УДК 517.928

О. В. Тарасенко (Ніжинський державний ун-т імені Миколи Гоголя)

ПРО АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Using the theory of asymptotic integration of linear singularly perturbed systems of differential equations with degenerations the method of construction of asymptotic solution of the optimal control problem of process, which is described of linear singularly perturbed system of differential equations, in the case of degenerations of main matrix of criterion quality is suggested.

Виходячи з теорії асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь, запропоновано метод побудови асимптотичного розв'язку задачі оптимального керування процесом, що описується лінійною сингулярно збуреною системою диференціальних рівнянь, у випадку виродженості головної матриці критерія якості.

1. Постановка задачі. Досліджується оптимальний процес

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int_0^T (D(t,\varepsilon)u, u)\,dt \to \min_u, \tag{2}$$

який переводить систему із стану

$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon) \tag{3}$$

в стан

$$x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon) \tag{4}$$

за фіксований проміжок часу T, де $A(t,\varepsilon)$ — дійсна квадратна матриця n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$ — дійсна $(n\times m)$-матриця, $D(t,\varepsilon)$ — симетрична додатно визначена матриця m-го порядку, $x(t,\varepsilon)$ і $u(t,\varepsilon)$ — шукані n-вимірний вектор стану та m-вимірний вектор керування відповідно, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$.

У [1] аналогічна задача розглядалась за умови $\det D(t,0) \neq 0$, $\forall t \in [0;T]$. У даній роботі вивчається більш складний випадок, коли матриця $D(t,\varepsilon)$ критерія якості вироджується при $\varepsilon \to 0$.

Будемо передбачати, що виконуються умови:

1° Матриці $A(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ і $D(t,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(t),\ C(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k C_k(t),\ D(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k D_k(t), \tag{5}$$

коефіцієнти яких нескінченно диференційовні на $[0;T]$.

2° Вектори початкового і кінцевого станів зображуються у вигляді розвинень

$$x_1(\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k x_k^{(1)},\ x_2(\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k x_k^{(2)}, \tag{6}$$

3° Матриця $A_0(t)$ має на заданому відрізку $[0;T]$ n простих власних значень $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n}$;

4° $\mathrm{Re}\lambda_i(t)<0$, $\forall t\in[0;T]$.

5° $\lambda_i(t)+\lambda_j(t)\neq 0$, $i,j=\overline{1,n}$, $\forall t\in[0;T]$.

6° $\det D_0(t)\equiv 0$, $\mathrm{rank} D_0(t)=r$, $\forall t\in[0;T]$.

7° $\det\left(G^*(t)D_1(t)G(t)\right)\neq 0$, $\forall t\in[0;T]$, де $G(t)=[g_1(t),\ldots,g_{m-r}(t)]$, $g_i(t)$, $i=\overline{1,m-r}$, — базисні вектори нуль-простору матриці $D_0(t)$.

8° Область допустимих значень для керування $u(t,\varepsilon)$ збігається з усім заданим m–вимірним простором.

За таких умов задача (1)–(4) полягає у відшуканні вектора стану $x(t,\varepsilon)$ та керування $u(t,\varepsilon)$ у вигляді асимптотичних розвинень за степенями малого параметра ε.

Застосувавши до задачі (1), (2) принцип максимуму Л. С. Понтрягіна [2], побудуємо функцію Гамільтона

$$H(t,x,p,u)=\varepsilon^{-h}(A(t,\varepsilon)x,p)+\varepsilon^{-h}(C(t,\varepsilon)u,p)-\frac{1}{2\varepsilon^h}(D(t,\varepsilon)u,u),$$

де p — n-вимірний вектор спряжених змінних.

Для мінімізації критерія (2) необхідно, щоб

$$\mathrm{grad}_u H=\varepsilon^{-h}C^*(t,\varepsilon)p-\varepsilon^{-h}D(t,\varepsilon)u=0;$$

$$\frac{dp}{dt}=-\mathrm{grad}_x H=-\varepsilon^{-h}A^*(t,\varepsilon)p.$$

Одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned}\varepsilon^h\frac{dx}{dt}&=A(t,\varepsilon)x+C(t,\varepsilon)u;\\ \varepsilon^h\frac{dp}{dt}&=-A^*(t,\varepsilon)p,\\ 0&=C^*(t,\varepsilon)p-D(t,\varepsilon)u.\end{aligned} \tag{7}$$

Увівши в розгляд $(2n+m)$-вимірний вектор

$$y(t,\varepsilon)=\mathrm{col}(x(t,\varepsilon),p(t,\varepsilon),u(t,\varepsilon)) \tag{8}$$

співвідношення (7) запишемо у вигляді

$$\varepsilon^h\tilde{B}\dot{y}=\tilde{A}(t,\varepsilon)y, \tag{9}$$

де матриця $\tilde{A}(t,\varepsilon)$ зображується у вигляді асимптотичного розвинення

$$\tilde{A}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{A}_k(t),$$

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix}E&0&0\\0&E&0\\0&0&0\end{pmatrix},\tilde{A}_k(t)=\begin{pmatrix}A_k(t)&0&C_k(t)\\0&-A_k^*(t)&0\\0&C_k^*(t)&-D_k(t)\end{pmatrix},k=0,1,2,\ldots$$

— блочні матриці, в яких E — одинична матриця n-го порядку, а символом 0 позначено нульові блоки відповідних розмірів. Крайові умови (3), (4) подамо у вигляді:

$$My(0,\varepsilon)+Ny(T,\varepsilon)=\begin{pmatrix} x_1(\varepsilon)\\ x_2(\varepsilon)\end{pmatrix}=y_0(\varepsilon), \tag{10}$$

$$M=\begin{pmatrix} E & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ E & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Таким чином, задача оптимального керування (1)–(4) зводиться до двоточкової крайової задачі (9), (10).

