Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 15, no. 2 (2022) pp. 138–160

Оскуляторний інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле

Юлія Мисло, Михайло Пагіря

Abstract. A Thiele's interpolation continued fraction with multiple knots is analogue to the Hermit interpolation polynomial in the theory of continued fractions. The problem of constructing an oscillatory (tangent) to the function f at the point z_0 Thiele's interpolation continued fraction (OICFT) is investigated in the paper. Only the values of the function f and its derivatives at the point z_0 are used to calculate coefficients of OICFT.

The proposed method of finding coefficients is based on the calculated values of sums of m-multiplicity and does not involve calculating the values of Hankel determinants.

Анотація. Інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле з кратними вузлами є аналогом інтерполяційного многочлена Ерміта в теорії ланцюгових дробів. В роботі досліджується задача побудови оскуляторного (дотичного) до функції f в точці z_0 інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле (ОІЛДТ). Для обчислення коефіцієнтів OICFT використовуються лише значення функції f та її похідних у точці z_0.

Запропонований метод знаходження коефіцієнтів ґрунтується на обчислені значень m-кратних сум і не передбачає обчислення значень ганкелевих визначників.

2010 Mathematics Subject Classification: 30B70; 30E05; 41A20; 65D05
УДК 517.524+519.65
Ключові слова: ланцюговий дріб, оскуляторна інтерполяція, континуанта.
DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2296

1. Вступ. Основний результат роботи

Нехай функція f визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$. Функцію f можна наближати многочленами [8], сплайнами [5], раціональними функціями [38], апроксимантами Паде [1], ланцюговими дробами [7], тощо.

Ланцюгові дроби знайшли своє застосування в багатьох областях сучасної математики [10, 18, 27]. Зокрема, ланцюгові дроби використовують в задачах наближення функцій однієї комплексної змінної [7, 16, 19, 22, 31, 37].

Вперше інтерполянт у вигляді ланцюгового дробу був запропонований Вронським [12, 13]. Але дослідження Вронського залишилися непоміченими. Пізніше основи інтерполяції функцій ланцюговими дробами було закладено в роботах Тіле [35] та Нерлунда [26]. В останні роки зацікавленість до інтерполяційних ланцюгових дробів та їх узагальнень постійно зростає [20, 21, 23, 33, 34, 41].

Існують декілька підходів до побудови оскуляторної (дотичної) раціональної інтерполянти, раціональної інтерполяції Ерміта та застосування отриманих інтерполянт в різних задачах. Так Зальццер в [32] розглядає задача побудови q-точкової оскуляторної інтерполяційної раціональної функції $R(x) = N(x)/M(x)$, де $N(x)$, $M(x)$ – многочлени, яка задовольняє умовам

$$\{R(x_i)\}^{(m)} = f^{(m)}(x_i), \quad m = \overline{0, n_i}\ , \quad i = \overline{1, r}, \quad q = n_1 + n_2 + \cdots + n_r.$$

Степені многочленів $N(x), M(x)$ або тотожні, або відрізняються на одиницю. Функцію $R(x)$ запропоновано шукати у вигляді ланцюгового дробу Тіле з кратними вузлами. Для відшукання коефіцієнтів ланцюгового дробу розглядається алгоритм, який ґрунтується на послідовному диференціюванні підхідних дробів ланцюгового дробу. Вдалося отримати кілька перших рівнянь для відшукання коефіцієнтів. Задача рівномірної раціональної апроксимації на компакті досліджується в [30]. Доведено існування та єдиність найкращого наближення.

Классенс в [4] досліджує задачу раціональної інтерполяції Ерміта. Отримані рекурентні співвідношення для суміжних елементів таблиці раціональних ермітових інтерполянт. В роботі [6] дано алгебричний та геометричний описи множин вузлів для яких задача раціональної ермітової інтерполяції не має розв'язку. Частинні випадки раціональної інтерполяції Ерміта функції дійсної змінною, коли задані значення функції, її першої та другої похідних розглянуті в [14]. Рекурсивний алгоритм побудови раціональної апроксиманти для ряду Лорана запропоновано в [3]. Раціональна інтерполянта типу Тіле-Вернера для векторнозначних функцій досліджується в [39]. В роботі [40] доводиться існування та єдиність розв'язку задачі оскуляторної раціональної інтерполяції, що є комбінацією многочлена Ньютона та ланцюгового дробу Тіле. Окремий випадок загальної інтерполяції Ерміта розглянуто в [2]. Побудовані інтерполянти володіють властивостями апроксимант типу Паде в околі нуля. В [15] розглядається задача обробки зображень. Використовується адаптивний оскуляторно-раціональний інтерполянт, який ґрунтується на ланцюгових дробах Тілу невисоких порядків. В роботі [17] інтерполяційна раціональна функція Ерміта, елементи якої належать деякому полю, використовується в задачі виправлення помилок алгебричних кодів.

Стаття організована наступним чином. У другому параграфі наведені необхідні відомості з теорії ланцюгових дробів. Тридіагональні визначники спеціального вигляду, які називаються *континуантами*, розглянуто в третьому параграфі. Наведено деякі властивості континуант та доведено нове співвідношення, яке узагальнює теорему з [28]. Вказано взаємозв'язок між континуантами та ланцюговими дробами. В четвертому параграфі обґрунтовані допоміжні співвідношення для m-кратних сум елементів, що належать деякому полю. У п'ятому параграфі досліджується задача відшукання коефіцієнтів оскуляторного (дотичного) точці z_0 до функції f інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле (ОІЛДТ)

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{z - z_0}{b_k}, \quad z_0 \in \mathcal{Z},\ b_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ k = \overline{0,n}, \quad (1.1)$$

для якого виконуються умови

$$D_n(z_0) = f_0, \quad \big(D_n(z)\big)^{(k)}\big|_{z=z_0} = f_k, \quad \text{де} \quad f_k = f^{(k)}(z_0), \quad k = \overline{0,n}. \quad (1.2)$$

Показано, що канонічні чисельник $P_n(z)$ та знаменник $Q_n(z)$ є взаємно прості многочлени над полем комплексних чисел, а також доведено основний результат роботи:

Теорема 1.1. *Нехай $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, $z_0 \in \mathcal{Z}$, $k = \overline{1,n}$. Тоді ненульові коефіцієнти оскуляторного інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле (1.1) визначаються через значення функції f та її похідних $f^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$, в точці $z_0 \in \mathcal{Z}$ за допомогою рекурентних формул*

$$b_0 = f_0, \qquad b_1 = \frac{1}{f_1}, \qquad b_2 = \frac{-2f_1}{f_2 b_1}. \quad (1.3)$$

$$b_k = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{[k/2]} (k)_i f_{k-i} \mathbf{B}_1^{[k-2,i-1]}}{f_k \mathbf{B}_1^{[k-1,0]} + \sum\limits_{i=1}^{[k/2]} (k)_i f_{k-i} \mathbf{B}_1^{[k,i]}}, \qquad k = \overline{3,n}. \quad (1.4)$$

Величини $\mathbf{B}_1^{[k,i]}$ визначені в (4.2). Ще один метод знаходження коефіцієнтів ОІЛДТ розглянуто в шостому параграфі. Цей метод передбачає обчислення коефіцієнтів апроксимаційного ланцюгового дробу Тіле через відношення ганкелевих визначників.

2. Деякі поняття з теорії ланцюгових дробів

В роботі будуть використовуватися наступні поняття з теорії ланцюгових дробів.

Означення 2.1 ([9]). ***Нескінченним ланцюговим дробом*** *називається трійка послідовностей* $\left\{\{a_k\}_1^\infty, \{b_k\}_0^\infty, \{D_k\}_0^\infty\right\}$*, де елементи* b_0, a_k, b_k *– комплексні числа,* $a_k \neq 0$*,* $k \in \mathbb{N}$*, а елементи* D_k *належать розширеній комплексній площині* $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *і визначаються через елементи* $\{a_k\}_1^\infty, \{b_k\}_0^\infty$ *наступним чином: нехай задана послідовність дробово-лінійних перетворень*

$$T_0(w) := b_0 + w, \qquad T_k(w) := a_k/(b_k + w), \quad k \in \mathbb{N},$$

тоді

$$D_0 := T_0(0), \qquad D_k := T_0 \circ T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_k(0), \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\circ$ *– композиція перетворень.*

Із означення випливає, що ланцюговий дріб є нескінченний вираз вигляду

$$D = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}},$$

який коротко записують наступним чином

$$D = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \underset{+}{} \frac{a_2}{b_2} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{a_n}{b_n} \underset{+}{} \cdots. \tag{2.1}$$

Аналогічно, скінченний ланцюговий дріб

$$D_n = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}, \qquad D_0 = b_0,$$

який називають n-м підхідним дробом або n-м наближенням ланцюгового дробу D, коротко записують так

$$D_n = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} {}_{+} \frac{a_2}{b_2} {}_{+} \cdots {}_{+} \frac{a_n}{b_n}. \tag{2.2}$$

Елементи a_k і b_k називають *частинним чисельником* і *частинним знаменником* ланцюгового дробу D або D_n, відповідно. Ланцюговому дробу (2.1) ставлять у відповідність послідовності $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$, які визначаються системою лінійних різницевих рівнянь другого порядку [16]:

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \qquad Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

при початкових значеннях $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = P_{-1} = 1$, $P_0 = b_0$.

