УДК 512.643.8

В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош (Інститут математики НАН України)

ДОСТАТНІ УМОВИ ЗВІДНОСТІ В КАТЕГОРІЇ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМ ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ

It is proved the reducibility of cyclic monomial matrices over a commutative local ring in the case when their defining sequences contain subsequences of a fixed form.

Доведена звідність циклічних мономіальних матриць над комутативним локальним кільцем у випадку, коли їх визначальні послідовності містять в собі підпослідовності фіксованого вигляду.

1. Вступ. Нехай K — комутативне кільце з одиницею. Під *мономіальною матрицею* $M=(m_{ij})$ *над* K будемо розуміти матрицю порядку n (тобто, розміру $n\times n$), в кожному рядку і в кожному стовпці якої стоїть не більше одного ненульового елемента Такій матриці можна природнім чином зіставити орінтований граф $\Gamma(M)$ з вершинами $1,\dots,n$, і стрілками $i\to j$ для всіх $m_{ij}\neq 0$. Очевидно, що $\Gamma(M)$ є неперетинним об'єднанням ланцюгів і циклів (кожний з яких має однаковий напрямок стрілок). До того ж така матриця перестановочно подібна прямій сумі мономіальних матриць, яким відповідають ланцюги і цикли графа $\Gamma(M)$. Якщо ланцюг (відповідно цикл) лише один, то мономіальну матрицю будемо називати *ланцюговою* (відповідно *циклічною*).

Мономіальні матриці над K утворюють категорію, якщо морфізмом із A в B вважати довільну матрицю X таку, що $AX=XB$. Називатимемо її *категорією мономіальних матриць над* K. Ізоморфізми цієї категорії — це, на матричній мові, матриці, що здійснюють подібність. Матрицю A над кільцем K (як об'єкт цієї категорії) називається *звідною*, якщо вона подібна матриці вигляду $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}$, де A_{11} і A_{22} — матриці порядку $p\geq 1$ і $q\geq 1$ відповідно. Таку матрицю A називатимемо також (p,q)-*звідною* або $(*,q)$-*звідною*, якщо нас не цікавить число. p. Очевидно, що при $n>1$ незвідними можуть бути лише циклічні матриці. У цій статті вивчаються незвідні об'єкти вказаної категорії.

Будь-яка циклічна матриця порядку n перестановочно подібна матриці вигляду

$$A=M_t(\overline{a})=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

де $\overline{a}=(a_1,\dots,a_{n-1},a_n)$. Така матриця A називається *канонічно циклічною*, а послідовність $\overline{a}$ — її *визначальною послідовністю.* У випадку, коли всі ненульові елементи a_i мають вигляд t^{s_i}, де t — зафіксований елемент із K ($s_i\geq 0$), матриця A називається *канонічно* t-*циклічною.* В цьому випадку пишуть також $A=M_t(\overline{a})$. Число s_i називається *вагою* елемента t^{s_i}, а послідовність $\overline{w}=(s_1,\dots,s_{n-1},s_n)$ — ваговою послідовністю матриці A.

Канонічно t-циклічні матриці вивчалися в багатьох роботах (див., наприклад, [1]– [4]. Відносно вищеприведених означень і позначень див., наприклад, [4].

2. Теореми про $(*,3)$-звідність. Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R \neq 0$ і t — ненульовий елемент із R такий, що $t^2 = 0$.

Теорема 1. *Канонічно t-циклічна матриця порядку $n \geq 9$ з ваговою послідовністю $(0,1,0,1,0,p_1,\dots,p_s,1,1,1,1)$ є $(n-3,3)$ звідною.*

Теорема 2. *Канонічно t-циклічна матриця порядку $n \geq 9$ з ваговою послідовністю $(0,0,0,0,0,p_1,\dots,p_s,1,1,0,1)$ є $(n-3,3)$ звідною.*

Теорема 3. *Канонічно t-циклічна матриця порядку $n \geq 12$ з ваговою послідовністю $(0,1,1,0,1,0,1,0,p_1,\dots,p_s,1,1,1,1)$ є $(n-3,3)$ звідною.*

В умовах усіх теорем $s \geq 0$.

3. Доведення теореми 1. Спочатку введемо деякі позначення для перетворень довільної квадратної матриці над кільцем K. $P_{ij}(a)$ позначає додавання i-го рядка, помноженого на елемент $a \in K$, до j-го рядка. $Q_{ij}(a)$ позначає аналогічне перетворення для стовпців. Через $[m \xrightarrow{a} s]^+$ позначимо перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $P_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $Q_{sm}(-a)$, а через $[m \xrightarrow{a} s]^-$ — перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $Q_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $P_{sm}(-a)$.

Завжди вважаємо, що α_i позначає елемент $t^{p_i} \in R$.

