УДК 517.5

В. Я. Рибак, Ю. М. Сегеда (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЕЛ БЕРНУЛЛІ

By using the fractional integrodifferentiation the Bernoulli numbers as functions of discrete argument generalized to the continuous functions.

Числа Бернуллі – функції дискретного аргументу – узагальнюються до неперервних функцій.

Числа Бернуллі є коефіцієнтами при розгортанні у степеневий ряд виразу $\frac{x}{e^x-1}$, а саме:

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{i=0}^{\infty}B_i\frac{x^i}{i!};\ |x|<2\pi. \tag{1}$$

Наводимо значення декількох із них: $B_0=1$; $B_1=-\frac{1}{2}$; $B_2=\frac{1}{6}$; $B_4=\frac{1}{30}$; $B_6=\frac{1}{42}$; $B_8=-\frac{1}{30}$; $B_{10}=\frac{5}{66}$; $B_{2k+1}=0$, $k=1,2,3,....$

Використовуючи ці числа для асимптотичного подання $\ln\Gamma(x)$, логарифмічної похідної $\varphi(x)$ гамма-функції $\Gamma(x)$, розгортання у степеневий ряд $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$, $\operatorname{cosec}x$ тощо.

У виразі (1) покладемо $e^x-1=u$, $x=\ln(u+1)$. Тоді

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{\ln(u+1)}{u}=1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}-\frac{u^3}{4}+\dots,\ (-1<u\le 1).$$

Повертаємося до початкової незалежної змінної:

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\tfrac{1}{2}(e^x-1)+\tfrac{1}{3}(e^x-1)^2-\tfrac{1}{4}(e^x-1)^3+\dots=$$

$$=1-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\cdots\right)+\tfrac{1}{3}\left[\tfrac{x^2}{2!}(2^2-2\cdot1^2)+\tfrac{x^3}{3!}(2^3-2\cdot1^3)+\tfrac{x^4}{4!}(2^4-2\cdot1^4)\cdots\right]-$$

$$-\tfrac{1}{4}\left[\tfrac{x^3}{3!}(3^3-3\cdot2^3+3\cdot1^3)+\tfrac{x^4}{4!}(3^4-3\cdot2^4+3\cdot1^4)+\cdots\right]=$$

$$=1-\tfrac{1}{2}\tfrac{x}{1!}+\left(-\tfrac{1^2}{2}+\tfrac{2^2-2\cdot1^2}{3}\right)\tfrac{x^2}{2!}-\left(\tfrac{1^3}{2}-\tfrac{2^3-2\cdot1^3}{3}+\tfrac{3^3-3\cdot2^3+3\cdot1^3}{4}\right)\tfrac{x^3}{3!}+\cdots.$$

Враховуюмо означення чисел Стірлінга другого роду [1]

$$\sigma_m^{(n)}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{0}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m$$

і переписуємо попередній вираз у такому вигляді:

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\sigma_1^{(1)}\frac{x}{1!}+\left(\sigma_2^{(2)}\frac{2!}{3}-\sigma_2^{(1)}\frac{1!}{2}\right)\frac{x^2}{2!}-\left(\sigma_3^{(3)}\frac{3!}{4}-\sigma_3^{(2)}\frac{2!}{3}+\sigma_3^{(1)}\frac{1!}{2}\right)\frac{x^3}{3!}+$$

$$+\left(\sigma_4^{(4)}\frac{4!}{5}-\sigma_4^{(3)}\frac{3!}{4}+\sigma_4^{(2)}\frac{2!}{3}-\sigma_4^{(1)}\frac{1!}{2}\right)\frac{x^4}{4!}-\cdots \tag{2}$$