Елементи послідовностей P_n і Q_n називають канонічним чисельником та канонічним знаменником n-го підхідного дробу (2.2) і записують $D_n = P_n/Q_n$. Канонічні чисельники та знаменники сусідніх підхідних дробів D_n та D_{n-1} задовольняють детермінантну формулу [16]

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} a_i. \tag{2.4}$$

Значення n-го підхідного дробу D_n можна знайти, наприклад, за допомогою формул (2.3), які називаються *формулами Волліса.*

Задача інтерполяції функцій комплексної змінної ланцюговим дробом ставиться так. Нехай $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ компакт, $\mathbf{C}(\mathcal{Z})$ – простір неперервних функцій з рівномірною нормою $||f||_{\mathbf{C}(\mathcal{Z})} = \max\limits_{z \in \mathcal{Z}} |f|$. Припустимо, що функція $f \in \mathbf{C}(\mathcal{Z})$ визначена значеннями в точках множини

$$\mathbf{Z} = \{z_i : z_i \in \mathcal{Z}, z_i \neq z_j, i, j = \overline{0, n}\}, \qquad w_i = f(z_i), \quad i = \overline{0, n}. \tag{2.5}$$

Функція f наближається ланцюговим дробом вигляду

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{z - z_{k-1}}{b_k}. \tag{2.6}$$

Якщо коефіцієнти $b_k \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $k = \overline{0, n}$, ланцюгового дробу (2.6) визначенні таким чином, що виконуються інтерполяційні умови:

$$D_n(z_k) = w_k, \quad k = \overline{0, n}, \tag{2.7}$$

то ланцюговий дріб називається *інтерполяційним ланцюговим дробом*, а якщо (2.6) є ланцюговим дробом Тіле, тоді це буде *інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле* (ІЛДТ). ІЛДТ є аналогом інтерполяційного многочлена в теорії ланцюгових дробів. Коефіцієнти ІЛДТ визначаються за допомогою алгоритму або обернених поділених різниць, або обернених різниць [11,24]. Ще одним способом визначення коефіцієнтів ІЛДТ є рекурентне співвідношення у вигляді ланцюгового дробу [42]

$$b_0 = w_0, \quad b_k = -\frac{z_k - z_{k-1}}{b_{k-1}} \; + \cdots + \; \frac{z_k - z_1}{b_1} \; + \frac{z_k - z_0}{b_0 - w_k}, \; k = \overline{1,n}. \quad (2.8)$$

3. Континуанти та їх властивості

Означення 3.1 ([25]). *Нехай задано дві послідовності* $\{a_k\}_{s+1}^n$, $\{b_k\}_s^n$. ***Континуантою*** *називається тридіагональний визначник вигляду*

$$\mathcal{H}_n^{\langle s\rangle} = \begin{vmatrix} b_s & a_{s+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{s+1} & a_{s+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_{s+2} & a_{s+3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{s+3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix}, \quad s = \overline{0,n}, \; n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Континуанта $\mathcal{H}_n^{\langle s\rangle}$ має порядок $N = n + 1 - s$. Елементами головної діагоналі $b_k, k = \overline{s,n}$, та верхньої діагоналі $a_k, k = \overline{s+1,n}$, континуанти можуть бути числа (дійсні або комплексні) або функції. Континуанти загального вигляду розглядаються в [25]. Коротко континуанту записують наступним чином

$$\mathcal{H}_n^{\langle s\rangle} = \mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{s+1}\, a_{s+2} \dots a_{n-1}\, a_n \\ b_s\; b_{s+1}\; b_{s+2} \dots b_{n-1}\; b_n \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant s \leqslant n, \; \mathcal{H}_n^{\langle n+1\rangle} = 1. \quad (3.2)$$

Континуанта (3.1), як частинний випадок визначника Гессенберґа, задовольняє таке тричленне рекурентне співвідношення [36]:

$$\begin{gathered} \mathcal{H}_m^{\langle s\rangle} = b_m \mathcal{H}_{m-1}^{\langle s\rangle} + a_m \mathcal{H}_{m-2}^{\langle s\rangle}, \quad m = \overline{s+1,n}, \\ \mathcal{H}_s^{\langle s\rangle} = b_s, \qquad \mathcal{H}_{s-1}^{\langle s\rangle} = 1. \end{gathered} \quad (3.3)$$

Теорема 3.2 ([28]). *Якщо елемент головної діагоналі* $b_i = 0, s \leqslant i \leqslant n$, *а решта елементів головної діагоналі та всі елементів верхньої діагоналі континуанти* (3.2) *відмінні від нуля, то*

$$\mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{s+1} & \dots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \dots & a_n \\ b_s \;\; b_{s+1} & \dots & b_{i-1} & 0 & b_{i+1} & \dots & b_n \end{pmatrix} = a_{i+1} \mathcal{H}_{i-1}^{\langle s\rangle} \mathcal{H}_n^{\langle i+2\rangle}.$$

Наступна теорема є узагальненням [28, теорема 3.1].

Теорема 3.3. *Припустимо, що елементи* a_i, $i = \overline{k,m}$, $s+1 \leqslant k < m \leqslant n$, *континуанти* (3.2) *дорівнюють нулю, а решта елементів верхньої* *діагоналі, а також всі елементи головної діагоналі, відмінні від нуля. Тоді*

$$\mathcal{H}_n^{\langle s\rangle} = \prod_{j=k}^{m-1} b_j \mathcal{H}_{k-1}^{\langle s\rangle} \mathcal{H}_n^{\langle m\rangle}. \tag{3.4}$$

Доведення. За припущенням теореми $a_i = 0$ для $i = \overline{k,m}$. Із (3.3) маємо

$$\mathcal{H}_k^{\langle s\rangle} = b_k \mathcal{H}_{k-1}^{\langle s\rangle} + a_k \mathcal{H}_{k-2}^{\langle s\rangle} = b_k \mathcal{H}_{k-1}^{\langle s\rangle}.$$

Аналогічно

$$\mathcal{H}_{k+1}^{\langle s\rangle} = b_{k+1} \mathcal{H}_k^{\langle s\rangle} + a_{k+1} \mathcal{H}_{k-1}^{\langle s\rangle} = b_k b_{k+1} \mathcal{H}_{k-1}^{\langle s\rangle}.$$

Продовжуючи далі отримаємо, що

$$\mathcal{H}_i^{\langle s\rangle} = \prod_{j=k}^{i} b_j \, \mathcal{H}_{k-1}^{\langle s\rangle}, \qquad i = \overline{k,m}.$$

З останнього співвідношення та із (3.3) випливає, що

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{m+1}^{\langle s\rangle} &= b_{m+1} \mathcal{H}_s^{\langle m\rangle} + a_{m+1} \mathcal{H}_{m-1}^{\langle s\rangle} = \\ &= \prod_{j=k}^{m-1} b_j \, \mathcal{H}_{k-1}^{\langle s\rangle} (b_m b_{m+1} + a_{m+1}) = \prod_{j=k}^{m-1} b_j \, \mathcal{H}_{k-1}^{\langle s\rangle} \mathcal{H}_{m+1}^{\langle m\rangle}. \end{aligned}$$

Отже, для $n = m$, $m+1$ формула (3.4) має місце. Припустимо, що вона вірна для всіх n, коли $m+2 \leqslant n < i$. Тоді із (3.3) маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{i+1}^{\langle s\rangle} &= b_{i+1} \mathcal{H}_i^{\langle s\rangle} + a_{i+1} \mathcal{H}_{i-1}^{\langle s\rangle} = \\ &= \prod_{j=k}^{m-1} b_j \, \mathcal{H}_{k-1}^{\langle s\rangle} \Big(b_{i+1} \mathcal{H}_i^{\langle m\rangle} + a_{i+1} \mathcal{H}_{i-1}^{\langle m\rangle} \Big) = \prod_{j=k}^{m-1} b_j \, \mathcal{H}_{k-1}^{\langle s\rangle} \mathcal{H}_{i+1}^{\langle m\rangle}. \end{aligned}$$

Формула (3.4) вірна для довільного значення n. □

Легко переконатися, що континуанта володіє властивістю інваріантності відносно оберненого порядку елементів, тобто

$$\mathcal{K}\begin{pmatrix} & a_{s+1} & a_{s+2} & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_s & b_{s+1} & b_{s+2} & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix} = \mathcal{K}\begin{pmatrix} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{s+2} & a_{s+1} \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_{s+1} & b_s \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.4 ([28])**.** *Якщо* $w = \mathcal{H}_n^{\langle 0\rangle}/\mathcal{H}_n^{\langle 1\rangle}$, *де* $\mathcal{H}_n^{\langle i\rangle} \neq 0$, $i = 0, 1$, *то*

$$b_n = -\frac{a_n \mathcal{K}\begin{pmatrix} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 \\ b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \cdots & b_1 & b_0 - w \end{pmatrix}}{\mathcal{K}\begin{pmatrix} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 - w \end{pmatrix}}.$$

Відомо [36], що скінчений ланцюговий дріб D_n можна подати у вигляді відношення двох континуант, тобто

$$D_n = \mathcal{H}_n^{\langle 0\rangle}/\mathcal{H}_n^{\langle 1\rangle}, \qquad P_n = \mathcal{H}_n^{\langle 0\rangle}, \qquad Q_n = \mathcal{H}_n^{\langle 1\rangle}. \tag{3.5}$$

