

**Рого В. Л., Варга Я. В.**

**ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМ ПРИРОДОЗНАВСТВА**

**Навчальний посібник**

**Міністерство освіти і науки України  
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»**

**Рого В. Л., Варга Я. В.**

**ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМ ПРИРОДОЗНАВСТВА**

**Навчальний посібник**

**Ужгород – 2023**

УДК 517.9 (075.8)  
P32

Навчальний посібник ознайомлює з можливостями застосування звичайних диференціальних рівнянь при дослідженні реальних явищ і процесів. Способи побудови диференціальних моделей ілюструються на прикладах задач із різних галузей науки: геометрії, фізики, хімії, економіки, біології, медицини, військової справи тощо. Посібник містить також задачі для самостійної роботи здобувачів вищої освіти.

**Рецензенти:**

Ронто М.Й. – доктор фізико-математичних наук, професор Мішкольцьського університету;

Сливка-Тилищак Г.І. – доктор фізико-математичних наук, доц., зав. кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу ДВНЗ «УжНУ».

*Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 20 червня 2023, протокол №7.*

*Рекомендовано до друку Редакційно-видавничою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 16 червня 2023, протокол №4.*

## ВСТУП

Теорія диференціальних рівнянь є одним із важливих розділів математики, який має широке застосування в природничих, соціально-економічних та інших науках. Диференціальні рівняння – тобто співвідношення, які пов'язують певною функціональною залежністю шукану функцію та її похідні, – часто отримуються в результаті вивчення різноманітних реальних явищ і процесів. Такі рівняння називають диференціальними моделями досліджуваного явища чи процесу. Загалом диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища і процеси, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики їх станів, із їх використанням можна описати механізм розвитку процесу, а також передбачити його подальший розвиток без натуральних експериментів, проведення яких часто є надто витратним або просто неможливим. Зауважимо, що для повної диференціальної моделі самого тільки диференціального рівняння не досить, адже воно має безліч розв'язків, а тому, розв'язавши диференціальне рівняння, яке описує перебіг певного процесу, неможливо однозначно встановити залежність між величинами, що характеризують цей процес. Аби знайти саме той розв'язок рівняння, який відповідає конкретній задачі, треба володіти додатковою інформацією про початковий стан процесу, тобто враховувати початкові або крайові умови, які найчастіше визначаються експериментальним шляхом.

Зрозуміло, що диференціальні моделі – це лише частка з того різноманіття математичних моделей, які можуть будуватися в ході пізнання навколишнього світу. При цьому необхідно відзначити, що існують різні типи й власне диференціальних моделей. У даному посібнику розглядатимуться лише моделі, що описуються звичайними диференціальними рівняннями, однією з характерних властивостей яких є залежність невідомої функції тільки від однієї змінної.

У процесі побудови звичайно-диференціальних моделей зокрема важливе, а часом і ключове значення має знання законів тієї галузі науки, з якою пов'язана природа досліджуваної задачі. Так, наприклад, у механіці це можуть бути закони Ньютона, в електротехніці – закони Кірхгофа, у хімії – закон діючих мас тощо. Звісно, на практиці доводиться мати справу і з такими випадками, коли закони, що дозволяли б скласти диференціальне рівняння, невідомі, а відтак необхідно вдаватися до різних гіпотез, що стосуються протікання процесу за малих змін параметрів (змінних). Тоді до диференціального рівняння призводить граничний перехід. При цьому, якщо виявиться, що результати дослідження отриманого диференціального рівняння як математичної моделі узгоджуються з експериментальними даними, то це й означатиме, що висловлена гіпотеза вірно відображає істинний стан справ.

Мета пропонованого навчального посібника – на прикладах із різних галузей знань дати здобувачам вищої освіти уявлення про роль, яку грають звичайні диференціальні рівняння при розв’язуванні задач практики, а також вказати деякі конкретні шляхи побудови й розв’язування диференціальних моделей.

## РОЗДІЛ 1

### Геометричний зміст похідної.

#### Диференціальні моделі геометричних задач

**Похідна** – основне поняття диференціального числення, що характеризує швидкість зміни функції. Визначається як границя відношення приросту функції до приросту її аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля (якщо така границя існує):

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

Похідна також позначається як відношення диференціалів  $dy/dx$ , де  $dy$  і  $dx$  позначають нескінченно малий приріст відповідної змінної.

Функцію, що має скінченну похідну, називають диференційовною (в точці чи на проміжку). Умова неперервності функції в точці  $x = a$  є необхідною, але не достатньою умовою диференційовності функції в цій точці.

Похідна функції  $y = f(x)$  за змінною  $x$  у точці  $x = a$  з геометричної точки зору характеризує нахил дотичної лінії до графіка функції  $y = f(x)$ . Нахил дотичної дуже близький до нахилу лінії, що проходить через точки  $M(a, f(a))$  та  $N(a + h, f(a + h))$ , де  $h$  досить мале. Такі лінії називають *січними*. При  $h \rightarrow 0$  нахил січної наближається до нахилу *дотичної*. Тому дотична визначається як граничне положення січної  $MN$ , коли  $N \rightarrow M$ , а

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

**Геометричний зміст похідної.** Значення похідної  $f'(x_0)$  функції  $f(x)$  у точці  $x = x_0$  рівне значенню кутового коефіцієнта дотичної до кривої  $y = f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$ .

Оскільки кутовий коефіцієнт  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , де  $\alpha$  – кут, утворюваний дотичною з додатним напрямом осі абсцис, то у випадку  $f'(x_0) > 0$  кут  $\alpha$  – гострий; якщо  $f'(x_0) = 0$ , то дотична паралельна осі абсцис або співпадає з нею; а у випадку  $f'(x_0) < 0$  кут  $\alpha$  – тупий.

Рівняння дотичної до кривої  $y = f(x)$  у точці  $M(x_0, y_0)$  має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

*Нормаллю* до кривої  $y = f(x)$  у точці  $M(x_0, y_0)$  називається пряма, що проходить через точку  $M$  перпендикулярно до дотичної в цій точці. Рівняння нормалі:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

*Піддотичною (піднормаллю)* називається проєкція на вісь абсцис відрізка дотичної (нормалі) від точки дотику до перетину з віссю абсцис.

У геометричних задачах зазвичай вимагається знайти рівняння кривих, які мають певну описану в задачі властивість. Щоб розв'язати геометричну задачу, яка зводиться до диференціального рівняння першого порядку, слід побудувати схематичне креслення, позначити шукану криву через  $y = y(x)$  (якщо задача вирішується в декартових координатах), і виразити всі згадувані в задачі величини через  $x$ ,  $y$  та  $y'$ . Тоді задане в задачі співвідношення перетворюється на диференціальне рівняння, з якого можна визначити шукану функцію  $y(x)$ .

**Приклад 1.1.** Знайти криві, які мають наступну властивість: точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки дотику.

*Розв'язання.* Побудуємо схематичний графік шуканої кривої, позначивши через  $M(x, y)$  точку дотику деякої дотичної до зображеного графіка (мал. 1.1). За умовою задачі точка  $A$  має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки  $M$ , тобто

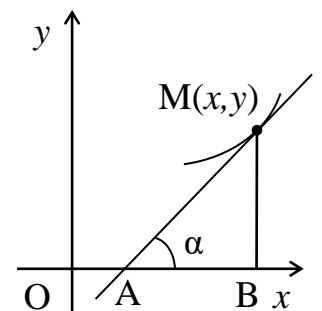
$$OB = 2OA. \quad (1.1)$$

Із малюнка очевидно, що  $OB = x$ , а відрізок  $OA$  можна знайти як різницю  $OA = OB - AB = x - AB$ .

Знайдемо відрізок  $AB$  із прямокутного трикутника  $ABM$ . Очевидно, що один із катетів цього трикутника  $BM = y$ . Тоді інший катет (піддотична  $AB$ ) з урахуванням геометричного змісту похідної рівний

$$AB = \frac{BM}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y}{y'(x)}.$$

Отже, рівність (1.1) можемо записати у вигляді диференціального рівняння шуканих кривих:



Мал. 1.1

$$x = 2 \left( x - \frac{y}{y'} \right),$$

або після спрощення

$$x = \frac{2y}{y'}.$$

Зінтегрувавши одержане рівняння з відокремлюваними змінними, дістанемо рівняння сім'ї парабол  $y = Cx^2$ .

**Задача про траєкторії.** Одним із важливих застосувань диференціальних рівнянь першого порядку є *задачі про траєкторії*, в яких вимагається знайти лінії, які перетинають усі криві заданої сім'ї під однаковим кутом.

Нехай задана сім'я плоских кривих

$$F(x, y, C) = 0, \quad (1.2)$$

залежна від одного параметра  $C$ .

Крива, яка в кожній своїй точці утворює сталий кут  $\alpha$  із кривою сім'ї (1.2), що проходить через цю точку, називається *ізогональною траєкторією* цієї сім'ї. Якщо  $\alpha = \pi/2$ , то маємо *ортогональні траєкторії*.

Знайдемо диференціальні рівняння траєкторій сім'ї (1.2). Для цього позначимо біжучі координати траєкторії  $(x_1, y_1)$ , а кривої сім'ї  $(x, y)$  (мал. 1.2).

1. Нехай  $\alpha \neq \pi/2$ , а  $\operatorname{tg} \alpha = k$ . Тоді в будь-якій точці траєкторії  $\varphi_1 - \varphi = \alpha$ , де  $\varphi_1$  – кут нахилу дотичної до траєкторії, а  $\varphi$  – кут нахилу дотичної до відповідної кривої сім'ї. Звідси з урахуванням геометричного змісту похідної маємо:

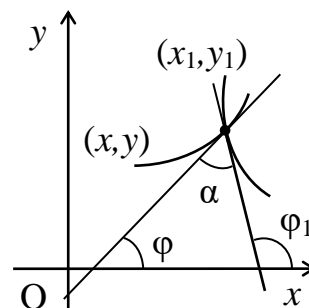
$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dy}{dx}} = k. \quad (1.3)$$

Співвідношення (1.3) має силу в будь-якій точці траєкторії, але для заданої сім'ї кривих кутовий коефіцієнт  $dy/dx$  обчислюється з формули (1.2):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad (1.4)$$

тоді в точках траєкторії

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x_1, y_1, C)}{\partial x_1}}{\frac{\partial F(x_1, y_1, C)}{\partial y_1}}.$$



Мал. 1.2

Підклавши отримане значення в (1.3), маємо

$$\frac{\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}}{1 - \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}} = k \Rightarrow \frac{F'_y(x_1, y_1, C) \cdot \frac{dy_1}{dx_1} + F'_x(x_1, y_1, C)}{F'_y(x_1, y_1, C) - F'_x(x_1, y_1, C) \cdot \frac{dy_1}{dx_1}} = k. \quad (1.5)$$

У рівність (1.5) входить параметр  $C$ , який змінюється в точках траєкторії і характеризує ту криву сім'ї, яку траєкторія перетинає в даній точці. Значення цього параметра одержується з (1.2), якщо покласти  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ :

$$F(x_1, y_1, C) = 0. \quad (1.6)$$

Виключивши параметр  $C$  із системи рівнянь (1.5), (1.6), дістанемо диференціальне рівняння ізогональних траєкторій

$$\Phi(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}) = 0.$$

Загальний інтеграл отриманого рівняння є шуканою сім'єю ізогональних траєкторій.

**2.** Нехай  $\alpha = \pi/2$ . Тоді для ортогональних траєкторій маємо:  $\varphi_1 - \varphi = \pi/2$ ,  $\text{tg } \varphi_1 = -\text{ctg } \varphi$ ,  $\frac{dy_1}{dx_1} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$ . Отже, замість (1.5) із (1.4) дістанемо

$$F'_x(x_1, y_1, C) \cdot \frac{dy_1}{dx_1} - F'_y(x_1, y_1, C) = 0. \quad (1.7)$$

Диференціальне рівняння ортогональних траєкторій одержується шляхом виключення параметра  $C$  із системи рівнянь (1.6), (1.7).

Зауважимо, що наведені міркування значно спрощуються, якщо сім'я кривих задана диференціальним рівнянням

$$\Phi_1(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0. \quad (1.8)$$

Поклавши в (1.8)  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ , і визначивши  $dy/dx$  із (1.3), отримаємо рівняння поля для ізогональних траєкторій, тобто їх диференціальне рівняння

$$\Phi_1\left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{k \frac{dy_1}{dx_1} + 1}\right) = 0.$$

У випадку ортогональних траєкторій  $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^{-1}$ , звідки рівняння ортогональних траєкторій буде

$$\Phi_1\left(x_1, y_1, -\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^{-1}\right) = 0.$$

**Приклад 1.2.** Знайти ортогональні траєкторії до ліній сім'ї

$$y^2 = C e^x + x + 1.$$



*Розв'язання.* Запишемо систему рівнянь (1.6), (1.7) для даної сім'ї кривих, опустивши заради зручності індекси:

$$\begin{aligned} y^2 - Ce^x - x - 1 &= 0, \\ (-Ce^x - 1) \cdot \frac{dy}{dx} - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Виключивши з останніх двох рівнянь параметр  $C$ , отримаємо диференціальне рівняння ортогональних траєкторій

$$2y + (y^2 - x)y' = 0.$$

Це рівняння можна записати у вигляді лінійного неоднорідного рівняння першого порядку відносно невідомої функції  $x(y)$ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} - \frac{y}{2},$$

загальний інтеграл якого  $3x = C\sqrt{|y|} - y^2$ . Зазначимо, що вихідне рівняння має також особливий розв'язок  $y = 0$ .

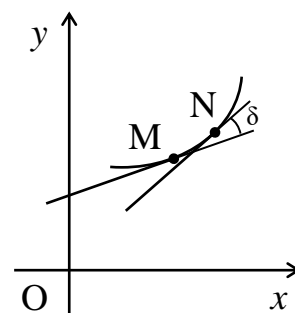
На завершення наведемо деякі приклади геометричних задач, які зводяться до диференціальних рівнянь вищих порядків. Це зокрема задачі, де описані властивості шуканих кривих пов'язані з кривиною і радіусом кривини.

*Кривиною  $K$*  кривої  $y = f(x)$  у її точці  $M$  називається границя відношення «кута суміжності»  $\delta$  між додатними напрямками дотичних у точках  $M$  і  $N$ , коли  $\cup MN \rightarrow 0$  (мал. 1.3):

$$K = \lim_{\cup MN \rightarrow 0} \frac{\delta}{\cup MN}.$$

У залежності від знаку цієї границі кривина має знак «+» чи «-». Знак  $K$  вказує на напрям вгнутості кривої: крива випукла при  $K < 0$  і вгнута при  $K > 0$ . Часто кривину вважають додатною величиною, розуміючи під нею абсолютну величину границі.

*Радіусом кривини  $R$*  у точці  $M$  називається величина, обернена до кривини:  $R = \frac{1}{K}$ . Чим більш викривлена крива поблизу даної точки, тим більша  $K$  і менший  $R$  у цій точці. Для кола радіуса  $a$   $K = \frac{1}{a}$ , а радіус кривини  $R = a$  (сталі величини для всіх точок). Для прямої  $K = 0$ ,  $R = \infty$ ; для інших кривих кривина змінюється в різних точках.



Мал. 1.3

Якщо крива задана рівнянням  $y = y(x)$ , то для неї кривина  $K$  і радіус кривини  $R$  обчислюються згідно з формулами:

$$K = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}, \quad R = \frac{1}{K} = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}. \quad (1.9)$$

**Приклад 1.3.** Довести, що крива, в кожній точці якої кривина має стале значення  $K = a$ , є колом.

*Розв'язання.* Згідно з формулами (1.9) диференціальне рівняння шуканої кривої має вигляд

$$\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = a.$$

Це рівняння другого порядку, що не містить незалежної змінної. Його порядок можна понизити підстановкою  $y' = z(x)$ . Тоді маємо

$$z' = a\sqrt{(1+z^2)^3}.$$

Останнє рівняння найпростіше зінтегрувати, ввівши подвійну параметризацію:  $z = \operatorname{tg} t$ ,  $z' = a \cos^{-3} t$ , звідси  $dx = a^{-1} \cos t dt$  і  $x = a^{-1} \sin t + C_1$ . Тоді з першої підстановки  $dy = z dx = \operatorname{tg} t \cdot a^{-1} \cos t dt = a^{-1} \sin t dt$ , а отже,  $y = -a^{-1} \cos t + C_2$ .

Виключивши з виразів для  $x$  і  $y$  як із алгебраїчної системи параметр  $t$ , одержимо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^{-2},$$

який являє собою рівняння кола з центром у точці  $(C_1, C_2)$  і радіусом  $a^{-1}$ . Оскільки  $a = K$ , то радіус отриманого кола є радіусом кривини в кожній точці.

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 1

**1.** Знайти криві, які мають наступну властивість: дотична в кожній точці кривої відтинає на осі ординат відрізок сталої довжини  $a$ .

**2.** Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина стала, рівна  $a^2$ .

**3.** Знайти криві, для яких сума катетів трикутника, побудованого як у попередній задачі, є величина стала, рівна  $b$ .

**4.** Знайти криві, що мають наступну властивість: якщо через будь-яку точку кривої провести прямі, паралельні осям координат, до перетину з цими осями, то площа одержаного прямокутника ділиться кривою у відношенні 1:2.

**5.** Знайти криві, дотичні до яких у кожній точці утворюють рівні кути з полярним радіусом і полярною віссю.

6. Знайти криву, для якої точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику й початку координат.

7. Знайти криву, для якої відстань від початку координат до будь-якої дотичної рівна абсцисі точки дотику.