2. Побудова формального розв'язку. Згідно з [3] умова 7° забезпечує неособливість матриці $D(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon>0$. При цьому обернена до неї матриця матиме полюс по ε першого порядку.

У даному випадку гранична в'язка матриць $\tilde{A}_0(t)-\lambda\tilde{B}(t)$ системи рівнянь (9) буде сингулярною, оскільки $\det(\tilde{A}_0(t)-\lambda\tilde{B})=(-1)^{n+m}\det(A_0-\lambda E)\det(A_0^*+\lambda E)\det D_0(t)\equiv 0$, $\forall t\in[0;T]$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Але її регулярне "ядро"містить $2n$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda-\lambda_i(t)$, $\lambda+\lambda_j(t)$, $i,j=\overline{1,n}$. Крім того, оскільки

$$\operatorname{deg}\det\left(\tilde{A}(t,\varepsilon)-\lambda\tilde{B}(t)\right)=2n=\operatorname{rank}\tilde{B},$$

то система (9) задовольняє умову "ранг-степінь" [4]. Тому, як показано в [5] загальний розв'язок цієї системи являє собою лінійну комбінацію її $2n$ лінійно незалежних розв'язків, що відповідають скінченним елементарним дільникам.

Згідно з [3] група розв'язків, що відповідають елементарним дільникам $\lambda-\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, будується у вигляді

$$y_i(t,\varepsilon)=v_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right), i=\overline{1,n}, \tag{12}$$

де $v_i(t,\varepsilon)$ — шукані $(2n+m)$-вимірні вектори, $\lambda_i(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, що зображуються формальними розвиненнями за степенями ε:

$$v_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_{ki}(t),\ \lambda_i(t,\varepsilon)=\lambda_i(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t),\ i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Підставивши вектор (12) у систему (9), дістанемо

$$\tilde{A}(t,\varepsilon)v_i(t,\varepsilon)=\lambda_i(t,\varepsilon)\tilde{B}v_i(t,\varepsilon)+\varepsilon^h\tilde{B}v_i'(t,\varepsilon). \tag{14}$$

Позначивши $v_i(t,\varepsilon)=\operatorname{col}\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon),v_i^{(2)}(t,\varepsilon),v_i^{(3)}(t,\varepsilon)\right)$, $v_{ki}(t)=\operatorname{col}\left(v_{ki}^{(1)}(t),\ v_{ki}^{(2)}(t),\ v_{ki}^{(3)}(t)\right)$, $k=0,1,\ldots$, де $v_{ki}^{(1)}(t,\varepsilon)$, $v_{ki}^{(2)}(t,\varepsilon)$ - n-вимірні вектори, а $v_{ki}^{(3)}(t,\varepsilon)$ - m-вимірний, і врахувавши структуру матриць $\tilde{A}(t,\varepsilon)$, $\tilde{B}$, рівняння (14) запишемо у вигляді системи трьох векторних рівнянь

$$A(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon)+C(t,\varepsilon)v_i^{(3)}(t,\varepsilon)=\lambda_i(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon)+\varepsilon^h\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)'; \tag{15}$$

$$-A^*(t,\varepsilon)v_i^{(2)}(t,\varepsilon)=\lambda_i(t,\varepsilon)v_i^{(2)}(t,\varepsilon)+\varepsilon^h\left(v_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)'; \tag{16}$$

$$C^*(t,\varepsilon)v_i^{(2)}(t,\varepsilon) - D(t,\varepsilon)v_i^{(3)}(t,\varepsilon) = 0. \tag{17}$$

Розглянемо кожне з цих рівнянь окремо. Підставивши в рівняння (16) розвинення (5), (13) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, матимемо

$$(A_0^*(t) + \lambda_i(t)E)\, v_{0i}^{(2)}(t) = 0;$$

$$(A_0^*(t) + \lambda_i(t)E)\, v_{ki}^{(2)}(t) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_{si}(t) v_{k-s,i}^{(2)}(t) + \sum_{s=1}^{k} A_s^*(t) v_{k-s,i}^{(2)}(t) + \left(v_{k-h,i}^{(2)}(t)\right)',$$

$k = 1, 2, \ldots$

Оскільки згідно з 5° $\det(A_0^*(t) + \lambda_i(t)E) \neq 0$, $\forall t \in [0; T]$, то з цих рівностей випливає, що $v_{ki}^{(2)}(t) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Тому $v_i^{(2)}(t,\varepsilon) = 0$. Оскільки ж матриця $D(t,\varepsilon)$ також неособлива при досить малих $\varepsilon > 0$ завдяки умові 6°, то з (17) випливає, що й $v_i^{(3)}(t,\varepsilon) = 0$.