З теореми 3.4, (3.5) та (2.7) випливає, що (2.8) можна переписати у вигляді

$$b_0 = w_0, \quad b_k = \frac{-\mathcal{K}\begin{pmatrix} & z_k - z_{k-1} & z_k - z_{k-2} & \cdots & z_k - z_1 & z_k - z_0 \\ 0 & b_{k-1} & b_{k-2} & \cdots & b_1 & b_0 - w_k \end{pmatrix}}{\mathcal{K}\begin{pmatrix} & z_k - z_{k-2} & z_k - z_{k-3} & \ldots & z_k - z_1 & z_k - z_0 \\ b_{k-1} & b_{k-2} & b_{k-3} & \ldots & b_1 & b_0 - w_k \end{pmatrix}}.$$

4. Співвідношення для m-кратних сум

Нехай задано скінчену множину $\mathcal{B}$, елементи якої належать деякому полю $\mathbb{F}$, тобто $\mathcal{B} = \{b_i : b_i \in \mathbb{F}, b_i \neq 0, i = \overline{0,n}\}$. Введемо позначення

$$B_m^s = \prod_{j=s}^{m} b_j, \qquad B_{s-1}^s = 1. \tag{4.1}$$

Розглянемо m-кратні суми вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_s^{[n,m]} = &\sum_{i_1=s}^{n+1-2m} B_{i_1-1}^s \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} B_{i_2-1}^{i_1+2} \sum_{i_3=i_2+2}^{n+5-2m} B_{i_3-1}^{i_2+2} \cdots \\ &\cdots \sum_{i_{m-1}=i_{m-2}+2}^{n-3} B_{i_{m-1}-1}^{i_{m-2}+2} \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1} B_{i_m-1}^{i_{m-1}+2} B_n^{i_m+2}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

де

$$\mathbf{B}_s^{[n,1]} = \sum_{i=s}^{n-1} B_{i-1}^s B_n^{i+2}, \quad \mathbf{B}_s^{[n,0]} = B_n^s, \quad \mathbf{B}_1^{[n,m]} = \begin{cases} 1, & n = 2m, \\ 0, & n < 2m, \end{cases} \tag{4.3}$$
$$0 \leqslant m \leqslant \left[\tfrac{n+1}{2}\right],\ 0 \leqslant s \leqslant n+1-2m.$$

Встановимо деякі співвідношення для кратних сум $\mathbf{B}_s^{[n,m]}$. З (4.2) випливає, що

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_s^{[n,m]} = \sum_{i=s}^{n+1-2m} B_{i-1}^s \mathbf{B}_{i+2}^{[n,m-1]} = \\ &= B_{s-1}^s \mathbf{B}_{s+2}^{[n,m-1]} + \sum_{i=s+1}^{n+1-2m} B_{i-1}^s \mathbf{B}_{i+2}^{[n,m-1]} = \\ &= \mathbf{B}_{s+2}^{[n,m-1]} + b_s \sum_{i=s+1}^{n+1-2m} B_{i-1}^{s+1} \mathbf{B}_{i+2}^{[n,m-1]} = \\ &= \mathbf{B}_{s+2}^{[n,m-1]} + b_s \mathbf{B}_{s+1}^{[n,m]}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Вірними є співвідношення*

$$\mathbf{B}_i^{[m+1,0]} = b_{m+1}\mathbf{B}_i^{[m,0]}, \qquad i = \overline{0,m}, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{B}_1^{[m+1,k]} = b_{k+1}\mathbf{B}_1^{[m,k]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,k-1]}, \quad k = \overline{1,[m/2]},\ m = \overline{0,n-1}. \tag{4.6}$$

Доведення. Співвідношення (4.5) очевидно виконується. За індукцією доведемо (4.6). Нехай $k = 1$, тоді

$$\begin{aligned} b_{m+1}\mathbf{B}_1^{[m,1]} + B_{m-1}^1 &= \sum_{i=1}^{m-1} B_{i-1}^1 B_{m+1}^{i+2} + B_{m-1}^1 B_{m+1}^{m+2} = \\ &= \sum_{i=1}^{m} B_{i-1}^1 B_{m+1}^{i+2} = \mathbf{B}_1^{[m+1,1]}.\end{aligned}$$

Якщо $k = 2$, то

$$\begin{aligned} & b_{m+1}\mathbf{B}_1^{[m,2]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,1]} = \\ &= b_{m+1} \sum_{i_1=1}^{m-3} B_{i_1-1}^1 \sum_{i_2=i_1+2}^{m-1} B_{i_2-1}^{i_1+2} B_m^{i_2+2} + \sum_{i=1}^{m-2} B_{i-1}^1 B_{m-1}^{i+2} = \\ &= B_0^1 \sum_{i_2=3}^{m-1} B_{i_2-1}^3 B_{m+1}^{i_2+2} + B_1^1 \sum_{i_2=4}^{m-1} B_{i_2-1}^4 B_{m+1}^{i_2+2} + \cdots \\ &\quad + B_{m-4}^1 B_{m-2}^{m-1} B_{m+1}^{m+1} + B_0^1 B_{m-1}^3 B_{m+1}^{m+2} + B_1^1 B_{m-1}^4 B_{m+1}^{m+2} + \cdots \\ &\quad + B_{m-4}^1 B_{m-1}^{m-1} B_{m+1}^{m+2} + B_{m-3}^1 B_{m-1}^m B_{m+1}^{m+2} = \\ &= B_0^1 \Big(\sum_{i_2=3}^{m-1} B_{i_2-1}^3 B_{m+1}^{i_2+2} + B_{m-1}^3 B_{m+1}^{m+2} \Big) + \end{aligned}$$

$$+ B_1^1\Big(\sum_{i_2=4}^{m-1} B_{i_2-1}^4 B_{m+1}^{i_2+2} + B_{m-1}^4 B_{m+1}^{m+2}\Big) + \cdots$$

$$+ B_{m-4}^1\Big(B_{m-2}^{m-1} B_{m+1}^{m+1} + B_{m-1}^{m-1} B_{m+1}^{m+2}\Big) + B_{m-3}^1 B_{m-1}^m B_{m+1}^{m+2} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m-2} B_{i_1-1}^1 \sum_{i_2=i_1+2}^{m} B_{i_2-1}^{i_1+2} B_{m+1}^{i_2+2} = \mathbf{B}_1^{[m+1,2]}.$$

Нехай $k = 3$. Тоді

$$b_{m+1}\mathbf{B}_1^{[m,3]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,2]} = b_{m+1} \sum_{i_1=1}^{m-5} B_{i_1-1}^1 \sum_{i_2=i_1+2}^{m-3} B_{i_2-1}^{i_1+2} \sum_{i_3=i_2+2}^{m-1} B_{i_3-1}^{i_2+2} B_m^{i_3+2} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m-4} B_{i_1-1}^1 \sum_{i_2=i_1+2}^{m-2} B_{i_2-1}^{i_1+2} B_{m-1}^{i_2+2} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m-5} B_{i_1-1}^1 \sum_{i_2=i_1+2}^{m-3} B_{i_2-1}^{i_1+2} \sum_{i_3=i_2+2}^{m-1} B_{i_3-1}^{i_2+2} B_{m+1}^{i_3+2} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m-5} B_{i_1-1}^1 \Bigg(\sum_{i_2=i_1+2}^{m-3} B_{i_2-1}^{i_1+2} B_{m-1}^{i_2+2} B_{m+1}^{m+2} + B_{m-3}^{i_1+2} B_{m-1}^m B_{m+1}^{m+2}\Bigg) +$$

$$+ B_{m-5}^1 B_{m-3}^{m-2} B_{m-1}^m B_{m+1}^{m+2} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m-5} B_{i_1-1}^1 \Bigg(\sum_{i_2=i_1+2}^{m-3} B_{i_2-1}^{i_1+2} \Bigg(\sum_{i_3=i_2+2}^{m-1} B_{i_3-1}^{i_2+2} B_{m+1}^{i_3+2} + B_{m-1}^{i_2+2} B_{m+1}^{m+2+2}\Bigg) +$$

$$+ B_{m-3}^{i_1+2} B_{m-1}^m B_{m+1}^{m+2}\Bigg) + B_{m-5}^1 B_{m-3}^{m-2} B_{m-1}^m B_{m+1}^{m+2} = \mathbf{B}_1^{[m+1,3]}.$$

Якщо $k \geqslant 4$, то

$$b_{m+1}\mathbf{B}_1^{[m,k]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,k-1]} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m+1-2k} B_{i_1-1}^1 \sum_{i_2=i_1+2}^{m+3-2k} B_{i_2-1}^{i_1+2} \cdots \sum_{i_{k-1}=i_{k-2}+2}^{m-3} B_{i_{k-1}-1}^{i_{k-2}+2} \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{m-1} B_{i_k-1}^{i_{k-1}+2} B_{m+1}^{i_k+2} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m+2-2k} B_{i_1-1}^1 \sum_{i_2=i_1+2}^{m+4-2k} B_{i_2-1}^{i_1+2} \cdots \sum_{i_{k-2}=i_{k-3}+2}^{m-4} B_{i_{k-2}-1}^{i_{k-3}+2} \times$$

$$\times \sum_{i_{k-1}=i_{k-2}+2}^{m-2} B_{i_{k-1}-1}^{i_{k-2}+2} B_{m-1}^{i_{k-1}+2} B_{m+1}^{m+2} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m+1-2k} B_{i_1-1}^{1}\Bigg(\sum_{i_2=i_1+2}^{m+3-2k} B_{i_2-1}^{i_1+2}\Bigg(\cdots\Bigg(\sum_{i_{k-1}=i_{k-2}+2}^{m+3} B_{i_{k-3}-1}^{i_{k-2}+2}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{m-1} B_{i_k-1}^{i_{k-1}+2} B_{m+1}^{i_k+2} + B_{m-1}^{i_{k-1}+2} B_{m+1}^{m+2}\Bigg)+$$

$$+ B_{m-1}^{i_{k-1}+2} B_{m-1}^{m} B_{m+1}^{m+2}\Bigg)\cdots\Bigg)+$$

$$+ B_{m+3-2k}^{i_1+2}\prod_{s=3}^{k+1} B_{m+2s-2k-1}^{m+2s-2k}\Bigg) + B_{m+1-2k}^{1}\prod_{s=2}^{k+1} B_{m+2s-2k-1}^{m+2s-2k}.$$

