УДК 517.95

З. М. Нитребич (Національний університет „Львівська політехніка")

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У ШАРІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ

We investigate the set of solutions of Dirichlet problem in the layer for homogeneous partial differential equation with $s+1$ variables of second order in one (time) variable, in which the homogeneous boundary conditions are given, and generally infinite order in other s (spatial) variables with constant coefficients. We establish the sufficient conditions of existence of nontrivial solutions of Dirichlet problem in the class of quasi-polynomials and propose the differential-symbol method of construction of such solutions.

Досліджено множину розв'язків задачі Діріхле у шарі для однорідного диференціального рівняння із частинними похідними з $s+1$ змінними другого порядку за однією (часовою) змінною, за якою задано однорідні крайові умови, та загалом нескінченного порядку за іншими s (просторовими) змінними зі сталими коефіцієнтами. Встановлено достатні умови існування нетривіальних розв'язків задачі Діріхле у класі квазіполіномів та запропоновано диференціально-символьний метод їх побудови.

Вступ. Задачі з даними на всій границі області, зокрема смуги чи шару, для гіперболічних диференціальних рівнянь із частинними похідними є некоректними крайовими задачами [1–5]. Прикладом такої задачі є задача Діріхле у смузі для рівняння коливань струни

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ x \in \mathbb{R},\ t \in (0,h),\ h > 0, \qquad U(0,x) = \varphi_1(x),\quad U(h,x) = \varphi_2(x),\quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Некоректність задачі (1) зумовлюється насамперед тим, що ядро цієї задачі, тобто множина нетривіальних розв'язків відповідної однорідної задачі

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0,\ \ U(0,x) = U(h,x) = 0, \tag{2}$$

не є порожньою. Нетривіальними розв'язками задачі (2) є, наприклад, функції вигляду

$$U(t,x) = \varphi(x+at) - \varphi(x-at), \tag{3}$$

де $\varphi(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ періодична функція з періодом $T = 2ah$.

Отже, актуальними є питання дослідження розв'язків задачі Діріхле у шарі з однорідними крайовими умовами за часом на границі шару для однорідного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними зі сталими коефіцієнтами, яке як частковий випадок містить хвильове рівняння, рівняння Клейна-Гордона-Фока, телеграфне рівняння, рівняння Лапласа, теорії пружності та інші. У випадку існування нетривіальних розв'язків однорідної задачі для їх побудови використаємо диференціально-символьний метод [6, 7] розв'язування задач для рівнянь із частинними похідними, що допускають відокремлення змінних.

1. Формулювання задачі. Метою даної статті є дослідження у шарі

$$L_{h,s} \equiv \{(t,x):\ t \in (0,h),\ x \in \mathbb{R}^s\},\ h > 0,\ \ s \in \mathbb{N}\setminus\{1\},$$

множини розв'язків $U = U(t,x)$ задачі Діріхле

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t} + b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U = 0, \tag{4}$$

$$U(0,x) = U(h,x) = 0, \tag{5}$$

де $a\,(\partial/\partial x)$, $b\,(\partial/\partial x)$ – диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами, символами яких є довільні цілі функції $a = a(\nu)$, $b = b(\nu)$.

Зауваження 1. *Нехай символом диференціального виразу* $b\,(\partial/\partial x)$ *є ціла функція* $b(\nu) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_+^s} b_k\nu^k$, *де* $b_k \in \mathbb{C}$, $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_s)$, $k = (k_1,\ldots,k_s)$, $\nu^k = \nu_1^{k_1}\ldots\nu_s^{k_s}$, $k_1,\ldots,k_s \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. *Тоді дію виразу* $b\,(\partial/\partial x)$ *на* U *розуміємо так:*

$$b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^s} b_k\frac{\partial^{|k|}U}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_s^{k_s}},$$

де $|k| = k_1+\ldots+k_s$, *аналогічно розуміємо дію* $a\,(\partial/\partial x)$ *на* $\partial U/\partial t$. *Під розв'язком задачі* (4), (5) *розуміємо цілу функцію* $U = \sum\limits_{\widehat{k}\in\mathbb{Z}_+^{s+1}} u_{\widehat{k}}t^{k_0}x^k$, $\widehat{k} = (k_0,k)$, $u_{\widehat{k}} \in \mathbb{C}$, *змінних* t *і* x, *яка задовольняє рівняння* (4) *та умови Діріхле* (5).