Із порівняння з (1) випливає

$$B_1 = -\sigma_1^{(1)}\frac{1!}{2};\ \ B_2 = \sigma_2^{(2)}\frac{2!}{2} - \sigma_1^{(1)}\frac{1!}{2};\ \ B_3 = -\left(\sigma_3^{(3)}\frac{3!}{4} - \sigma_3^{(2)}\frac{2!}{3} + \sigma_3^{(1)}\frac{1!}{2}\right);$$

$$B_n = (-1)^n\left(\sigma_n^{(n)}\frac{n!}{n+1} - \sigma_n^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{n} + \sigma_n^{(n-2)}\frac{(n-2)!}{n-1} - \cdots - (-1)^n\sigma_n^{(1)}\frac{1!}{2}\right) =$$

$$= 0^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sigma_n^{(k)}\frac{k!}{k+1},\ \ n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

Зважаючи на те, що $\sigma_n^{(k)} = 0$, якщо $k > n$, значення для B_n можна записати і так:

$$B_n = 0^n + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sigma_n^{(k)}\frac{k!}{k+1}. \tag{4}$$

А звідси випливає можливість розширити дискретні значення B_n до неперервних $B(r)$, де $r \in \mathbf{R}, r \leq 0$

$$B(r) = 0^r + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sigma_n^{(k)}\frac{k!}{k+1}. \tag{5}$$

Доданок 0^r потрібен лише для реалізації значення $B(0) = 1$

$$0^r + \lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^r. \tag{6}$$

Множники $\sigma_r^{(k)}$ тут слід вже сприймати як узагальнені числа Стірлінга другого року [2].

Дослідження збіжності ряду, в який розгортається $\sigma_r^{(k)}$, проведено в [2]. На цій підставі стверджуємо, що й ряд (5) рівномірно збігається до своєї суми.

На рис. 1 і 2 показано характер протікання залежності $B(r)$ для різних значень аргументу.

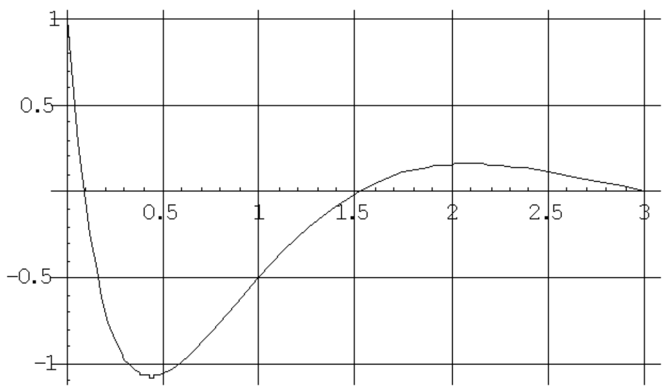

Рис. 1. Залежність $B(r)$ для $r \in [0; 3]$

Оскільки узагальнені числа Стірлінга другого роду $\sigma_r^{(k)}$ були одержані за допомогою апарата дробового інтегро-диференціювання, то і узагальнення чисел Бернуллі також безпосередньо завдячує саме дробовому диференціюванню.

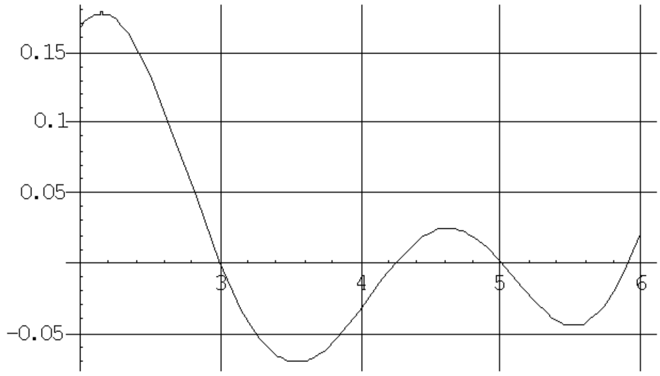

Рис. 2. Залежність $B(r)$ для $r \in [2; 6]$

Список використаної літератури

1. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Рибак В. Я.* Про узагальнення чисел Стірлінга другого роду // Наук. вісник Ужгор. ун-ту. Сер. Матем. і інформ. – Ужгород: УжНУ, 2002. – Вип. 7. – С. 90–95.

Одержано 23.06.2015