(t)), \tau_+^\varepsilon(t)),$$

де

$$\tau^\varepsilon(t) := \tau_{\nu^\varepsilon(t)}^\varepsilon, \tau_+^\varepsilon(t) := \tau_{\nu^\varepsilon(t)+1}^\varepsilon, \nu^\varepsilon(t) := \nu(\varepsilon^3 t), \nu_+^\varepsilon(t) := \nu(\varepsilon^3 t) + 1.$$

Згідно означення, $\nu_+^\varepsilon(t)$ є марковським моментом для потоку F_n^ε.

Надалі будемо використовувати мартингальну властивість випадкового процесу

$$u^\varepsilon(t) := \Phi_+^\varepsilon(t) - \int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} L^\varepsilon \Phi^\varepsilon(s) ds.$$

Використовуючи лему 3.2 [7], отримаємо наступний факт:

Лема 3. *При будь-якому дійсному значенні параметра $c \in R^1$ процес*

$$\zeta_c^\varepsilon(t) := e^{c\tau_+^\varepsilon(t)}\Phi_+^\varepsilon(t) + \int\limits_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} \left[ce^{cs}\Phi_+^\varepsilon(s) + e^{c\tau^\varepsilon(s)}L^\varepsilon\Phi^\varepsilon(t)\right] ds, \qquad (15)$$

має мартингальну властивість:

$$E\left[\zeta_c^\varepsilon(t) - \zeta_c^\varepsilon(s)|F_s^\varepsilon\right] = 0, 0 \le s \le t,$$

де фільтрація $F_t^\varepsilon, t \ge 0$ задаєтьс співвідношенням

$$F_t^\varepsilon := \sigma\left\{u_\varepsilon(s), x^\varepsilon(s), \tau^\varepsilon(s), 0 \le s \le t\right\}.$$

Розглянемо випадковий процес

$$u^\varepsilon(t) := \int\limits_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} \left[e^{cs}cV_+^\varepsilon(s) + e^{c\tau^\varepsilon(s)}L^\varepsilon V^\varepsilon(s)\right] ds. \qquad (16)$$

Лема 4. *При достатньо малих значеннях параметра c та достатньо малих значеннях ε в умовах теореми 1 має місце нерівність*

$$E\left\{u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(s)|F_s^\varepsilon\right\} \le 0, 0 \le s \le t. \qquad (17)$$

Доведення. Згідно означення (16) отримаємо співвідношення

$$u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(s) =$$

$$= \int\limits_{\tau_+^\varepsilon(s)}^{\tau_+^\varepsilon(t)} \left[e^{cs_1}cV_+^\varepsilon(s_1) + e^{c\tau^\varepsilon(s_1)}L^\varepsilon V^\varepsilon(s_1)\right] ds_1.$$

Тоді

$$\lim_{c\to 0} E\left\{u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(s)|F_s^\varepsilon\right\} = E\left\{\int\limits_{\tau_+^\varepsilon(s)}^{\tau_+^\varepsilon(t)} L^\varepsilon V^\varepsilon(s_1)ds_1|F_s^\varepsilon\right\}$$

Для $\tau_+^\varepsilon(s) < \tau_+^\varepsilon(t)$, використовуючи (12), отримаємо нерівність

$$L^\varepsilon V^\varepsilon(s_1) < 0$$

для $s_1 \in [\tau_+^\varepsilon(s), \tau_+^\varepsilon(t)]$. Тоді

$$\int\limits_{\tau_+^\varepsilon(s)}^{\tau_+^\varepsilon(t)} L^\varepsilon V^\varepsilon(s_1)ds_1 < 0,$$

з чого випливає нерівність

$$\lim_{c\to 0} E\left\{u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(s)|F_s^\varepsilon\right\} < 0,$$

що і завершує доведення леми 4.

