

УДК 519.21

М. Я. Саєнко, Р. Є. Ямненко (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

СУБГАУССОВІ ПРОЦЕСИ РИЗИКУ І НЕЗАЛЕЖНИМИ МОМЕНТАМИ НАСТАННЯ СТРАХОВИХ ВИПАДКІВ Й УКЛАДАННЯ ДОГОВОРІВ

The paper studies properties of the model of work of an insurance company which takes into account the processes of new policies incoming and their termination due to occurring of insurance event. It is assumed that the claim severity is a sub-Gaussian random variable. The bankruptcy probability estimates are obtained both for dependent and independent policies incoming and termination processes.

У роботі вивчаються властивості моделі роботи страхової компанії, яка враховує процеси появи нових договорів та їх припинення у зв'язку з настанням страхової події. Також припускається, що величини позовів є субгауссовими випадковими величинами. Отримано оцінки ймовірності банкрутства компанії у разі залежності чи незалежності процесів укладання та припинення страхових договорів.

Вступ. Класична модель ризику має вигляд

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

де u – початковий капітал страхової компанії; c – інтенсивність надходження страхових внесків; Y_1, Y_2, \dots – величини страхових виплат, є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами (в.в.); N_t – кількість позовів, які надійшли на протязі $[0, t)$.

Багато робіт останнім часом присвячені дослідженню актуарних процесів ризику з різного роду додатковими припущеннями. У даній статті розглянуто модель роботи страхової компанії, що враховує два додаткові процеси: настання страхових подій та укладання нових договорів, крім того припускається, що величини позовів є субгауссовими випадковими величинами:

$$U(t) = u + \sum_{k=1}^{M_t} c_k(t - t_k) - \sum_{k=1}^{N_t} c_k(t - s_k) - \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

де c_k – інтенсивність надходження страхових внесків за k -им полісом; t_1, t_2, \dots – моменти укладання нових договорів; s_1, s_2, \dots – момент настання страхового випадку i , відповідно, припинення терміну дії поліса (наприклад, момент смерті застрахованої особи); Y_1, Y_2, \dots – величини страхових виплат, є незалежними однаково розподіленими субгауссовими в.в.; N_t – в.в. із розподілом Пуассона, $EN_t = \alpha t$, відповідає кількості страхових випадків, що відбулися на $[0, t)$; M_t – в.в. із розподілом Пуассона, $EM_t = \beta t$, відповідає кількості укладених нових договорів страхування на $[0, t)$. Також припустимо, що пара $\{N_t, M_t\}$ та $\{t_n, n \geq 1\}$, $\{s_n, n \geq 1\}$, $\{Y_n, n \geq 1\}$ – незалежні в сукупності в.в.

Клас субгауссових випадкових величин є більш широким, ніж клас гауссових величин, а тому представляє значний інтерес для дослідження з точки зору застосування у фінансовій та актуарній математиці. Більше про властивості

класу субгауссових величин і процесів можна дізнатися в книгах [1, 2] та статтях [4, 5]. У роботі [3] розглянуто деякі властивості класичного процесу ризику (1) із φ -субгауссовими доданками.

Робота складається з трьох частин. У першому розділі наведено необхідні в подальшому означення та твердження з теорії просторів субгауссових випадкових величин та процесів. У другому розділі досліджено властивості моделі страхової компанії із незалежними процесами N_t і M_t . У третьому розділі розглянуто припущення про лінійну залежність між моментами зупинок процесів цих процесів. Для обох випадків отримано оцінку ймовірності банкруства страхової компанії.

1. Субгауссові випадкові величини. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ – стандартний імовірнісний простір, T – деяка параметрична множина.

Означення 1. [4] Центровану в.в. ξ називають субгауссовою, якщо існує $E \exp\{\lambda\xi\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує $a \geq 0$:

$$E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\lambda^2 a^2 / 2\}. \quad (3)$$

Клас усіх субгауссових величин будемо позначати $Sub(\Omega)$.