Отже,

$$v_i(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon), 0, 0\right),$$

де вектор $v_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$A(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon) = \lambda_i(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^h \left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)',$$

що збігається з відповідним однорідним рівнянням, дослідженим у [3] (при $B(t,\varepsilon) = E$), з якого визначаються коефіцієнти формальних розвинень для відповідних розв'язків. Тому вектори $v_{ki}^{(1)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, і функції $\lambda_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \ldots$, визначаються за наступними рекурентними формулами:

$$\lambda_k^{(i)}(t) = -\left(g_{ki}(t), \psi_i(t)\right), \tag{18}$$

$$v_{0i}^{(1)}(t) = \varphi_i(t),\ v_{ki}^{(1)}(t) = H_i(t)b_{ki}(t),\ k = 1, 2, \ldots; \tag{19}$$

$$b_{ki}(t) = \lambda_k^{(i)}(t)\varphi_i(t) + g_{ki}(t);$$

$$g_{ki}(t) = \sum_{s=1}^{k-1} \lambda_s^{(i)}(t) v_{k-s,i}^{(1)}(t) - \sum_{s=1}^{k-1} A_s(t) v_{k-s,i}^{(1)}(t) + \left(v_{k-h,i}(t)^{(1)}\right)',$$

$(k = 1, 2, \ldots, i = \overline{1, n})$.

Що ж стосується розв'язків, які відповідають елементарним дільникам $\lambda + \lambda_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, то вони будуються у вигляді

$$\tilde{y}_i(t,\varepsilon) = \tilde{v}_i(t,\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_t^T \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right),\ i = \overline{1, n}, \tag{20}$$

де вектори $\tilde{v}_i(t,\varepsilon)$ і функції $\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)$ зображуються формальними розвиненнями

$$\tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_{ki}(t),\ \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon) = -\lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{\lambda}_k^{(i)}(t),\ i = \overline{1, n}. \tag{21}$$

У даному випадку процедура визначення коефіцієнтів відповідних розвинень (21) зазнає певних труднощів, обумовлених особливістю матриці $D_0(t)$.

Підставивши (20) у систему (9), введемо позначення $\tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon), \varepsilon\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon), \tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon)\right)$, а вектори $\tilde{v}_i^{(j)}(t,\varepsilon)$, $j=\overline{1,3}$, подамо у вигляді розвинень

$$\tilde{v}_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_{ki}^{(j)}(t),\ j=\overline{1,3}. \tag{22}$$

Тоді одержимо рівняння

$$\tilde{A}(t,\varepsilon)\tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)\tilde{B}\tilde{v}_i(t,\varepsilon) + \varepsilon^h \tilde{B}\tilde{v}_i'(t,\varepsilon), \tag{23}$$

яке запишеться у вигляді системи трьох векторних рівнянь

$$A(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^h\left(\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)'; \tag{24}$$

$$-A^*(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^h\left(\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)'; \tag{25}$$

$$D(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) = \varepsilon C^*(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon). \tag{26}$$

Рівняння (25) збігається з рівнянням, з якого визначаються коефіцієнти формальних розвинень для відповідних розв'язків спряженої системи

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dt} = -A^*(t,\varepsilon)y. \tag{27}$$

Тому, провівши міркування аналогічні до викладених у [3, с. 93], вектори $\tilde{v}_{ki}^{(2)}$, $k=0,1,\ldots$, і функції $\tilde{\lambda}_k^{(i)}$, $k=1,2,\ldots$, визначимо за рекурентними формулами:

$$\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t) = -\lambda_k^{(i)}(t),\ k=1,2,\ldots; \tag{28}$$

$$\tilde{v}_{0i}^{(2)}(t) = \psi_i(t);\ \tilde{v}_{ki}(t) = H_i^*(t)\tilde{b}_{ki}^{(2)}(t),\ k=1,2,\ldots; \tag{29}$$

$$\tilde{b}_{ki}^{(2)}(t) = -\lambda_k^{(i)}(t)\psi_i(t) + \tilde{g}_{ki}^{(2)}(t),$$

$$\tilde{g}_{ki}^{(2)}(t) = -\sum_{s=1}^{k-1}\tilde{\lambda}_s^{(i)}(t)\tilde{v}_{k-s,i}^{(2)}(t) - \sum_{s=1}^{k} A_s^*(t)\tilde{v}_{k-s,i}^{(2)}(t) - \left(\tilde{v}_{k-h,i}^{(2)}(t)\right)';$$

$(k=1,2,\ldots, i=\overline{1,n})$.

Підставивши відповідні розвинення (шукані для векторів $\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon)$ і знайдені — для вектора $\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon)$ та функцій $\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)$) у рівняння (24), (26), прирівняємо в них вирази при однакових степенях ε. Дістанемо

$$D_0(t)\tilde{v}_{0i}^{(3)} = 0; \tag{30}$$

$$D_0(t)\tilde{v}_{ki}^{(3)} = \tilde{b}_{ki}^{(3)}(t),\ k=1,2,\ldots; \tag{31}$$

$$(A_0(t) + \lambda_i(t)E)\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t) = \tilde{b}_{ki}^{(1)}(t),\ k=0,1,\ldots, \tag{32}$$

де

$$\tilde{b}_{ki}^{(3)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1} C_s^*(t)\tilde{v}_{k-s-1,i}^{(2)}(t) - \sum_{s=1}^{k} D_s(t)\tilde{v}_{k-s,i}^{(3)}(t),\ k = 1, 2, \ldots; \tag{33}$$

$$\tilde{b}_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s^{(i)}(t)\tilde{v}_{k-s,i}^{(1)}(t) - \sum_{s=1}^{k} A_s(t)\tilde{v}_{k-s,i}^{(1)}(t) - \sum_{s=0}^{k} C_s(t)\tilde{v}_{k-s,i}^{(3)}(t) + \left(\tilde{v}_{k-h,i}^{(1)}(t)\right)',\ k = 0, 1, \ldots. \tag{34}$$