Послідовно знаходимо суми, що містяться в дужках. В результаті отримуємо, що

$$b_{m+1}\mathbf{B}_1^{[m,k]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,k-1]} = \mathbf{B}_1^{[m+1,k]}. \qquad \square$$

Теорема 4.2. *Виконуються співвідношення*

$$\mathbf{B}_1^{[n,0]} = \mathbf{B}_1^{[k,0]}\mathbf{B}_{k+1}^{[n,0]}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{4.7}$$

$$\mathbf{B}_1^{[n,l]} = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k} \mathbf{B}_1^{[2k-i,k-i]}\mathbf{B}_{2k+1-i}^{[n,l-k+i]}, & \text{якщо } k < l, \\ \sum\limits_{i=0}^{l} \mathbf{B}_1^{[k+l-i,l-i]}\mathbf{B}_{k+l+1-i}^{[n,i]}, & \text{якщо } k \geqslant l, \end{cases} \tag{4.8}$$

де $l = \overline{1,[n/2]}$, $1 \leqslant k \leqslant n-l-1$.

Доведення. Оскільки $\mathbf{B}_1^{[n,0]} = B_k^1 B_n^{k+1} = \mathbf{B}_1^{[k,0]}\mathbf{B}_{k+1}^{[n,0]}$, то (4.7) вірне. Доведемо (4.8) за індукцією. Якщо $l=1$, то із (4.4), (4.5) та (4.6) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1^{[n,1]} &= \mathbf{B}_3^{[n,0]} + b_1\mathbf{B}_2^{[n,1]} = \mathbf{B}_1^{[2,1]}\mathbf{B}_3^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[1,0]}\mathbf{B}_2^{[n,1]} = \\
&= \mathbf{B}_1^{[2,1]} b_3 \mathbf{B}_4^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[1,0]}\big(\mathbf{B}_4^{[n,0]} + b_2\mathbf{B}_3^{[n,1]}\big) = \\
&= \big(b_3\mathbf{B}_1^{[2,1]} + \mathbf{B}_1^{[1,0]}\big)\mathbf{B}_4^{[n,0]} + b_2\mathbf{B}_1^{[1,0]}\mathbf{B}_3^{[n,1]} = \\
&= \mathbf{B}_1^{[3,1]}\mathbf{B}_4^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[2,0]}\mathbf{B}_3^{[n,1]} = \\
&= \mathbf{B}_1^{[3,1]} b_4 \mathbf{B}_5^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[2,0]}\big(\mathbf{B}_5^{[n,0]} + b_3\mathbf{B}_4^{[n,1]}\big) = \\
&= \big(b_4\mathbf{B}_1^{[3,1]} + \mathbf{B}_1^{[2,0]}\big)\mathbf{B}_5^{[n,0]} + b_3\mathbf{B}_1^{[2,0]}\mathbf{B}_4^{[n,1]} = \\
&= \mathbf{B}_1^{[4,1]}\mathbf{B}_5^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[3,0]}\mathbf{B}_4^{[n,1]}.
\end{aligned}$$

Отже, для $l = 1$ співвідношення (4.8) виконується, коли $k = 1, 2, 3$.

Припустимо, що (4.8) виконується для $k = m - 1$, де $3 < m \leqslant n - 2$. Тоді з (4.4), (4.5) та (4.6) отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1^{[n,1]} &= \mathbf{B}_1^{[m,1]} b_{m+1} \mathbf{B}_{m+2}^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,0]} \big(\mathbf{B}_{m+2}^{[n,0]} + b_m \mathbf{B}_{m+1}^{[n,1]}\big) = \\ &= \big(b_{m+1} \mathbf{B}_1^{[m,1]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,0]}\big) \mathbf{B}_{m+2}^{[n,0]} + b_m \mathbf{B}_1^{[m-1,0]} \mathbf{B}_{m+1}^{[n,1]} = \\ &= \mathbf{B}_1^{[m+1,1]} \mathbf{B}_{m+2}^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[m,0]} \mathbf{B}_{m+1}^{[n,1]}.\end{aligned}$$

Отже, коли $l = 1$, то (4.8) є вірним для довільного $k, 1 \leqslant k \leqslant n - 2$.

Нехай $l = 2$. Скористаємося (4.4). Тоді

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2^{[n,2]} &= \mathbf{B}_1^{[2,1]} \mathbf{B}_3^{[n,1]} + \mathbf{B}_1^{[1,0]} \mathbf{B}_2^{[n,2]} = \\ &= \mathbf{B}_1^{[2,1]} \big(\mathbf{B}_5^{[n,0]} + b_3 \mathbf{B}_4^{[n,1]}\big) + \mathbf{B}_1^{[1,0]} \big(\mathbf{B}_4^{[n,1]} + b_2 \mathbf{B}_3^{[n,2]}\big) = \\ &= \big(\mathbf{B}_1^{[2,1]} + b_4 \mathbf{B}_1^{[3,2]}\big) \mathbf{B}_5^{[n,0]} + \big(\mathbf{B}_1^{[1,0]} + b_3 \mathbf{B}_1^{[2,1]}\big) \mathbf{B}_4^{[n,1]} + b_2 \mathbf{B}_1^{[1,0]} \mathbf{B}_3^{[n,2]}.\end{aligned}$$

Згідно з (4.3) $\mathbf{B}_1^{[2,1]} = 1, \mathbf{B}_1^{[3,2]} = 0$. Послідовно використовуючи (4.4) та (4.6) отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2^{[n,2]} &= \mathbf{B}_1^{[4,2]} \mathbf{B}_5^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[3,1]} \mathbf{B}_4^{[n,1]} + \mathbf{B}_1^{[2,0]} \mathbf{B}_3^{[n,2]} = \\ &= \mathbf{B}_1^{[4,2]} b_5 \mathbf{B}_6^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[3,1]} \big(\mathbf{B}_6^{[n,0]} + b_4 \mathbf{B}_5^{[n,1]}\big) + \mathbf{B}_1^{[2,0]} \big(\mathbf{B}_5^{[n,1]} + b_3 \mathbf{B}_4^{[n,2]}\big) = \\ &= \big(\mathbf{B}_1^{[3,1]} + b_5 \mathbf{B}_1^{[4,2]}\big) \mathbf{B}_6^{[n,0]} + \big(\mathbf{B}_1^{[2,0]} + b_4 \mathbf{B}_1^{[3,1]}\big) \mathbf{B}_5^{[n,1]} + b_3 \mathbf{B}_1^{[2,0]} \mathbf{B}_4^{[n,2]} = \\ &= \mathbf{B}_1^{[5,2]} \mathbf{B}_6^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[4,1]} \mathbf{B}_5^{[n,1]} + \mathbf{B}_1^{[3,0]} \mathbf{B}_4^{[n,2]}.\end{aligned}$$

Отже, коли $l = 2$, то (4.8) виконується для $k = 1, 2, 3$.

Зробимо припущення, що співвідношення вірне для $k = m - 2$. Тоді, згідно із (4.4), (4.5) та (4.6), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2^{[n,2]} &= \mathbf{B}_1^{[m,2]} b_{m+1} \mathbf{B}_{m+2}^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,1]} \big(\mathbf{B}_{m+2}^{[n,0]} + b_m \mathbf{B}_{m+1}^{[n,1]}\big) + \\ &\qquad + \mathbf{B}_1^{[m-2,0]} \big(\mathbf{B}_{m+1}^{[n,1]} + b_{m-1} \mathbf{B}_m^{[n,2]}\big) = \\ &= \big(\mathbf{B}_1^{[m-1,1]} + b_{m+1} \mathbf{B}_1^{[m,2]}\big) \mathbf{B}_{m+2}^{[n,0]} + \big(\mathbf{B}_1^{[m-2,0]} + b_m \mathbf{B}_1^{[m-1,1]}\big) \mathbf{B}_{m+1}^{[n,1]} + \\ &\qquad + b_{m-1} \mathbf{B}_1^{[m-2,0]} \mathbf{B}_m^{[n,2]} = \\ &= \mathbf{B}_1^{[m+1,2]} \mathbf{B}_{m+2}^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[m,1]} \mathbf{B}_{m+1}^{[n,1]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,0]} \mathbf{B}_m^{[n,2]}.\end{aligned}$$

Отже, коли $l = 2$, то (4.8) має місце для довільного $1 \leqslant k \leqslant n - 3$.