8. Знайти криві, для яких площа трапеції, обмеженої осями координат, дотичною і ординатою точки дотику, є величина стала, рівна  $3a^2$ .

9. Знайти криві, для яких площа трикутника, обмеженого дотичною, віссю абсцис і відрізком від початку координат до точки дотику, є величина стала, рівна  $a^2$ .

10. Знайти криву, кожна дотична до якої утворює з осями координат трикутник площею  $2a^2$ .

11. Знайти криву, кожна дотична до якої відтинає на осях координат такі відрізки, що сума величин, обернених квадратам довжин цих відрізків, рівна 1.

12. Знайти криву, що проходить через початок координат, і має наступну властивість: відрізок будь-якої нормалі до кривої, що відтинається сторонами першого координатного кута, має сталу довжину, рівну 2.

13. Знайти ортогональні траєкторії до сімей кривих: а)  $y = Cx^2$ , б)  $y = Ce^x$ , в)  $Cx^2 + y^2 = 1$ , г) сім'ї лемніскат  $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ .

14. Знайти траєкторії, що перетинають криві заданої сім'ї під кутом  $45^\circ$ , причому цей кут від дотичної до кривої до дотичної до траєкторії відраховується у від'ємному напрямі: а)  $y = x \ln Cx$ , б)  $(x - 3y)^4 = Cxy^6$ .

15. Знайти ізогональні траєкторії: а) сім'ї прямих  $y = ax$ ; б) сім'ї кривих другого порядку  $x^2 - y^2 = a$ .

16. Знайти криві, в будь-якій точці яких радіус кривини вдвічі більший за відрізок нормалі, що міститься між цією точкою і віссю абсцис. Розглянути два випадки: а) крива повернута випуклістю до осі абсцис і б) крива повернута вгнутістю до осі абсцис.

17. Знайти криві, у яких радіус кривини в кожній точці обернено пропорційний косинусу кута між дотичною та віссю абсцис.

## РОЗДІЛ 2

### Основні принципи диференціального моделювання фізичних задач

У фізичних задачах спершу слід вирішити, яку з величин узяти за незалежну змінну, а яку – за шукану функцію. Після цього потрібно визначити, наскільки зміниться шукана функція  $y$ , коли незалежна змінна  $x$  отримає

приріст  $\Delta x$ , тобто виразити різницю  $y(x + \Delta x) - y(x)$  через величини, про які говориться в задачі. Поділивши цю різницю на  $\Delta x$ , після переходу до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$  одержимо диференціальне рівняння, з якого можна знайти шукану функцію. У більшості задач подаються умови, за допомогою яких можна визначити значення сталих, що входять у загальний розв'язок диференціального рівняння.

Іноді диференціальне рівняння можна скласти простішим шляхом, скориставшись **фізичним змістом похідної**: якщо незалежною змінною є час  $t$ , то  $dy/dt$  є швидкість зміни величини  $y$ .

У багатьох задачах диференціальне рівняння безпосередньо отримується з відповідних фізичних законів, або будується на їх підставі. Такі задачі будуть розглядатися в наступних розділах. У даному розділі обмежимося задачами на перетікання рідин і газів та подібними до них задачами, у яких диференціальні моделі отримуються шляхом визначення приросту шуканої функції  $y(x + \Delta x) - y(x)$ , як описано вище.

**Приклад 2.1.** У посудину, що містить 10 л води, безперервно зі швидкістю 2 л за хвилину вливається розчин, у кожному літрі якого міститься 0,3 кг солі. Розчин, що вливається в посудину, перемішується з водою, і суміш витікає з посудини з тією ж швидкістю. Скільки солі буде в посудині через 5 хвилин?

*Розв'язання.* Візьмемо за незалежну змінну час  $t$ , а за шукану функцію  $y(t)$  – кількість солі в посудині через  $t$  хвилин після початку досліду. Знайдемо, наскільки зміниться кількість солі за проміжок часу від моменту  $t$  до моменту  $t + \Delta t$ . За одну хвилину вливається 2 л розчину, а за  $\Delta t$  хвилин –  $2\Delta t$  літрів; у цих  $2\Delta t$  літрах міститься  $0,3 \cdot 2\Delta t = 0,6\Delta t$  кг солі. З іншого боку, за час  $\Delta t$  з посудини витікає  $2\Delta t$  літри розчину. У момент  $t$  у всій посудині (10 л) міститься  $y(t)$  кг солі, отже, у  $2\Delta t$  літрах суміші, що витікає, містилося б  $0,2\Delta t \cdot y(t)$  кг солі, якби протягом часу  $\Delta t$  вміст солі в посудині не змінювався. Але, оскільки він за цей час змінюється на величину, нескінченно малу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то в  $2\Delta t$  літрах суміші, що витікає, міститься  $0,2\Delta t[y(t) + \alpha]$  кг солі, де  $\alpha \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Отже, в розчині, що вливається за проміжок часу  $[t, t + \Delta t]$ , міститься  $0,6\Delta t$  кг солі, а в тому, що витікає –  $0,2\Delta t[y(t) + \alpha]$  кг. Приріст кількості солі протягом цього часу  $y(t + \Delta t) - y(t)$  рівний різниці знайдених величин, тобто

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0,6\Delta t - 0,2\Delta t \cdot [y(t) + \alpha].$$

Поділимо на  $\Delta t$  й перейдемо до границі, коли  $\Delta t \rightarrow 0$ . У лівій частині отримаємо похідну  $y'(t)$ , а в правій одержимо  $0,6 - 0,2y(t)$ , оскільки  $\alpha \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Отже, маємо диференціальне рівняння  $y'(t) = 0,6 - 0,2y(t)$ . Зінтегрувавши його, дістанемо

$$y(t) = 3 - Ce^{-0,2t}. \quad (2.1)$$

Оскільки при  $t = 0$  солі в посудині не було, то  $y(0) = 0$ . Покладаючи в одержаному загальному розв'язку (2.1)  $t = 0$ , знаходимо:  $y(0) = 3 - C$ ,  $0 = 3 - C$ ,  $C = 3$ . Підклавши це значення  $C$  в загальний розв'язок (2.1), одержимо  $y(t) = 3 - 3e^{-0,2t}$ . При  $t = 5$  у посудині буде

$$y(5) = 3 - 3e^{-0,2 \cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1,9 \text{ кг солі.}$$

**Приклад 2.2.** Знайти тиск атмосферного повітря на висоті  $h$  над поверхнею Землі за припущення, що на поверхні Землі тиск  $P$  (мм рт. ст.) і густина повітря  $S$  (г/мм<sup>3</sup>) є сталими.

*Розв'язання.* Візьмемо за незалежну змінну висоту  $h$ , а за шукану функцію  $p(h)$  – тиск атмосферного повітря на висоті  $h$ . Згідно з законом Бойля-Маріотта за ізотермічного процесу добуток тиску газу на його об'єм є величиною сталою. Звідси випливає, що тиск газу змінюється прямо пропорційно його густині, адже й густина, і тиск обернено пропорційні об'єму. Тоді, позначивши густину повітря на висоті  $h$  через  $s$ , знаходимо

$$\frac{s}{S} = \frac{p(h)}{P} \Rightarrow s = \frac{Sp}{P}.$$

Відомо, що густина повітря, а отже, і тиск, зменшується зі збільшенням висоти. На висоті  $h + \Delta h$  тиск зменшиться на величину  $s\Delta h$ , що можна записати у вигляді співвідношення

$$p(h + \Delta h) - p(h) = -s\Delta h.$$

Поділимо на  $\Delta h$  і перейдемо до границі, коли  $\Delta h \rightarrow 0$ . У лівій частині отримаємо похідну  $p'(h)$ , а отже, з урахуванням значення  $s$  одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{Sp}{P}.$$

Зінтегрувавши його шляхом відокремлення змінних, дістанемо

$$p(h) = Ce^{-\frac{S}{P}h}. \quad (2.2)$$

Оскільки при  $h = 0$  тиск рівний  $P$ , то  $p(0) = P$ . Покладаючи в отриманому загальному розв'язку (2.2)  $h = 0$ , знаходимо  $C = P$ . Підклавши це значення  $C$  в

загальний розв'язок (2.2), одержимо формулу, що виражає залежність тиску від висоти  $p = P e^{-\frac{\rho}{P} h}$ , яка наочно показує, що з ростом висоти тиск атмосферного повітря зменшується.

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 2

1. У діжці знаходиться 100 л ропи, яка містить 10 кг розчиненої солі. Зі швидкістю 3 л за хвилину в діжку вливається вода, а суміш із такою ж швидкістю виливається з діжки. Скільки солі в діжці залишиться через годину?

2. Розв'язати попередню задачу за умови, що швидкість перетікання складає 5 л за хвилину.

3. Посудина об'єму 20 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). У посудину затікає 0,1 л азоту за секунду, який безперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через який час у посудині буде 99% азоту?

4. У повітрі кімнати об'єму 200 м<sup>3</sup> міститься 0,15% вуглекислого газу (CO<sub>2</sub>). Вентилятор подає за хвилину 20 м<sup>3</sup> повітря, що містить 0,04% CO<sub>2</sub>. Через який час кількість CO<sub>2</sub> в кімнаті зменшиться: а) вдвічі; б) втричі?

5. У залі з кубатурою 10800 м<sup>3</sup> повітря після зборів містить 0,12% CO<sub>2</sub>. Скільки м<sup>3</sup> повітря, що містить 0,04% CO<sub>2</sub>, треба щохвилини подавати в залу, щоб через 10 хв у ній було 0,06% CO<sub>2</sub>?

6. У чані знаходиться 100 л розчину, що містить 10 кг солі. У чан затікає 5 л води за хвилину, а суміш із тією ж швидкістю переливається в інший 100-літровий чан, попередньо заповнений чистою водою. Надлишок рідини з другого чану виливається. Коли кількість солі у другому чані буде найбільшою? Чому ця кількість рівна?

7. На дні чану знаходиться 100 л 5-процентного розчину солі. Чан починають наповнювати 10-процентним розчином солі зі швидкістю 6 л за хвилину, тоді як суміш витікає з чану зі швидкістю 4 л за хвилину. Знайти масу солі в чані як функцію часу  $t$ .

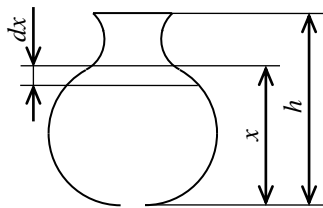
8. Кількість світла, що поглинається шаром води малої товщини, пропорційна кількості падаючого на нього світла і товщині шару. Шар води товщини 35 см поглинає половину світла, що падає на нього. Яку частину світла поглине шар товщини 2 м?

## РОЗДІЛ 3

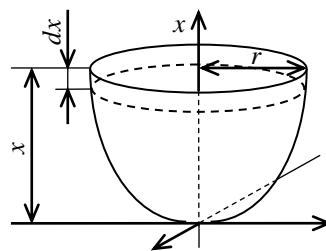
### Витікання рідини з посудин

Переконливу ілюстрацію зв'язку фізичного змісту задачі з геометрією дає дослідження процесів витікання рідини з посудин різної форми.

Розглянемо посудину з отвором у дні (мал. 3.1), площа горизонтального перерізу якої є довільною функцією відстані цього перерізу від дна посудини. Нехай висота рівня рідини в посудині в початковий момент часу  $t=0$  рівна  $h$  метрів. Позначимо через  $S(x)$  площу перерізу на висоті  $x$ , а через  $s$  – площу отвору, проробленого у дні посудини.



Мал. 3.1



Мал. 3.2

У гідравліці виводиться закон, згідно з яким швидкість витікання рідини  $v$  у той момент часу, коли висота її рівня становить  $x$ , визначається рівністю

$$v = k\sqrt{2gx}, \quad (3.1)$$

де  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – прискорення сили тяжіння,  $k$  – коефіцієнт швидкості витікання рідини з отвору (наприклад, для води  $k = 0,6$ ).

На нескінченно малому проміжку часу  $dt$  витікання рідини можна вважати рівномірним, тому за час  $dt$  витече стовпчик рідини, висота якого  $v dt$ , а площа перерізу  $s$ , що у свою чергу призведе до пониження рівня рідини в посудині на  $-dx$ . Із цих міркувань з урахуванням (3.1) отримуємо диференціальне рівняння

$$ks\sqrt{2g}dxdt = -S(x)dx,$$

яке після відокремлення змінних можна переписати у вигляді

$$dt = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2gx}} dx. \quad (3.2)$$

Отже, процес витікання рідини з посудини описується рівнянням із відокремленими змінними (3.2), розв'язок якого  $x(t)$  визначає залежність висоти рівня рідини в посудині від часу.

**Приклад 3.1.** Заповнений водою циліндричний резервуар із вертикальною віссю має у дні круглий отвір радіусу  $1/12$  м. Визначити залежність рівня води в резервуарі від часу  $t$ , і захронометрувати час витікання рідини з резервуару по метрах, якщо висота резервуару 6 м, а діаметр його основи 4 м.

*Розв'язання.* Згідно з умовою задачі  $S(x) = 4\pi$ ,  $s = \pi/144$ ,  $k = 0,6$ . Із цими числовими даними рівняння (3.2) набуде вигляду

$$dt = -216,842 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

загальний інтеграл якого дає співвідношення

$$C + t = -433,684\sqrt{x}.$$

Із початкової умови  $x(0) = 6$  маємо  $C = -1062,304$ . Отже, залежність рівня води в резервуарі від часу визначається рівністю

$$1062,304 - t = 433,684\sqrt{x}. \quad (3.3)$$

Визначимо з (3.3) час пониження рівня рідини в резервуарі по метрах:

1)  $x = 5$  м  $\Rightarrow t = 1,543$  хв  $\approx 1$  хв 32 с;

2)  $x = 4$  м  $\Rightarrow t = 3,249$  хв  $\approx 3$  хв 15 с;

3)  $x = 3$  м  $\Rightarrow t = 5,186$  хв  $\approx 5$  хв 11 с;

4)  $x = 2$  м  $\Rightarrow t = 7,483$  хв  $\approx 7$  хв 29 с;

5)  $x = 1$  м  $\Rightarrow t = 10,477$  хв  $\approx 10$  хв 29 с;

6) час повного витікання води:  $x = 0 \Rightarrow t = 17,705$  хв  $\approx 17$  хв 42 с.

Наведений хронометраж ілюструє цікавий факт: час витікання останнього метра стовпа рідини майже рівний часу витікання перших чотирьох метрів.

**Задача про водяний годинник.** Відомо, що стародавній водяний годинник являв собою чашу (мал. 3.2), із якої через невеликий отвір у дні витікала вода. Такі годинники застосовувалися в грецьких і римських судах для хронометрування промов адвокатів, аби не допускати занадто тривалих виступів. У задачі вимагається знайти форму водяного годинника, за якої рівень води в чаші понижувався б зі сталою швидкістю.

Для розв'язання задачі скористаємося рівнянням (3.2) у вигляді

$$\sqrt{x} = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (3.4)$$

Враховуючи, що чашу можна розглядати як поверхню обертання, із (3.4) з використанням позначень на мал. 3.2 дістанемо

$$\sqrt{x} = -\frac{\pi r^2}{ks\sqrt{2g}} \cdot a,$$



де  $a = v_x = \frac{dx}{dt}$  – проєкція швидкості вільної поверхні рідини на вісь  $x$  (стала величина згідно з умовою задачі, причому величина від’ємна, адже рівень рідини понижується). Підносячи ліву і праву частини останньої рівності до квадрату, отримаємо

$$x = Cr^4, \quad (3.5)$$

де  $\tilde{N} = \frac{a^2 \pi^2}{2gk^2 s^2}$ . Отже, шукана форма поверхні водяного годинника отримується обертанням кривої (3.5) навколо осі  $x$ .

### ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 3

**1.** За який час витече вся вода ( $k = 0,6$ ) із циліндричної посудини діаметру  $2R = 1,8$  м, і висоти  $H = 2,45$  м, через отвір у дні діаметру  $2r = 6$  см? Вісь циліндра вертикальна.

**2.** Розв’язати попередню задачу за припущення, що вісь циліндра розташована горизонтально, а отвір знаходиться в найнижчій частині циліндра.

**3.** Циліндричний чан поставлений вертикально і має отвір у дні. Половина води з повного чану витікає за 5 хв. За який час витече вся вода?

**4.** Дослідити закон витікання води з циліндричного резервуару із горизонтальною віссю, якщо довжина циліндра  $H = 2$  м, діаметр його боків  $d = 1,5$  м, а отвір унизу має площу  $s = 10$  см<sup>2</sup>.

**5.** Лійка має форму конуса радіусу  $R = 6$  см і висоти  $H = 10$  см, повернутого вершиною донизу. За який час витече вся вода з лійки через круглий отвір діаметру  $d = 0,5$  см, пророблений у вершині конуса?

**6.** Дано заповнену водою конічну лійку висоти 10 см із кутом при вершині  $\alpha = 60^\circ$ ; внизу знаходиться отвір площею  $0,5$  см<sup>2</sup>. Знайти закон витікання води з лійки.

**7.** Знайти закон витікання води з напівсферичної посудини висоти  $H = 1$  м, із отвором унизу площею  $s = 1$  см<sup>2</sup>.

**8.** У чан із прямокутною основою  $60 \times 75$  см надходить 1,8 л води за секунду. Висота чану 80 см, а у дні є отвір площею  $2,5$  см<sup>2</sup>. За який час наповниться чан? Порівняти результат із часом наповнення чану без отвору в дні.