Функція $U(t,x) \equiv 0$ є тривіальним розв'язком задачі (4), (5). Встановимо умови існування лише цього розв'язку задачі (4), (5), а також у протилежному випадку вкажемо елементи ядра задачі (4), (5) і, що важливо, побудуємо ці елементи на основі диференціально-символьного методу в явному вигляді.

2. Основні результати. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu) \equiv \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2a(\nu)\frac{d}{dt} + b(\nu)\right)T(t,\nu) = 0,\quad \nu \in \mathbb{C}^s, \tag{6}$$

яке будується за рівнянням (4).

Нехай p_a та p_b – степені поліномів $a = a(\nu)$ та $b = b(\nu)$ за сукупністю змінних, якщо ж a не є поліномом, то $p_a = \infty$, аналогічно для функції b.

Елементи $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ нормальної у точці $= 0$ фундаментальної системи розв'язків рівняння (6) є квазіполіномами за t і мають вигляд

$$T_0(t,\nu) = e^{-a(\nu)t}\left\{a(\nu)\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}} + \operatorname{ch}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]\right\},$$

$$T_1(t,\nu) = e^{-a(\nu)t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}},$$

де $D(\nu) = a^2(\nu) - b(\nu)$, причому $4D(\nu)$ – дискримінант полінома $L(\,\cdot\,,\nu)$. Оскільки за припущенням $a(\nu)$, $b(\nu)$ – цілі функції, то за теоремою Пуанкаре [8, с. 59] функції $T_0(t, \nu)$, $T_1(t, \nu)$ є також цілими функціями стосовно вектор-параметра ν. Зокрема, якщо ν_0 – нуль функції $D(\nu)$, то $T_0(t, \nu_0) = e^{-a(\nu_0)t}\{a(\nu_0)t+1\}$, $T_1(t, \nu_0) = te^{-a(\nu_0)t}$. Надалі важливим буде ще й порядок p за сукупністю змінних цілих стосовно вектор-параметра ν функцій $T_0(t, \nu)$, $T_1(t, \nu)$, який визначається [9, с. 83] за формулою $p = \max\{p_a, p_b/2\}$. Якщо $a(\nu)$, $b(\nu)$ – поліноми, то $p < \infty$, і $p = \infty$, якщо $a(\nu)$ або $b(\nu)$ не є поліномом.

Відповідно до диференціально-символьного методу [7, с. 106], запишемо сім'ю формальних розв'язків рівняння (4), тобто сім'ю формальних рядів, які задовольняють (4):

$$U(t, x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T_0(t, \nu)e^{\nu\cdot x}\}\Big|_{\nu=O} + \psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T_1(t, \nu)e^{\nu\cdot x}\}\Big|_{\nu=O}, \qquad (7)$$

де $\nu\cdot x = \nu_1x_1 + \ldots + \nu_sx_s$, $O = (0, \ldots, 0)$, $\varphi(\partial/\partial\nu)$, $\psi(\partial/\partial\nu)$ –диференціальні вирази з цілими символами, які підбираємо так, щоб рівність (7) визначала розв'язок задачі (4), (5).

Спочатку задовольняємо першу умову (5). Оскільки для всіх $\nu \in \mathbb{C}^s$ виконуються рівності $T_0'(0, \nu) = 1$ і $T_1(0, \nu) = 0$, то

$$U(0, x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{e^{\nu\cdot x}\}\Big|_{\nu=O} = \varphi(x) = 0.$$

Отже, розв'язки рівняння (4), що справджують умову $U(0, x) = 0$, за формулою (7) мають вигляд

$$U(t, x) = \psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu\cdot x}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right\}\Bigg|_{\nu=O}. \qquad (8)$$

Задовольняючи другу умову $U(h, x) = 0$, одержуємо для вибору функції ψ тотожність

$$\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{a(\nu)h+\nu\cdot x}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right\}\Bigg|_{\nu=O} \equiv 0. \qquad (9)$$

Розглянемо наступні випадки.