Нехай $2 < l \leqslant [n/2]$. Тоді

$$\mathbf{B}_1^{[n,l]} = \mathbf{B}_1^{[2,1]} \mathbf{B}_3^{[n,l-1]} + \mathbf{B}_1^{[1,0]} \mathbf{B}_2^{[n,l]} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{B}_1^{[2,1]}\big(\mathbf{B}_5^{[n,l-2]} + b_3\mathbf{B}_4^{[n,l-1]}\big) + \mathbf{B}_1^{[1,0]}\big(\mathbf{B}_4^{[n,l-1]} + b_2\mathbf{B}_3^{[n,l]}\big) = \\
&= \big(\mathbf{B}_1^{[2,1]} + b_4\mathbf{B}_1^{[3,2]}\big)\mathbf{B}_5^{[n,l-2]} + \big(\mathbf{B}_1^{[1,0]} + b_3\mathbf{B}_1^{[2,1]}\big)\mathbf{B}_4^{[n,l-1]} + b_2\mathbf{B}_1^{[1,0]}\mathbf{B}_3^{[n,l]} = \\
&= \mathbf{B}_1^{[4,2]}\mathbf{B}_5^{[n,l-2]} + \mathbf{B}_1^{[3,1]}\mathbf{B}_4^{[n,l-1]} + \mathbf{B}_1^{[2,0]}\mathbf{B}_3^{[n,l]} = \\
&= \big(\mathbf{B}_7^{[n,l-3]} + b_5\mathbf{B}_6^{[n,l-2]}\big)\mathbf{B}_1^{[4,2]} + \big(\mathbf{B}_6^{[n,l-2]} + b_4\mathbf{B}_5^{[n,l-1]}\big)\mathbf{B}_1^{[3,1]} + \\
&\qquad\qquad + \big(\mathbf{B}_5^{[n,l-1]} + b_3\mathbf{B}_1^{[n,l]}\big)\mathbf{B}_1^{[2,0]} = \\
&= \big(\mathbf{B}_1^{[4,2]} + b_6\mathbf{B}_1^{[5,3]}\big)\mathbf{B}_7^{[n,l-3]} + \big(\mathbf{B}_1^{[3,1]} + b_5\mathbf{B}_1^{[4,2]}\big)\mathbf{B}_6^{[n,l-2]} + \\
&\qquad\qquad + \big(\mathbf{B}_1^{[2,0]} + b_4\mathbf{B}_1^{[3,1]}\big)\mathbf{B}_5^{[n,l-1]} + b_3\mathbf{B}_1^{[2,0]}\mathbf{B}_4^{[n,l]} = \\
&= \mathbf{B}_1^{[6,3]}\mathbf{B}_7^{[n,l-3]} + \mathbf{B}_1^{[5,2]}\mathbf{B}_6^{[n,l-2]} + \mathbf{B}_1^{[4,1]}\mathbf{B}_5^{[n,l-1]} + \mathbf{B}_1^{[3,0]}\mathbf{B}_4^{[n,l]}.
\end{aligned}
$$

Якщо припустити, що (4.8) є вірним для $k = m$, де $3 < m \leqslant l-1$, то

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_1^{[n,m]} &= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{B}_1^{[2m-i,m-i]}\mathbf{B}_{2m+1-i}^{[n,l-m+i]} = \\
&= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{B}_1^{[2m-i,m-i]}\Big(\mathbf{B}_{2m+3-i}^{[n,l-m+i-1]} + b_{2m+1-i}\mathbf{B}_{2m+2-i}^{[n,l-m+i]}\Big) = \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \Big(\mathbf{B}_1^{[2m-i,m-i]} + b_{2m+2-i}\mathbf{B}_1^{[2m+1-i,m+1-i]}\Big)\mathbf{B}_{2m+3-i}^{[n,l-m+i-1]} = \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \mathbf{B}_1^{[2m+2-i,m+1-i]}\mathbf{B}_{2m+3-i}^{[n,l-m+i-1]}.
\end{aligned}
$$

Припустимо, що для $m > l$ виконується співвідношення

$$
\mathbf{B}_1^{[n,l]} = \sum_{i=0}^{l} \mathbf{B}_1^{[m+l-i,l-i]}\mathbf{B}_{m+l+1-i}^{[n,i]}.
$$

Тоді із (4.4), (4.5) та (4.6) випливає, що

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_1^{[n,l]} &= \mathbf{B}_1^{[m+l,l]} b_{m+l+1}\mathbf{B}_{m+l+2}^{[n,0]} + \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{l} \mathbf{B}_1^{[m+l-i,l-i]}\Big(\mathbf{B}_{m+l+3-i}^{[n,i-1]} b_{m+l+1-i}\mathbf{B}_{m+l+2-i}^{[n,i]}\Big) = \\
&= \sum_{i=0}^{l-1}\Big(\mathbf{B}_1^{[m+l-i-1,l-i-1]} + b_{m+l+1-i}\mathbf{B}_1^{[m+l-i,l-i]}\Big)\mathbf{B}_{m+l+2-i}^{[n,i]} +
\end{aligned}
$$

$$+ b_{m+1}\mathbf{B}_1^{[m,0]}\mathbf{B}_{m+2}^{[n,l]} =$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \mathbf{B}_1^{[m+l+1-i,l-i]}\mathbf{B}_{m+l+2-i}^{[n,i]}.$$

Таким чином (4.8) обґрунтовано. □

5. Оскуляторний інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле

Розглянемо задачу (1.1)-(1.2), тобто визначимо коефіцієнти ОІЛДТ у формулі (1.1) так, щоб виконувалися умови (1.2).

З (2.3) випливає [42], що $D_n(z)$ раціональна функція виду $r_{k,l}(z)$, де степені многочленів чисельника та знаменника задовольняють нерівності

$$\deg P_n(z) = k \leqslant [(n+1)/2], \qquad \deg Q_n(z) = l \leqslant [n/2].$$

Розглянемо функціональну континуанту

$$\mathbf{T}_m^{\langle s\rangle}(z) = \mathcal{K}\begin{pmatrix} & z-z_0 & z-z_0 & z-z_0 & \cdots & z-z_0 \\ b_s & b_{s+1} & b_{s+2} & b_{s+3} & \cdots & b_m \end{pmatrix}, \quad s < m. \tag{5.1}$$

Згідно з (3.5) ОІЛДТ (1.1) можна подати через відношення континуант, тобто

$$D_n(z) = \mathbf{T}_n^{\langle 0\rangle}(z)/\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(z), \qquad P_n(z) = \mathbf{T}_n^{\langle 0\rangle}(z), \qquad Q_n(z) = \mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(z).$$

Легко бачити, що із (5.1) випливає співвідношення

$$\mathbf{T}_m^{\langle s\rangle}(z)\big|_{z=z_0} = B_m^s, \tag{5.2}$$

де B_m^s визначено в (4.1).

Теорема 5.1. *Якщо коефіцієнти $b_k, k = \overline{1,n}$, ОІЛДТ (1.1) скінченні та відмінні від нуля, то:*

а) *канонічні чисельник $P_n(z)$ та знаменник $Q_n(z)$ не мають спільних нулів, тобто многочлени $P_n(z)$ та $Q_n(z)$ є взаємно прості многочлени над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$;*

б) *ланцюговий дріб $D_n(z)$ – нескоротна раціональна функція.*

Доведення. Доведемо теорему за індукцією. Коли $n = 1$, то многочлени $P_1(z) = b_0b_1 + z - z_0$ та $Q_1(z) = b_1$ спільних нулів не мають.

Якщо $n = 2$, то

$$P_2(z) = b_0b_1b_2 + (b_0 + b_2)(z - z_0), \qquad Q_2(z) = b_1b_2 + z - z_0.$$

Згідно з детермінантною формулою (2.4)

$$P_2(z)Q_1(z) - P_1(z)Q_2(z) = -(z - z_0)^2.$$

Оскільки многочлени $P_1(z)$ та $Q_1(z)$ спільних нулів не мають, то спільним нулем $P_2(z)$ та $Q_2(z)$ може бути лише $z = z_0$. Але z_0 не є нулем ані $P_2(z)$, ані $Q_2(z)$. Отже, для $n = 1, 2$ теорема вірна.

Припустимо, що твердження теореми виконується для $n = k - 1$. Коли $n = k$, то за детермінантною формулою

$$P_k(z)Q_{k-1}(z) - P_{k-1}(z)Q_k(z) = (-1)^{k-1}(z - z_0)^k.$$

За припущенням індукції $P_{k-1}(z)$ та $Q_{k-1}(z)$ спільних нулів не мають, тому спільним нулем $P_k(z)$ та $Q_k(z)$ може бути лише $z = z_0$. Але із (5.2) випливає, що

$$P_k(z_0) = B_k^0 \neq 0, \qquad Q_k(z_0) = B_k^1 \neq 0.$$

Отже z_0 не є спільним нулем многочленів $P_k(z)$ та $Q_k(z)$, а значить теорема вірна також для $n = k$. □

З теореми 5.1 випливає, що ОІЛДТ (1.1) можна переписати у еквівалентному вигляді $D_n(z)Q_n(z) = P_n(z)$. Згідно формули Лейбніца для похідної k–го порядку добутку двох функцій маємо:

$$\sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} D_n^{(s)}(z) Q_n^{(k-s)}(z) = P_n^{(k)}(z),$$

або

$$\sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} D_n^{(s)}(z) \big(\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(z)\big)^{(k-s)} = \big(\mathbf{T}_n^{\langle 0\rangle}(z)\big)^{(k)}. \tag{5.3}$$

У роботі [28] доведено, що

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{T}_n^{\langle s\rangle}(z)\big)^{(m)} = m! \sum_{i_1=s}^{n+1-2m} \mathbf{T}_{i_1-1}^{\langle s\rangle}(z) \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} \mathbf{T}_{i_2-1}^{\langle i_1+2\rangle}(z) \times \\ \times \sum_{i_3=i_2+2}^{n+5-2m} \mathbf{T}_{i_3-1}^{\langle i_2+2\rangle}(z) \cdots \sum_{i_{m-1}=i_{m-2}+2}^{n-3} \mathbf{T}_{i_{m-1}-1}^{\langle i_{m-2}+2\rangle}(z) \times \\ \times \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1} \mathbf{T}_{i_m-1}^{\langle i_{m-1}+2\rangle}(z) \mathbf{T}_n^{\langle i_m+2\rangle}(z),\end{aligned} \tag{5.4}$$

коли $m \leqslant \left[\frac{n+1-s}{2}\right]$, і

$$\big(\mathbf{T}_n^{\langle s\rangle}(z)\big)^{(m)} = 0, \tag{5.5}$$

коли $m > \left[\frac{n+1-s}{2}\right]$, $s = 0, 1$.