Означення 2. [2] Нехай $\xi \in Sub(\Omega)$. Субгауссовим стандартом в.в. ξ називають таку її характеристику

$$\tau(\xi) = \inf \{a \geq 0: E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\lambda^2 a^2 / 2\}, \lambda \in \mathbb{R}\}. \quad (4)$$

Приклад 1. Нехай $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ – гауссова в.в., тобто $E\xi = 0$ та $D\xi = \sigma^2$, тоді

$$E \exp\{\lambda\xi\} = \exp\{\lambda^2 \sigma^2 / 2\}$$

тобто ξ є субгауссовою в.в. у якій $\tau(\xi) = \sigma$.

Приклад 2. Нехай ξ – рівномірно розподілена на відрізку $[-a, a]$ в.в., $a > 0$, тоді

$$E \exp\{\lambda\xi\} = \frac{\sinh(\lambda a)}{\lambda a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda a)^{2k}}{(2k+1)!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda a)^{2k}}{6^k k!} = \exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{6}\right\},$$

тобто ξ є субгауссовою в.в. у якій $\tau^2(\xi) = E\xi^2 = a^2/3$.

Лема 1. [2] Якщо ξ – обмежена центрована в.в. та $\xi \leq c$ майже напевне, де c – деяка додатна стала, то $\xi \in Sub(\Omega)$ та $\tau(\xi) \leq c$.

Теорема 1. [1] Простір субгауссових випадкових величин є банаховим відносно норми $\tau(\xi)$.

2. Модель роботи страхової компанії з незалежними моментами настання страхових випадків й укладання договорів. Розглянемо процес ризику (2) і додатково припустимо, що моменти укладання страхових договорів та надходження позовів є незалежними субгауссовими в.в. Справедливе наступне твердження.

Лема 2. Нехай $Y_k \in \text{Sub}(\Omega)$ зі стандартом a , $t_k \in \text{Sub}(\Omega)$ зі стандартом b/c_k , $s_k \in \text{Sub}(\Omega)$ зі стандартом d/c_k , причому в.в. N_t, M_t, Y_k, t_k, s_k - незалежні в сукупності, $k \geq 1$. Тоді для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ має місце така оцінка для експоненційного моменту процесу ризику (2):

$$\begin{aligned} E \exp\{\lambda U(t)\} &\leq \exp\left\{\lambda u + \left(\exp\left\{\lambda t \max_{k \geq 1}\{c_k\} + \frac{\lambda^2 b^2}{2}\right\} - 1\right) \beta t + r\right. \\ &\quad \left. + \left(\exp\left\{-\lambda t \min_{k \geq 1}\{c_k\} + \frac{\lambda^2 d^2}{2}\right\} - 1\right) \alpha t + \left(\exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{2}\right\} - 1\right) \alpha t\right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Доведення. Розглянемо окремо кожен доданок у правій частині (2).

Із (3) випливає, що

$$E \exp\{\lambda c_k(t - t_k)\} = \exp\{\lambda t c_k\} E \exp\{-\lambda c_k t_k\} \leq \exp\left\{\lambda t c_k + \frac{\lambda^2 b^2}{2}\right\}.$$

Тому,

$$\begin{aligned} E \exp\left\{\lambda \sum_{k=1}^{M_t} c_k(t - t_k)\right\} &= E \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{k=1}^m \exp\{\lambda c_k(t - t_k)\} I\{M_t = m\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{k=1}^m E \exp\{\lambda c_k(t - t_k)\} I\{M_t = m\} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{k=1}^m \exp\left\{\lambda t c_k + \frac{\lambda^2 b^2}{2}\right\} P\{M_t = m\} \leq \\ &\leq \exp\{-\beta t\} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\exp\left\{\lambda t \max\{c_k\} + \frac{\lambda^2 b^2}{2}\right\}\right)^m \frac{(\beta t)^m}{m!} = \\ &= \exp\left\{\left(\exp\left\{\lambda t \max\{c_k\} + \frac{\lambda^2 b^2}{2}\right\} - 1\right) \beta t\right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогічно до (6), з того, що

$$E \exp\{-\lambda c_k(t - s_k)\} \leq \exp\left\{-\lambda t c_k + \frac{\lambda^2 d^2}{2}\right\},$$