2.1. Випадок $\mathbf{D(\nu) \equiv D = \mathrm{const}}$. Тоді $b(\nu) = a^2(\nu) - D$, рівняння (4) має вигляд

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^2 U = DU,$$

а тотожність (9) є такою:

$$\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D}\right]}{\sqrt{D}}\,\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)h+\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} \equiv 0. \qquad (10)$$

Якщо виконується нерівність $h\sqrt{D} \neq \pi ki$ $(i^2 = -1)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, тобто $\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D}\right]/\sqrt{D} \neq 0$, то одержуємо $\psi(\partial/\partial\nu)\left\{e^{-a(\nu)h+\nu\cdot x}\right\}\big|_{\nu=O} \equiv 0$. Функція $V(t, x) = \psi(\partial/\partial\nu)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu\cdot x}\right\}\big|_{\nu=O}$ є розв'язком задачі Коші для однорідного рівняння $\partial V/\partial t + a\,(\partial/\partial x)\,V = 0$ з однорідною початковою умовою $V(h,x)=0$, тому завдяки єдиності розв'язку задачі Коші маємо, що $V(t,x)\equiv 0$ в шарі $L_{h,s}$. Зокрема при $t=0$ маємо $V(0,x)=\psi\,(\partial/\partial\nu)\,\{e^{\nu\cdot x}\}|_{\nu=O}=\psi(x)=0$. Отже, в цьому випадку за формулою (8) одержуємо лише тривіальний розв'язок задачі (4), (5).

Якщо ж для якогось $k\in\mathbb{N}$ виконується рівність

$$h\sqrt{D}=\pm\,\pi k i, \tag{11}$$

то $\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D}\right]=0$, тотожність (10) справджується і формальні розв'язки задачі (4), (5) мають вигляд (8), а саме

$$U_k(t,x)=\frac{\sin\left(\pi kt/h\right)}{\pi k/h}\,\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

Розв'язки (12) будуть фактичними розв'язками задачі (4), (5) за умови довільної цілої функції $\psi(x)$, порядок q за сукупністю змінних якої має такі обмеження [10]:

1) $q=1$, якщо $a(\nu)$ не є поліномом;
2) $q<p_a/(p_a-1)$, якщо $1<p_a<\infty$;
3) $q\in\mathbb{R}_+$, якщо $p_a\leqslant 1$.

Зокрема, якщо $a(\nu)$ – лінійна функція, тобто $a(\nu)=A\cdot\nu+B$, де $A\in\mathbb{C}^s$ і $B\in\mathbb{C}$, то з формули (12) одержуємо

$$U_k(t,x)=\frac{\sin(\pi kt/h)}{\pi k/h}e^{-Bt}\psi\left(x-At\right),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

У формулі (13) немає операції диференціювання, тому за функцію ψ достатньо взяти довільну функцію, яка має на $\mathbb{R}^s$ неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Якщо ψ – квазіполіном, то $U_k(t,x)$, $k\in\mathbb{N}$, є також квазіполіномами.

Отже, у випадку сталого дискримінанта задача (4), (5) має тривіальний розв'язок для всіх $D\neq-\left(\pi k/h\right)^2$, $k\in\mathbb{N}$, або має нескінченновимірне ядро, що визначається цілою функцією для зчисленної кількості значень $D=-\left(\pi k/h\right)^2$, $k\in\mathbb{N}$.

Приклад 2.1. Розв'язати задачу Діріхле у шарі $L_{\pi,2}\equiv\{(t,x)\in\mathbb{R}^3:\ t\in(0,\pi),\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\}$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2+1\right]U(t,x_1,x_2)=0, \tag{14}$$
$$U(0,x_1,x_2)=U(\pi,x_1,x_2)=0.$$

▼ Дана задача є задачею (4), (5), у якій $a(\nu)=\nu_1+\nu_2$, $b(\nu)=(\nu_1+\nu_2)^2+1$, $h=\pi$, $D(\nu)=D=-1$. Умова (11) виконується для $k=1$. Розв'язок задачі (14) за формулою (13) має вигляд

$$U(t,x_1,x_2)=\psi(x_1-t,\,x_2-t)\sin t,$$

де ψ – довільна функція, що має на $\mathbb{R}^2$ неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Ядро задачі (14) є нескінченновимірним. ▲

Приклад 2.2. Розв'язати задачу Діріхле для бікалоричного рівняння в шарі $L_{1,s}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_s\right]^2 U(t,x) = 0, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$
$$U(0,x) = U(1,x) = 0,$$

де $\Delta_s = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_s^2$ – s-вимірний оператор Лапласа.