З (4.2), (5.2) та (5.4)-(5.5) маємо, що

$$\left(\mathbf{T}_n^{\langle s\rangle}(z)\right)^{(m)}\Big|_{z=z_0} = \begin{cases} m!\mathbf{B}_s^{[n,m]}, & m \leqslant [(n+1-s)/2], \\ 0, & m > \big[(n+1-s)/2\big],\ s=0,1. \end{cases} \tag{5.6}$$

З (1.2) та (5.6) випливає, що співвідношення (5.3) для $z = z_0$ запишеться наступним чином

$$\sum_{i=0}^{k} (k)_i f_{k-i} \mathbf{B}_1^{[n,i]} = k!\mathbf{B}_0^{[n,k]}, \tag{5.7}$$

де $(k)_s = k(k-1)\ldots(k-s+1)$ – символ Похгаммера, $(k)_0 = 1$. Перейдемо до доведення основного результату роботи.

Доведення теореми 1.1. Покажемо, що при виконанні умов теореми мають місце співвідношення

$$b_0 = f_0, \qquad b_1 f_1 = 1, \qquad \sum_{i=0}^{[k/2]} (k)_i f_{k-i} \mathbf{B}_1^{[k,i]} = 0, \quad k = \overline{2,n}. \tag{5.8}$$

Доведемо (5.8) за індукцією. Якщо $k = 0$, то з (5.7) отримуємо, що $f_0\mathbf{B}_1^{[n,0]} = b_0\mathbf{B}_1^{[n,0]}$. Оскільки за припущенням $\mathbf{B}_1^{[n,0]} \neq 0$, то (5.8) вірне для $k = 0$.

Нехай $k = 1$. Тоді (5.7) має вигляд $f_1\mathbf{B}_1^{[n,0]} + f_0\mathbf{B}_1^{[n,1]} = \mathbf{B}_0^{[n,1]}$. З (4.4) та (4.7) випливає, що

$$f_1 b_1 \mathbf{B}_2^{[n,0]} + f_0 \mathbf{B}_1^{[n,1]} = \mathbf{B}_2^{[n,0]} + b_0 \mathbf{B}_1^{[n,1]}.$$

За припущенням $\mathbf{B}_2^{[n,0]} \neq 0$ і (5.8) вірне для $k = 0$, то (5.8) виконується для $k = 1$.

Нехай $k = 2$. Тоді співвідношення (5.7) запишеться у вигляді

$$f_2\mathbf{B}_1^{[n,0]} + 2f_1\mathbf{B}_1^{[n,1]} + 2f_0\mathbf{B}_2^{[n,2]} = 2\mathbf{B}_0^{[n,2]}.$$

До $\mathbf{B}_1^{[n,0]}$ застосуємо (4.7) для $k = 2$, до $\mathbf{B}_1^{[n,1]}$ використаємо (4.8) для $k = 1$ і до $\mathbf{B}_0^{[n,2]}$ застосуємо (4.4). Маємо

$$\begin{aligned} f_2\mathbf{B}_1^{[2,0]}\mathbf{B}_3^{[n,0]} + 2f_1\big(\mathbf{B}_1^{[2,1]}\mathbf{B}_3^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[1,0]}\mathbf{B}_2^{[n,1]}\big) + 2f_0\mathbf{B}_2^{[n,2]} &= \\ = 2\big(\mathbf{B}_2^{[n,1]} + b_0\mathbf{B}_2^{[n,2]}\big)&, \end{aligned}$$

або

$$\big(f_2\mathbf{B}_1^{[2,0]} + 2f_1\mathbf{B}_1^{[2,1]}\big)\mathbf{B}_0^{[n,3]} + 2\big(f_1\mathbf{B}_1^{[1,0]} - 1\big)\mathbf{B}_2^{[n,1]} + 2\big(f_0 - b_0\big)\mathbf{B}_2^{[n,2]} = 0.$$

Оскільки (5.8) виконуються для $k = 0, 1$ і $\mathbf{B}_3^{[n,0]} \neq 0$, то маємо, що (5.8) виконується при $k = 2$.

Коли $k = 3$, то співвідношення (5.7) запишеться у вигляді

$$f_3\mathbf{B}_1^{[n,0]} + 3f_2\mathbf{B}_1^{[n,1]} + 6f_1\mathbf{B}_2^{[n,2]} + 6f_0\mathbf{B}_1^{[n,3]} = 6\mathbf{B}_0^{[n,3]}.$$

Для $\mathbf{B}_1^{[n,0]}$ скористаємося (4.7) при $k = 3$, для $\mathbf{B}_1^{[n,1]}$ і $\mathbf{B}_2^{[n,2]}$ використаємо (4.8) при $k = 2$ та $k = 1$, відповідно, до $\mathbf{B}_0^{[n,3]}$ застосуємо (4.4). Тоді маємо

$$\begin{aligned} f_3\mathbf{B}_0^{[3,0]}\mathbf{B}_4^{[n,0]} &+ 3f_2\big(\mathbf{B}_1^{[3,1]}\mathbf{B}_4^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[2,0]}\mathbf{B}_3^{[n,1]}\big) + \\ &+ 6f_1\big(\mathbf{B}_1^{[2,1]}\mathbf{B}_3^{[n,1]} + \mathbf{B}_1^{[1,0]}\mathbf{B}_2^{[n,2]}\big) + 6f_0\mathbf{B}_1^{[n,3]} = 6\mathbf{B}_2^{[n,2]} + 6b_0\mathbf{B}_1^{[n,3]}, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \big(f_3\mathbf{B}_0^{[3,0]} + 3f_2\mathbf{B}_1^{[3,1]}\big)\mathbf{B}_4^{[n,0]} &+ 3\big(f_2\mathbf{B}_1^{[2,0]} + 2f_1\mathbf{B}_1^{[2,1]}\big)\mathbf{B}_3^{[n,1]} + \\ &+ 6\big(f_1\mathbf{B}_1^{[1,0]} - 1\big)\mathbf{B}_2^{[n,2]} + 6(f_0 - b_0)\mathbf{B}_1^{[n,3]} = 0. \end{aligned}$$

Було доведено, що співвідношення (5.8) для $k = 0, 1, 2$ мають місце і за припущенням $\mathbf{B}_4^{[n,0]} = B_4^0 \neq 0$. Тоді $f_3\mathbf{B}_0^{[3,0]} + 3f_2\mathbf{B}_1^{[3,1]} = 0$. Отже (5.8) вірне для $k = 3$.

Нехай $k = 4$. В цьому випадку (5.7) набуває вигляду

$$f_4\mathbf{B}_1^{[n,0]} + 4f_3\mathbf{B}_1^{[n,1]} + 12f_2\mathbf{B}_2^{[n,2]} + 24f_1\mathbf{B}_1^{[n,3]} + 24f_0\mathbf{B}_1^{[n,4]} = 24\mathbf{B}_0^{[n,4]}.$$

Для $\mathbf{B}_1^{[n,0]}$ скористаємося (4.7), коли $k = 4$, для $\mathbf{B}_1^{[n,s]}$, $s = 1, 2, 3$, використаємо (4.8) для $k = 4 - s$, для $\mathbf{B}_0^{[n,4]}$ застосуємо (4.4). Отримуємо

$$\begin{aligned} f_4\mathbf{B}_1^{[4,0]}\mathbf{B}_5^{[n,0]} &+ 4f_3\big(\mathbf{B}_1^{[4,1]}\mathbf{B}_5^{[n,0]} + \mathbf{B}_0^{[3,0]}\mathbf{B}_4^{[n,1]}\big) + \\ &+ 12f_2\big(\mathbf{B}_1^{[4,2]}\mathbf{B}_5^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[3,1]}\mathbf{B}_4^{[n,1]} + \mathbf{B}_1^{[2,0]}\mathbf{B}_3^{[n,2]}\big) + \\ &+ 24f_1\big(\mathbf{B}_1^{[2,1]}\mathbf{B}_3^{[n,2]} + \mathbf{B}_1^{[1,0]}\mathbf{B}_2^{[n,3]}\big) + 24f_0\mathbf{B}_1^{[n,4]} = \\ &= 24\big(\mathbf{B}_2^{[n,3]} + b_0\mathbf{B}_1^{[n,4]}\big), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \big(f_4\mathbf{B}_1^{[4,0]} + 4f_3\mathbf{B}_1^{[4,1]} + 12f_2\mathbf{B}_1^{[4,2]}\big)\mathbf{B}_5^{[n,0]} &+ \\ + 4\big(f_3\mathbf{B}_1^{[3,0]} + 3f_2\mathbf{B}_1^{[3,1]}\big)\mathbf{B}_4^{[n,1]} &+ 12\big(f_2\mathbf{B}_1^{[2,0]} + 2f_1\mathbf{B}_1^{[2,1]}\big)\mathbf{B}_3^{[n,2]} + \\ + 24\big(f_1\mathbf{B}_1^{[1,0]} - 1\big)\mathbf{B}_2^{[n,3]} &+ 24(f_0 - b_0)\mathbf{B}_1^{[n,4]} = 0. \end{aligned}$$

Оскільки (5.8) виконуються для $k = \overline{0, 3}$ і $\mathbf{B}_5^{[n,0]} \neq 0$, то отримуємо

$$f_4\mathbf{B}_1^{[4,0]} + 4f_3\mathbf{B}_1^{[4,1]} + 12f_2\mathbf{B}_1^{[4,2]} = 0.$$

Тобто (5.8) вірне для $k = 4$.