З рівняння (30) знайдемо

$$\tilde{v}_{0i}^{(3)} = \sum_{j=1}^{m-r} \alpha_{0j}^{(i)}(t) g_j(t) = G(t)\alpha_0^{(i)}(t), \tag{35}$$

де $\alpha_0^{(i)}(t) = \mathrm{col}\left(\alpha_{01}^{(i)}(t), \ldots, \alpha_{0,m-r}^{(i)}(t)\right)$ — $(m-r)$-вимірний вектор, який підлягає визначенню.

Рівняння (31) будуть розв'язними відносно $\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t)$ тоді і тільки тоді, коли його права частина – вектор $\tilde{b}_{ki}^{(3)}(t)$ – буде анулюватись під дією матриці $G^*(t)$:

$$G^*(t)\tilde{b}_{ki}^{(3)}(t) = 0,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{36}$$

Із врахуванням (33), (35), (29) при $k = 1$ ця умова записується у вигляді $G^*C^*\psi_i - G^*D_1G\alpha_0^{(i)} = 0$, звідки завдяки 7° знайдемо

$$\alpha_0^{(i)}(t) = (G^*D_1G)^{-1}G^*C_0^*\psi_i. \tag{37}$$

Цим самим однозначно визначено вектори $\tilde{v}_{0i}^{(3)}(t)$ і $\tilde{b}_{1i}^{(3)}(t)$, а відповідне рівняння (31) буде розв'язним відносно вектора $\tilde{v}_{1i}^{(3)}(t)$, який знайдемо за формулою

$$\tilde{v}_{1i}^{(3)}(t) = D_0^-(t)\tilde{b}_{1i}^{(3)}(t) + G(t)\alpha_1^{(i)}(t),$$

де $\alpha_1^{(i)}(t) = \mathrm{col}\left(\alpha_{11}^{(i)}(t), \ldots, \alpha_{1,m-r}^{(i)}(t)\right)$ визначається на наступному кроці з умови (35) при $k = 2$; D_0^- — матриця, напівобернена до матриці D_0.

Міркуючи так і далі, для знаходження векторів $\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t)$ отримаємо такі рекурентні формули:

$$\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t) = D_0^-(t)\tilde{b}_{ki}^{(3)}(t) + G(t)\alpha_k^{(i)}(t), \tag{38}$$

$$\alpha_k^{(i)}(t) = (G^*D_1G)^{-1}G^*\left[\sum_{s=0}^{k} C_s^*\tilde{v}_{k-s,i}^{(2)} - \sum_{s=2}^{k+1} D_s^*\tilde{v}_{k+1-s,i}^{(3)} - D_1D_0^-\tilde{b}_{ki}^{(3)}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, i = \overline{1, n}. \tag{39}$$

Оскільки вираз (34) для векторів $\tilde{b}_{ki}^{(1)}(t)$ тепер містить відомі величини, а матриця $R_0^{(i)}(t) = A_0(t) + \lambda_i(t)E$ неособлива згідно з умовою 5°, то вектори $\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t)$ однозначно визначатимуться за рекурентними формулами

$$\tilde{v}_{0i}^{(1)}(t) = -\left(R_0^{(i)}(t)\right)^{-1} C_0(t)G(t)(G^*D_1G)^{-1}G^*C_0^*\psi_i, \tag{40}$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t) = \left(R_0^{(i)}(t)\right)^{-1} \tilde{b}_{ki}^{(1)}(t),\ k = 1, 2, \ldots,\ i = \overline{1, n}. \tag{41}$$

Таким чином, розв'язок крайової задачі (9), (10), а відповідно і розв'язок задачі оптимального керування (1)–(4), будемо шукати у вигляді

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t, \varepsilon) c^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i(t, \varepsilon) \tilde{c}^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau\right), \tag{42}$$

де $c^{(i)}, \tilde{c}^{(i)}, i = \overline{1, n},$ — скалярні множники, які зображуються розвиненнями

$$c^{(i)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k^{(i)}(t),\ \tilde{c}^{(i)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{c}_k^{(i)}(t),$$

коефіцієнти яких визначимо із крайових умов.

Підставивши (42) у крайову умову (10) і врахувавши структуру матриць M, N, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^{(1)}(0, \varepsilon) c^{(i)}(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^{(1)}(0, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \lambda^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) \tilde{c}^{(i)}(\varepsilon) = x_1(\varepsilon);$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^{(1)}(T, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \lambda^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) c^{(i)}(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^{(1)}(T, \varepsilon) \tilde{c}^{(i)}(\varepsilon) = x_2(\varepsilon),$$

або у векторно-матричній формі

$$\begin{pmatrix} V^{(1)}(0, \varepsilon) & \tilde{V}^{(1)}(0, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \Lambda(\tau, \varepsilon) d\tau\right) \\ V^{(1)}(T, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \Lambda(\tau, \varepsilon) d\tau\right) & \tilde{V}^{(1)}(T, \varepsilon) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} c(\varepsilon) \\ \tilde{c}(\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(\varepsilon) \\ x_2(\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{43}$$