▼ Маємо $a(\nu) = -a^2||\nu||^2$, $b(\nu) = a^4||\nu||^4$, $||\nu||^2 = \nu_1^2 + \ldots + \nu_s^2$, $||\nu||^4 = (||\nu||^2)^2$, $h = 1$, $D(\nu) \equiv D = 0$. Отже, задача має лише нульовий розв'язок, тобто ядро задачі тривіальне. ▲

2.2. Випадок $\mathbf{D}(\nu) \neq \mathrm{const}$. Розглянемо множину

$$M = \left\{ \nu \in \mathbb{C}^s : \ \eta(\nu) \equiv \frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}} = 0 \right\}, \tag{15}$$

яка є об'єднанням за натуральним параметром k множин нулів цілих функцій $D_k(\nu) \equiv h^2 D(\nu) + k^2\pi^2$.

Для $\alpha \in M$ будемо розглядати множини мультиіндексів:

$$\begin{aligned} \Omega_1(\alpha) &= \left\{ \omega \in \mathbb{Z}_+^s : \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{\omega} \eta(\nu)\bigg|_{\nu=\alpha} \neq 0 \right\}, \\ \Omega(\alpha) &= \{\widetilde{\omega} \in \mathbb{Z}_+^s : \widetilde{\omega} \geqslant \omega, \ \omega \in \Omega_1(\alpha)\}, \\ \overline{\Omega}(\alpha) &= \mathbb{Z}_+^s \backslash \Omega(\alpha), \end{aligned} \tag{16}$$

де $\widetilde{\omega} \geqslant \omega$ означає, що $\widetilde{\omega}_k \geqslant \omega_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Теорема 1. *Якщо* $\omega \in \overline{\Omega}(\alpha)$, *то функція*

$$U(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{\omega} \{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\}\Big|_{\nu=\alpha} \tag{17}$$

є нетривіальним розв'язком задачі (4), (5), *тобто належить до ядра задачі.*

Доведення. Той факт, що функція (17) є розв'язком рівняння (4) випливає з формули (7) для цілої функції $\psi(\nu) = \nu^{\omega}$. Умова $U(0,x) = 0$, очевидно, виконується. Покажемо виконання другої умови (5), для цього позначимо $\widetilde{\eta}(\nu) = e^{-a(\nu)h}\eta(\nu)$. Обчислюємо

$$U(h,x) = \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{\omega} \{e^{-a(\nu)h+\nu\cdot x}\eta(\nu)\}\Big|_{\nu=\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{\omega} \{e^{\nu\cdot x}\widetilde{\eta}(\nu)\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= e^{\alpha\cdot x}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + x\right)^{\omega} \widetilde{\eta}(\alpha) = e^{\alpha\cdot x} \sum_{O \leqslant q \leqslant \omega} C_{\omega}^q x^{\omega-q} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^q \widetilde{\eta}(\alpha).$$

У вищевказаних рівностях $C_{\omega}^q = \frac{\omega!}{q!(\omega-q)!}$, $q! = \prod_{k=1}^{s} q_k!$

Оскільки $\omega \in \overline{\Omega}(\alpha)$, то для довільного $q \in \mathbb{Z}_+^s$ такого, що $q \leqslant \omega$, виконуються рівності $(\partial/\partial\nu)^q \, \eta(\nu)|_{\nu=\alpha} = 0$ та $(\partial/\partial\nu)^q \, \widetilde{\eta}(\nu)|_{\nu=\alpha} = 0$. Отже, доведено виконання другої умови (5).

Нетривіальність функції (17) випливає з того, що $\partial U/\partial t\Big|_{t=0} = x^{\omega} \neq 0$. Теорему доведено.

3. Приклади.