Припустимо, що співвідношення (5.8) виконується для $2 \leqslant k \leqslant m-1$. Нехай $k = m$. Тоді (5.7) запишеться у вигляді

$$\sum_{i=0}^{l}(m)_i f_{m-i}\mathbf{B}_1^{[n,i]} + \sum_{i=l+1}^{m}(m)_i f_{m-i}\mathbf{B}_1^{[n,i]} = m!\mathbf{B}_0^{[n,m]}, \quad l = [\tfrac{m}{2}]. \qquad (5.9)$$

Для $\mathbf{B}_1^{[n,0]}$ використаємо (4.7) з $k = m$, для $\mathbf{B}_1^{[n,s]}$ скористаємося (4.8), при $k = m - s$, $s = 1, 2, \ldots, m-1$, а для $\mathbf{B}_0^{[n,m]}$ застосуємо (4.4). Розглянемо окремо два випадки: а) $m = 2r$; б) $m = 2r + 1$.

а) Нехай $m = 2r$. Маємо:

$$\begin{aligned}
&f_m\mathbf{B}_1^{[m,0]}\mathbf{B}_{m+1}^{[n,0]} + mf_{m-1}\Big(\mathbf{B}_1^{[m,1]}\mathbf{B}_{m+1}^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,0]}\mathbf{B}_m^{[n,1]}\Big) + \\
&\quad + (m)_2 f_{m-2}\Big(\mathbf{B}_1^{[m,2]}\mathbf{B}_{m+1}^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,1]}\mathbf{B}_m^{[n,1]} + \mathbf{B}_1^{[m-2,0]}\mathbf{B}_{m-1}^{[n,2]}\Big) + \\
&\quad + (m)_3 f_{m-3}\Big(\mathbf{B}_1^{[m,3]}\mathbf{B}_{m+1}^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,2]}\mathbf{B}_m^{[n,1]} + \\
&\qquad\qquad + \mathbf{B}_1^{[m-2,1]}\mathbf{B}_{m-1}^{[n,2]} + \mathbf{B}_1^{[m-3,1]}\mathbf{B}_{m-2}^{[n,3]}\Big) + \cdots \\
&\quad + (m)_r f_r\Big(\mathbf{B}_1^{[m,r]}\mathbf{B}_{m+1}^{[n,0]} + \mathbf{B}_1^{[m-1,r-1]}\mathbf{B}_m^{[n,1]} + \\
&\qquad\qquad + \mathbf{B}_1^{[m-2,r-2]}\mathbf{B}_{m-1}^{[n,2]} + \cdots + \mathbf{B}_1^{[r,0]}\mathbf{B}_{r+1}^{[n,r]}\Big) + \\
&\quad + (m)_{r+1} f_{r-1}\Big(\mathbf{B}_1^{[m-2,r-1]}\mathbf{B}_{m-1}^{[n,2]} + \mathbf{B}_1^{[m-3,r-2]}\mathbf{B}_{m-2}^{[n,3]} + \\
&\qquad\qquad + \mathbf{B}_1^{[m-4,r-3]}\mathbf{B}_{m-3}^{[n,4]} + \cdots + \mathbf{B}_1^{[r-1,0]}\mathbf{B}_r^{[n,r+1]}\Big) + \cdots \\
&\quad + (m)_{m-1} f_1\Big(\mathbf{B}_1^{[2,1]}\mathbf{B}_3^{[n,m-2]} + \mathbf{B}_1^{[1,0]}\mathbf{B}_2^{[n,m-1]}\Big) + m!f_0\mathbf{B}_1^{[n,m]} = \\
&= m!\Big(\mathbf{B}_2^{[n,m-1]} + b_0\mathbf{B}_1^{[n,m]}\Big).
\end{aligned}$$

Згрупуємо члени при $\mathbf{B}_{m+1-1}^{[n,i]}, i = \overline{0, m}$. Отримуємо

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_{m+1}^{[n,0]}\Big(f_m\mathbf{B}_1^{[m,0]} + mf_{m-1}\mathbf{B}_1^{[m,1]} + (m)_2 f_{m-2}\mathbf{B}_1^{[m,2]} + \\
&\qquad + (m)_3 f_{m-3}\mathbf{B}_1^{[m,3]} + \cdots + (m)_r f_r\mathbf{B}_1^{[m,r]}\Big) + \\
&\quad + m\mathbf{B}_m^{[n,1]}\Big(f_{m-1}\mathbf{B}_1^{[m-1,0]} + (m-1)f_{m-2}\mathbf{B}_1^{[m-1,1]} + \\
&\qquad + (m-1)_2 f_{m-3}\mathbf{B}_1^{[m-1,2]} + \cdots + (m-1)_{r-1} f_r\mathbf{B}_1^{[m-1,r-1]}\Big) +
\end{aligned}$$

$$+ (m)_2 \mathbf{B}_m^{[n,2]} \Big(f_{m-2} \mathbf{B}_1^{[m-2,0]} + (m-2) f_{m-3} \mathbf{B}_1^{[m-2,1]} + \cdots +$$
$$+ (m-2)_{r-2} f_r \mathbf{B}_1^{[m-2,r-2]} + (m-2)_{r-1} f_{r-1} \mathbf{B}_1^{[m-2,r-1]} \Big) + \cdots$$
$$+ (m)_{m-2} \mathbf{B}_3^{[n,m-2]} \Big(f_2 \mathbf{B}_1^{[2,0]} + 2 f_1 \mathbf{B}_1^{[2,1]} \Big) +$$
$$+ (m)_{m-1} \mathbf{B}_2^{[n,m-1]} \Big(f_1 \mathbf{B}_1^{[1,0]} - 1 \Big) +$$
$$+ (m)_m \mathbf{B}_1^{[n,m]} (f_0 - b_0) = 0.$$

За припущенням індукції (5.8) виконуються для $k = \overline{2, m-1}$ і крім того $\mathbf{B}_{m+1}^{[n,0]} \neq 0$. Тоді

$$f_m \mathbf{B}_1^{[m,0]} + m f_{m-1} \mathbf{B}_1^{[m,1]} + (m)_2 f_{m-2} \mathbf{B}_1^{[m,2]} + \cdots + (m)_r f_r \mathbf{B}_1^{[m,r]} = 0.$$

Отже, (5.8) вірне для $m = 2r$.

б) Нехай $m = 2r + 1$. Підставимо (4.4), (4.7) та (4.8) в (5.9). Повторивши аналогічні міркування отримаємо, що (5.8) також має місце у цьому випадку.

Доведемо формули (1.3) та (1.4). Дві перші формули з (1.3) безпосередньо випливають із (5.9). Нехай $k = 2$. Тоді з (5.8) маємо

$$f_2 \mathbf{B}_1^{[2,0]} + 2 f_1 \mathbf{B}_1^{[2,1]} = 0,$$

або

$$f_2 b_1 b_2 + 2 f_1 = 0.$$

Звідси отримуємо третю формулу з (1.3).

Нехай $3 \leqslant k \leqslant n$. Співвідношення (5.8) перепишемо у вигляді

$$f_k \mathbf{B}_1^{[k,0]} + \sum_{i=1}^{[k/2]} (k)_i f_{k-i} \mathbf{B}_1^{[k,i]} = 0.$$

Застосуємо формулу (4.5) до $\mathbf{B}_1^{[k,0]}$, та формулу (4.6) до $\mathbf{B}_1^{[k,i]}$. Маємо

$$f_k b_k \mathbf{B}_1^{[k-1,0]} + \sum_{i=1}^{[k/2]} (k)_i f_{k-i} \big(\mathbf{B}_1^{[k-2,i-1]} + b_k \mathbf{B}_1^{[k-1,i]} \big) = 0.$$

Звідки отримуємо (1.4). □

6. Формула Тіле та відшукання коефіцієнтів ОІЛДТ

Відомо [26,35], що коли в (2.5) вузли $z_1, z_2, \ldots, z_n \to z_0$ і виконуються умови переходу до границі в обернених різницях, то із (2.6) в околі точки $z_0 \in \mathcal{Z}$ отримується скінчений ланцюговий дріб вигляду

$$\bar{D}_n(z_0; z) = b_0(z_0) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{z - z_0}{b_k(z_0)}, \tag{6.1}$$

який називається формулою Тіле і є аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів.

Нехай визначені ганкелеві визначники

$$H_0^{(m)}(z_0) = 1, \qquad H_k^{(m)}(z_0) = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+k-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+k-1} & c_{m+k} & \cdots & c_{m+2k-2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

де $c_m = f^{(m)}(z_0)/m!$, $m \geqslant 0$, $c_m = 0$, $m < 0$.