МАТИМЕМО

$$\begin{aligned} E \exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{N_t} c_k(t - s_k)\right\} &= E \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n \exp\{-\lambda c_k(t - s_k)\} I\{N_t = n\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n E \exp\{-\lambda c_k(t - s_k)\} I\{N_t = n\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n \exp\left\{-\lambda t c_k + \frac{\lambda^2 d^2}{2}\right\} P\{N_t = n\} \leq \\ &\leq \exp\{-\alpha t\} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\exp\left\{-\lambda t \min\{c_k\} + \frac{\lambda^2 d^2}{2}\right\}\right)^n \frac{(\alpha t)^n}{n!} = \\ &= \exp\left\{\left(\exp\left\{-\lambda t \min\{c_k\} + \frac{\lambda^2 d^2}{2}\right\} - 1\right) \alpha t\right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Нарешті,

$$\begin{aligned} E \exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{N_t} Y_k\right\} &= E \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n \exp\{-\lambda Y_k\} I\{N_t = n\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n E \exp\{-\lambda Y_k\} I\{N_t = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} (E \exp\{-\lambda Y_1\})^n P\{N_t = n\} = \\ &= \exp\{-\alpha t\} \sum_{n=0}^{\infty} (E \exp\{-\lambda Y_1\})^n \frac{(\alpha t)^n}{n!} = \exp\left\{\left(\exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{2}\right\} - 1\right) \alpha t\right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Легко бачити, що з нерівностей (6) - (8) випливає (5). \square

Із леми 2 і нерівності Чебишова випливає така теорема.

Теорема 2. Припустимо, що для процесу ризику $\{U(t), t \geq 0\}$, визначеного моделлю (2), виконані умови леми 2. Тоді має місце така оцінка ймовірності того, що капітал страхової компанії перевищить рівень $x \geq 0$

$$P\{U(t) \geq x\} \leq \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ \lambda(u - x) + \left(\exp \left\{ \lambda t \max_{k \geq 1} \{c_k\} + \frac{\lambda^2 b^2}{2} \right\} - 1 \right) \beta t + \left(\exp \left\{ -\lambda t \min_{k \geq 1} \{c_k\} + \frac{\lambda^2 a^2}{2} \right\} - 1 \right) \alpha t + \left(\exp \left\{ \frac{\lambda^2 a^2}{2} \right\} - 1 \right) \alpha t \right\}. \quad (9)$$

Уведемо фільтрацію $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \in T\}$ на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$.

Теорема 3. Нехай заданий процес ризику (2). Тоді

$$E(U(t)|\mathcal{F}_s) = u + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \left(F_{k,i}^{(1)}(t, s) - F_{k,i}^{(2)}(t, s) - F_{k,i}^{(3)}(t, s) \right), \quad (10)$$

де

$$F_{k,i}^{(1)}(t, s) = c_k (t - t_k | \{t_k \leq s\} - E(t_k | \{t_k > s\})) \sum_{m=0}^i I\{M_s = m\} \times \\ \times \left(I\{M_t - M_s = i - m\} | \{t \leq s\} + e^{-\beta(t-s)} \frac{(\beta(t-s))^{i-m}}{(i-m)!} I\{t > s\} \right), \quad (11)$$

$$F_{k,i}^{(2)}(t, s) = c_k ((t - s_k) | \{t_k \leq s\} + (t - E(s_k | \{s_k > s\}))) \sum_{n=0}^i I\{N_s = n\} \times \\ \times \left(I\{N_t - N_s = i - n\} | \{t \leq s\} + e^{-\alpha(t-s)} \frac{(\alpha(t-s))^{i-n}}{(i-n)!} I\{t > s\} \right), \quad (12)$$

$$F_{k,i}^{(3)}(t, s) = \sum_{k=0}^i \left(Y_k | \{N_t = k\} | \{t \leq s\} + E Y_k e^{(-\alpha t)} \frac{(\alpha t)^k}{k!} I\{t > s\} \right). \quad (13)$$