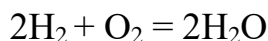
**9.** Сашко і Славко, граючись на горищі, знайшли старий набір пластмасових дитячих кубиків різних розмірів, порожнистих усередині. Сашко взяв менший кубик із ребром 10 см, і пробив шилом у центрі однієї з граней круглий отвір діаметру 0,2 см. Славко підібрав більший кубик із ребром 20 см, і ретельно вирізав у центрі однієї з граней отвір у формі квадрата зі стороною 0,5 см.

Потім хлопці через пророблені отвори наповнили свої кубики водою і поставили на дві горизонтальні жердини отворами донизу, щоб поспостерігати за витіканням води. Сашко заявив, що першим випорожниться його кубик, оскільки він має менший об'єм. Славко заперечив, що в його кубіку отвір більший, тому вода витече швидше. Хто з хлопців має рацію? Наскільки швидше витече вода з того кубика, що випорожниться першим?

## РОЗДІЛ 4

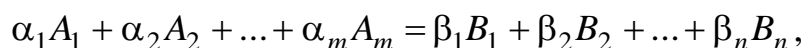
### Хімічні реакції. Радіоактивний розпад

Хімічне рівняння показує, яким чином у процесі взаємодії одних речовин утворюється інша речовина. Наприклад, рівняння



показує, що внаслідок взаємодії двох молекул водню і однієї молекули кисню утворюються дві молекули води.

Загалом хімічне рівняння записують у вигляді



де  $A_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  – молекули взаємодіючих речовин (реагентів);  $B_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  – молекули речовин, отриманих унаслідок хімічної реакції (продуктів реакції); а сталі  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  – додатні цілі числа, що вказують на кількість молекул, які беруть участь у реакції.

Швидкість утворення нової речовини називається *швидкістю реакції*. Діюча маса або концентрація реагуючої речовини описується кількістю молів<sup>1</sup> цієї речовини в одиниці об'єму.

Одним із основних законів теорії швидкостей хімічних реакцій є **закон діючих мас**, згідно з яким швидкість хімічної реакції за сталої температури прямо пропорційна добутку концентрацій речовин, що беруть участь у реакції в даний момент часу, тобто

$$\frac{dx(t)}{dt} = K \prod_{i=1}^m y_i(t), \quad (4.1)$$

де  $x(t)$  – концентрація продукту реакції,  $y_i(t)$ ,  $i = \overline{1, m}$  – концентрації  $m$  реагентів у момент часу  $t$ ,  $K$  – коефіцієнт пропорційності.

<sup>1</sup> 1 моль – кількість речовини, що містить  $N_A = 6.022140857(74) \cdot 10^{23}$  структурних елементів (атомів, молекул, іонів тощо) речовини. Стала  $N_A$  називається *числом Авогадро*.

**Приклад 4.1.** Дві рідкі хімічні речовини  $A$  і  $B$  об'єму 10 і 20 літрів відповідно в процесі хімічної реакції утворюють нову рідку речовину  $C$ . Вважаючи температуру в процесі реакції незмінною, визначити кількість речовини  $C$  в довільний момент часу  $t$ , якщо відомо, що з кожних двох об'ємів речовини  $A$  і одного об'єму речовини  $B$  утворюється три об'єми речовини  $C$ , причому за 20 хв останньої утворилося 6 л.

*Розв'язання.* Нехай  $x(t)$  – об'єм (у літрах) речовини  $C$ , яка утворилася на момент часу  $t$  (в годинах). Тоді з умов задачі випливає, що на цей момент часу в хімічну реакцію вступило  $2x/3$  літрів речовини  $A$  і  $x/3$  літрів речовини  $B$ , а отже, концентрації реагентів у цей момент рівні  $y_A = 10 - \frac{2x}{3}$ ,  $y_B = 20 - \frac{x}{3}$  літрів. Тому згідно з законом діючих мас (4.1) отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = K \left( 10 - \frac{2x}{3} \right) \left( 20 - \frac{x}{3} \right),$$

або

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x),$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності ( $k = 2K/9$ ). Оскільки в початковий момент часу речовини  $C$  ще не було, а через 20 хв її вже утворилося 6 л, то до рівняння слід додати дві крайові умови:  $x(0) = 0$ ,  $x(1/3) = 6$ . Отже, вихідна задача звелася до розв'язування крайової задачі

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x), \quad x(0) = 0, \quad x(1/3) = 6.$$

Зінтегрувавши рівняння методом відокремлення змінних, із урахуванням умови  $x(0) = 0$  одержимо:

$$60 - x = 4e^{45kt} \cdot (15 - x).$$

Із останньої рівності, враховуючи другу крайову умову  $x(1/3) = 6$ , знаходимо  $e^{15k} = 3/2$ . А тоді

$$60 - x = 4(3/2)^{3t} \cdot (15 - x),$$

звідки шукана кількість утвореної на момент часу  $t$  речовини  $C$  визначається співвідношенням

$$x(t) = 15 \cdot \frac{1 - (2/3)^{3t}}{1 - 0,25 \cdot (2/3)^{3t}}.$$

З умови задачі зрозуміло, що внаслідок хімічної реакції може утворитися лише скінченна кількість речовини  $C$ . Отриманий розв'язок дозволяє переконатися в цьому математично, адже з нього випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 15,$$

тобто речовини  $C$  може утворитися не більше 15 л. З іншого боку, це очевидний факт, адже для утворення 15 л речовини  $C$  згідно з умовою задачі необхідно 10 л речовини  $A$  і 5 л речовини  $B$  – тому після цього реакція припиниться у зв'язку з вичерпанням одного з реагентів, а саме речовини  $A$ .

**Радіоактивність** – явище спонтанного (самочинного) перетворення нестійкого ізотопу<sup>2</sup> хімічного елемента в інший ізотоп, зазвичай іншого елемента (*радіоактивний розпад*) шляхом випромінювання елементарних частинок<sup>3</sup>. Ці потоки частинок називають *ядерним випромінюванням*. Явище радіоактивності було відкрите в 1896 р. французьким ученим Антуаном Анрі Беккерелем (1852-1908).

При радіоактивному розпаді відбуваються перетворення ядер атомів. Енергії частинок, які при цьому утворюються, набагато більші за енергії, що виділяються в типових хімічних реакціях. Тому ці процеси практично не залежать від хімічного оточення атома (зовнішніх факторів), і сполук, у які цей атом входить. Радіоактивний розпад відбувається спонтанно, тобто неможливо визначити момент, коли розпадеться те чи інше ядро. Однак для кожного типу розпаду є характерний час, протягом якого розпадається половина всіх радіоактивних ядер. Цей час називається *періодом напіврозпаду*. Для різних радіоактивних ізотопів період напіврозпаду може лежати в дуже широких межах – від наносекунд ( $10^{-9}$  с) до мільйонів років. Ізотопи з малим періодом напіврозпаду дуже радіоактивні, але швидко зникають. Ізотопи з великим періодом напіврозпаду слабо радіоактивні, зате ця радіоактивність зберігається тривалий час.

*Швидкість розпаду* визначається кількістю радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу. Нехай у момент часу  $t$  маса радіоактивної речовини була  $m$ , а в момент  $t + \Delta t$  відповідно  $m + \Delta m$ , тобто за час  $\Delta t$  розпалася маса  $-\Delta m$ . Відношення  $\Delta m / \Delta t$  є середньою швидкістю розпаду. Границя цього відношення при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

є швидкістю розпаду в момент часу  $t$ .

Диференціальні моделі задач, пов'язаних із радіоактивним розпадом, будуються на підставі **закону радіоактивного розпаду**: швидкість розпаду радіоактивної речовини прямо пропорційна масі цієї речовини  $m(t)$  в кожний заданий

---

<sup>2</sup> Ізотопи – нукліди одного й того ж хімічного елемента, що мають різну кількість нейтронів, а отже, різну атомну масу (нукліди – загальна назва атомних ядер і атомів).

<sup>3</sup> Залежно від характеру цього випромінювання розрізняють наступні типи радіоактивного розпаду: а)  $\alpha$ -розпад (розпад атомного ядра на ядро-продукт і  $\alpha$ -частинку), б)  $\beta$ -розпад (перетворення нейтрона в протон із вильотом із ядра електрона і антинейтрино); в)  $\gamma$ -розпад (випромінювання  $\gamma$ -квантів, тобто електромагнітних хвиль із довжиною хвилі, меншою за розміри атома).

момент часу  $t$ . Для процесу з одним розпадом  $A \rightarrow B$  (розпад нукліду  $A$  в інший нуклід  $B$ ) згідно з цим законом отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m, \quad (4.2)$$

де  $\lambda = \text{const} > 0$  – стала розпаду.

Деякі складніші моделі одержуються у випадку *ланцюгових розпадів*. Наприклад, за процесу з двома розпадами  $A \rightarrow B \rightarrow \tilde{N}$  (нуклід  $A$  розпадається в нуклід  $B$ , а той у свою чергу – в нуклід  $C$ ) для речовини  $A$  справедливе рівняння (4.2), зате для речовини  $B$  модель набуває складнішого вигляду:

$$\frac{dm_A}{dt} = -\lambda_A m_A, \quad \frac{dm_B}{dt} = -\lambda_B m_B + \lambda_A m_A.$$

За ланцюгового процесу з багатьма розпадами  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_N \rightarrow B$ , де  $N$  кількість розпадів, аналогічно отримуємо наступну модель:

$$\frac{dm_i}{dt} = -\lambda_i m_i + \lambda_{i-1} m_{i-1}(0) e^{-\lambda_{i-1} t}, \quad i = \overline{1, N},$$

де  $m_{i-1}(0)$  – початкова кількість речовини  $A_{i-1}$ . Загальний розв'язок для рекурсивної задачі дає *рівняння Бейтмана*:

$$m_N = \frac{m_1(0)}{\lambda_N} \sum_{i=1}^N \lambda_i c_i e^{-\lambda_i t}, \quad c_i = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

**Приклад 4.2.** Знайти закон зміни маси радію в залежності від часу, якщо в початковий момент часу  $t = 0$  маса радію була  $m_0$ , а за 6 років розпалося 0,26% від початкової кількості.

*Розв'язання.* Нехай  $m(t)$  – маса радію в довільний момент часу  $t$ . Тоді згідно з законом радіоактивного розпаду ця функція є розв'язком рівняння (4.2), яке інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dm}{m} = -\lambda dt \Rightarrow m = C e^{-\lambda t},$$

де  $C$  – стала інтегрування, значення якої визначаємо з початкової умови:

$$m(0) = m_0 \Rightarrow C = m_0 \Rightarrow m = m_0 e^{-\lambda t}.$$

Стала розпаду  $\lambda$  визначається зі спостережень наступним чином. Нехай за час  $t_0$  розпадається  $\alpha\%$  від початкової маси радію. Тоді маємо

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-\lambda t_0} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{t_0} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right).$$

Підклавши в останню формулу значення  $t_0 = 6$ ,  $\alpha = 0,26$  згідно з умовою задачі, одержимо  $\lambda = 0,000436$ . Отже, маса радію в довільний момент часу описується формулою

$$m = m_0 e^{-0,000436 t},$$

тобто зміна кількості радіоактивної речовини відбувається за експоненціальним законом.

Зауважимо, що до рівняння вигляду (4.2) зводиться чимало різних задач фізики, хімії та інших наук.

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 4

**1.** За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини. Через який час залишиться 1% від початкової кількості?

**2.** Згідно з проведеними дослідженнями впродовж року з кожного грама радію розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію?

**3.** У дослідженому шматку гірської породи міститься 100 мг урану і 14 мг уранового свинцю. Відомо, що уран розпадається наполовину за  $4,5 \cdot 10^9$  років, і що при повному розпаді 238 г урану утворюється 206 г уранового свинцю. Визначити вік гірської породи. Вважати, що в момент утворення гірська порода не містила свинцю, і знехтувати наявністю проміжних радіоактивних продуктів між ураном і свинцем (оскільки вони розпадаються набагато швидше за уран).

**4.** За час  $\Delta t$  (де  $\Delta t$  дуже мале, і виражене в частках року) з кожного грама радію розпадається  $0,00044 \Delta t$  г і утворюється  $0,00043 \Delta t$  г радону. Із кожного грама радону за час  $\Delta t$  розпадається  $70 \Delta t$  г. На початку дослідження була в наявності деяка кількість  $x_0$  чистого радію. Коли кількість утвореного і ще не розпаденного радону буде найбільшою?

**5.** Сірку добувають із хімічно неактивної речовини шляхом її розчинення в бензолі. Відомо, що за необмеженої кількості розчинника впродовж 42 хвилин розчиняється половина наявної кількості сірки. Відомо також, що швидкість розчинення певної речовини пропорційна кількості нерозчиненої речовини і різниці між концентрацією  $n$  у насиченому розчині і концентрацією  $c$  у даний момент часу. У взятому матеріалі міститься 6 г сірки, а для її розчинення береться 100 г бензолу, здатного за насичення розчинити 11 г сірки. Скільки сірки розчиниться через 6 годин?

## РОЗДІЛ 5

### Задачі теорії теплопровідності

**Теплопровідність** – властивість тіл, яка полягає в передачі енергії від більш нагрітих тіл до менш нагрітих.

Процес теплопередачі відбувається між тілами, які мають різну температуру. У замкнутій системі всі тіла з часом набувають однакової температури, тобто встановлюється *теплова рівновага*.

Енергія, яку тіло отримує чи втрачає в процесі теплопередачі, називається *кількістю тепла* (позначається  $Q$ , вимірюється в джоулях). Кількість тепла, передана тілу в процесі нагрівання, залежить від матеріалу тіла, маси тіла та зміни його температури. Щоб розрахувати кількість тепла, необхідну для нагрівання тіла, треба масу тіла помножити на питому теплоємність і на величину зміни температури:

$$Q = cm(T_2 - T_1), \quad (5.1)$$

де  $T_2$  – температура у кінцевий,  $T_1$  – у початковий момент часу.

*Питома теплоємність* показує, яка кількість тепла необхідна для нагрівання тіла маси 1 кг на  $1^\circ\text{C}$ ; позначається  $c$ , вимірюється у Дж/(кг·К). Питома теплоємність є табличною величиною. Питома теплоємність речовин у різних агрегатних станах (твердому, рідкому, газоподібному) є різною.

Якщо в теплообміні беруть участь кілька тіл, то кількість тепла, яку віддають більш нагріті тіла, повинна дорівнювати кількості тепла, отриманій менш нагрітими тілами. Це твердження називається *рівнянням теплового балансу*. Зауважимо, що коли тіло віддає тепло (охолоджується), то при складанні теплового балансу величина  $Q$  в формулі (5.1) береться зі знаком мінус.

Для розв'язування найпростіших задач теорії теплопровідності, окрім рівняння теплового балансу, використовують наступні фізичні закони.

**1. Закон випромінювання тепла.** Швидкість нагрівання (охолодження) тіла прямо пропорційна різниці температур тіла та довкілля:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0), \quad (5.2)$$

де  $T(t)$  – температура тіла,  $T_0(t)$  – температура довкілля в момент часу  $t$ ,  $k$  – сталий коефіцієнт пропорційності (додатний у випадку нагрівання, від'ємний за охолодження).

**2. Закон Фур'є для кількості тепла.** Кількість тепла, яка пройде через поверхню  $ds$  у напрямі вектора зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  за проміжок часу  $dt$ , рівна

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} ds dt, \quad (5.3)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності, який визначає енергію, що переноситься через одиницю площі  $1 \text{ м}^2$  товщини  $1 \text{ м}$  за одиницю часу при зміні температури на один градус; вимірюється у  $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ .

На підставі закону (5.3) виводяться математичні моделі складніших процесів поширення тепла, які описуються рівняннями з частинними похідними і вивчаються в теорії рівнянь математичної фізики. Проте в деяких частинних випадках змодельовати процес теплопровідності вдається і за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, зокрема у випадку *стаціонарного теплового потоку*, коли температура тіла в кожній точці не змінюється з часом. При розв'язуванні задач, пов'язаних із впливом теплових потоків, важливу роль відіграють так звані *ізотермічні поверхні* (поверхні, в кожній точці яких температура має однакове значення). Зауважимо, що загалом ізотермічні поверхні можуть набувати найрізноманітнішого вигляду, що пов'язано з нестаціонарністю теплового потоку і неоднорідністю матеріалу.

Закон Фур'є (5.3) у випадку стаціонарного теплового потоку можна сформулювати наступним чином: кількість тепла, випромінювана за одиницю часу тілом, яке перебуває в незмінному тепловому стані, і температура якого в кожній точці є функцією лише однієї координати  $x$ , обчислюється згідно з формулою

$$Q = -\lambda S(x) \frac{dT}{dx} = \text{const}, \quad (5.4)$$

де  $S(x)$  – площа перерізу, перпендикулярного до напрямку поширення тепла.

**Приклад 5.1.** Тіло охолело за 10 хв від  $100^\circ\text{C}$  до  $60^\circ\text{C}$ . Температура навколишнього повітря підтримується рівною  $20^\circ\text{C}$ . Коли тіло охолоне до  $25^\circ\text{C}$ ?