Теорема 6.1 ([26, 42])**.** *Коефіцієнти формули Тіле* (6.1) *зображення функції f в околі z_0 визначаються наступним чином:*

$$\begin{gathered} b_0(z_0) = c_0, \qquad b_1(z_0) = 1/c_1, \qquad b_{2k}(z_0) = \frac{-(H_k^{(1)}(z_0))^2}{H_k^{(2)}(z_0)\, H_{k-1}^{(2)}(z_0)}, \\ b_{2k+1}(z_0) = \frac{(H_k^{(2)}(z_0))^2}{H_k^{(1)}(z_0)\, H_{k+1}^{(1)}(z_0)}, \quad k = \overline{1, [n/2]}. \end{gathered} \tag{6.2}$$

В [29, 42] доведено, що ланцюговий дріб Тіле

$$\bar{D}(z_0; z) = b_0(z_0) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_0}{b_k(z_0)}, \tag{6.3}$$

в який розвинута функція f в околі точки z_0, буде відповідним степеневому ряду Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Скінченний ланцюговий дріб (6.1), як підхідний дріб (6.3), має порядок відповідності $\nu_n = n + 1$. Із єдиності ланцюгового дробу випливає, що якщо коефіцієнти (6.1) визначати за формулами (6.2), то ланцюговий дріб також буде задовольняти умови (1.2), тобто буде ОІЛДТ.

З іншого боку, запропоновані в роботі рекурентні формули (1.3)-(1.4) для знаходження коефіцієнтів ОІЛДТ не вимагають обчислювати значення чотирьох визначників $H_{k-1}^{(2)}(z_0)$, $H_k^{(1)}(z_0)$, $H_k^{(2)}(z_0)$ та $H_{k+1}^{(1)}(z_0)$. В цьому і полягає перевага запропонованих в роботі рекурентних формул.

Література

[1] George A. Baker, Jr. and Peter Graves-Morris. *Padé approximants*, volume 59 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996. doi:10.1017/CBO9780511530074.

[2] Claude Brezinski and Michela Redivo-Zaglia. Padé-type rational and barycentric interpolation. *Numer. Math.*, 125(1):89–113, 2013. doi:10.1007/s00211-013-0535-7.

[3] A. Bultheel. On a special Laurent-Hermite interpolation problem. *Numerical Methods of Approximation Theory*, 6:63–79, 1982. doi:10.1007/978-3-0348-7186-0_5.

[4] G. Claessens. The rational Hermite interpolation problem and some related recurrence formulas. *Computers and Mathematics with Applications*, 2(2):117–123, 1976. doi:10.1016/0898-1221(76)90023-7.

[5] S. D. Conte. *Elementary numerical analysis: An algorithmic approach*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1965. doi:10.1137/1.9781611975208.

[6] Teresa Cortadellas Benítez, Carlos D'Andrea, and Eulàlia Montoro. The set of unattainable points for the rational Hermite interpolation problem. *Linear Algebra Appl.*, 538:116–142, 2018. doi:10.1016/j.laa.2017.09.034.

[7] Annie Cuyt, Vigdis Brevik Petersen, Brigitte Verdonk, Haakon Waadeland, and William B. Jones. *Handbook of continued fractions for special functions*. Springer, New York, 2008. doi:10.1007/978-1-4020-6949-9.

[8] Vladislav K. Dzyadyk and Igor A. Shevchuk. *Theory of uniform approximation of functions by polynomials*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008. doi:10.1515/9783110208245.

[9] Peter Henrici and Pia Pfluger. Truncation error estimates for Stieltjes fractions. *Numer. Math.*, 9:120–138, 1966. doi:10.1007/BF02166031.

[10] Doug Hensley. *Continued fractions*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006. doi:10.1142/9789812774682.

[11] F. B. Hildebrand. *Introduction to numerical analysis*. Dover Publications, Inc., New York, second edition, 1987.

[12] Józef Hoene-Wroński. *Introduction à la Philosophie des Mathématiques et Technie de l'Algorithmie*. Paris: Courcier, 1811. URL: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6225961k.texteImage.

[13] Józef Hoene-Wroński. *Philosophie de la Technie Algorithmique: La Loi Suprême et universelle des Mathématiques*. Paris: de L'imprimerie de P. Didot L'Aine, 1815. URL: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5701525j.texteImage.

[14] M. M. Hosseini and M. Jafari. An extended rational interpolation method. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14(4):1098–1104, 2009. doi:10.1016/j.cnsns.2007.11.015.

[15] Min Hu and Jieqing Tan. Adaptive osculatory rational interpolation for image processing. *J. Comput. Appl. Math.*, 195(1-2):46–53, 2006. doi:10.1016/j.cam.2005.07.011.

[16] William B. Jones and Wolfgang J. Thron. *Continued fractions*, volume 11 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1980. doi:10.1017/CBO9780511759550.

[17] Erich L. Kaltofen, Clément Pernet, and Zhi-Hong Yang. Hermite rational function interpolation with error correction. In *Computer algebra in scientific computing*, volume 12291 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 335–357. Springer, Cham, 2020. doi:10.1007/978-3-030-60026-6_19.

[18] Oleg Karpenkov. *Geometry of continued fractions*, volume 26 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2013. doi:10.1007/978-3-642-39368-6.

[19] Alexey Nikolaevitch Khovanskii. *The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*. P. Noordhoff N. V., Groningen, 1963.

[20] Paul Levrie and Adhemar Bultheel. A note on Thiele n-fractions. *Numer. Algorithms*, 4(3):225–239, 1993. doi:10.1007/BF02144105.

[21] Chang Wen Li, Xiao Lin Zhu, and Le Zou. Modified Thiele-Werner rational interpolation. *J. Math. Res. Exposition*, 30(4):653–663, 2010.

[22] Lisa Lorentzen and Haakon Waadeland. *Continued fractions with applications*, volume 3 of *Studies in Computational Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992.

[23] V. L. Makarov and I. I. Demkiv. Interpolating integral continued fraction of the Thiele type. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 220(1):50–58, 2017. doi:10.1007/s10958-016-3167-5.

[24] L. M. Milne-Thomson. *The Calculus of Finite Differences*. Macmillan & Co., Ltd., London, 2000.

[25] Thomas Muir. *A treatise on the theory of determinants*. Dover Publications, Inc., New York, 2003.

[26] N. E. Nörlund. *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Berlin: Springer, 1924. doi:10.1007/978-3-642-50824-0.

[27] C. D. Olds. *Continued fractions*. Random House, New York, 1963.

[28] M. M. Pahirya. Application of a continuant to the estimation of a remainder term of Thiele's interpolation continued fraction. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 246(5):687–700, 2020. doi:10.1007/s10958-020-04773-6.

[29] M. M. Pahirya and R. A. Katsala. Equivalence of two methods for the construction of regular continued C-fractions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 61(7):1192–1198, 2009. doi:10.1007/s11253-009-0268-z.

[30] A. L. Perrie. Uniform rational approximation with osculatory interpolation. *J. Comput. System Sci.*, 4:509–522, 1970. doi:10.1016/S0022-0000(70)80026-5.

[31] Oskar Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Dritte, verbesserte und erweiterte Aufl. Bd. II. Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1957.

[32] Herbert E. Salzer. Note on osculatory rational interpolation. *Math. Comp.*, 16:486–491, 1962. doi:10.2307/2003141.

[33] Jieqing Tan. The limiting case of Thiele's interpolationg continued fraction expantion. *Jornal of Computational Mathematics*, 19(4):433–444, 2001. URL: http://www.global-sci.org/v1/jcm/volumes/v19n4/pdf/194-433.pdf.

[34] Jieqing Tan and Ping Jiang. A Neville-like method via continued fractions. In *Proceedings of the International Symposium on Computational Mathematics and Applications (Dalian, 2002)*, volume 163, pages 219–232, 2004. doi:10.1016/j.cam.2003.08.067.

[35] T. N. Thiele. *Interpolationsrechnung*. Leipzig: Commisission von B.G. Teubner, 1909.

[36] Robert Vein and Paul Dale. *Determinants and their applications in mathematical physics*, volume 134 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1999. doi:10.1007/b98968.

[37] H. S. Wall. *Analytic Theory of Continued Fractions*. D. Van Nostrand Co., Inc., New York, N. Y., 1948.

[38] J. L. Walsh. *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XX. American Mathematical Society, Providence, R.I., third edition, 1960. doi:10.1007/BF01708049.

[39] Jinbo Wang and Chuanqing Gu. Vector valued Thiele-Werner-type osculatory rational interpolants. In *Proceedings of the International Symposium on Computational Mathematics and Applications (Dalian, 2002)*, volume 163, pages 241–252, 2004. doi:10.1016/j.cam.2003.08.069.

[40] Luc Wuytack. On the osculatory rational interpolation problem. *Math. Comput.*, 29:837–843, 1975. doi:10.2307/2005295.

[41] Qian-jin Zhao and Jie-qing Tan. Block based Newton-like blending interpolation. *J. Comput. Math.*, 24(4):515–526, 2006. URL: https://global-sci.org/intro/article_detail/jcm/8771.html.

[42] M. M. Пагіря. *Наближення функцій ланцюговими дробами.* Ужгород: Ґражда, 2016.

Юлія Мисло

Ужгородський національний університет, вулиця Волошина, 54, Ужгород, Закарпатська область, 88000, Україна

Email: julia.pah@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6771-2844

Михайло Пагіря

Ужгородський національний університет, вулиця Волошина, 54, Ужгород, Закарпатська область, 88000, Україна

Email: pahirya@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1488-3302