де

$$\Lambda(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t, \varepsilon), \lambda_2(t, \varepsilon), \ldots, \lambda_n(t, \varepsilon)\},$$

$$V^{(1)}(t, \varepsilon) = \left[v_1^{(1)}(t, \varepsilon), v_2^{(1)}(t, \varepsilon), \ldots, v_n^{(1)}(t, \varepsilon)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k^{(1)}(t),$$

$$\tilde{V}^{(1)}(t, \varepsilon) = \left[\tilde{v}_1^{(1)}(t, \varepsilon), \tilde{v}_2^{(1)}(t, \varepsilon), \ldots, \tilde{v}_n^{(1)}(t, \varepsilon)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{V}_k^{(1)}(t),$$

$$V_k^{(1)}(t) = \left[v_{k1}^{(1)}(t), \ldots, v_{kn}^{(1)}(t)\right],\ \tilde{V}_k^{(1)}(t) = \left[\tilde{v}_{k1}^{(1)}(t), \ldots, \tilde{v}_{kn}^{(1)}(t)\right], \tag{44}$$

$$c(\varepsilon) = \mathrm{col}\left[c^{(1)}(\varepsilon), \dots, c^{(n)}(\varepsilon)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k,$$

$$\tilde{c}(\varepsilon) = \mathrm{col}\left[\tilde{c}^{(1)}(\varepsilon), \dots, \tilde{c}^{(n)}(\varepsilon)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{c}_k,$$

$$c_k = \mathrm{col}\left(c_k^{(1)}, \dots, c_k^{(n)}\right), \ \tilde{c}_k = \mathrm{col}\left(\tilde{c}_k^{(1)}, \dots, \tilde{c}_k^{(n)}\right), k = 0, 1, \dots$$

Оскільки згідно з 4° доданки, що містять експоненти, є експоненціально малими, то, слідуючи [6, 7], знехтуємо цими доданками і замість (43) розглядатимемо рівності

$$\begin{pmatrix} V^{(1)}(0,\varepsilon) & 0 \\ 0 & \tilde{V}^{(1)}(T,\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\varepsilon) \\ \tilde{c}(\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(\varepsilon) \\ x_2(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

або

$$V^{(1)}(0,\varepsilon)c(\varepsilon) = x_1(\varepsilon), \tag{45}$$

$$\tilde{V}^{(1)}(T,\varepsilon)\tilde{c}(\varepsilon) = x_2(\varepsilon), \tag{46}$$

з яких і будемо визначати сталі $c_k^{(i)}, \tilde{c}_k^{(i)}, k = 0, 1, \dots, i = \overline{1, n}$.

Прирівнявши в (45), (46) коефіцієнти при однакових степенях ε, дістанемо

$$V_0^{(1)}(0)c_0 = x_0^{(1)}; \ \tilde{V}_0^{(1)}(T)\tilde{c}_0 = x_0^{(2)}; \tag{47}$$

$$V_0^{(1)}(0)c_k = x_k^{(1)} - \sum_{s=1}^{k} V_s^{(1)}(0)c_{k-s}; \ \tilde{V}_0^{(1)}(T)\tilde{c}_k = x_k^{(2)} - \sum_{s=1}^{k} \tilde{V}_s^{(1)}(T)\tilde{c}_{k-s},$$

$k = 1, 2, \dots$.

Згідно з (19), (40)

$$V_0^{(1)}(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)];$$

$$\tilde{V}_0^{(1)}(t) = -\left[\left(R_0^{(1)}\right)^{-1} C_0 G(G^* D_1 G)^{-1} G^* C_0^* \psi_1, \dots, \left(R_0^{(n)}\right)^{-1} C_0 G(G^* D_1 G)^{-1} G^* C_0^* \psi_n\right]. \tag{48}$$

Оскільки вектори $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, лінійно незалежні при всіх $t \in [0; T]$, то $\det V_0^{(1)}(t) \neq 0$, $\forall t \in [0; T]$. Припустимо, що

$$\det \tilde{V}_0^{(1)}(T) \neq 0. \tag{49}$$

Тоді з рівностей (47) знайдемо

$$c_0 = \left(V_0^{(1)}(0)\right)^{-1} x_0^{(1)}; \ \tilde{c}_0 = \left(\tilde{V}_0^{(1)}(T)\right)^{-1} x_0^{(2)};$$

$$c_k = \left(V_0^{(1)}(0)\right)^{-1} \left(x_k^{(1)} - \sum_{s=1}^{k} V_s^{(1)}(0)c_{k-s}\right), \ k = 1, 2, \dots;$$

$$\tilde{c}_k = \left(\tilde{V}_0^{(1)}(T)\right)^{-1} \left(x_k^{(2)} - \sum_{s=1}^{k} \tilde{V}_s^{(1)}(T)\tilde{c}_{k-s}\right), \ k = 1, 2, \dots$$

Визначення скалярів $c_k^{(i)}$, $\tilde{c}_k^{(i)}, k = 0, 1, \ldots, i = \overline{1, n}$, завершує побудову формального розв'язку (42).