*Розв'язання.* Скориставшись законом випромінювання тепла (5.2), одержимо математичну модель задачі у вигляді

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20), \quad T(0) = 100, \quad T(10) = 60.$$

Зінтегрувавши рівняння шляхом відокремлення змінних, дістанемо загальний розв'язок

$$T(t) = C e^{kt} + 20,$$

де  $C$  – стала інтегрування. Із першої крайової умови визначаємо  $C = 80$ , тоді

$$T(t) = 80 e^{kt} + 20.$$

Невідомий коефіцієнт  $k$  визначаємо з другої крайової умови при  $t = 10$ :

$$60 = 80 e^{10k} + 20 \Rightarrow e^{10k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{10} \ln 2.$$

Звідси закон зміни температури тіла



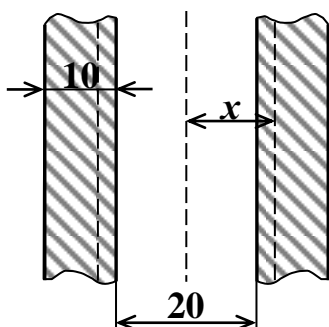
$$T(t) = 80e^{-0,1t \ln 2} + 20 = 80 \cdot 2^{-0,1t} + 20.$$

Знайдемо тепер той момент часу  $t_0$ , для якого  $T(t_0) = 25$ :

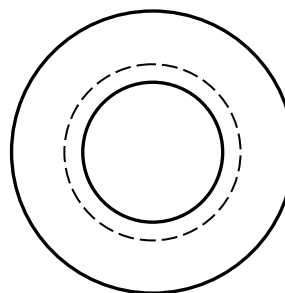
$$25 = 80 \cdot 2^{-0,1t_0} + 20 \Rightarrow 2^{-0,1t_0} = \frac{1}{16} \Rightarrow t_0 = 40 \text{ хв.}$$

**Приклад 5.2.** Теплопровідна труба діаметру 20 см зроблена з однорідного матеріалу, і захищена покриттям із магnezії товщиною 10 см. Припустимо, що температура труби  $160^\circ\text{C}$ , а зовнішнє покриття має температуру  $30^\circ\text{C}$ . Вивести закон розподілу температури всередині покриття, і знайти кількість тепла, виділену трубою на ділянці 1 м протягом доби, якщо коефіцієнт теплопровідності  $\lambda = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/(см}\cdot\text{К)}$ .

*Розв'язання.* На мал. 5.1 і 5.2 зображена труба відповідно в поздовжньому і поперечному перерізі. З умови задачі очевидно, що температура в кожній точці покриття залежить тільки від відстані  $x$  цієї точки від центральної осі труби (мал. 5.1). Тому в даному випадку *ізотермічними кривими* будуть концентричні кола (пунктирна лінія на мал. 5.2), а ізотермічними поверхнями – відповідні циліндричні поверхні.



Мал. 5.1



Мал. 5.2

Скористаємося законом Фур'є для випадку стаціонарного теплового потоку (5.4). Урахувавши, що згідно з умовами задачі  $S(x) = 2\pi xl$ , де  $l$  – довжина труби в сантиметрах, а  $x$  – радіус основи циліндричної поверхні, що міститься всередині зовнішнього циліндра, для розподілу температури всередині покриття  $T(x)$  одержимо наступну задачу:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{Q}{2\pi xl\lambda} \equiv -\frac{H}{x}, \quad T(10) = 160, \quad T(20) = 30.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$T(x) = -H \ln x + C, \quad C = \text{const.}$$

Із крайових умов одержуємо значення невідомих сталих:

$$H = \frac{130}{\ln 2}, \quad C = 160 + \frac{130}{\ln 2} \ln 10.$$

Тоді закон розподілу температури всередині покриття

$$T(x) = 160 + \frac{130}{\ln 2} \ln \frac{10}{x}.$$

Для знаходження кількості тепла, виділеної трубою за одиницю часу 1 с на ділянці  $l = 100$  см, використаємо вираховане значення константи  $H$ :

$$\frac{Q}{2\pi l \lambda} = H \Rightarrow Q = 2\pi \cdot 100 \cdot 0,00017 \cdot \frac{130}{\ln 2} \approx 20,033 \text{ Дж.}$$

Отже, кількість тепла, виділена протягом доби, рівна

$$24 \cdot 60 \cdot 60 Q \approx 1730874 \text{ Дж.}$$

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 5

**1.** Однорідний металевий предмет сталої температури занурили в посудину з рідиною, яка підтримується при температурі  $60^\circ\text{C}$ . Через 10 хв метал нагрівся до  $20^\circ\text{C}$ , а ще через 10 хв – до  $40^\circ\text{C}$ . Визначити початкову температуру металу.

**2.** Вийнятий зі 100-градусної печі калач за 10 хв остигає на повітрі, яке підтримується при сталій температурі, до  $60^\circ\text{C}$ . Визначити температуру повітря, якщо через 20 хв після виймання з печі калач охолов до температури  $41\frac{1}{3}^\circ\text{C}$ .

**3.** У посудину, що містить 1 кг води за температури  $20^\circ\text{C}$ , опущений алюмінієвий предмет масою 0,5 кг, питомою теплоємністю 0,2 і температурою  $75^\circ\text{C}$ . Через 1 хв вода нагрілася на  $2^\circ\text{C}$ . Коли температури води і предмета відрізняться одна від одної на  $1^\circ\text{C}$ ? Втратою тепла на нагрівання посудини та іншими знехтувати. Питому теплоємність води вважати рівною 1.

**4.** Шматок металу з температурою  $a$  градусів поміщений у піч, температура якої протягом години рівномірно підвищується від  $a$  градусів до  $b$  градусів. За різниці температур печі й металу  $T$  градусів метал нагрівається зі швидкістю  $kT$  градусів за хвилину. Знайти температуру металу через годину.

**5.** Іван і Василь замовили в кав'ярні каву і вершки. Коли їм одночасно подали по філіжанці однаково гарячої кави і вершки, Василь додав у каву трохи вершків, накрив філіжанку паперовою серветкою, і вийшов, щоб зателефонувати. Іван же одразу накрив філіжанку паперовою серветкою, а додав таку ж кількість вершків тільки через 10 хв, коли повернувся Василь, і тоді вони почали пити каву разом. Вважаємо, що теплообмін через поверхню столу й серветки набагато менший за теплообмін через бічні стінки філіжанок, а температура пари в філіжанці над поверхнею рідини рівна температурі рідини. Хто з двох

приятелів пив більш гарячу каву? Розрахунки провести з використанням наступних числових даних: питома теплоємність кави  $4,1 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К), вершків  $3,9 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К); маса кави в філіжанці  $8 \cdot 10^{-2}$  кг, доданих вершків  $2 \cdot 10^{-2}$  кг; теплопровідність матеріалу філіжанки  $0,6$  Вт/(кг·К); початкова температура кави  $80^\circ\text{C}$ , вершків  $20^\circ\text{C}$ ; температура повітря в кав'ярні  $20^\circ\text{C}$ ; для стінок філіжанки площа бічної поверхні  $11 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>, товщина  $2 \cdot 10^{-3}$  м.

**6.** Дано тонкий однорідний металевий стрижень довжини  $l$ , який перебуває у стані теплової рівноваги (температура точок стрижня не змінюється з бігом часу). Коефіцієнт внутрішньої теплопровідності стрижня рівний  $\lambda$ . Випромінювання тепла через бічну поверхню стрижня в довкілля температури  $\theta_0 = \hat{n} \hat{i} n s t$  пропорційне різниці температур стрижня і довкілля з коефіцієнтом теплопередачі  $\alpha$ . Вважаючи температуру стрижня у всіх точках поперечного перерізу із площею  $S$  і периметром  $P$  сталою, визначити температуру стрижня  $\theta(\delta)$  як функцію координати, яка відраховується від одного з кінців, якщо на кінцях стрижня підтримується стала температура – відповідно  $\theta_1$  та  $\theta_2$  (задані сталі).

## РОЗДІЛ 6

### Найпростіші динамічні моделі механіки

Диференціальне рівняння на мові механіки є *динамічна модель*, що описує деяке фізичне явище, пов'язане з рухом. Динамічна модель є функціональна залежність, яка пов'язує незалежну змінну, шукану функцію цієї змінної та її похідні. Розшифрування динамічної моделі дає *кінематичну модель* явища. Процес розшифрування динамічної моделі називається інтегруванням диференціального рівняння або знаходженням розв'язку цього рівняння.

У цьому розділі розглянемо найпростіші моделі руху, що будуються на підставі другого закону Ньютона, згідно з яким сила  $F$ , яка діє на тіло маси  $m$ , рівна добутку маси цього тіла на прискорення руху  $a$ :

$$F = ma. \quad (6.1)$$

**1. Прямолінійний рух матеріальної точки.** Нехай матеріальна точка маси  $m$  здійснює прямолінійний рух під дією сили  $F$ . Позначимо через  $s(t)$  закон руху цієї точки, який визначає пройдений шлях на момент часу  $t$ , а через  $v(t)$  швидкість руху в момент часу  $t$ . Відомо, що функції шляху, швидкості і прискорення руху пов'язані співвідношеннями:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (6.2)$$

З урахуванням (6.2) із другого закону Ньютона (6.1) для визначення закону руху  $s(t)$  одержимо диференціальне рівняння другого порядку

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = F. \quad (6.3)$$

Якщо задане початкове значення пройденого шляху  $s(t_0) = s_0$ , і початкова швидкість  $v(t_0) = \dot{s}(t_0) = v_0$ , то одержуємо диференціальну модель руху у вигляді задачі Коші для рівняння (6.3) з початковими умовами

$$s(t_0) = s_0, \quad \dot{s}(t_0) = v_0. \quad (6.4)$$

Якщо шуканою функцією є швидкість  $v(t)$ , то отримуємо задачу Коші для рівняння першого порядку

$$m \frac{dv}{dt} = F, \quad v(t_0) = v_0. \quad (6.5)$$

**Приклад 6.1.** Знайти закон прямолінійного руху  $s(t)$  матеріальної точки маси  $m$  під дією сталої сили  $F_0 = const$ , якщо в початковий момент часу  $t = 0$   $s(0) = s_0$ , а початкова швидкість руху рівна  $v_0$ .

*Розв'язання.* Для знаходження закону руху одержуємо задачу Коші (6.3), (6.4) у вигляді

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{F_0}{m}, \quad s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0.$$

Рівняння розв'язується двократним інтегруванням, причому після першого інтегрування з урахуванням другої початкової умови одержимо функцію швидкості руху  $v(t)$ , яка є розв'язком задачі Коші (6.5) при  $t_0 = 0$  і  $F = F_0$ , а друге інтегрування з урахуванням першої початкової умови дає шуканий закон руху:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{F_0}{m}t + C_1, \quad C_1 = v_0 \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \frac{F_0}{m}t + v_0; \\ s &= \frac{F_0}{2m}t^2 + v_0t + C_2, \quad C_2 = s_0 \Rightarrow s = \frac{F_0}{2m}t^2 + v_0t + s_0. \end{aligned}$$

**2. Вільне падіння тіл.** Якщо тіло маси  $m$  підняти на деяку висоту над поверхнею землі і потім відпустити, то воно починає вільно падати. Очевидно, що без урахування опору довілля (зазвичай повітря) рух тіла відбувається під дією сили тяжіння з прискоренням  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ . Тоді згідно з формулами (6.2) для визначення закону руху тіла  $s(t)$  одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$s = 0,5gt^2 + C_1t + C_2.$$

Якщо задані початкові умови (6.4), то з них можна вирахувати значення сталих  $C_1, C_2$ :

$$\dot{s}(t_0) = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0 - gt_0;$$

$$s(t_0) = s_0 \Rightarrow C_2 = s_0 - v_0t_0 + 0,5gt_0^2.$$

Отже, шуканий закон руху

$$s = 0,5g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0,$$

а швидкість руху

$$v = \dot{s}(t) = g(t - t_0) + v_0. \quad (6.6)$$

Якщо вільне падіння відбувається в середовищі з опором, пропорційним швидкості (або квадрату швидкості), то за шукану функцію зручніше взяти швидкість  $v(t)$ . У цих випадках з урахуванням другого закону Ньютона (6.1) і формул (6.2) отримуємо задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку, які описують зокрема рух деяких типів парашутів:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad (6.7)$$

або

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad (6.8)$$

із початковою умовою  $v(t_0) = v_0$ . Тут сила  $F$  має дві складові: силу тяжіння  $mg$  і опір повітря  $-kv$  або  $-kv^2$  (знак « $\leftarrow$ » показує, що сила напрямлена протилежно до напрямку руху;  $k$  – коефіцієнт пропорційності).

**Приклад 6.2.** Знайти закон зміни швидкості  $v(t)$  падіння тіла маси  $m$  в середовищі з опором, пропорційним швидкості з коефіцієнтом  $k$ , якщо в початковий момент часу  $t = 0$  тілу була надана швидкість  $v_0$ .

*Розв'язання.* Математичною моделлю задачі є задача Коші для рівняння (6.7)

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad v(0) = v_0.$$

Рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{mdv}{mg - kv} = dt \Rightarrow v = C e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}.$$

Значення сталої інтегрування  $C$  знаходимо з початкової умови:

$$v(0) = v_0 \Rightarrow C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Отже, шуканий закон зміни швидкості

$$v = \left( v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}. \quad (6.9)$$

Із формули (6.9) випливає, що при досить великих  $t$  швидкість  $v$  мало залежить від  $v_0$ . Зауважимо, що з (6.9), спрямувавши  $k \rightarrow 0$ , отримаємо закон зміни швидкості (6.6) при  $t_0 = 0$  для випадку, коли опір повітря відсутній або настільки малий, що ним можна нехтувати:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left[ \left( v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt.$$

Також із формули (6.9) за потреби можна знайти закон вільного падіння тіла  $s(t)$ . Справді, якщо задане початкове значення  $s(0) = s_0$ , то

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau + s_0 = \frac{m}{k} \left[ \left( v_0 - \frac{mg}{k} \right) \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) + gt \right] + s_0.$$

**Приклад 6.3.** Тіло маси  $m$  підкинули вертикально вгору з рівня землі із початковою швидкістю  $v_0$ . Знайти максимальну висоту підйому тіла, вважаючи опір повітря пропорційним квадрату швидкості з коефіцієнтом  $k$ .

*Розв'язання.* Скористаємося рівнянням (6.8), модифікувавши його з огляду на те, що в нашому випадку сила тяжіння напрямлена протилежно до напрямку руху. Отже, маємо задачу Коші

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv^2, \quad v(0) = v_0.$$

Рівняння, як і в попередньому прикладі, інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{mdv}{v^2 + \frac{mg}{k}} = -kdt \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{tg} \left( C - \sqrt{\frac{kg}{m}} t \right).$$

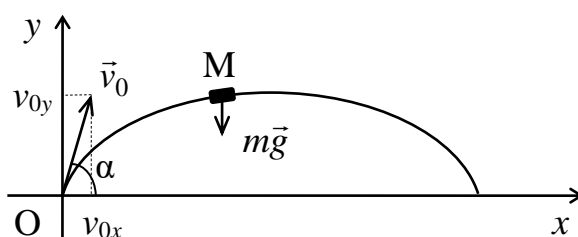
Із початкової умови визначаємо  $C = \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{k}{mg}} v_0 \right)$ . Очевидно, що в момент досягнення максимальної висоти швидкість тіла зменшується до нуля. Це дає можливість визначити час підйому  $t_{\max}$ :

$$v(t_{\max}) = 0 \Rightarrow t_{\max} = C \sqrt{\frac{m}{kg}} = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{k}{mg}} v_0 \right).$$

Нехай  $s(t)$  – закон висхідного руху тіла. Тоді максимальна висота підйому буде  $h = s(t_{\max})$ . Знайдемо цю величину з урахуванням того, що за умовою задачі  $s(0) = 0$ :

$$h = s(t_{\max}) = \int_0^{t_{\max}} v(\tau) d\tau = \frac{m}{2k} \ln \left( 1 + \frac{k}{mg} v_0^2 \right).$$

**3. Політ тіла, запущеного під кутом до горизонту.** Нехай тіло маси  $m$  запустили в політ під кутом  $\alpha$  до горизонтальної поверхні з початковою швидкістю  $v_0$ . Виведемо рівняння руху тіла, нехтуючи опором доквілля.



Мал. 6.1

Виберемо осі координат так, як показано на мал. 6.1. Якщо нехтувати опором повітря, то на тіло в довільному положенні  $M$  діє єдина сила – його вага  $P = mg$ . Тому згідно з другим законом Ньютона (6.1) диференціальні рівняння руху тіла в проєкціях на осі  $x$  і  $y$  матимуть вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg. \quad (6.10)$$

До рівнянь (6.10) згідно з умовою задачі додаються початкові умови

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha. \quad (6.11)$$

Із постановки задачі (6.10), (6.11) очевидно, що рух тіла не залежить від його маси  $m$ . Зінтегрувавши рівняння (6.10) з урахуванням початкових умов (6.11), одержимо рівняння руху тіла у вигляді

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - 0,5 g t^2. \quad (6.12)$$

На підставі співвідношень (6.12) можна зробити ряд висновків щодо характеру руху запущеного в політ тіла. Наприклад, час польоту  $T$  визначається тим ненульовим значенням змінної  $t$ , при якому  $y = 0$ , тобто

$$T = 2v_0 g^{-1} \sin \alpha.$$

Дальність польоту по горизонталі  $L$  рівна значенню змінної  $x$  при значенні змінної  $t$ , рівному часу польоту, отже

$$L = x(T) = v_0^2 g^{-1} \sin 2\alpha.$$

Із останньої рівності зокрема впливає, що дальність буде найбільшою, коли  $2\alpha = 90^\circ$ , тобто  $\alpha = 45^\circ$ : у цьому випадку  $L = v_0^2 g^{-1}$ .

Максимальну висоту польоту  $H$  можна знайти, вказавши найбільше значення функції  $y(t)$  на проміжку  $t \in [0; T]$ . Для цього треба знайти ту точку  $t_0$  з цього проміжку, для якої  $\dot{y}(t_0) = 0$ :

$$v_0 \sin \alpha - gt_0 = 0 \Rightarrow t_0 = v_0 g^{-1} \sin \alpha \Rightarrow H = y(t_0) = 0,5 v_0^2 g^{-1} \sin^2 \alpha.$$

Бачимо, що  $t_0 = 0,5T$ , звідки  $x(t_0) = 0,5L$ , тобто максимальної висоти тіло досягає на половині дальності свого польоту.