Приклад 3.1. Розв'язати задачу Діріхле в шарі $L_{\pi,2}$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\frac{\partial^3}{\partial t\partial x_1\partial x_2}+4\right]U(t,x_1,x_2)=0, \tag{18}$$
$$U(0,x_1,x_2)=U(\pi,x_1,x_2)=0.$$

▼ Для даної задачі маємо $a(\nu)=\nu_1\nu_2$, $b(\nu)=4$, $h=\pi$,

$$\eta(\nu)=\frac{\operatorname{sh}\left[\pi\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}\right]}{\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}},\quad \widetilde{\eta}(\nu)=e^{-\pi\nu_1\nu_2}\frac{\operatorname{sh}\left[\pi\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}\right]}{\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}}.$$

Множина M набуває вигляду

$$M=\{\nu\in\mathbb{C}^2\colon\ \nu_1^2\nu_2^2-4=-k^2,\ k\in\mathbb{N}\}$$

і, очевидно, містить вектор $\alpha=(0,0)$ при $k=2$. Легко перевірити, що для цього вектора до множини $\overline{\Omega}(\alpha)$ належать усі мультиіндекси $r\in\mathbb{Z}_+^2$, для яких $|r|\leqslant 2$. За теоремою 1 знаходимо такі розв'язки задачі (18):

$$U(t,x_1,x_2)=\left\{e^{\nu\cdot x-\nu_1\nu_2 t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}\right]}{\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}}\right\}\Bigg|_{(0,0)}=\frac{\sin 2t}{2},$$

$$U(t,x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial\nu_1}\left\{e^{\nu\cdot x-\nu_1\nu_2 t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}\right]}{\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}}\right\}\Bigg|_{(0,0)}=x_1\frac{\sin 2t}{2},$$

$$U(t,x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial\nu_2}\left\{e^{\nu\cdot x-\nu_1\nu_2 t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}\right]}{\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}}\right\}\Bigg|_{(0,0)}=x_2\frac{\sin 2t}{2},$$

$$U(t,x_1,x_2)=\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}\left\{e^{\nu\cdot x-\nu_1\nu_2 t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}\right]}{\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}}\right\}\Bigg|_{(0,0)}=x_1^2\frac{\sin 2t}{2},$$

$$U(t,x_1,x_2)=\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\left\{e^{\nu\cdot x-\nu_1\nu_2 t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}\right]}{\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}}\right\}\Bigg|_{(0,0)}=(x_1x_2-t)\frac{\sin 2t}{2},$$

$$U(t,x_1,x_2)=\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\left\{e^{\nu\cdot x-\nu_1\nu_2 t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}\right]}{\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2-4}}\right\}\Bigg|_{(0,0)}=x_2^2\frac{\sin 2t}{2}.\ \blacktriangle$$

Розглянемо приклад задачі Діріхле для рівняння, у якому використовуються диференціальні вирази нескінченного порядку.

Приклад 3.2. Розв'язати задачу Діріхле в шарі $L_{1,2}$ для диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{\partial^2 U(t,x_1,x_2)}{\partial t^2}=U(t,x_1+1,x_2-1)-(\pi^2+1)U(t,x_1,x_2), \tag{19}$$
$$U(0,x_1,x_2)=U(1,x_1,x_2)=0.$$

▼ Диференціально-функціональне рівняння подамо у вигляді

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - e^{\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}} + \pi^2 + 1\right] U(t, x_1, x_2) = 0.$$

Тоді (19) є задачею (4), (5), у якій $a(\nu) = 0$, $b(\nu) = -e^{\nu_1 - \nu_2} + \pi^2 + 1$,

$$D(\nu) = e^{\nu_1 - \nu_2} - \pi^2 - 1, \quad \eta(\nu_1, \nu_2) = \widetilde{\eta}(\nu_1, \nu_2) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{e^{\nu_1 - \nu_2} - \pi^2 - 1}}{\sqrt{e^{\nu_1 - \nu_2} - \pi^2 - 1}},$$

$$M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^2 \colon e^{\nu_1 - \nu_2} - \pi^2 - 1 = -\pi^2 k^2, \ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

До множини M належить вектор $(0, 0)$ при $k = 1$. За теоремою 1 знаходимо нетривіальний розв'язок задачі (19):

$$U(t, x_1, x_2) = \left\{ e^{\nu \cdot x} \frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{e^{\nu_1 - \nu_2} - \pi^2 - 1}\right]}{\sqrt{e^{\nu_1 - \nu_2} - \pi^2 - 1}} \right\}\Bigg|_{(0,0)} = \frac{\sin[\pi t]}{\pi}. \ \blacktriangle$$