Доведення. Перепишемо (2) у вигляді:

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i c_k (t - t_k) I\{M_t = i\} - \\ - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i c_k (t - s_k) I\{N_t = i\} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i Y_k I\{N_t = i\}. \quad (14)$$

Запишемо окремо умовне математичне сподівання від кожного доданку в (14), і для в.в. t_k розглянемо під- σ -алгебру \mathcal{F}_s , яка зводиться до σ -алгебри $\sigma\{M_u, u \leq s\}$, породженої процесом M_t . Тоді, якщо $t_k > s$, то t_k не залежить від \mathcal{F}_s і $E(t_k | \{t_k > s\}) I\{M_t = i\} | \mathcal{F}_s = E(t_k | \{t_k > s\}) E(I\{M_t = i\} | \mathcal{F}_s)$, а якщо $t_k \leq s$, то внаслідок \mathcal{F}_s -вимірності та незалежності t_k і M_t маємо $E(t_k | \{t_k \leq s\}) I\{M_t = i\} | \mathcal{F}_s = t_k | \{t_k \leq s\} E(I\{M_t = i\} | \mathcal{F}_s)$.

Отже,

$$F_{k,i}^{(1)}(t, s) := E(c_k (t - t_k) | \{M_t = i\} | \mathcal{F}_s) = \\ = c_k t E(I\{M_t = i\} | \mathcal{F}_s) - c_k E(t_k | \{M_t = i\} | \mathcal{F}_s) = \\ = c_k (t - t_k | \{t_k \leq s\} - E(t_k | \{t_k > s\})) E(I\{M_t = i\} | \mathcal{F}_s). \quad (15)$$

Ураховуючи однорідність, вимірність та незалежність відповідних величин відносно фільтрації, матимемо

$$\begin{aligned} E(\{M_t - M_s = i - m, M_s = m\} | \mathcal{F}_s) &= \{M_s = m\} \times \\ &\times (\{M_t - M_s = i - m\} | \{t \leq s\}) + E(\{M_t - M_s = i - m\} | \mathcal{F}_s) | \{t > s\}) = \\ &= \{M_s = m\} (\{M_t - M_s = i - m\} | \{t \leq s\}) + \\ &+ P(\{M_t - M_s = i - m\} | \mathcal{F}_s) | \{t > s\}). \end{aligned} \quad (16)$$

Звідси

$$\begin{aligned} E(\{M_t = i\} | \mathcal{F}_s) &= E\left(\sum_{m=0}^i \{M_t - M_s = i - m, M_s = m\} | \mathcal{F}_s\right) = \\ &= \sum_{m=0}^i \{M_s = m\} (\{M_t - M_s = i - m\} | \{t \leq s\}) + \\ &+ P(M_t - M_s = i - m) | \{t > s\}) = \sum_{m=0}^i \{M_s = m\} \times \\ &\times \left(\{M_t - M_s = i - m\} | \{t \leq s\} + e^{-\beta(t-s)} \frac{(\beta(t-s))^{i-m}}{(i-m)!} | \{t > s\}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Для в.в. s_k під- σ -алгебра \mathcal{F}_s зводиться до відповідної σ -алгебри $\sigma\{N_u, u \leq s\}$. Із тих самих міркувань, що привели до (15), випливає

$$\begin{aligned} F_{k,i}^{(2)}(t, s) &:= E(c_k(t - s_k) | \{N_t = i\} | \mathcal{F}_s) = \\ &= c_k t E(\{N_t = i\} | \mathcal{F}_s) - c_k E(s_k | \{N_t = i\} | \mathcal{F}_s) = \\ &= c_k ((t - s_k) | \{t_k \leq s\} + (t - E(s_k | \{s_k > s\}))) E(\{N_t = i\} | \mathcal{F}_s). \end{aligned} \quad (18)$$