Траєкторію польоту у вигляді  $y = f(x)$  отримаємо, виключивши з системи рівнянь (6.12) змінну  $t$ . Це дає рівняння параболи

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 6

**1.** Тіло підкинули вертикально вгору із висоти  $s_0$  над поверхнею землі з початковою швидкістю  $v_0$ . Визначити закон висхідного руху тіла, нехтуючи опором повітря, і максимальну висоту підйому.

**2.** Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною пройденому шляху. У початковий момент руху точка знаходилася на відстані 5 м від початку відрахунку шляху, і мала швидкість  $v_0 = 20$  м/с. Визначити пройдений шлях і швидкість точки через 10 с після початку руху.

**3.** Швидкість моторного човна у стоячій воді  $v_0 = 60$  км/год. Спочатку човен іде на повній швидкості, потім мотор вимикається, після чого за 36 с швидкість падає до  $v_1 = 30$  км/год. Якою буде швидкість човна через 3 хв після вимкнення мотора? Вважати опір води прямо пропорційним швидкості.

**4.** Човен уповільнює свій рух під дією опору води, що пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с, через 4 с його швидкість становить 1 м/с. Коли швидкість човна зменшиться до 1 см/с? Який шлях може пройти човен до зупинки?

**5.** Парашутист стрибнув із висоти 1,5 км, а розкрив парашут на висоті 0,5 км. Скільки часу він падав до розкриття парашута? Відомо, що гранична швидкість падіння людини в повітрі нормальної густини складає 50 м/с. Зміною густини з висотою знехтувати. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості.



6. Футбольний м'яч вагою 0,4 кгс підкинули вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості й рівний 0,48 г за швидкості 1 м/с. Обчислити час підйому м'яча і найбільшу висоту підйому. Як зміняться результати, якщо а) знехтувати опором повітря; б) збільшити опір повітря в 10 разів?

7. Обчислити час падіння м'яча, описаного в попередній задачі, з висоти 19,92 м без початкової швидкості з урахуванням опору повітря. Знайти швидкість м'яча у кінці падіння.

8. Прискорення локомотива, початкова швидкість якого рівна  $v_0$ , прямо пропорційне силі тяги  $F$  і обернено пропорційне масі потяга  $m$ . Сила тяги локомотива  $F(t) = b - kv(t)$ , де  $v(t)$  – швидкість локомотива в момент часу  $t$ , а  $b$  і  $k$  – сталі величини. Визначити залежність сили тяги локомотива від часу  $t$ .

9. Літак маси  $m$  кг сідає на засніжену посадкову смугу. Визначити шлях, пройдений літаком від моменту приземлення зі швидкістю  $v_0$  до зупинки, якщо коефіцієнт тертя шасі літака об сніг рівний  $\mu$ , і в момент приземлення машина не має напрямленої вгору швидкості. Вважати, що під час руху літака опір повітря прямо пропорційний квадрату швидкості, причому за швидкості 1 м/с горизонтальна складова сили опору рівна  $R_x = a$  кгс, а напрямлена вгору вертикальна складова рівна  $R_y = b$  кгс<sup>4</sup>.

10. Вивести рівняння руху тіла маси  $m$ , запущеного в політ під кутом  $\alpha$  до горизонтальної поверхні з початковою швидкістю  $v_0$ , якщо опір повітря прямо пропорційний швидкості руху з коефіцієнтом  $k$ .

11. Для зупинки річкових суден біля пристані з них кидають канат, який намотується на стовп, що стоїть на пристані. Яка сила гальмуватиме судно, якщо канат робить три витки навколо стовпа, коефіцієнт тертя канату об стовп  $1/3$ , а робітник на пристані тягне за вільний кінець канату із силою 10 Н?

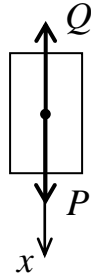
## РОЗДІЛ 7

### Деякі задачі небесної механіки

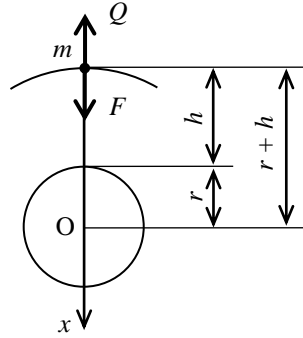
**Задача про невагомість.** Людина вагою  $P$  перебуває в кабіні пасажирського ліфта, що рухається вниз із прискоренням  $\omega = \alpha g$ , де  $0 < \alpha < 1$ , а  $g$  – прискорення сили тяжіння. Визначити тиск людини на дно кабінки, а також прискорення ліфта, при якому цей тиск відсутній.

---

<sup>4</sup> Кілограм-сила – основна одиниця вимірювання сили в «технічній» системі одиниць МКГСС (метр – кілограм-сила – секунда), запропонованій у середині XIX ст. Кілограм-сила – це сила, яка надає тілу маси 1 кг прискорення  $g = 9,80665$  м/с<sup>2</sup>. Співвідношення з одиницею системи SI: 1 кгс = 9,80665 Н; 1 Н = 0,10179 кгс.



Мал. 7.1



Мал. 7.2

На людину в ліфті діють дві сили: вага людини  $P$  і сила реакції дна кабіни ліфта  $Q$ , рівна тиску людини на дно кабіни (мал. 7.1). Диференціальне рівняння руху людини запишеться у вигляді

$$m\ddot{x} = P - Q. \quad (7.1)$$

Оскільки  $\omega = \alpha g$ ,  $m = P/g$ , то з рівняння (7.1) отримаємо

$$Q = P - m\ddot{x} = P(1 - \alpha). \quad (7.2)$$

Беручи до уваги, що  $0 < \alpha < 1$ , робимо висновок, що  $Q < P$ . Отже, тиск людини на дно кабіни ліфта, що рухається вниз, дається силою  $Q = P(1 - \alpha)$ .

Очевидно, що коли кабіна ліфта підійматиметься вгору з прискоренням  $\omega = \alpha g$ ,  $0 < \alpha < 1$ , то тиск людини на дно кабіни визначатиметься силою  $Q = P(1 + \alpha)$ , тобто в цьому випадку  $Q > P$ .

З'ясуємо, при якому прискоренні ліфта тиск людини на дно кабіни відсутній. Для цього достатньо в (7.2) покласти  $Q = 0$ . Тоді буде  $\alpha = 1$ , тобто для того, щоб тиск був рівним нулеві, прискорення ліфта повинне дорівнювати прискоренню сили тяжіння.

Отже, за вільного падіння ліфта із прискоренням сили тяжіння  $g$  тиск людини на дно кабіни відсутній. Саме цей стан називається *станом невагомості*. За невагомості відсутній взаємний тиск частин тіла людини, що викликає у неї незвичні відчуття. У стані невагомості всі точки тіла мають рівні прискорення.

**Задача про штучний супутник.** Якою повинна бути швидкість космічного корабля, що обертається навколо Землі як штучний супутник, аби людина знаходилася в кабіні корабля у стані невагомості?

Припустимо, що космічний корабель рухається по круговій орбіті радіусу  $r + h$ , де  $r$  – радіус Землі,  $h$  – висота польоту корабля над поверхнею Землі (мал. 7.2). Із попередньої задачі випливає, що у стані невагомості тиск на дно кабіни космічного корабля, а отже, і реакція  $Q$  дна кабіни рівні нулю.

Спрямуємо вісь  $x$  уздовж головної нормалі кругової траєкторії космічного корабля. У проекції на головну нормаль диференціальне рівняння руху матеріальної точки маси  $m$  за використання формули доцентрової сили має вигляд

$$\frac{mv^2}{R} = F = m\ddot{x},$$

де  $R = r + h$ , оскільки сила  $F$  напрямлена по головній нормалі до траєкторії руху. Звідси одержимо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} = \frac{v^2}{r + h}.$$

Тоді з (7.1), підставивши значення  $\ddot{x}$  із останньої рівності, маємо:

$$\frac{mv^2}{r + h} = P - Q. \quad (7.3)$$

Тут сила  $P$  рівна силі  $F$  тяжіння до Землі, яка у відповідності до закону всесвітнього тяжіння обернено пропорційна квадрату відстані  $r + h$  до центру Землі, тобто

$$F = \frac{km}{(r + h)^2},$$

де  $m$  – маса космічного корабля, а значення константи  $k$  можна визначити з попередньої формули, враховуючи, що на поверхні Землі (тобто при  $h = 0$ ) сила тяжіння  $F = mg$ . Тоді отримаємо  $k = gr^2$ , а отже,

$$P = F = \frac{mgr^2}{(r + h)^2}.$$

Підклавши отримане значення  $P$  у (7.3) і взявши до уваги, що  $Q = 0$ , визначаємо формулу для швидкості, що вимагається в задачі:

$$v = r \sqrt{\frac{g}{r + h}}. \quad (7.4)$$

Зауважимо, що при  $h = 0$  з (7.4) одержуємо формулу  $v_1 = \sqrt{gr}$  *першої космічної швидкості*, тобто найменшої швидкості, яку, нехтуючи опором повітря та обертанням планети, необхідно надати тілу для переміщення його на кругову орбіту, радіус якої рівний радіусу планети  $r$ . Наприклад, для Землі перша космічна швидкість рівна 7,9 км/с.

**Задача про характеристичну швидкість. Формула Ціолковського.** Принцип руху ракети полягає у її відштовхуванні від маси реактивного струменя, що утворюється від згоряння палива в ракеті й витікає з її двигунів.

Такий принцип руху властивий багатьом літальним апаратам. Наприклад, турбореактивний літак вбирає повітря (зі збільшенням своєї маси) для спалювання палива, і викидає з великою швидкістю (зі зменшенням своєї маси) утворені при спалюванні газу. Прискорення, яке отримує тіло з урахуванням зміни його маси в процесі руху, описується *рівнянням Мещерського*<sup>5</sup>

$$m \frac{dv}{dt} = F - u_1 \frac{dm_1}{dt} - u_2 \frac{dm_2}{dt}, \quad (7.5)$$

де  $m(t)$  – маса тіла в момент часу  $t$ ,  $v(t)$  – його швидкість,  $F$  – зовнішня сила (наприклад, сила тяжіння),  $m_1$  – маса, відкинута з відносною швидкістю  $u_1$ ,  $m_2$  – маса, приєднана з відносною швидкістю  $u_2$ . Величина  $-u_1 dm_1/dt - u_2 dm_2/dt$  називається *реактивною силою*.

У випадку ракети (маса якої в процесі руху виключно зменшується) за відсутності зовнішніх сил рівняння (7.5) можна записати у вигляді

$$m \frac{dv}{dt} + u \frac{dm}{dt} = 0, \quad (7.6)$$

де  $m(t)$  – маса ракети в момент часу  $t$ ,  $v(t)$  – її швидкість,  $u$  – відносна швидкість, із якою рухається відокремлювана від ракети частина її маси (для ракетного двигуна ця величина називається *питомим імпульсом* і визначається як відношення тяги двигуна до секундної витрати маси палива).

Знайдемо кінцеву швидкість ракети, яку вона розвине після згоряння всієї маси палива. Нехай  $M_1$  – початкова маса ракети (конструкція апарата плюс корисне навантаження плюс паливо), а  $M_2$  – її кінцева маса (без палива). Розв'язавши задачу Коші для рівняння (7.6) із початковою умовою  $v(M_1) = 0$  (початкова швидкість рівна нулеві), одержимо формулу, що описує залежність швидкості від маси:

$$v = u \ln \frac{M_1}{m}.$$

Підклавши в останню формулу значення  $m = M_2$ , дістанемо шукану кінцеву швидкість ракети

$$V = u \ln \frac{M_1}{M_2}. \quad (7.7)$$

Формула (7.7) називається *формулою Ціолковського* (виведена К. Е. Ціолковським<sup>6</sup> у рукопису «Ракета» в 1897 р.) і визначає швидкість, яку розвиває літальний апарат під дією тяги ракетного двигуна, незмінної за напрямом, за

<sup>5</sup> Іван Мещерський (1859-1935) – російський і радянський учений в області теоретичної та прикладної механіки, механіки руху тіл змінної маси. Один із піонерів теоретичного обґрунтування польотів у космос.

<sup>6</sup> Костянтин Ціолковський (1857-1935) – російський учений-теоретик польського походження, один із засновників ракетобудування та сучасної космонавтики.

відсутності інших сил. Ця швидкість називається *характеристичною швидкістю*.

Одноступенева ракета практично неспроможна розвивати швидкість, більшу за 8 км/с, яка необхідна для космічного польоту. К. Е. Ціолковський запропонував створити «ракетний потяг»: багатоступінчасту ракету, що складається з кількох ступенів – ракет, розміщених одна за одною, причому що далі вниз, то більші баки з паливом, і потужніші двигуни. Ракети виконують роль «локомотива» по черзі – розганяють «потяг», після чого відокремлюються. Остання ракета такого «потяга» може набувати величезної швидкості.

Для багатоступінчастої ракети швидкість розраховують як суму швидкостей, отриманих за формулою (7.7), для кожного ступеня, причому за розрахунку характеристичної швидкості кожного ступеня до її початкової й кінцевої маси додається сумарна початкова маса всіх наступних ступенів. Нехай  $N$  – число ступенів ракети;  $M_0$  – маса корисного навантаження;  $M_{1i}$  – маса заправленого  $i$ -го ступеня;  $M_{2i}$  – маса  $i$ -го ступеня без палива;  $u_i$  – питомий імпульс двигуна  $i$ -го ступеня. Тоді формула Ціолковського для багатоступінчастої ракети матиме вигляд:

$$V = \sum_{i=1}^N u_i \ln \frac{M_0 + \sum_{j=i}^N M_{1j}}{M_0 + M_{2i} - M_{1i} + \sum_{j=i+1}^N M_{1j}}.$$

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 7

**1.** Визначити найменшу швидкість, із якою тіло слід кинути вертикально вгору, щоб воно не повернулося на Землю. Опором повітря знехтувати (*задача про другу космічну швидкість*<sup>7</sup>).

**2.** Метеорит, потрапивши в поле земного тяжіння, зі стану спокою починає прямолінійно падати на Землю з висоти  $h$ . Якою була б швидкість метеорита за удару об поверхню Землі, якби земної атмосфери не існувало? Радіус Землі рівний  $R = 6377$  км.

**3.** Маса ракети з повним запасом палива рівна  $M$ , без палива  $m$ , швидкість витоку продуктів горіння з ракети рівна  $c$ , початкова швидкість ракети рівна нулю. Знайти швидкість ракети після згоряння палива, нехтуючи силою тяжіння і опором повітря.

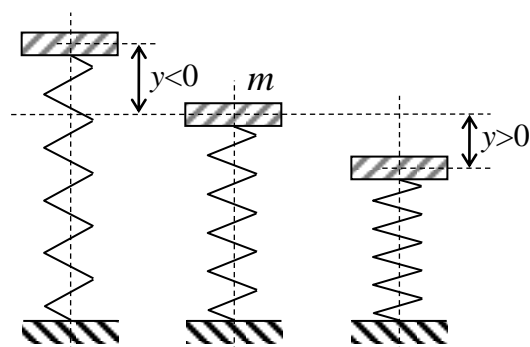
**4.** Нехай  $m$  – маса планети, що рухається навколо Сонця, а  $M$  – маса Сонця. Вивести диференціальну модель руху планети на підставі закону всесвітнього

тяжіння, нехтуючи впливом інших планет. Знайти рівняння траєкторії руху планети.

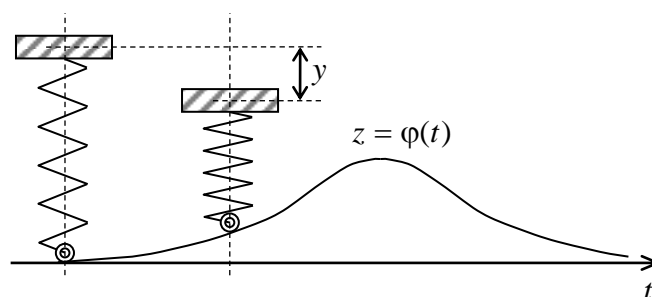
## РОЗДІЛ 8

### Механічні коливання

**Диференціальне рівняння механічних коливань.** Розглянемо одну задачу прикладної механіки, яка досліджується і розв'язується за допомогою лінійних диференціальних рівнянь.



Мал. 8.1



Мал. 8.2

Нехай вантаж маси  $m$  спирається на пружну ресору (мал. 8.1). Відхилення вантажу від положення рівноваги позначимо через  $y$ . Відхилення вниз вважати- мемо додатним, угору – від'ємним. У положенні рівноваги вага вантажу врівно- важується пружністю пружини. Припустимо, що *відновлювальна сила*  $Q$  – тобто сила, яка намагається повернути вантаж у положення рівноваги – пропорційна відхиленню, тобто рівна  $Q = -ky$ , де  $k > 0$  – деяка стала для даної ресори вели- чина, яка називається *жорсткістю* ресори і характеризує її здатність зазнавати пружної деформації під дією навантаження.

Припустимо, що руху вантажу  $m$  перешкоджає *сила опору* (наприклад, си- ла тертя, або опір середовища – повітря чи рідини, де відбуваються коливання), напрямлена протилежно до напрямку руху, і пропорційна швидкості руху ван- тажу відносно нижньої точки ресори, тобто сила  $R = -\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$ , де  $\lambda$  – додатна стала (*амортизатор*).