Приклад 3.3. Розв'язати задачу Діріхле в шарі $L_{\pi,2}$ для рівняння коливань мембрани

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_2\right] U(t, x_1, x_2) = 0, \qquad U(0, x_1, x_2) = U(\pi, x_1, x_2) = 0. \tag{20}$$

▼ Для даної маємо $a(\nu) = 0$, $b(\nu) = -||\nu||^2$, $h = \pi$,

$$\eta(\nu) = \widetilde{\eta}(\nu) = \operatorname{sh}[\pi||\nu||]/||\nu||, \quad M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^2 \colon ||\nu||^2 = -k^2, \ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

До множини M належить, наприклад, вектор $(i, 0)$. Вкажемо нетривіальні розв'язки задачі (20), що відповідають цьому вектору. Запишемо множини Ω_1, Ω, $\overline{\Omega}$ для $(i, 0)$, визначені формулами (16). Обчислюємо:

$$\eta(i, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_1}\eta(\nu_1, \nu_2)\bigg|_{(i,0)} = \left\{\frac{\pi\nu_1 \operatorname{ch}[\pi||\nu||]}{||\nu||^2} - \frac{1}{2}||\nu||^{-3} \cdot 2\nu_1 \operatorname{sh}[\pi||\nu||]\right\}\bigg|_{(i,0)} = \pi i,$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_2}\eta(\nu_1, \nu_2)\bigg|_{(i,0)} = \left\{\frac{\pi\nu_2 \operatorname{ch}[\pi||\nu||]}{||\nu||^2} - \frac{1}{2}||\nu||^{-3} \cdot 2\nu_2 \operatorname{sh}[\pi||\nu||]\right\}\bigg|_{(i,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu_1^2}\eta(\nu_1, \nu_2)\bigg|_{(i,0)} = \left\{-\frac{\nu_1}{||\nu||^3}\operatorname{ch}[\pi||\nu||] \cdot \frac{\pi\nu_1}{||\nu||} + \frac{\pi\left(||\nu||^2 - 2\nu_1^2\right)\operatorname{ch}[\pi||\nu||]}{||\nu||^4}\right\}\bigg|_{(i,0)} = -2\pi,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}\eta(\nu_1, \nu_2)\bigg|_{(i,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu_2^2}\eta(\nu_1, \nu_2)\bigg|_{(i,0)} = \left\{\frac{\pi\left(||\nu||^2 - 2\nu_2^2\right)\operatorname{ch}[\pi||\nu||]}{||\nu||^4}\right\}\bigg|_{(i,0)} = \pi.$$

Отже, серед мультиіндексів $r \in \mathbb{Z}_+^2$, для яких $|r| \leqslant 2$, до множини Ω_1 належать мультиіндекси $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$. Тоді маємо

$$\Omega = \{(1, 0), (2, 0), (0, 2), (1, 1)\}, \quad \overline{\Omega} = \{(0, 0), (0, 1)\}.$$

Знаходимо нетривіальні розв'язки задачі (20) відповідно до теореми 1:

$$U(t,x_1,x_2)=\left\{e^{\nu\cdot x}\frac{\operatorname{sh}[t||\nu||]}{||\nu||}\right\}\Bigg|_{(i,0)}=\frac{e^{ix_1}}{i}\operatorname{sh}[ti]=e^{ix_1}\sin t,$$

$$U(t,x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial\nu_2}\left\{e^{\nu\cdot x}\frac{\operatorname{sh}[t||\nu||]}{||\nu||}\right\}\Bigg|_{(i,0)}=x_2\,e^{ix_1}\sin t.$$

За рахунок симетрії змінних x_1 та x_2 у рівнянні та умовах Діріхле запишемо ще розв'язки задачі (20), що відповідають мультиіндексу $(0,i)$:

$$U(t,x_1,x_2)=e^{ix_2}\sin t,$$

$$U(t,x_1,x_2)=x_1\,e^{ix_2}\sin t.$$

Зауважимо, що підхід використання теореми 1 для знаходження нетривіальних розв'язків задачі (20) показано лише на прикладі вектора $(i,0)$, однак, легко провести аналогічні обчислення для однопараметричних зліченних множин векторів $(ki,0)$ та $(0,ki)$, де $k\in\mathbb{N}$. Зокрема, для однопараметричної сім'ї $(ki,0)$, $k\in\mathbb{N}$, коренів рівнянь $||\nu||^2=-k^2$ від розв'язків задачі (20) вигляду