Використовуючи леми 3 та 4, отримаємо

Висновок 3. Послідовність

$$w_n^\varepsilon := e^{c\tau_n^\varepsilon} V_n^\varepsilon$$

є супермартингалом відносно фільтрації $\{F_n^\varepsilon\}_{n\geq 0}$:

$$E\left\{w_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon\right\} \leq w_n^\varepsilon.$$

Справді, згідно означення (15) та (16) отримаємо

$$w_{n+1}^\varepsilon = \zeta_c^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon) + u^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon).$$

Використовуючи леми 3 та 4, отримаємо

$$E\left\{w_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon\right\} = E\left\{\zeta_c^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon) + u^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon) | F_n^\varepsilon\right\} =$$

$$= E\left\{\zeta_c^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon)) | F_n^\varepsilon\right\} + E\left\{u^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon) | F_n^\varepsilon\right\} \leq \zeta_c^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) + u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = w_n^\varepsilon.$$

Розглянемо подію

$$A_{T,n}^\varepsilon := \{\tau_n^\varepsilon > T\}.$$

Згідно умови R1 процес $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0$ є регулярним, тобто

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty\right\} = 1.$$

Використовуючи регулярність процесу, отримаємо наступний факт: для будь-якого $\Delta > 0$ та $T > 0$ $\exists N_T = N(T, \Delta)$ має місце оцінка

$$P\{A_{T,n}^\varepsilon\} \geq 1 - \Delta, n \geq N_T = N(T, \Delta).$$

Введемо позначення

$$a_n^\varepsilon := e^{c(\tau_n^\varepsilon - T)}, n \geq 0.$$

Нехай виконується подія $A_{T,n}^\varepsilon$, тоді $a_n^\varepsilon \geq 1$. Отримаємо наступний ланцюжок нерівностей

$$P\{(e^{cT} \sup_{n\geq N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta) \cap A_{T,n}^\varepsilon\} \leq$$

$$\leq P\{(e^{cT} \sup_{n\geq N_T} a_n^\varepsilon V(u_n^\varepsilon) > \delta) \cap A_{T,n}^\varepsilon\} \leq P\{(\sup_{n\geq N_T} e^{c\tau_n^\varepsilon} V(u_n^\varepsilon) > \delta) \cap A_{T,n}^\varepsilon\}.$$

Враховуючи означення w_n^ε, отримаємо нерівність для $\forall\delta > 0$:

$$P\{(e^{cT} \sup_{n\geq N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta) \cap A_{T,n}^\varepsilon\} \leq P\{(\sup_{n\geq N_T} w_n^\varepsilon > \delta) \cap A_{T,n}^\varepsilon\}.$$

Скористаємося супермартингальною властивістю процесу $w_n^\varepsilon, n \geq 0$, в результаті чого отримаємо оцінку:

$$P\{(e^{cT} \sup_{n\geq N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta) \cap A_{T,n}^\varepsilon\} \leq k_2 V(u),$$

де $k_2 < \infty$.

Далі, використовуючи властивість функції Ляпунова $\lim_{|u|\to 0} V(u) = 0$, отримаємо наступне співвідношення

$$P\{e^{cT} \sup_{n\geq N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta\} = P\{(e^{cT} \sup_{n\geq N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta) \cap A_{T,n}^\varepsilon\} +$$

$$+P\{(e^{cT} \sup_{n\geq N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta) \cap \overline{A_{T,n}^\varepsilon}\} \leq k_2 V(u) + \Delta \leq 2\Delta \qquad (18)$$

при достатньо малих u.

З довільності $\delta > 0$ та $\Delta > 0$ отримуємо збіжність

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} |\xi_n^\varepsilon| = 0\right\} = 1. \qquad (19)$$

Введемо позначення

$$V_T^\varepsilon := \sup_{T\geq t} V(\xi^\varepsilon(t)).$$

Для доведення твердження теореми 2 (3) достатньо показати, що для будь-якого $\delta > 0, \Delta > 0$ існує $T = T(\delta, \Delta) > 0$, для якого виконується нерівність

$$P\{V_T^\varepsilon > \delta\} \leq \Delta.$$

Отримаємо наступну рівність

$$P\{V_T^\varepsilon > \delta\} = P\left\{(V_T^\varepsilon > \delta) \cap (\sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon > T} \theta_n < k_3)\right\} + P\left\{(V_T^\varepsilon > \delta) \cap (\sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon > T} \theta_n \geq k_3)\right\} \qquad (20)$$