Так само, як у (16) і (17), отримаємо

$$\begin{aligned} E(\{N_t = i\} | \mathcal{F}_s) &= \sum_{n=0}^i \{N_s = n\} \times \\ &\times \left(\{N_t - N_s = i - n\} | \{t \leq s\} + e^{-\alpha(t-s)} \frac{(\alpha(t-s))^{i-n}}{(i-n)!} | \{t > s\}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Нарешті,

$$\begin{aligned} F_{k,i}^{(3)}(t, s) &:= E(Y_k | \{N_t = i\} | \mathcal{F}_s) = \\ &= \sum_{n=0}^i Y_k | \{N_t = n\} | \{t \leq s\} + \sum_{n=0}^i E Y_k E(\{N_t = n\} | \{t > s\}) = \\ &= \sum_{n=0}^i Y_k | \{N_t = n\} | \{t \leq s\} + \sum_{n=0}^i E Y_k P(N_t = n) | \{t > s\} = \\ &= \sum_{n=0}^i Y_k | \{N_t = n\} | \{t \leq s\} + \sum_{n=0}^i E Y_k e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} | \{t > s\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Із рівностей (15) – (20) і випливає твердження теореми. \square

Припустимо, що у процесі ризику (2) N_t та M_t є незалежними процесами Пуассона, тоді моменти укладання страхових договорів t_k та надходження позовів s_k є експоненційно розподіленими в.в. Справедливе наступне твердження.

Лема 3. Нехай $Y_k \in \text{Sub}(\Omega)$ зі стандартом a , а $\{M_t, t \geq 0\}$ і $\{N_t, t \geq 0\}$ – незалежні процеси Пуассона з інтенсивностями $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ відповідно. Тоді для всіх $\lambda \in (-\beta/\max_{k \geq 1}\{c_k\}, \alpha/\max_{k \geq 1}\{c_k\})$ має місце така оцінка для експоненційного моменту процесу ризику (2):

$$\begin{aligned} E \exp\{\lambda U(t)\} &\leq \exp\left\{\lambda u + \left(\frac{\beta \exp\{\lambda t \max\{c_k\}\}}{\beta + \lambda \min\{c_k\}} - 1\right) \beta t + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\alpha \exp\{-\lambda t \min\{c_k\}\}}{\alpha - \lambda \max\{c_k\}} - 1\right) \alpha t + \left(\exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{2}\right\} - 1\right) \alpha t\right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Доведення. Як і в лемі 2, розглянемо окремо кожен доданок у правій частині (2). Оскільки t_k і s_k – це експоненційно розподілені в.в. з інтенсивностями α і β відповідно, то

$$E \exp\{-\lambda c_k t_k\} = \frac{\beta}{\beta + \lambda c_k}, \lambda > -\beta/c_k, \quad \text{та} \quad E \exp\{\lambda c_k s_k\} = \frac{\alpha}{\alpha - \lambda c_k}, \lambda < \alpha/c_k.$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} E \exp\left\{\lambda \sum_{k=1}^{M_t} c_k(t - t_k)\right\} &= E \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{k=1}^m \exp\{\lambda c_k(t - t_k)\} I\{M_t = m\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{k=1}^m E \exp\{\lambda c_k(t - t_k)\} I\{M_t = m\} = \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{k=1}^m e^{\lambda t c_k} \frac{\beta}{\beta + \lambda c_k} P\{M_t = m\} \leq \\ &\leq \exp\{-\beta t\} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\beta \exp\{\lambda t \max\{c_k\}\}}{\beta + \lambda \min\{c_k\}}\right)^m \frac{(\beta t)^m}{m!} = \\ &= \exp\left\{\left(\frac{\beta \exp\{\lambda t \max\{c_k\}\}}{\beta + \lambda \min\{c_k\}} - 1\right) \beta t\right\} \end{aligned} \quad (22)$$