$$U_k(t,x_1,x_2)=e^{ikx_1}\sin kt,$$

$$U_k(t,x_1,x_2)=x_2\,e^{ikx_1}\sin kt$$

за допомогою диференціально-символьного методу [7] можна отримати розв'язки задачі у вигляді:

$$U(t,x_1,x_2)=\varphi(x_1+t)-\varphi(x_1-t),$$

$$U(t,x_1,x_2)=x_2\{\varphi(x_1+t)-\varphi(x_1-t)\},$$

де $\varphi(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ періодична функція з періодом $T=2\pi$, тобто $\varphi\in C^2_{2\pi}$.

Аналогічно за однопараметричною сім'єю $(0,ki)$, $k\in\mathbb{N}$, коренів рівнянь $||\nu||^2=-k^2$ знаходимо ще такі розв'язки задачі (20):

$$U(t,x_1,x_2)=\varphi(x_2+t)-\varphi(x_2-t),$$

$$U(t,x_1,x_2)=x_1\{\varphi(x_2+t)-\varphi(x_2-t)\},$$

де $\varphi\in C^2_{2\pi}$.

Продемонструємо запропонований підхід знаходження нетривіальних розв'язків задачі (20) ще для вектора $\alpha=(4+3i,2-6i)\in M$ з ненульовими координатами. За теоремою 1 знаходимо такий нетривіальний розв'язок задачі (20):

$$U(t,x_1,x_2)=\left\{e^{\nu\cdot x}\frac{\operatorname{sh}[t||\nu||]}{||\nu||}\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}=\frac{e^{(4+3i)x_1+(2-6i)x_2}}{5}\sin[5t].$$

Зауважимо знову, що коренями рівнянь $||\nu||^2=-k^2$, $k=5m$, $m\in\mathbb{N}$, є також однопараметрична сім'я $((4+3i)m,(2-6i)m)$, $m\in\mathbb{N}$, якій відповідають такі розв'язки задачі (20):

$$U_m(t,x_1,x_2)=\frac{e^{(4+3i)mx_1+(2-6i)mx_2}}{5}\sin[5mt],\ m\in\mathbb{N}.$$

За цими розв'язками одержуємо розв'язки задачі (20) у вигляді

$$U(t,x_1,x_2) = \varphi\big((3-4i)x_1 + (-6-2i)x_2 + 5t\big) - \varphi\big((3-4i)x_1 + (-6-2i)x_2 - 5t\big),$$

де $\varphi \in C^2_{10\pi}$. ▲

Висновки. Доведено, що ядро задачі Діріхле у шарі є тривіальним лише у разі сталого дискримінанта $4D$ полінома $L(\cdot,\nu)$, який не належить до множини $P = \{-4\pi^2k^2/h^2,\ k\in\mathbb{N}\}$. Якщо ж дискримінант $4D$ сталий і належить до множини P, то ядро задачі нетривіальне і визначається цілою функцією. В інших випадках встановлено достатні умови існування множини нетривіальних розв'язків задачі, до якої належать, зокрема, квазіполіномні функції. Для побудови квазіполіноміних та інших розв'язків задачі використано диференціально-символьний метод.

У подальшій перспективі є цікавими дослідження щодо встановлення необхідних та достатніх умов існування квазіполіномних розв'язків досліджуваної однорідної задачі Діріхле.

1. *Борок В.М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // ДАН СССР. – 1968. – **183**, №5. – С. 995–998.
2. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 2002. – 316 с.
3. *Nytrebych Z. M.* A boundary-value problem in an unbounded strip // J. Math. Sci. – 1996. – 79, No. 6. – P. 1388–1392.
4. *Пташник Б.И.* Некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наукова думка, 1984. – 264 с.
5. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
6. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1983. – 232 с.
7. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка", 2002. – 292 с.
8. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 232 с.
9. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
10. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Про дію диференціального виразу нескінченного порядку у класах цілих функцій багатьох комплексних змінних // Доп. НАН України. – 2007. – №6. – С. 11–16.

Одержано 24.10.2013