Запишемо диференціальне рівняння руху вантажу на ресорі. На підставі другого закону Ньютона (6.1) одержимо рівність  $m\ddot{y} = -ky - \lambda\dot{y}$ . Це лінійне од-

<sup>7</sup> Друга космічна швидкість – мінімальна швидкість, яку необхідно надати тілу на поверхні планети (або іншого масивного небесного тіла), щоб воно вийшло за межі гравітаційної дії цієї планети.

норідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке, ввівши позначення  $p = \lambda/m$ ,  $q = k/m$ , можна подати у вигляді

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0, \quad p, q > 0. \quad (8.1)$$

Рівняння (8.1) називають *рівнянням вільних коливань*.

Припустимо далі, що нижня точка ресори здійснює вертикальні переміщення за законом  $z = \varphi(t)$ . Таке явище може відбуватися, наприклад, тоді, коли нижній кінець ресори прикріплений до котка, який разом із ресорою і вантажем рухається по нерівності (мал. 8.2).

У цьому випадку відновлювальна сила буде рівна  $Q = -k[y + \varphi(t)]$ , а сила опору відповідно  $R = -\lambda[\dot{y} + \dot{\varphi}(t)]$ , і замість рівняння (8.1) одержимо рівняння  $m\ddot{y} + \lambda\dot{y} + ky = -k\varphi(t) - \lambda\dot{\varphi}(t)$ , або

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = f(t), \quad (8.2)$$

де  $f(t) \equiv -m^{-1}[k\varphi(t) + \lambda\dot{\varphi}(t)]$ . Рівняння (8.2) є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку, яке називають *рівнянням вимушених коливань*. Коливання, які описуються лінійними рівняннями вигляду (8.1) або (8.2), називають *лінійними коливаннями*.

**Вільні коливання.** Дослідимо детальніше рівняння вільних коливань (8.1). Його характеристичне рівняння  $r^2 + pr + q = 0$  має корені

$$r_1 = -0,5p + \sqrt{0,25p^2 - q}, \quad r_2 = -0,5p - \sqrt{0,25p^2 - q}. \quad (8.3)$$

**1.** Нехай  $0,25p^2 > q$ . Тоді корені (8.3) – дійсні різні від’ємні числа, а отже, загальний розв’язок рівняння (8.1) має вигляд

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \quad (8.4)$$

Із формули (8.4) випливає, що відхилення  $y$  за будь-яких початкових умов асимптотично прямує до нуля, якщо  $t \rightarrow \infty$ . Отже, у даному випадку коливань не буде, оскільки сили опору є завеликими в порівнянні з коефіцієнтом жорсткості ресори  $k$ .

**2.** Нехай  $0,25p^2 = q$ . Тоді корені (8.3) від’ємні й рівні:  $r_1 = r_2 = -0,5p$ . Тому загальний розв’язок запишеться у вигляді

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{-0,5t}.$$

Тут відхилення також прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , однак не настільки швидко, як у попередньому випадку – завдяки наявності множника  $C_1 + C_2 t$ .

**3.** Нехай  $p = 0$ , тобто відсутня сила опору. Тоді рівняння (8.1) набуває вигляду

$$\ddot{y} + qy = 0, \quad q > 0. \quad (8.5)$$

Його характеристичне рівняння  $r^2 + q = 0$  має корені  $r_{1,2} = \pm\beta i$ , де  $\beta = \sqrt{q}$ . Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t. \quad (8.6)$$

Запишемо формулу (8.5) в іншому вигляді, ввівши нові сталі  $A$  і  $\varphi_0$ , пов'язані з  $C_1, C_2$ , співвідношеннями:

$$C_1 = A \sin \varphi_0, \quad C_2 = A \cos \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}.$$

Підклавши значення  $C_1$  і  $C_2$  в (8.5), дістанемо

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \sin \beta t = A \sin(\beta t + \varphi_0). \quad (8.7)$$

Коливання в цьому випадку називаються *гармонічними*. Інтегральними кривими є синусоїди. Проміжок часу  $T$ , за який аргумент синуса змінюється на  $2\pi$ , називається періодом коливань; зокрема для функції (8.7)  $T = 2\pi\beta^{-1}$ . Частотою коливань називається число коливань за час  $2\pi$ ; у нашому випадку частота рівна  $\beta$ . Величина  $A$ , що визначає найбільше відхилення від положення рівноваги, називається *амплітудою* коливань, а  $\varphi_0$  називається *початковою фазою*.

**4.** Нехай тепер  $p \neq 0$  і  $0,25p^2 < q$ . У цьому випадку коренями характеристичного рівняння є комплексні числа  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , де

$$\alpha = -0,5p < 0, \quad \beta = \sqrt{q - 0,25p^2}.$$

Тоді загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

або, аналогічно до попереднього випадку,

$$y = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0). \quad (8.8)$$

Тут як амплітуду доводиться розглядати величину  $A e^{\alpha t}$ , що залежить від часу. Оскільки  $\alpha < 0$ , то при  $t \rightarrow \infty$  вона прямує до нуля, тобто в даному випадку маємо *загасаючі коливання*.

**Вимушені коливання.** Рівняння вимушених коливань має вигляд (8.2). Розглянемо один практично важливий випадок, коли сила зовнішнього збурення є періодичною і змінюється згідно з законом  $f(t) = a \sin \omega t$ . Тоді рівняння вимушених коливань буде

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = a \sin \omega t, \quad p, q > 0. \quad (8.9)$$

**1.** Припустимо спочатку, що  $p \neq 0$  і  $0,25p^2 < q$ , тобто корені характеристичного рівняння – комплексні числа  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ . Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд (8.8):

$$Y = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0).$$



Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (8.9) шукаємо методом невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$y_1 = M \cos \omega t + N \sin \omega t. \quad (8.10)$$

Значення  $M$  і  $N$  знаходимо, підставивши функцію (8.10) у рівняння (8.9):

$$M = \frac{-p\omega a}{(q-\omega^2)^2 + (p\omega)^2}, \quad N = \frac{(q-\omega^2)a}{(q-\omega^2)^2 + (p\omega)^2}.$$

Перш ніж підкласти знайдені значення в (8.10), введемо нові сталі  $A_1$  і  $\varphi_1$ , поклавши

$$M = A_1 \sin \varphi_1, \quad N = A_1 \cos \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + (p\omega)^2}}, \quad \varphi_1 = \arctg \frac{M}{N}.$$

Тоді частинний розв'язок (8.10) аналогічно до (8.6) можна записати у вигляді

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + (p\omega)^2}} \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Загальний розв'язок рівняння (8.9) рівний  $y = Y + y_1$ , тобто

$$y = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + (p\omega)^2}} \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Перший член суми в правій частині останньої рівності (розв'язок однорідного рівняння) описує загасаючі коливання; із ростом  $t$  він спадає, а отже, через деякий проміжок часу визначальним стане другий член, що описує вимушені коливання. Частота  $\omega$  цих коливань рівна частоті зовнішньої сили  $f(t)$ ; амплітуда вимушених коливань тим більша, чим ближче значення  $\omega^2$  до  $q$ . Легко показати, що максимальне значення амплітуди вимушених коливань  $A_1$  досягається за частоти  $\omega = \sqrt{q - 0,5p^2}$  і рівне  $A_{1\max} = \frac{a}{p\sqrt{q - 0,25p^2}}$ .

**2.** Припустимо тепер, що  $p = 0$ , тобто розглянемо рівняння пружних коливань без опору за наявності періодичної зовнішньої сили:

$$\ddot{y} + qy = a \sin \omega t, \quad q > 0. \quad (8.11)$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд (8.6). Якщо  $\beta \neq \omega$ , тобто частота зовнішньої сили не рівна частоті власних коливань, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (8.11) можна шукати у вигляді (8.10). Із вихідного рівняння знаходимо  $M = 0$ ,  $N = a/(q - \omega^2)$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (8.11)

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \sin \omega t.$$

Отже, рух відбувається внаслідок суперпозиції (накладання) власних коливань із частотою  $\beta = \sqrt{q}$ , і вимушених коливань із частотою  $\omega$ .

Якщо  $\beta = \omega$ , тобто частота власних коливань співпадає з частотою зовнішньої сили, то функція (8.10) не є розв'язком рівняння (8.11). У цьому випадку частинний розв'язок слід шукати у вигляді

$$y_1 = t(M \cos \beta t + N \sin \beta t).$$

Із вихідного рівняння знаходимо  $M = -0,5a\beta^{-1}$ ,  $N = 0$ . Отже, загальний розв'язок рівняння (8.11) матиме вигляд

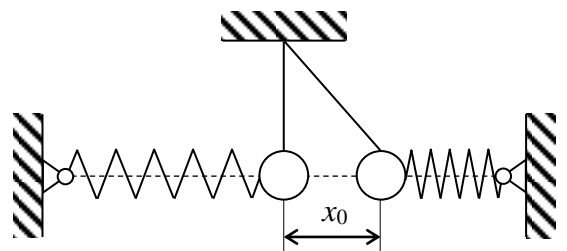
$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\beta} t \cos \beta t. \quad (8.12)$$

Другий член у правій частині рівності показує, що в цьому випадку амплітуда коливань необмежено зростатиме при необмеженому рості часу  $t$ . Це явище, яке спостерігається за співпадіння частоти власних коливань динамічної системи з частотою зовнішньої сили, називається *резонансом*.

**Приклад 8.1.** Тіло маси  $m$ , підвішене на довгій невагомій нитці, перебуває між двома однаковими горизонтальними пружинами. Коефіцієнт жорсткості кожної з пружин рівний  $k$ . Знайти відхилення тіла від положення рівноваги в довільний момент часу  $t > 0$ , якщо при  $t = 0$  тіло відхилили горизонтально на відстань  $x_0$ , і відпустили з початковою швидкістю  $v_0$  (мал. 8.3).

*Розв'язання.* Позначимо через  $x(t)$  відхилення тіла в момент часу  $t$ . Відновлювальна сила, що діє на тіло, пропорційна відхиленню з коефіцієнтом  $2k^8$ . Зауважимо, що вагою тіла з огляду на підвіс можна нехтувати, поки довжина нитки здатна забезпечувати прямолінійність руху. Отже, згідно з другим законом Ньютона маємо

Мал. 8.3



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2kx.$$

<sup>8</sup> На практиці в задачах на коливання матеріальної точки зустрічаються випадки, коли матеріальна точка спирається або підвішена до кількох пружин одночасно. При розрахунках ці пружини замінюють однією пружиною з еквівалентною жорсткістю  $K$ . У випадку двох паралельних пружин, а також коли точка перебуває між двома пружинами (як у прикладі 8.1),  $K = k_1 + k_2$ ; у випадку двох послідовних пружин  $K = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$ .

Введемо позначення  $\omega^2 = 2km^{-1}$ . Тоді з урахуванням початкових умов для визначення закону руху одержимо задачу Коші для лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

де  $C_1, C_2$  довільні сталі. Із початкових умов визначаємо:  $C_1 = x_0, C_2 = v_0 \omega^{-1}$ . Підставивши ці значення в загальний розв'язок, дістанемо шуканий закон руху:

$$x = x_0 \cos \omega t + v_0 \omega^{-1} \sin \omega t = \omega^{-1} \sqrt{(\omega x_0)^2 + v_0^2} \sin(\omega t + \arctg \frac{\omega x_0}{v_0}), \quad \omega = \sqrt{2km^{-1}}.$$

**Приклад 8.2.** Вантаж маси 4 кг підвішений на пружині, і збільшує її довжину на 1 см. Знайти закон руху цього вантажу за умови, що верхній кінець пружини здійснює гармонічні коливання згідно з законом  $z = \sin 10\sqrt{g}t$  (вісь  $z$  напрямлена вертикально вниз).

*Розв'язання.* Позначимо через  $y$  вертикальну координату вантажу, відраховану від положення рівноваги в напрямі осі  $z$ . Тоді отримаємо рівняння

$$4\ddot{y} = -k(y - z - l).$$

Щоб знайти коефіцієнт жорсткості  $k$ , скористаємося законом Гука для визначення деформації тонкого стрижня чи пружини під дією сили  $F$ , який має вигляд  $F = kx$ , де  $x$  – статична деформація (абсолютне видовження пружини внаслідок навантаження у врівноваженому стані). Згідно з умовою задачі навантаження  $F = 4g$  Н збільшує довжину пружини на  $x = 0,01$  м, а отже, із закону Гука одержимо:  $k = 400g$  Н/м.

Якщо вважати, що верхній кінець пружини починає гармонічно коливатися в момент часу  $t = 0$ , то для визначення коливань вантажу отримаємо задачу

$$\ddot{y} + 100gy = 100g(\sin 10\sqrt{g}t + l), \quad y(0) = l, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Введемо підстановку  $y = u + l$ , де  $u(t)$  нова невідома функція; тоді

$$\ddot{u} + 100gu = 100g \sin 10\sqrt{g}t, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

Тепер рівняння має вигляд (8.11), причому в даному випадку  $\beta = \omega = 10\sqrt{g}$ , тому його загальний розв'язок  $u(t)$  запишеться у вигляді (8.12), де  $a = 100g$ . Із початкових умов маємо  $\varphi_0 = 0, A = 0,5$ . Отже, закон руху вантажу

$$y = u + l = 0,5 \sin 10\sqrt{g}t - 5\sqrt{g}t \cos 10\sqrt{g}t + l.$$

Остання формула показує, що амплітуда вимушених коливань необмежено зростає при  $t \rightarrow \infty$  (маємо явище резонансу). Оскільки на практиці необмежена амплітуда неможлива, то можна припустити, що процес коливань відбуватиметься недовго і припиниться внаслідок обриву вантажу чи зламу пружини.

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 8

1. Дати фізичну інтерпретацію задачі, що описує лінійні коливання. Визначити характер коливань, і побудувати графіки відповідних розв'язків  $y(t)$ :

*a)*  $4\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad \dot{y}(0) = 0;$

*б)*  $\ddot{y} + y = 4\sin t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 4;$

*в)*  $\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 26\sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1.$

2. Знайти періодичний розв'язок рівняння  $\ddot{y} + ay + by = \sin \omega t$  і накреслити графік залежності його амплітуди від величини  $\omega$ .

3. Знайти період вільних коливань вантажу маси  $m$ , підвішеного на пружині, якщо за відхилення вантажу від положення рівноваги на відстань  $y$  пружина діє на нього з силою  $ky$ , напрямленою до положення рівноваги, і рух відбувається без опору.

4. Один кінець пружини закріплений нерухомо, а до другого прикріплений вантаж маси  $m$ . За відхилення вантажу від положення рівноваги на відстань  $y$  пружина діє на нього з силою  $ky$ , напрямленою до положення рівноваги. За руху вантажу зі швидкістю  $v$  сила опору рівна  $hv$ . У момент часу  $t = 0$  вантажу, що перебував у положенні рівноваги, була надана початкова швидкість  $v_0$ . Дослідити рух вантажу у випадках: *a)*  $h^2 < 4km$ ; *б)*  $h^2 > 4km$ .

5. Розв'язати попередню задачу за додаткової умови, що до вантажу прикладена періодична зовнішня сила  $f = b\sin \omega t$ . Показати, що за будь-яких початкових умов рух вантажу наблизатиметься до періодичного, і знайти цей періодичний розв'язок (вимушені коливання).

6. На кінці пружного стрижня закріплена маса  $m$ . Другий кінець стрижня вібрує так, що його зміщення в момент часу  $t$  рівне  $B\sin \omega t$ . Сила пружності, що виникає в стрижні, пропорційна різниці зміщень його кінців. Знайти амплітуду  $A$  вимушених коливань маси  $m$ , нехтуючи масою стрижня і тертям. Чи може бути  $A > B$ ?

7. Два однакові вантажі підвішені до кінця пружини. Відомо, що під дією одного вантажу пружина видовжується на величину  $a$ . Знайти рух, якого набуде один вантаж, коли другий обірветься.

8. Частинка маси  $m$  рухається по осі  $x$ , відштовхуючись від точки  $x=0$  з силою  $3mr_0$ , і притягується до точки  $x=1$  з силою  $4mr_1$ , де  $r_1, r_2$  – відстані до цих точок. Визначити рух частинки за початкових умов  $x(0) = 2, \dot{x}(0) = 0$ .

9. Матеріальна точка маси  $m$  притягується кожним із двох центрів із силою, пропорційною відстані. Коефіцієнт пропорційності рівний  $k$ . Відстань між центрами рівна  $2c$ . У початковий момент точка знаходиться на відрізку, що з'єднує центри, на відстані  $a$  від його середини. Початкова швидкість рівна нулю. Знайти закон руху точки.

10. За умов попередньої задачі початкова швидкість рівна  $v_0$  і напрямлена перпендикулярно до прямої, що сполучає центри. Знайти траєкторію руху матеріальної точки.

11. Тіло маси  $m$  рухається на площині  $xu$ , притягується до точки  $(0;0)$  із силою  $a^2mr$ , де  $r$  – відстань до цієї точки. Знайти рух тіла за початкових умов  $x(0) = b, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 0, \dot{y}(0) = v$ , і траєкторію цього руху.

12. Один кінець пружини закріплений нерухомо в точці  $0$ , а до другого прикріплений вантаж маси  $3m$ , з'єднаний другою пружиною з вантажем маси  $2m$ . Обидва вантажі рухаються без тертя по прямій, що проходить через точку  $0$ . Кожна з пружин видовжується на величину  $x$  під дією сили  $a^2mx$ . Знайти можливі періодичні рухи системи.