та

$$\begin{aligned} E \exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{N_t} c_k(t - s_k)\right\} &= E \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n \exp\{-\lambda c_k(t - s_k)\} I\{N_t = n\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n E \exp\{-\lambda c_k(t - s_k)\} I\{N_t = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n e^{-\lambda t c_k} \frac{\alpha}{\alpha - \lambda c_k} P\{N_t = n\} \leq \\ &\leq \exp\{-\alpha t\} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha \exp\{-\lambda t \min\{c_k\}\}}{\alpha - \lambda \max\{c_k\}}\right)^n \frac{(\alpha t)^n}{n!} = \\ &= \exp\left\{\left(\frac{\alpha \exp\{-\lambda t \min\{c_k\}\}}{\alpha - \lambda \max\{c_k\}} - 1\right) \alpha t\right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким чином, твердження лемі випливає з нерівностей (22), (23) та (8). \square

Із лемі 3 і нерівності Чебишова випливає така теорема.

Теорема 4. Припустимо, що для процесу ризику $\{U(t), t \geq 0\}$, визначеного моделлю (2), виконані умови лемі 3. Тоді має місце така оцінка ймовірності того, що капітал страхової компанії перевищить рівень $x \geq 0$

$$\begin{aligned} P\{U(t) \geq x\} &\leq \inf_{\lambda \in (-\beta/\max_{k \geq 1}\{c_k\}, \alpha/\max_{k \geq 1}\{c_k\})} \exp\left\{\lambda(u - x) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\beta \exp\{\lambda t \max\{c_k\}\}}{\beta + \lambda \min\{c_k\}} - 1\right) \beta t + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\alpha \exp\{-\lambda t \min\{c_k\}\}}{\alpha - \lambda \max\{c_k\}} - 1\right) \alpha t + \left(\exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{2}\right\} - 1\right) \alpha t\right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

3. Модель роботи страхової компанії із залежними моментами настання страхових випадків й укладання договорів. Розглянемо окремий випадок залежних процесів настання страхових випадків та укладання нових договорів і відповідні моменти зупинки: $\tau_k = \inf\{t \geq 0: N_t = k\}$ та $\mu_k = \inf\{t \geq 0: M_t = k\}$, де τ_k відповідають настанню страхового випадку, тобто події, коли страхова компанія повинна виплатити компенсацію клієнту, а μ_k – моменту укладання нового договору страхування, тобто приходу нового клієнта. Пов'яжемо ці випадкові величини таким чином:

$$\mu_k = a\tau_k, \quad k \geq 1. \quad (25)$$

Прикладом такої моделі є страхування на дожиття (endowment). Страхування на випадок дожиття – це вид страхування, що передбачає виплату страхової суми у разі дожиття застрахованої особи до події, визначеної в договорі страхування. Такими подіями можуть бути: закінчення строку страхування, досягнення певного віку чи весілля.

Отже, порахуємо умовне математичне сподівання процесу ризику у випадку залежності процесів настання страхових випадків та укладання нових договорів.

Теорема 5. *Нехай заданий процес ризику (2), причому виконується умова залежності (25). Тоді*

$$E(U(t)|\mathcal{F}_s) = u + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \left(F_{k,i}^{(1)}(t, s) - F_{k,i}^{(2)}(t, s) - F_{k,i}^{(3)}(t, s) \right), \quad (26)$$

де

$$F_{k,i}^{(1)}(t, s) = c_k (t - t_k | \{t_k \leq s\} - E(t_k | \{t_k > s\})) \sum_{n=0}^i I\{N_s = n\} \times \\ \times \left(I\{N_{t/a} - N_s = i - n\} | \{t \leq as\} + e^{-\alpha(\frac{t}{a} - s)} \frac{(\alpha(\frac{t}{a} - s))^{i-n}}{(i-n)!} I\{t > as\} \right), \quad (27)$$

$F_{k,i}^{(2)}(t, s)$ та $F_{k,i}^{(3)}(t, s)$ визначено в (12) і (13) відповідно.