Маємо $M_t(1,t,1,t,1,\alpha_1,\dots,\alpha_s,t,t,t,t) =$

$$= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(n-3,3)$-звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

Покажемо, що N подібна матриці $M_t(1,t,1,t,1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s,t,t,t,t)$.
На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \overset{t}{\to} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array}\right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \overset{-1}{\to} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array}\right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \overset{-1}{\to} n]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array}\right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \xrightarrow{-t} n-2]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array}\right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \xrightarrow{-1} 1]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array}\right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-t} 2]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array}\right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою (чи, іншими словами, перестановкою) рядків і стовпців приводиться до матриці $M_t(1, t, 1, t, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t, t)$.

4. Доведення теореми 2. Доведення проводимо по тій же схемі, що і доведення теореми 1.

Маємо $M_t(1,1,1,1,1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s,t,t,1,t) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(n-3,3)$-звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Покажемо, що N подібна матриці $M_t(1,1,1,1,1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s,t,t,1,t)$.

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \overset{-1}{\to} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \overset{-1}{\to} n]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \overset{-t}{\to} n-2]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \overset{-t}{\to} 1]^{+}$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \overset{-t}{\to} 2]^{+}$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M_t(1, 1, 1, 1, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, 1, t)$.

5. Доведення теореми 3. Доведення проводимо по тій же схемі, що і доведення теореми 1.

Маємо $M_t(1,t,t,1,t,1,t,1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s,t,t,t,t) =$

$$= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(n-3,3)$-звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

Покажемо, що N подібна $M_t(1,t,t,1,t,1,t,1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s,t,t,t,t)$.

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t} n-3]^{-}$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n-1]^{+}$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-1} n]^{+}$:

$$
N_3 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).
$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \stackrel{-1}{\to} n-2]^+$:

$$
N_4 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).
$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \stackrel{-1}{\to} 1]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \overset{-1}{\to} 2]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 7-му кроці застосуємо до матриці N_6 перетворення $[6 \overset{-t}{\to} 3]^+$:

$$N_7 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

Матриця N_7 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M_t(1, t, t, 1, t, 1, t, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t, t)$.

6. Теореми про 2-спадкову звідність (формулювання і доведення). Канонічно циклічну матрицю A назвемо 2-*спадково звідною* або *спадково звідною довжини* 2, якщо у приведеному вище означенні звідної матриці діагональні блоки A_{11} і A_{22} є також канонічно циклічними.

Як і для попередніх теорем, вважаємо, що K — комутативне локальне кільце з радикалом $R \neq 0$ і t — ненульовий елемент із R такий, що $t^2 = 0$.

Під підпослідовністю послідовності завжди розуміємо зв'язну (з точністю до циклічної перестановки послідовності) підпослідовність.

Теорема 4. *Канонічно t-циклічна матриця 2-спадково звідна, якщо її вагова послідовність містить підпослідовності* $(0, 0)$ *і* $(1, 1, 1, 1)$.

Доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення теорем 1–3. Застосувавши до звідної матриці (з канонічно циклічними діагональними блоками)

$$N = \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0
\end{array}\right)$$

перетворення $[r+4 \xrightarrow{1} r+3]^{-}$, $[1 \xrightarrow{-t} r+5]^{+}$, $[n \xrightarrow{t} r+2]^{-}$, маємо матрицю

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0
\end{array}\right),$$

яка однаковою перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду $M(1,1,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,t,t,t,t,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_s)$.

Теорема 5. *Канонічно t-циклічна матриця 2-спадково звідна, якщо її вагова послідовність містить підпослідовності $(0,0,0)$ і $(1,1,0,1,1)$.*

Доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення теорем 1–3. Застосувавши до звідної матриці (з канонічно циклічними діагональними блоками)

$$N = \left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0
\end{array}\right)$$

перетворення $[r+5 \xrightarrow{1} r+4]^{-}$, $[1 \xrightarrow{-1} r+6]^{+}$, $[2 \xrightarrow{-t} r+7]^{+}$, $[n \xrightarrow{t} r+3]^{-}$, маємо матрицю

$$N_4 = \left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0
\end{array}\right),$$

яка однаковою перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду $M(1,1,1,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,t,t,1,t,t,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_s)$.

Список використаної літератури

1. *Bondarenko Vitaliy M., Bortos Maria Yu., Dinis Ruslana F., Tylyshchak Alexander A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, no 2. – P. 171–187.
2. *Бортош М. Ю.* Про один клас звідних мономіальних матриць над комутативними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2014. – Вип. 25, №1. – С. 15–20.
3. *Бондаренко В. М., Бортош М. Ю.* Про $(*, 2)$-звідні мономіальні матриці над комутативними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. 29, №2. – С. 22–30.
4. *Bondarenko Vitaliy M., Bortos Maria Yu., Dinis Ruslana F., Tylyshchak Alexander A.* Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, no 1. – P. 11–20.

Одержано 15.02.2017