3. Асимптотичний характер формального розв'язку. Покажемо, що побудована описаним способом векторна функція (42) є асимптотичним зображенням точного розв'язку даної задачі керування, міркуючи аналогічно до [1]. Для цього розглянемо l-наближення, обірвавши відповідні формальні ряди на l-му члені:

$$y_l(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{l} \varepsilon^k \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{k} v_{si}(t) c_{k-s}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=1}^{l} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{l} \varepsilon^k \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{k} \tilde{v}_{si}(t) \tilde{c}_{k-s}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=1}^{l} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right).$$

Підставивши це наближення в диференціальний вираз

$$L(y) = \tilde{A}(t,\varepsilon) y - \varepsilon^h \tilde{B}(t) \frac{dy}{dt}$$

та крайову умову (10), дістанемо

$$L(y_l(t,\varepsilon)) = O\left(\varepsilon^{l+1}\right),$$

$$y_0(\varepsilon) - M y_l(0,\varepsilon) - N y_l(T,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{l+1}\right).$$

Тоді, зробивши в системі (9) заміну

$$y(t,\varepsilon) = y_l(t,\varepsilon) + z_l(t,\varepsilon), \tag{50}$$

отримаємо таку крайову задачу для вектора нев'язки $z_l(t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon^h \tilde{B} \frac{dz_l(t,\varepsilon)}{dt} = \tilde{A}(t,\varepsilon) z_l(t,\varepsilon) + \varepsilon^{l+1} a(t,\varepsilon); \tag{51}$$

$$M z_l(0,\varepsilon) + N z_l(T,\varepsilon) = \varepsilon^{l+1} b(\varepsilon), \tag{52}$$

де $a(t,\varepsilon)$, $b(t)$ — деякі рівномірно обмежені $(2n+m)$- та m-вимірні вектори відповідно. Позначимо $z_l(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(z_l^{(1)}(t,\varepsilon); z_l^{(2)}(t,\varepsilon); z_l^{(3)}(t,\varepsilon)\right)$, де згідно з (50), (8)

$$\begin{aligned} z_l^{(1)}(t,\varepsilon) &= x(t,\varepsilon) - x_l(t,\varepsilon); \\ z_l^{(2)}(t,\varepsilon) &= p(t,\varepsilon) - p_l(t,\varepsilon); \\ z_l^{(3)}(t,\varepsilon) &= u(t,\varepsilon) - u_l(t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{53}$$

а $x_l(t,\varepsilon)$, $p_l(t,\varepsilon)$, $u_l(t,\varepsilon)$ — вектор-функції відповідного порядку, що утворюють $(2n+m)$-вимірний вектор $y_l(t,\varepsilon)$. Тоді рівняння (51) запишеться у вигляді системи трьох векторних рівнянь відносно $z_l^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$:

$$\varepsilon^h \frac{dz_l^{(1)}}{dt} = A(t,\varepsilon) z_l^{(1)} + C(t,\varepsilon) z_l^{(3)} + \varepsilon^{l+1} a_1(t,\varepsilon);$$

$$\varepsilon^h \frac{dz_l^{(2)}}{dt} = -A^*(t,\varepsilon) z_l^{(2)} + \varepsilon^{l+1} a_2(t,\varepsilon);$$

$$0 = C^*(t,\varepsilon) z_l^{(2)} - D(t,\varepsilon) z_l^{(3)} + \varepsilon^{l+1} a_3(t,\varepsilon),$$

де $a_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,3}$, — вектори відповідної розмірності, що утворюють $a(t,\varepsilon)$.

Оскільки завдяки умові 6° матриця $D^{-1}(t,\varepsilon)$ має полюс першого порядку по ε, то з третього рівняння цієї системи маємо

$$z_l^{(3)}(t,\varepsilon)=D^{-1}(t,\varepsilon)C^*(t,\varepsilon)z_l^{(2)}(t,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^l\right). \tag{54}$$

Позначивши

$$\tilde{z}_l(t,\varepsilon)=\mathrm{col}\left(z_l^{(1)}(t,\varepsilon);z_l^{(2)}(t,\varepsilon)\right), \tag{55}$$

і врахувавши (54), перші два рівняння запишемо у вигляді

$$\varepsilon^h\frac{d\tilde{z}_l}{dt}=\hat{A}(t,\varepsilon)\tilde{z}_l+\varepsilon^{l+1}g(t,\varepsilon), \tag{56}$$

де

$$\hat{A}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} A(t,\varepsilon) & C(t,\varepsilon)D^{-1}(t,\varepsilon)C^*(t,\varepsilon)\\ 0 & -A^*(t,\varepsilon)\end{pmatrix}, \tag{57}$$

а $g(t,\varepsilon)$ — $2n$-вимірний вектор, рівномірно обмежений на $[0;T]$.

З (52) отримаємо й відповідну крайову умову для вектора $\tilde{z}_l(t,\varepsilon)$:

$$M_1\tilde{z}_l(0,\varepsilon)+N_1\tilde{z}_l(T,\varepsilon)=\varepsilon^{l+1}b(\varepsilon), \tag{58}$$

де M_1, N_1 — блочні $(2n\times 2n)$-матриці вигляду

$$M_1=\begin{pmatrix} E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ N_1=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ E & 0\end{pmatrix}.$$

Покажемо, що крайова задача (56), (58) має єдиний розв'язок і знайдемо його оцінку за нормою.