Доведення. Оскільки процеси $\{N_t: t \geq 0\}$ і $\{M_t: t \geq 0\}$ залежні згідно з (25), то

$$\{M_t = m\} = \{\mu_m \leq t, \mu_{m+1} > t\} = \left\{ \tau_m \leq \frac{t}{a}, \tau_{m+1} > \frac{t}{a} \right\} = \{N_{t/a} = m\}. \quad (28)$$

Скористаємось доведенням теореми 3. Так само, як у (15) – (17), застосовуючи (28), матимемо відповідно

$$F_{k,i}^{(1)}(t, s) = c_k (t - t_k | \{t_k \leq s\} - E(t_k | \{t_k > s\})) E(I\{N_{t/a} = i\} | \mathcal{F}_s) \quad (29)$$

та

$$E(I\{N_{t/a} = i\} | \mathcal{F}_s) = \sum_{n=0}^i I\{N_s = n\} \times \\ \times \left(I\{N_{t/a} - N_s = i - n\} | \{t \leq as\} + e^{-\alpha(\frac{t}{a} - s)} \frac{(\alpha(\frac{t}{a} - s))^{i-n}}{(i-n)!} I\{t > as\} \right). \quad (30)$$

Також мають місце рівності (18) – (20). □

Знайдемо тепер ймовірність того, що капітал страхової компанії буде вищим за якийсь заданий рівень.

Теорема 6. Нехай задано процес ризику (2). Тоді ймовірність того, що капітал страхової компанії буде вищим за якийсь заданий рівень x дорівнює:

$$P(U(t) > x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(Z_{m,n}(t) > x) P(M_t = m, N_t = n),$$

де

$$P(Z_{m,n}(t) > x) = P\left(\sum_{k=1}^m c_k t_k - \sum_{k=1}^n c_k s_k + \sum_{k=1}^n Y_k \leq u - x + \sum_{k=n+1}^m c_k t\right)$$

та

$$P(M_t = m, N_t = n) = e^{-(\alpha+\beta)t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \frac{(\beta t)^m}{m!},$$

коли M_t, N_t - незалежні, або

$$P(M_t = m, N_t = n) = \exp\{-\alpha t\} \left(t - \frac{t}{a}\right)^{n-m} \left(\frac{t}{a}\right)^m \frac{\alpha^n}{(n-m)!m!} I\{n \geq m\},$$

коли M_t, N_t - залежні відповідно до припущення (25) із $a > 1$, або

$$P(M_t = m, N_t = n) = \exp\{-\alpha t/a\} \left(\frac{t}{a} - t\right)^{n-m} t^m \frac{\alpha^n}{(n-m)!m!} I\{n \geq m\},$$

коли M_t, N_t - залежні відповідно до припущення (25) із $a \leq 1$.

Доведення. Розглянемо процес ризику (2) у формі (14). Тоді

$$P(U(t) > x) = P\left(u + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i c_k(t - t_k) I\{M_t = i\} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i c_k(t - s_k) I\{N_t = i\} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i Y_k I\{N_t = i\} > x\right). \quad (31)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} U(t) &= u + \sum_{i=1}^{M_t} c_k(t - t_k) - \sum_{i=1}^{N_t} (c_k(t - s_k) + Y_k) = u + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^m c_k(t - t_k)\right) I\{M_t = m\} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n (c_k(t - s_k) + Y_k)\right) I\{N_t = n\} = \\ &= u + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^m c_k(t - t_k) - \sum_{k=1}^n (c_k(t - s_k) + Y_k)\right) I\{M_t = m, N_t = n\}, \end{aligned}$$

то

$$P(U(t) > x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P(Z_{m,n}(t) > x) P(M_t = m, N_t = n) \quad (32)$$

внаслідок припущення про незалежність між в.в. t_k, s_k, Y_k та M_t, N_t .