Скористаємося умовою А3, згідно якої можна підібрати k_3 настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$P\left\{\sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon > T} \theta_n \geq k_3\right\} \leq \frac{\Delta}{2}.$$

Тоді другий доданок правої частини (20) також буде задовольняти нерівність

$$P\left\{(V_T^\varepsilon > \delta) \cap (\sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon > T} \theta_n \geq k_3)\right\} < \frac{\Delta}{2}.$$

Розглянемо перший доданок правої частини рівності (20). Зауважимо, що для $t \in [\tau_n^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon]$ справедливе представлення

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) + \int_{\tau_n^\varepsilon}^t \eta(ds; x(\varepsilon s)) + \int_{\tau_n^\varepsilon}^t \gamma(ds; x(\varepsilon s)).$$

На події $\left\{\sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon > T} \theta_n < k_3\right\}$ отримаємо включення для $\forall \delta_1 > 0$

$$\left\{\sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon > T} |\xi^\varepsilon(t)| > \delta_1\right\} =$$

$$= \left\{ \sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon > T} \left| \xi^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) + \int_{\tau_n^\varepsilon}^{t} \eta(ds; x(\varepsilon s)) + \int_{\tau_n^\varepsilon}^{t} \gamma(ds; x(\varepsilon s)) \right| > \delta_1 \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon \geq T} |\xi_n^\varepsilon| + k_3 \varepsilon^3 \sup_{s \in [0, k_3]} [|\eta(s, x_k^\varepsilon)| + |\gamma(s, x_k^\varepsilon)|] > \delta_1 \right\} =: L_T^\varepsilon.$$

Скориставшись рівністю (19) та умовою теореми U3, виберемо параметр $\varepsilon > 0$ так, щоб

$$P\left\{ L_T^\varepsilon \cap \left(\sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon > T} \theta_n < k_3 \right) \right\} < \frac{\Delta}{2}. \quad (21)$$

Скориставшись неперервністю функції Ляпунова $V(u)$ в точці 0, отримаємо співвідношення

$$P\left\{ (V_T^\varepsilon > \delta) \cap (\sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon > T} \theta_n < k_3) \right\} \leq P\left\{ L_T^\varepsilon \cap \left(\sup_{\nu_{n-1}^\varepsilon > T} \theta_n < k_3 \right) \right\} < \frac{\Delta}{2},$$

де $\delta_1 = \delta_1(\delta)$.

Остаточно отримуємо оцінку

$$P\{V_T^\varepsilon > \delta\} \leq \Delta,$$

з чого, використовуючи неперервність функції Ляпунова $V(u)$ в точці 0, отримаємо твердження теореми (3):

$$P\left\{ \lim_{t \to \infty} |\eta^\varepsilon(t)| = 0 \right\} = 1.$$

Зауваження 1. *Константи* $\varepsilon_0 > 0$ *та* $u_0 \in R^d$ *з теореми 2 визначаються з оцінок* (12), (21) *та* (18) *відповідно.*

Автор висловлює щиру подяку академіку НАН України Королюку В.С. за постановку задачі та цінні зауваження щодо методів її розв'язання.

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.:Наука, 1977. – 352 с.
2. *Korolyuk V. S., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space.– :World Scientific Publishing, 2005. – 330 P.
3. *Малик І.В.* Напівмарковські випадкові еволюції у схемі усереднення. – Науковий вісник Ужгородського університету, Вип. 23, №2, 2013. – С. 54-61.
4. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1976. – 184 с.
5. *Дынкин Е.Б. Марковские процессы.* – М. Физматгиз, 1967. – 860 с.
6. *Blumenthal R.M., Getoor R.K.* Markov processes and potential theory. – New York, Dover publication, INC, 2007. – 321.
7. *Ethier S.N., Kurtz T.G.* Markov Processes: Characterization and convergence. – New York, J. Wiley Sons, – 1986. – 240 p.

Одержано 06.10.2013