13. Вантаж маси  $m$  прикріплений до пружини. При відхиленні вантажу на відстань  $x$  пружина діє на нього з силою  $kx$ , напрямленою до положення рівноваги. Сила тертя рівна  $f = const$  і напрямлена протилежно до швидкості вантажу. При  $t = 0$  вантаж знаходиться на відстані  $h$  від положення рівноваги і має нульову швидкість. Вивести рівняння руху вантажу. Узнявши  $m = 2, k = 2, f = 1, h = 5$ , зобразити рух вантажу на фазовій площині.

14. Горизонтальна трубка обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Кулька, поміщена всередині трубки, ковзає по ній без тертя. Знайти закон руху кульки, якщо в початковий момент часу вона перебувала на осі обертання, і мала швидкість  $v_0$  (уздовж трубки).

15. На кінцях валу закріплені два шківів, моменти інерції яких  $I_1$  та  $I_2$ . При повороті одного шківу відносно другого на будь-який кут  $\varphi$  внаслідок деформації валу виникають пружні сили з обертальним моментом  $K\varphi$ . Знайти частоту крутильних коливань валу за відсутності зовнішніх сил.

16. Однорідний пружний стрижень довжини  $l$  із жорстко закріпленими кінцями здійснює малі поздовжні коливання під дією зовнішньої періодичної сили  $F(t, x) = (0,5l - x)\cos\omega t$ , де  $\omega = const \neq 0$ . Знайти амплітуду  $\tilde{u}(x)$  періодич-

них коливань стрижня. *Вказівка:* скористатися відомим із теорії рівнянь математичної фізики рівнянням малих поздовжніх коливань пружного стрижня

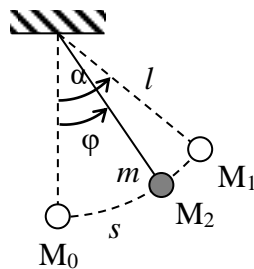
$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(t, x), \quad (8.13)$$

де  $\rho(x)$  – лінійна густина,  $S(x)$  – площа поперечного перерізу стрижня і  $E(x)$  – модуль Юнга в точці  $x$ , вважаючи всі коефіцієнти сталими величинами.

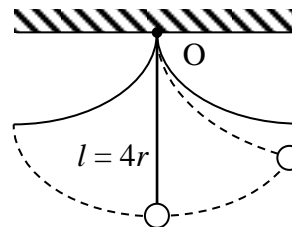
## РОЗДІЛ 9

### Рівняння маятника

Маятникові коливання є одним із класичних прикладів коливань, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями.



Мал. 9.1



Мал. 9.2

Розглянемо спрощену модель маятникового годинника, що складається зі стрижня довжини  $l$ , і гирі маси  $m$  на його кінці (мал. 9.1). Вважаємо, що масою стрижня в порівнянні з масою гирі можна нехтувати. Відхилимо гирю від положення рівноваги в точці  $M_0$  на кут  $\alpha$  (в положення  $M_1$ ), а потім відпустимо, започаткувавши процес коливань, під час якого положення гирі в довільний момент часу  $t$  (точка  $M_2$ ) очевидно визначатиметься кутом відхилення  $\varphi$ , що відрховується від положення рівноваги.

Для знаходження залежності величини  $\varphi$  від часу скористаємося *законом збереження механічної енергії*, згідно з яким за будь-яких фізичних взаємодій енергія не виникає і не зникає, а лише перетворюється з одного виду в інший, а тому повна механічна енергія замкнутої системи залишається незмінною:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}, \quad (9.1)$$

де  $E_{ki}$ ,  $E_{pi}$  – відповідно кінетична та потенціальна енергії системи в момент часу  $t_i$ , які знаходяться з формул  $E_k = 0,5mv^2$ ,  $E_p = mgh$ . У нашому випадку, як-

що висоту гирі відраховувати від положення рівноваги, яке в процесі коливань гиря проходить із максимальною швидкістю, одержимо

**а)** точка  $M_0$ :  $E_{k0} = 0,5mv_{\max}^2$ ,  $E_{p0} = mgh_0 = 0$ ;

**б)** точка  $M_1$ :  $E_{k1} = 0$ ,  $E_{p1} = mgh_{\max} = mgl(1 - \cos\alpha)$ ;

**в)** точка  $M_2$ :  $E_{k2} = 0,5mv^2$ ,  $E_{p2} = mgh_2 = mgl(1 - \cos\varphi)$ .

Тоді з рівності (9.1) отримаємо співвідношення

$$0,5mv^2 = mgl(\cos\varphi - \cos\alpha). \quad (9.2)$$

Якщо розглядати лише малі відхилення гирі від положення рівноваги, то можна вважати, що довжина дуги, уздовж якої гиря рухається за відхилення на кут  $\varphi$ , рівна  $s = l \sin\varphi \approx l\varphi$  (для малих  $\varphi$   $\sin\varphi \approx \varphi$ ). А тоді  $v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\varphi}{dt}$ , і з (9.2) отримуємо диференціальне рівняння

$$0,5l\dot{\varphi}^2 = g(\cos\varphi - \cos\alpha). \quad (9.3)$$

Продиференціювавши ліву і праву частини рівняння (9.3) за змінною  $t$ , після скорочення на  $\dot{\varphi} \neq 0$  дістанемо нелінійне рівняння другого порядку

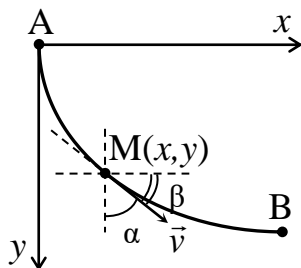
$$\ddot{\varphi} + k \sin\varphi = 0, \quad k = g/l, \quad (9.4)$$

яке називається *рівнянням математичного маятника*.

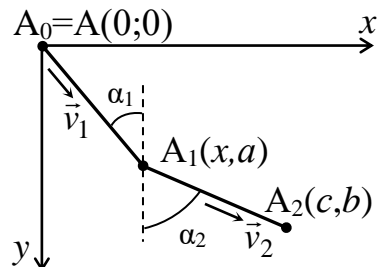
Зауважимо, що за малих коливань, якщо вважати  $\sin\varphi \approx \varphi$ , рівняння (9.4) зводиться до *рівняння гармонічного осцилятора*<sup>9</sup>

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \quad (9.5)$$

де  $\omega = \sqrt{g/l}$  – частота власних коливань системи. Тоді відхилення маятника від положення рівноваги описується формулою  $\varphi = C_0 \cos(\omega t + \gamma)$ , у якій амплітуда коливань  $C_0$  і фаза  $\gamma$  визначаються початковими умовами. Звідси випливає, що маятник здійснює гармонічні коливання із частотою  $\omega$  і періодом  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ .



Мал. 9.3



Мал. 9.4

<sup>9</sup> Гармонічний осцилятор – система, яка за відхилення від положення рівноваги внаслідок дії певної сили повертається в попереднє положення під дією зворотної сили, пропорційної зміщенню.

**Задача про брахістохрону.** Брахістохроною називають криву найшвидшого спуску. Задача про її знаходження була вперше поставлена Й. Бернуллі (1667-1748) у наступному формулюванні: «Серед плоских кривих, що сполучають точки  $A$  і  $B$ , які лежать в одній вертикальній площині, причому  $B$  нижче за  $A$ , знайти ту, рухаючись по якій із точки  $A$  під дією виключно сили тяжіння, співнапрямленої з від'ємною піввіссю  $Oy$ , матеріальна точка досягне точки  $B$  за найкоротший час» (мал. 9.3). Задача відома тим, що метод її розв'язання, запропонований у 1697 р. І. Ньютоном, ліг в основу важливої галузі природознавства – варіаційного числення. Окрім І. Ньютона, на заклик Й. Бернуллі відгукнулися багато інших учених, пропонуючи власні розв'язання.

Наблизимо криву  $AB$  ламаною  $A_0A_1A_2\dots A_n$ , усі вершини якої лежать на кривій, причому  $A_0=A$ ,  $A_n=B$ . Припустимо, що матеріальна точка рухається уздовж ланки ламаної  $A_{i-1}A_i$  зі сталою швидкістю  $v_i$ . Тоді повний час руху від точки  $A_0=A$  до точки  $A_2$  рівний (мал. 9.4)

$$T = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}.$$

Якщо припустити, що матеріальна точка долає цю ділянку за мінімальний час, то  $dT/dx = 0$ . Тоді

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

звідки  $\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$ .

Застосувавши аналогічні міркування для наступних ланок ламаної, одержимо

$$\frac{\sin \alpha_i}{v_i} = C = \text{const}, \quad i = \overline{1, n},$$

звідки можна зробити висновок, що при  $n \rightarrow \infty$  (мал. 9.3)

$$\frac{\sin \alpha}{v} = C. \tag{9.6}$$

Виходячи з принципу збереження енергії, отримуємо, що швидкість, набута матеріальною точкою на заданому рівні, залежить тільки від втрати потенціальної енергії за досягнення цього рівня, а не від вигляду траєкторії скочування. Це означає, що  $v = \sqrt{2gy}$ .

З іншого боку, із урахуванням геометричних побудов (мал. 9.3)

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Тоді з (9.6) після деяких перетворень одержимо рівняння брахістохрони



$$y(1 + y'^2) = C_1, \quad (9.7)$$

де  $C_1 = (C\sqrt{2g})^{-1}$ .

Для інтегрування рівняння (9.7) введемо параметр  $\psi$  згідно з формулами:

$y = C_1 \sin^2 \psi$ ,  $y' = \operatorname{ctg} \psi$ , тоді

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \sin 2\psi d\psi}{\operatorname{ctg} \psi} = 2C_1 \sin^2 \psi d\psi \Rightarrow x = \frac{C_1}{2}(2\psi - \sin 2\psi) + C_2.$$

З огляду на початкові умови  $x = y = 0$  при  $\psi = 0$ , тому  $C_2 = 0$ . Отже,

$$x = 0,5C_1(2\psi - \sin 2\psi), \quad y = C_1 \sin^2 \psi = 0,5C_1(1 - \cos 2\psi).$$

Поклавши в останніх рівностях  $0,5C_1 = r$ ,  $2\psi = \theta$ , одержимо рівняння брахістохрони в параметричному вигляді

$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta). \quad (9.8)$$

Співвідношення (9.8) є стандартними параметричними рівняннями кривої, яка називається *циклоїдою*. Ця плоска крива являє собою траєкторію точки, що лежить на межі круга радіусу  $r$ , який котиться без ковзання уздовж прямої лінії. Така крива складається з конгруентних арок, кожна з яких відповідає повному оберту *твірного круга*, і з'єднується з сусідніми арками в *точках звороту* циклоїди.

Якщо з рівностей (9.8) виключити параметр  $\theta$ , то отримаємо рівняння циклоїди у декартовій системі координат

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 9

**1.** Показати, що циклоїда  $x = r(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = r(1 - \cos \theta)$  є ізохронною кривою (ізохроною), тобто час, необхідний для спуску по ній до фіксованого рівня матеріальної точки, яка в початковий момент часу перебувала у стані спокою, не залежить від початкового положення точки на кривій<sup>10</sup>.

<sup>10</sup> Розв'язання цієї задачі дозволило Х. Гюйгенсу (1629-1695) в 1673 р. сконструювати точний маятниковий годинник. Він установив таутохронність (властивість гармонічних коливань зберігати період коливання незалежно від початкових умов, що визначають амплітуду коливання) руху для циклоїдного маятника, гири якого рухається по арці циклоїди. Такий маятник можна отримати, закріпивши вертикально шаблон у формі двох піварок циклоїди зі спільною точкою звороту, у якій на нитці довжини  $l$ , рівній подвоєному діаметру твірного кола циклоїди (тобто довжині її піварки), підвісити важок (мал. 9.2). Період коливань такого маятника рівний  $\dot{O} = 4\pi\sqrt{r/g} = 2\pi\sqrt{l/g}$ .

2. Вивести рівняння руху маятника без опору. Для випадку, коли всі сталі, що входять у рівняння, рівні 1, накреслити траєкторії на фазовій площині. Дати фізичну інтерпретацію траєкторіям різних типів.

3. Вивести рівняння руху маятника з опором, пропорційним квадрату швидкості. Накреслити траєкторії руху на фазовій площині (скористатися кресленням, побудованим для попередньої задачі).

4. Вивести рівняння руху маятника, на який діє стала сила, рівна половині ваги маятника, і напрямлена завжди в один бік по дотичній до дуги кола, по якій рухається маятник. Узявши сталі  $l$  і  $g$  рівними 1, намалювати траєкторії отриманого рівняння на фазовій площині. Які рухи маятника зображаються траєкторіями різних типів?

5. Зобразити на фазовій площині малі коливання маятника змінної довжини, вважаючи, що за руху маятника вгору його довжина рівна  $l$ , а за руху вниз рівна  $L > l$  (приклад: розгойдування гойдалки). Зміна довжини маятника відбувається миттєво (скачком), при цьому кут відхилення маятника і його момент кількості руху відносно осі не зазнають скачків. За малих коливань вважати  $\sin \varphi \approx \varphi$ . У скільки разів збільшиться амплітуда за одне повне коливання?

## РОЗДІЛ 10

### Задачі електротехніки

Перш ніж перейти до побудови диференціальних моделей задач електротехніки, нагадаємо деякі основні поняття і означення.

*Електричним струмом* називається впорядкований, спрямований рух електрично заряджених частинок у просторі.

*Силою струму* (в електротехніці – струмом), що протікає через провідник із площею поперечного перерізу  $s$ , називається величина, що відповідає кількості заряду  $\Delta q$ , перенесеному через переріз провідника за проміжок часу  $\Delta t$ :  $I = \Delta q / \Delta t$ ; вимірюється в амперах. 1 ампер (А) – сила такого постійного струму, який, пропущений по двох прямих нескінченних провідниках із незначним поперечним перерізом, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, створював би між цими провідниками силу  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на метр довжини.

Якщо протягом кожного проміжку часу  $\Delta t$  перенесений заряд  $\Delta q$  є однако-вим, і при цьому напрям струму залишається незмінним, то такий струм називають *постійним*. У випадку, коли сила струму змінюється з бігом часу, струм називають *змінним*.

*Електричний заряд* – фізична величина, яка характеризує здатність тіл створювати електромагнітні поля та брати участь в електромагнітній взаємодії. Позначається  $q$ , вимірюється в кулонах. 1 кулон (Кл) – кількість електричного заряду, який проходить через поперечний переріз провідника при силі струму 1 А за 1 с.

*Електрорушійна сила* – кількісна міра роботи сторонніх сил із переміщення заряду, характеристика джерела струму. Позначається здебільшого  $\epsilon$ , а в тексті скорочено е. р. с.; вимірюється в вольтах. Е. р. с. ділянки електричного кола дорівнює енергії, яку отримує одиничний заряд за проходження цієї ділянки кола. 1 вольт (В) рівний електричній напрузі, що виникає в електричному колі з постійним струмом сили 1 А при потужності 1 Вт, а також рівний потенціалу точки електричного поля, в якій електричний заряд 1 Кл має потенціальну енергію 1 Дж.

*Різниця потенціалів* дорівнює роботі, яку треба виконати проти електростатичних сил, щоб перемістити одиничний заряд із однієї точки простору в іншу. Напруга на ділянці електричного поля дорівнює різниці потенціалів у тому випадку, коли на ділянці немає джерел струму.

*Напруга* на ділянці електричного кола – це різниця потенціалів між двома точками електричного поля, що чисельно дорівнює відношенню роботи, яку необхідно виконати для переміщення заряду з однієї точки поля в іншу, до величини цього заряду. Позначається  $U$ , вимірюється у вольтах.

*Спад напруги* – різниця потенціалів між кінцями ділянки електричного кола, в якому протікає електричний струм. Позначається  $\Delta U$ , вимірюється у вольтах.

*Резистор* або *опір* – елемент електричного кола, призначений для використання його електричного опору. *Електричний опір* – властивість провідника створювати перешкоди проходженню електричного струму. Позначається  $R$ , вимірюється в омах. 1 ом (Ом) – опір провідника, на кінцях якого створюється напруга 1 В при силі струму 1 А за умови, що в провіднику не виникає жодної електрорушійної сили. Для резистора з електричним опором  $R$  при проходженні струму сили  $I$  спад напруги на ньому складає  $U_R = IR$  (закон Ома).

*Індуктивність* – фізична величина, що характеризує здатність провідника накопичувати енергію магнітного поля, коли в ньому протікає електричний струм. Розраховується як відношення магнітного потоку через контур, визначений електричним колом, до величини сили струму в колі. Позначається  $L$ , вимірюється у генрі. 1 генрі (Гн) рівний індуктивності електричного контуру, в якому виникає е. р. с. 1 В при рівномірній зміні струму в колі зі швидкістю 1 А за секунду.

*Самоіндукція* – «власне» магнітне поле провідника, що виявляється в момент, коли замикається електричне коло, і в провіднику з'являється електричний струм.

*Котушка індуктивності* (індуктивна котушка) – елемент електричного кола, який являє собою сукупність витків, і призначений для використання його індуктивності. Котушка індуктивності має вигляд накрученого спіраллю ізольованого дроту, що має значну індуктивність при відносно великій електропровідності та малому активному опорі. Спад напруги на індуктивній котушці складає  $U_L = L \frac{dI}{dt}$ .

*Ємність* – здатність тіла накопичувати заряд. Визначається як відношення заряду тіла  $q$  до різниці потенціалів  $U$ . Позначається  $C$ , вимірюється у фарадах. 1 фарад (Ф) дорівнює ємності такого конденсатора, між обкладками якого при заряді в 1 Кл виникає електростатична напруга 1 В.