Розглянемо окремо добутки ймовірностей у правій частині (32).

$$\begin{aligned} P(Z_{m,n}(t) > x) &= P\left(u + \sum_{k=1}^m c_k(t - t_k) - \sum_{k=1}^n c_k(t - s_k) - \sum_{k=1}^n Y_k > x\right) = \\ &= P\left(\sum_{k=1}^m c_k t_k + \sum_{k=1}^n Y_k - \sum_{k=1}^n c_k s_k \leq u - x + \sum_{k=1}^m c_k t - \sum_{k=1}^n c_k t\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Послідовності $\{t_k\}$ і $\{s_k\}$ є послідовностями незалежних у сукупності однаково розподілених в.в. Тому (33) є згортокою відповідних розподілів.

Припустимо, що лічильні процеси $\{N_t, t \geq 0\}$ і $\{M_t, t \geq 0\}$ незалежні. Очевидно,

$$P(M_t = m, N_t = n) = P(M_t = m)P(N_t = n) = e^{-(\alpha+\beta)t} \frac{(\alpha t)^n (\beta t)^m}{n! m!}. \quad (34)$$

Якщо ж процеси N_t і M_t залежні згідно з (25), то

$$\{M_t = i\} = \{\mu_i \leq t, \mu_{i+1} > t\} = \left\{ \tau_i \leq \frac{t}{a}, \tau_{i+1} > \frac{t}{a} \right\} = \{N_{t/a} = i\}. \quad (35)$$

Знайдемо сумісний розподіл, враховуючи незалежність приростів.

$$\begin{aligned} P(N_t = n, M_t = m) &= P(N_t = n, \mu_m \leq t, \mu_{m+1} > t) \\ &= P\left(N_t = n, \tau_m \leq \frac{t}{a}, \tau_{m+1} > \frac{t}{a}\right) = P(N_t = n, N_{t/a} = m). \end{aligned} \quad (36)$$

Нехай $a > 1$. Тоді, продовжуючи (36),

$$\begin{aligned} P(N_t = n, M_t = m) &= P(N_t - N_{t/a} = n - m, N_{t/a} = m) I\{n \geq m\} = \\ &= P(N_{t-t/a} = n - m) P(N_{t/a} = m) I\{n \geq m\} = \\ &= \exp\left\{-\alpha\left(t - \frac{t}{a}\right)\right\} \frac{(\alpha(t - \frac{t}{a}))^{n-m}}{(n-m)!} \exp\left\{-\alpha\frac{t}{a}\right\} \frac{(\alpha(\frac{t}{a}))^m}{m!} I\{n \geq m\} = \\ &= \exp\{-\alpha t\} \left(t - \frac{t}{a}\right)^{n-m} \left(\frac{t}{a}\right)^m \frac{\alpha^n}{(n-m)!m!} I\{n \geq m\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Аналогічно, коли $a \leq 1$, у (36) матимемо

$$\begin{aligned} P(N_t = n, M_t = m) &= P(N_{t/a} - N_t = n - m, N_t = m) I\{n \geq m\} = \\ &= \exp\{-\alpha t/a\} \left(\frac{t}{a} - t\right)^{n-m} t^m \frac{\alpha^n}{(n-m)!m!} I\{n \geq m\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Твердження теореми випливає з рівностей (32) – (34) і (36) – (38). \square

Висновки.

1. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V., *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*. AMS, Providence, RI, 2000.– 257 p.
2. Kozachenko Yu. V., Pashko A. O., Rozora I. V. *Modelling of stochastic processes and fields (Моделювання випадкових процесів та полів)*. Київ: Zadruga, 2007.– 230 p.
3. Yamnenko R. E., Vasylyk O. I. *Some properties of random Poisson sums with φ -sub-Gaussian terms*. // *Prykl. Stat., Aktuarna Finans. Mat.* – 2007. – 1 – pp. 133-148.
4. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. *О субгауссовских случайных величинах* // *Укр. матем. журнал.* – 1980. – Т. 32, №6, с. 723-730.
5. Козаченко Ю. В., Островский Е. И. *Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских* // *Теория вероятн. и матем. статист.* – 1985. – № 32 – С. 42-53.

Одержано 02.11.2013