Розглянемо $2n$-вимірну однорідну систему рівнянь

$$\varepsilon^h\frac{d\tilde{z}}{dt}=\hat{A}(t,\varepsilon)\tilde{z}, \tag{59}$$

яка відповідає (56). Згідно з (57) її головна матриця

$$\hat{A}_0(t)=\hat{A}(t,0)=\begin{pmatrix} A_0(t) & C_0(t)D_0^{-1}(t)C_0^*(t)\\ 0 & -A_0^*(t)\end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен цієї матриці $\det\left(\hat{A}_0-\lambda E\right)=(-1)^n\det(A_0-\lambda E)\times$ $\times\det(A_0^*+\lambda E)$, звідки випливає, що її власними значеннями є функції $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, і $-\lambda_j(t)$, $j=\overline{1,n}$. Неважко переконатися, що відповідними власними векторами будуть

$$\mathrm{col}(\varphi_i(t),0) \quad \text{і} \quad \mathrm{col}\left(-(R_0^{(i)}(t))^{-1}C_0(t)D_0^{-1}(t)C_0^*(t)\psi_j(t),\psi_j(t)\right).$$

Тому згідно з [8,9] фундаментальна матриця системи (59) виражається асимптотичною формулою

$$Z(t,\varepsilon)=\left(\left[(V_l(t,\varepsilon),\tilde{V}_l(t,\varepsilon)\right]+O\left(\varepsilon^{l+1-h}\right)\right)\times$$
$$\times\mathrm{diag}\left\{\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_l(\tau,\varepsilon)d\tau\right),\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\Lambda_l(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\right\}, \tag{60}$$

де
$$V_l(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k V_k(t),\ \tilde V_l(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k \tilde V_k(t),\ \Lambda_l(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k \Lambda_k(t),$$

$V_k(t)$, $\tilde V_k(t)$ — прямокутні матриці розмірністю $2n\times n$, які, як неважко переконатися, складаються з матричних блоків (44) та $\tilde V_k^{(2)}=\left[\tilde v_{k1}^{(2)},\dots,\tilde v_{kn}^{(2)}\right]$:

$$V_k(t)=\begin{bmatrix} V_k^{(1)}(t)\\ 0\end{bmatrix},\ \tilde V_k(t)=\begin{bmatrix} \tilde V_k^{(1)}(t)\\ \tilde V_k^{(2)}(t)\end{bmatrix},$$

$\Lambda_0(t)=\operatorname{diag}\{\lambda_1(t),\dots,\lambda_n(t)\}$, $\Lambda_k(t)=\operatorname{diag}\left\{\lambda_k^{(1)}(t),\dots,\lambda_k^{(n)}(t)\right\}$, $k=\overline{1,l}$. При цьому матриці $V_0^{(1)}(t)$, $\tilde V_0^{(1)}(t)$ мають вигляд (48), а

$$\tilde V_0^{(2)}(t)=[\psi_1(t),\psi_2(t),\dots,\psi_n(t)].$$

Тоді, позначивши

$$Z_1(t,\varepsilon)=\left(\left[V_l(t,\varepsilon);\tilde V_l(t,\varepsilon)\right]+O\left(\varepsilon^{l-h}\right)\right)\operatorname{diag}\left\{\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_l(\tau,\varepsilon)d\tau\right);0\right\};$$

$$Z_2(t,\varepsilon)=\left(\left[V_l(t,\varepsilon);\tilde V_l(t,\varepsilon)\right]+O\left(\varepsilon^{l-h}\right)\right)\operatorname{diag}\left\{0;\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\Lambda_l(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\right\},$$

загальний розв'язок системи (56) подамо у вигляді

$$\begin{aligned}\tilde z_l(t,\varepsilon)=Z(t,\varepsilon)c(\varepsilon)+\varepsilon^{l-h}\int_0^t Z_1(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)g(\tau,\varepsilon)d\tau-\\ -\varepsilon^{l+1-h}\int_t^T Z_2(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)g(\tau,\varepsilon)d\tau.\end{aligned}\tag{61}$$

Підставивши (61) у крайову умову (58), маємо

$$\begin{aligned}[M_1Z(0,\varepsilon)+N_1Z(T,\varepsilon)]c(\varepsilon)=\varepsilon^{l+1}b(\varepsilon)+\varepsilon^{l-h}M_1\int_0^T Z_2(0,\varepsilon)Z_1(\tau,\varepsilon)g(\tau,\varepsilon)d\tau-\\ -\varepsilon^{l-h}N_1\int_0^T Z_1(T,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)g(\tau,\varepsilon)d\tau.\end{aligned}\tag{62}$$

Врахувавши (60) та структуру матриць M_1, N_1, а також умову 4°, знайдемо

$$M_1Z(0,\varepsilon)+N_1Z(T,\varepsilon)=\begin{bmatrix} V_l^{(1)}(0,\varepsilon) & 0\\ 0 & \tilde V_l^{(1)}(T,\varepsilon)\end{bmatrix}+O\left(\varepsilon^{l-h}\right).$$

Оскільки $\det V_l^{(1)}(0,\varepsilon)\neq 0$ при досить малих ε завдяки лінійній незалежності векторів $\varphi_i(0)$, що утворюють матрицю $V_0^{(1)}(0)$, а $\det V_l^{(1)}(T,\varepsilon)\neq 0$ за умовою

