

УДК 519.6

М. І. Глебена, О. М. Гапак, Р. С. Шулла (Ужгородський нац. ун-т),  
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т ім. І.Франка)

## ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ОПТИМІЗАЦІЇ НЕГЛАДКИХ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

The numerical method of finding of the global extremum of logarithmic concave arbitrary multi-variables functions is suggested. The method is based on the use of the apparatus of non-classical Newtonian majorant and diagrams functions which are given discretely.

Пропонується чисельний метод відшукування абсолютного екстремуму довільної логарифмічно вгнутої функції багатьох змінних, в основі якого лежить використання апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

**1. Вступ.** При розв'язуванні прикладних задач визначення оптимальних режимів складних систем необхідно розв'язувати задачі на знаходження екстремумів негладких і розривних функцій. Такі ситуації зустрічаються, наприклад, в теорії апроксимації, при розв'язуванні окремих задач дослідження операцій, в застосуванні теорії керування рухом динамічних систем тощо. Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів, за допомогою яких можна було б знаходити абсолютний екстремум як неперервно-диференційованих, так і довільних негладких і розривних функцій.

Нами ведеться робота над розробленням таких методів. В їх основу покладено використання апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [1].

В [2, 3] розглянуто використання апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї та двох дійсних змінних, заданих таблично для оптимізації негладких функцій однієї та двох дійсних змінних.

В статті розглядається побудова апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій багатьох дійсних змінних, заданих таблично, та алгоритм нульового порядку оптимізації негладких логарифмічно вгнутих функцій багатьох змінних.

**2. Основний результат.** Розглянемо функцію  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , визначену в області  $D = \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$  для всіх  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ . Нехай функція  $y = f(x)$  задана своїми значеннями на дискретній множині точок  $(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \dots, a_n + k_n h_n)$ , де  $k_i = 0, 1, \dots, m_i$ ,  $h_i = (b_i - a_i) / m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Позначимо через  $M$  дискретну множину точок  $f(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \dots, a_n + k_n h_n) = a_{k_1 k_2 \dots k_n}$ .

У просторі змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n, y$  побудуємо точки зображення  $P_{k_1 k_2 \dots k_n}(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \dots, a_n + k_n h_n, -\ln a_{k_1 k_2 \dots k_n})$  і з кожної точки  $P_{k_1 k_2 \dots k_n}$  проведемо півпрямую в додатному напрямі осі  $Oy$ . Сукупність точок цих півпрямих позначимо через  $S$ , а їхню опуклу оболонку – через  $C(S)$ . Для кожної точки  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  визначимо  $B_x(x_1, x_2, \dots, x_n, \chi_x)$ , де  $\chi_x = \inf_{x \in C(S)} y$ .

Множина точок  $B_x$ ,  $x \in D$ , утворює багатогранну поверхню  $\delta_f$ , яку називатимемо неklasичною діаграмою Ньютона, визначеною в області  $D$ , функції

$y = f(x)$ , заданої таблично. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд  $y = \chi(x)$ , де  $\chi(x) = \chi_x$ ,  $x \in D$ .

Позначимо

$$M_f(x) = \exp(-\chi(x)), \quad x \in D.$$

Тоді для будь-якого  $x \in R$  виконується нерівність  $-\ln f(x) \geq \chi(x)$ , або  $f(x) \leq \exp(-\chi(x)) = M_f(x)$ . Функцію  $M_f(x)$ , визначену в області  $D$ , називатимемо неklasичною мажорантою Ньютона функції  $y = f(x)$ , заданої таблично.

Позначимо через  $T_{k_1 k_2 \dots k_n}$  значення мажоранти Ньютона в точці  $x = (a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \dots, a_n + k_n h_n)$ . Величини

$$R_{k_1 \dots k_i \dots k_n}(x_i) = \left( \frac{T_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_i-1, k_{i+1}, \dots, k_n}}{T_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_n}} \right)^{\frac{1}{h_i}},$$

називатимемо  $(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)$  числовими нахилами мажоранти  $M_f(x)$  в напрямі осі  $Ox_i$ , а величини

$$D_{k_1 \dots k_i \dots k_n}(x_i) = \frac{R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, k_{i+1}, k_n}(x_i)}{R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i)}$$

називатимемо  $(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)$  відхиленнями в напрямі осі  $Ox_i$ .

Із опуклості діаграми  $\delta_f$  випливають такі властивості:

$$R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i) \leq R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_i+1, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i),$$

$$D_{k_1, \dots, k_i, \dots, k_n}(x_i) \geq 1,$$

$$\max_{x \in R} f(x) = \max_{x \in D} M_f(x).$$

Крім того, якщо

$$\max_{x \in R} f(x) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n),$$

то

$$\max_{x \in D} M_f(x) = M_f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

Ці властивості лежать в основі чисельного методу нульового порядку відшукування з певною точністю екстремуму будь-якої логарифмічно вгнутої функції багатьох змінних за будь-якого початкового наближення. Зазначимо, якщо  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - логарифмічно вгнута функція, то  $T_{k_1 k_2 \dots k_n} = a_{k_1 k_2 \dots k_n}$ .