(49), то $\det(M_1 Z(0,\varepsilon) + N_1 Z(T,\varepsilon)) \neq 0$ при досить малих $\varepsilon \geq 0$, а матриці $\left(V_l^{(1)}(0,\varepsilon)\right)^{-1}$ і $\left(\tilde{V}_l^{(1)}(T,\varepsilon)\right)^{-1}$ обмежені. Тому рівняння (62) однозначно розв'язне відносно вектора $c(\varepsilon)$. Знайшовши з нього

$$c(\varepsilon)=\left[\operatorname{diag}\left(V_l^{(1)}(t,\varepsilon);\tilde{V}_l^{(1)}(t,\varepsilon)\right)+O\left(\varepsilon^{l+1-h}\right)\right]^{-1}\left[\varepsilon^{l+1-h}M_1\int_0^T Z_2(0,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\times\right.$$

$$\left.\times\, g(\tau,\varepsilon)d\tau-\varepsilon^{l+1-h}N_1\int_0^T Z_1(T,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)g(\tau,\varepsilon)d\tau+\varepsilon^{l+1}b(\varepsilon)\right],$$

отримаємо єдиний розв'язок задачі (56), (58), який, слідуючи [7], запишемо у вигляді

$$\tilde{z}_l(t,\varepsilon)=(Gq)(t,\varepsilon)+\varepsilon^{l+1}Z(t,\varepsilon)\left[\operatorname{diag}\left(V_l^{(1)}(0,\varepsilon);\tilde{V}_l^{(1)}(T,\varepsilon)\right)+O\left(\varepsilon^{l-h}\right)\right]^{-1}b(\varepsilon), \quad (63)$$

де $q(t,\varepsilon)=\varepsilon^{l-h}g(t,\varepsilon)$;

$$(Gq)(t,\varepsilon)=\int_0^T G_0(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau$$

— оператор Гріна відповідної однорідної задачі, в якому $G_0(t,\tau,\varepsilon)$ — матриця Гріна, що має вигляд

$$G_0(t,\tau,\varepsilon)=\begin{cases} Z(t,\varepsilon)\left[\operatorname{diag}\left\{\left(V_l^{(1)}(0,\varepsilon)\right);\left(\tilde{V}_l^{(1)}(T,\varepsilon)\right)\right\}+O\left(\varepsilon^{l-h}\right)\right]^{-1}\times \\ \times\left(M_1Z_2(0,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\quad N_1Z_1(T,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\right)+ \\ +Z_1(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon),\ \text{якщо } 0\leq\tau\leq t\leq T; \\ Z(t,\varepsilon)\left[\operatorname{diag}\left\{\left(V_l^{(1)}(0,\varepsilon)\right);\left(\tilde{V}_l^{(1)}(T,\varepsilon)\right)\right\}+O\left(\varepsilon^{l-h}\right)\right]^{-1}\times \\ \times\left(M_1Z_2(0,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)-N_1Z_1(T,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\right)- \\ -Z_2(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon),\ \text{якщо } 0\leq t\leq\tau\leq T; \end{cases}$$

4. Формулювання основного результату. Виходячи з умови 6° та структури матриць $Z_1(t,\varepsilon)$, $Z_2(t,\varepsilon)$, $Z(t,\varepsilon)$, M_1, N_1, неважко переконатися, що всі матричні і векторні функції, які містяться в (63), рівномірно обмежені на $[0;T]$. Тому, перейшовши в рівності (63) до оцінок за нормою, дістанемо таку оцінку для шуканої нев'язки: $\|\tilde{z}_l(t,\varepsilon)\|\leq c\varepsilon^{l-h}$, де c — деяка стала, що не залежить від ε. Тоді, згідно з (53),(54), (55) одержимо відповідні оцінки й для шуканих вектора стану $x(t,\varepsilon)$ та відповідного керування $u(t,\varepsilon)$:

$$\|x(t,\varepsilon)-x_l(t,\varepsilon)\|\leq c_1\varepsilon^{l-h},$$

$$\|u(t,\varepsilon)-u_l(t,\varepsilon)\|\leq c_2\varepsilon^{l-1-h},$$

де c_1, c_2 не залежать від ε.

У результаті доведено таку теорему.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1°–8°, (49), то при досить малих ε задача оптимального керування (1)–(4) має єдиний розв'язок, що задається* *асимптотичними формулами*

$$u(t,\varepsilon)=$$

$$=\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{k}\tilde{v}_{si}^{(3)}\tilde{c}_{k-s}^{(i)}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^s\lambda_s^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+O\left(\varepsilon^{l-h-1}\right),$$

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{k}v_{si}^{(1)}c_{k-s}^{(i)}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^s\lambda_s^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{k}\tilde{v}_{si}^{(1)}\tilde{c}_{k-s}^{(i)}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^s\lambda_s^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+O\left(\varepsilon^{l-h}\right),$$

де вектори $v_{si}^{(1)}(t)$, $\tilde{v}_{si}^{(1)}(t)$, $\tilde{v}_{si}^{(3)}(t)$, $i=\overline{1,n}$, функції $\lambda_s^{(i)}(t)$ і скалярні множники $c_j^{(i)}(t)$, $\tilde{c}_j^{(i)}(t)$, $j=1,n$, визначаються за рекурентними формулами (18), (19), (35)–(41), (29).

1. *Яковець В.П., Тарасенко О.В.* Побудова асимптотичного розв'язку однієї задачі оптимального керування // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 3. – С. 420–437.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
3. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
4. *Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – 223 с.
5. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998. – 222 с.
6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
7. *Яковец В.П., Вира М.Б.* Построение асимптотических решений двухточечных краевых задач для вырожденной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна. – Воронеж: ВорГУ, 2008. – С. 319–332.
8. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1966.
9. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища шк., 1989. – 287 с.

Одержано 24.09.2013