Суть методу полягає в наступному. Якщо в точці  $(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \dots, a_n + k_n h_n) \in M$  виконуються умови:

$$R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i) \leq 1,$$

$$R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_i+1, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i) > 1 \tag{1}$$

для всіх  $i = 1, 2, \dots, n$ , то ця точка з точністю  $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$  приймається за точку максимуму функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Якщо для фіксованого  $i, (i = 1, 2, \dots, n)$  умови (1) не виконуються, то

$$R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i) > 1,$$

$$R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i) > 1, \quad (2)$$

або

$$\begin{aligned} R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i) < 1, \\ R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i) < 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Алгоритм методу полягає в наступному. За початкову точку беремо будь-яку точку із множини  $M$ . Для кожного індекса  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) знаходимо точку для якої виконуються умови (1). При цьому, якщо для фіксованого індекса  $i$  умови (1) виконуються в точці  $M_i \in M$ , то для знаходження точки, для якої будуть виконуватись умови (1), для наступного  $i$ , за початкову точку беремо точку  $M_i$ .

Для відшукування точки, для якої виконуються умови (1) у випадку (2) знаходимо мінімальне значення індекса  $\nu$ , для якого

$$R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i-\nu}, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i) \leq 1.$$

Для відшукування точки, для якої виконуються умови (1) у випадку (3) знаходимо мінімальне значення індекса  $\nu$ , для якого

$$R_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+\nu}, k_{i+1}, \dots, k_n}(x_i) > 1.$$

**Приклад 1.** Розглянемо задачу відшукування абсолютного мінімуму штрафної функції №2 при  $n = 3$ :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + 10^{-3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 0.25)^2.$$

Для цього шукатимемо абсолютний максимум функції

$$-f(x_1, x_2, x_3) + 500,$$

оскільки  $-f(x_1, x_2, x_3) + 500 > 0$  в області

$$D = \{-10 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, 2, 3\}.$$

Покладемо  $h_i = 0.1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . За початкове наближення візьмемо точку  $(-10; -10; -10)$ . Застосувавши описаний вище алгоритм, одержимо точку  $(0.7; 0.8; 1)$ , яку приймаємо з точністю  $h = 0,1$  за точку максимуму функції. Якщо цю точку уточнити в області

$$D = \{0.6 \leq x_1 \leq 2.6; \quad 0.7 \leq x_2 \leq 2.7; \quad 0.9 \leq x_3 \leq 2.9\},$$

то одержимо точку  $(1; 0.99; 0.99)$ , яку приймаємо за точку максимуму з точністю  $h = 0.01$ . Уточнимо цю точку в області

$$D = \{0.98 \leq x_1 \leq 1.18; \quad 0.98 \leq x_2 \leq 1.18; \quad 0.98 \leq x_3 \leq 1.18\}.$$

Одержимо точку  $(0.995; 0.995; 0.995)$ ,  $h = 0.001$  за точку максимуму. Після уточнення цієї точки в області

$$D = \{0.99 \leq x_1 \leq 0.995; \quad 0.99 \leq x_2 \leq 0.995; \quad 0.99 \leq x_3 \leq 0.995\}$$

одержимо точку  $(0.99459; 0.99459; 0.99459)$ , яку з точністю  $h = 0.00001$  приймаємо за максимальну. Отже, абсолютний мінімум штрафної функції №2 досягається в точці  $(0.99459; 0.99459; 0.99459)$  і  $\min f(x_1, x_2, x_3) \approx 0.007473308$  з точністю  $h = 0.00001$ .

**Приклад 2.** Розглянемо задачу відшукування абсолютного мінімуму штрафної функції №2 при  $n = 4$ :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2 + 10^{-3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 0.25)^2.$$

Для цього шукатимемо абсолютний максимум функції

$$-f(x_1, x_2, x_3, x_4) + 1000,$$

оскільки  $-f(x_1, x_2, x_3, x_4) + 1000 > 0$  в області

$$D = \{ -10 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, 2, 3, 4 \}.$$

Покладемо  $h_i = 0.1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . За початкове наближення візьмемо точку  $(-10; -10; -10; -10)$ . Застосувавши описаний вище алгоритм, одержимо точку  $(1; 1; 1; 1)$ , яку приймаємо з точністю  $h = 0.1$  за точку максимуму функції. В результаті застосування вищеописаного алгоритму одержимо наступну послідовність точок:  $(0.99; 0.99; 0.99; 0.99)$ ,  $(0.993; 0.995; 0.993; 0.993)$ ,  $(0.9926; 0.9946; 0.9926; 0.9926)$ ,  $(0.99266; 0.99461; 0.99266; 0.99266)$ . Точку  $(0.99266; 0.99461; 0.99266; 0.99266)$  приймаємо за максимальну з точністю  $h = 0.00001$  і  $\min f(x_1, x_2, x_3, x_4) \approx 0.013846443$ .

### Список використаної літератури

1. Цегелик Г. Г. Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблицно, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г.Г. Цегелик. Ї Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190 с.
2. Глебена М. І. Чисельний метод мажорантного типу відшукування екстремуму негладких і розривних функцій / М.І. Глебена, Г.Г. Цегелик // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. Вип. № 12–13. – С. 55–58.
3. Цегелик Г. Г. Чисельний метод мажорантного типу відшукування абсолютного екстремуму довільних негладких функцій двох дійсних змінних / Г.Г.Цегелик, М.І.Глебена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та ін форм. – 2010. - Вип.16. С. 63–70.

Одержано 10.11.2015