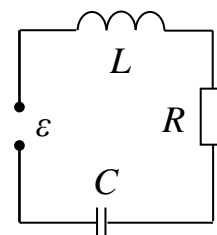
*Електричний конденсатор* – система з двох чи більше електродів (обкладок), розділених діелектриком, товщина якого менша в порівнянні з розміром обкладок. Така система має взаємну електричну ємність і здатна накопичувати заряд. Спад напруги на конденсаторі ємності  $C$  складає  $U_C = q/C$ , де  $q$  – заряд конденсатора.

Диференціальні моделі задач, пов'язаних з електричними колами, будуються на підставі **законів Кірхгофа** – двох основних законів електричних кіл.

*Перший закон Кірхгофа* встановлює зв'язок між сумою струмів, спрямованих до вузла електричного з'єднання (додатні струми), і сумою струмів, спрямованих від вузла (від'ємні струми). Згідно з цим законом алгебраїчна сума струмів, що збігаються в будь-якій точці розгалуження провідників, дорівнює нулю (тобто для кожного вузла електричного кола сума всіх притікаючих струмів рівна сумі всіх відтікаючих струмів).

*Другий закон Кірхгофа* встановлює зв'язок між сумою електрорушійних сил і сумою спадів напруги на резисторах замкненого контуру електричного кола. Згідно з цим законом алгебраїчна сума миттєвих значень е. р. с. всіх джерел напруги в будь-якому контурі електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень спадів напруги на всіх резисторах того ж контуру.

Нехай в електричному колі послідовно включені: джерело струму  $\varepsilon$ , напруга якого змінюється за законом  $F(t)$ , конденсатор ємності  $C$ , заряд якого рівний  $q$ , котушка індуктивності  $L$  і резистор (активний опір)  $R$  (мал. 10.1). Тоді згідно з другим законом Кірхгофа



$$U_C + U_L + U_R = F(t),$$

Мал. 10.1

тобто з урахуванням наведених вище значень для спадів напруги

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} + RI = F(t), \quad (10.1)$$

Продиференціюємо ліву і праву частини рівності (10.1) за змінною  $t$ . Тоді, взявши до уваги, що за означенням сили струму  $\frac{dq}{dt} = I$ , одержимо рівняння для визначення сили струму  $I(t)$

$$LI'' + RI' + C^{-1}I = F'(t), \quad (10.2)$$

а також для заряду конденсатора  $q(t)$

$$Lq'' + Rq' + C^{-1}q = F(t). \quad (10.3)$$

Якщо в початковий момент часу струму в колі не було, а конденсатор мав максимальний заряд  $Q_0$ , то до рівнянь (10.2), (10.3) додаються початкові умови

$$I(0) = 0 \quad (q'(0) = 0), \quad q(0) = Q_0,$$

які дають змогу однозначно визначити функції  $I(t)$  і  $q(t)$ .

Режим, при якому сила струму є сталою чи змінюється періодично, називається *усталеним режимом*. Щоб знайти силу струму в колі за усталеного режиму, потрібно визначити періодичні розв'язки рівняння (10.2). Ці розв'язки, як правило, мають вигляд

$$I(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (10.4)$$

де  $\omega$  – частота,  $\varphi$  – фаза,  $A$  – амплітуда (найбільше значення) сили струму.

Усталеним режим називається тоді, коли при  $t \rightarrow \infty$  будь-який розв'язок рівняння (10.2) необмежено наближається до знайденого періодичного розв'язку.

**Приклад 10.1.** Дано (мал. 10.1) електричний контур із послідовно з'єднаними елементами: індуктивністю  $L=1$  Гн, опором  $R=1000$  Ом і конденсатором ємності  $C=6,25 \cdot 10^{-6}$  Ф. Початковий заряд у контурі рівний нулеві, а в момент часу  $t=0$  до нього прикладається стала електрорушійна сила  $\varepsilon=24$  В. Визначити величину струму в момент часу  $t=0$ , якщо відомо, що при  $t=0,001$  с сила струму рівна  $0,031$  А.

*Розв'язання.* Скористаємося рівнянням (10.3) для визначення заряду  $q(t)$  конденсатора, яке після підкладання числових даних з умови задачі запишеться у вигляді

$$q''(t) + 10^3 \cdot q'(t) + 16 \cdot 10^4 \cdot q(t) = 24. \quad (10.5)$$

До рівняння (10.5) додаються крайові умови

$$q(0) = 0, \quad q'(0,001) = 0,031. \quad (10.6)$$

Одержана задача (10.5), (10.6) є крайовою задачею для лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Ця задача має єдиний розв'язок

$$q(t) = \frac{(1,5e^{-0,2} - 1,55)e^{-800t} - (6e^{-0,8} - 1,55)e^{-200t}}{(4e^{-0,8} - e^{-0,2}) \cdot 10^4} + 1,5 \cdot 10^{-4}.$$

Тоді сила струму в момент часу  $t = 0$  рівна

$$I(0) = q'(0) = \frac{0,02}{4 - e^{0,6}} (6 - 6e^{0,6} + 4,65e^{0,8}) \approx 0,05 \text{ А.}$$

**Приклад 10.2.** Послідовно включені: джерело струму, напруга якого змінюється за законом  $\varepsilon = V \sin \omega t$ , де  $V$ ,  $\omega$  – задані сталі, опір  $R$  і ємність  $C$ . Знайти силу струму в електричному колі за усталеного режиму.

*Розв'язання.* Згідно з умовою задачі рівняння (10.2) для визначення сили струму набуває вигляду

$$RI' + C^{-1}I = V\omega \cos \omega t. \quad (10.7)$$

Для відшукування усталеного режиму знайдемо періодичний розв'язок отриманого лінійного рівняння першого порядку (10.7) у вигляді (10.4). Підклавши (10.4) у (10.7), дістанемо

$$RA\omega \cos(\omega t + \varphi) + C^{-1}A \sin(\omega t + \varphi) = V\omega \cos \omega t.$$

Застосувавши відповідні тригонометричні формули і прирівнявши коефіцієнти при  $\sin \omega t$  і  $\cos \omega t$ , маємо

$$-RA\omega \sin \varphi + C^{-1}A \cos \varphi = 0, \quad RA\omega \cos \varphi + C^{-1}A \sin \varphi = V\omega,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{RC\omega}, \quad A = \frac{CV\omega}{\sqrt{1 + (CR\omega)^2}}.$$

Тоді згідно з формулою (10.4) одержимо періодичний розв'язок

$$I(t) = \frac{CV\omega}{\sqrt{1 + (CR\omega)^2}} \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{1}{RC\omega}\right). \quad (10.8)$$

Обґрунтуємо, чому знайдений розв'язок (10.8) називається усталеним режимом. Загальний розв'язок рівняння (10.7) рівний сумі знайденого частинного розв'язку (10.8) і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$RI' + C^{-1}I = 0.$$

Оскільки розв'язок останнього рівняння  $I = Ke^{-t/RC}$ , де  $K$  – довільна стала, прямує до нуля при  $t \rightarrow +\infty$ , то звідси випливає, що будь-який розв'язок рівняння (10.7) при  $t \rightarrow +\infty$  необмежено наближається (причому досить швидко) до знайденого періодичного розв'язку (10.8).

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 10

1. Електричне коло складається з послідовно підключених джерела постійного струму, яке дає напругу  $V = const$ , резистора (активного опору)  $R$ , самоіндукції  $L$  і вимикача, який вмикається при  $t = 0$ . Знайти залежність сили струму від часу при  $t > 0$ .

2. Розв'язати попередню задачу, замінивши самоіндукцію  $L$  конденсатором ємності  $C$ . Конденсатор до замикання кола не заряджений.

3. Послідовно включені: опір  $R$  і конденсатор ємності  $C$ , заряд якого при  $t = 0$  рівний  $q$ . Коло замикається при  $t = 0$ . Знайти силу струму в колі при  $t > 0$ .

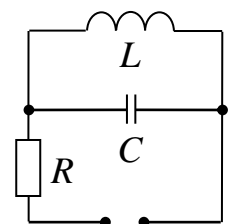
4. Послідовно включені: самоіндукція  $L$ , опір  $R$  і конденсатор ємності  $C$ , заряд якого при  $t = 0$  рівний  $q$ . Коло замикається при  $t = 0$ . Знайти силу струму в колі та частоту коливань у тому випадку, коли розряд має коливальний характер.

5. У замкнутому електричному контурі послідовно включені: конденсатор ємності  $C$ , який у початковий момент часу  $t = 0$  мав максимальний заряд  $Q_0$ , котушка індуктивності  $L$ , і активний опір (резистор)  $R$ . Знайти закони зміни заряду конденсатора  $q$ , сили струму  $I$ , а також напруги на конденсаторі  $U_C$  за припущення, що  $\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} < 0$ .

6. Послідовно включені: джерело струму, напруга якого змінюється за законом  $\varepsilon = V \sin \omega t$ , де  $V, \omega$  – задані сталі, опір  $R$  і самоіндукція  $L$ . Знайти силу струму в колі (усталений режим).

7. Послідовно включені: джерело струму, напруга якого змінюється за законом  $\varepsilon = V \sin \omega t$ , де  $V, \omega$  – задані сталі, опір  $R$ , самоіндукція  $L$  і ємність  $C$ . Знайти силу струму в колі (усталений режим). За якої частоти  $\omega$  сила струму найбільша?

8. До джерела струму з напругою  $\varepsilon = V \sin \omega t$ , де  $V, \omega$  – задані сталі, послідовно під'єднаний опір  $R$ . Далі коло розгалужується на дві гілки, в одній із яких включена самоіндукція  $L$ , а в другій – ємність  $C$  (мал. 10.2). Знайти силу струму в колі (усталений режим), який проходить через опір  $R$ . За якої частоти  $\omega$  сила струму найбільша? Найменша?



$$\varepsilon = V \sin \omega t$$

Мал. 10.2

9. Вважаючи  $y(t)$  силою струму в колі, дати електротехнічну інтерпретацію і розв'язати задачі Коші (знайти також усталений режим, якщо він існує):

а)  $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2;$

б)  $y'' + y = 4 \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

в)  $y'' + 3y' + 2y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

## РОЗДІЛ 11

### Диференціальні моделі в економіці

**Ефективність реклами.** Нехай торговельними закладами реалізується певна продукція (товар), про яку в момент часу  $t$  із загального числа потенційних покупців  $N$  знають лише  $x(t)$  осіб. Припустимо, що для прискорення збуту продукції дали рекламні оголошення у засобах масової інформації (по радіо, на телебаченні, в мережі Інтернету тощо). Наступна інформація про продукцію поширюється серед покупців шляхом спілкування між собою. Із великою вірогідністю можна вважати, що після рекламних оголошень швидкість зміни числа тих, хто знає про товар, пропорційна як числу тих, хто знає, так і числу тих, хто не знає про нього. Вважаючи, що час відраховується від моменту подання рекламних оголошень, коли про товар дізналися  $N/\gamma$  осіб, де  $\gamma$  виражає частку «знавців» із загальної кількості потенційних покупців, одержимо диференціальну модель у вигляді задачі Коші для рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x), \quad k = \text{const} > 0 \quad (11.1)$$

із початковою умовою

$$x(0) = N/\gamma. \quad (11.2)$$

Зінтегрувавши рівняння (11.1) шляхом відокремлення змінних, отримаємо його загальний розв'язок

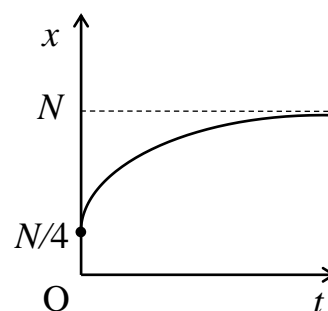
$$x(t) = \frac{N}{1 + C e^{-Nkt}}, \quad C = \text{const} > 0. \quad (11.3)$$

В економічній літературі співвідношення (11.3) зокрема називають *рівнянням логістичної кривої*.

Із урахуванням початкових умов маємо  $C = \gamma - 1$ , тобто шуканий розв'язок задачі Коші (11.1), (11.2) дається формулою

$$x(t) = \frac{N}{1 + (\gamma - 1)e^{-Nkt}}.$$

На мал. 11.1 схематично зображена логістична крива у випадку  $\gamma = 4$ . Зауважимо, що до рівняння (11.1) зокрема зводиться задача про поширення технологічних новацій.



Мал. 11.1

**Динамічні моделі ринку товару.** Згідно з економічною теорією реальна цінність товару дорівнює фактичній ціні, яка встановлюється на ринку відповідно до попиту і пропозиції товарів (послуг).



*Попит і пропозиція* – економічна модель, що описує процес ціноутворення на ринку. Ця модель вводить поняття попиту та пропозиції як універсальні характеристики ринку, і доводить, що за певних умов ці характеристики врівноважуються (ситуація, коли величина пропозиції рівна величині попиту, називається *ринковою рівновагою*) і призводять до встановлення *рівноважної ціни* на товар. Висновок моделі про врівноваження добре відповідає поведінці великого числа ринків і вважається важливим економічним законом.

*Попит* – заявлена на ринку потреба в товарах. *Закон попиту*: величина (обсяг) попиту зменшується у міру збільшення ціни товару (підвищення ціни викликає зниження попиту, а зниження ціни – підвищення величини попиту).

*Пропозиція* – кількість товару, який є на ринку, або готовий до доставки на нього. *Закон пропозиції*: за інших незмінних чинників величина (обсяг) пропозиції збільшується у міру збільшення ціни на товар (за незмінних витрат на одиницю товару зі збільшенням ціни росте прибуток, а тому виробникові стає вигідно продати більше товару).

Дамо спосіб побудови лінійної динамічної моделі ринку певного товару.

Нехай функції  $D(t)$ ,  $S(t)$  і  $P(t)$  виражають відповідно попит, пропозицію і ціну продукції в момент часу  $t$  за неперервної зміни часу. Одним із економічних законів товарного виробництва є *закон товарного обігу*, згідно з яким якщо попит перевищує пропозицію, то ціна зростає, а інакше падає. У випадку лінійної динамічної моделі це записується у вигляді

$$\frac{dP(t)}{dt} = k(D(t) - S(t)), \quad k = \text{const} > 0. \quad (11.4)$$

Похідну від ціни по часу називають *тенденцією формування ціни*. За неперервної зміни часу попит і пропозиція (у відповідності до вищезгаданих економічних законів) описуються співвідношеннями

$$D(t) = a - bP(t), \quad S(t) = -c + dP(t), \quad (11.5)$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  – додатні сталі. Якщо в початковий момент часу  $t=0$  ціна була рівна  $P(0) = P_0$ , то, зінтегрувавши рівняння (11.4) з урахуванням (11.5) і останньої початкової умови, отримаємо

$$P(t) = P_0 e^{-At} + \frac{B}{A} (1 - e^{-At}),$$

де  $A = k(b + d)$ ,  $B = k(a + c)$ . Із отриманого цінового розподілу очевидно, що при  $A > 0$  і  $t \rightarrow \infty$  ціна товару прямує до стабільної рівноважної ціни

$$P_{st} = \frac{B}{A} = \frac{a + c}{b + d}.$$

Зауважимо, що в залежності від різних факторів попит і пропозиція загалом можуть описуватися різними, в тому числі й відмінними від (11.5), функ-

ціями ціни та тенденції формування ціни. Зокрема вони можуть задаватися лінійними співвідношеннями вигляду

$$D(t) = a_1 P' + b_1 P + c_1, \quad S(t) = a_2 P' + b_2 P + c_2,$$

де  $a_i, b_i, c_i, i=1,2$  – задані дійсні числа. У цьому випадку за вимоги збереження ринкової рівноваги (тобто врівноваженості попиту і пропозиції) одержимо диференціальну модель у вигляді рівняння  $D(t) = S(t)$ , або

$$a_1 P' + b_1 P + c_1 = a_2 P' + b_2 P + c_2.$$

**Динамічна модель накопичення банківських вкладів.** Розглянемо задачу: у початковий момент часу  $t=0$  величина банківського вкладу в грошових одиницях складає  $M_0 = M(0) > 0$ . Знайти величину вкладу  $M = M(t) > 0$  через час  $t > 0$  за неперервно змінної процентної ставки  $r(t)$ .

Очевидно, що за неперервно змінної процентної ставки величина зміни банківського вкладу в довільний момент часу рівна добутку наявного капіталу й процентної ставки. Звідси одержимо диференціальну модель у вигляді задачі Коші для рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dM}{dt} = r(t)M(t), \quad M(0) = M_0.$$

Зінтегрувавши рівняння з урахуванням початкової умови, одержимо розв'язок

$$M(t) = M_0 \exp\left(\int_0^t r(\tau) d\tau\right),$$

який визначає величину банківського вкладу в довільний момент часу  $t$ .

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 11

**1.** На момент подання рекламних оголошень про запуск у торгівлю мережу нового гаджету про останній знали 5% із усього населення 45-тисячного міста. Розрахувати, скільки містян знатимуть про новий товар через 30 днів, якщо через 10 днів таких знавців побільшало у 8 разів.

**2.** Ціна на фрукти спочатку складала 20 гривень за 1 кг, а через  $t$  тижнів  $p(t)$  гривень. Відомо, що попит  $D(t)$  і пропозиція  $S(t)$  визначалися співвідношеннями  $D(t) = 4p' - 2p + 39$ ,  $S(t) = 44p' + 2p - 1$ . Знайти закон зміни залежності ціни від часу за умови, що між попитом і пропозицією увесь час зберігалася рівновага.

3. Нехай  $p(t)$  – ціна на певний товар,  $p'(t)$  – тенденція формування ціни. Функції попиту та пропозиції на цей товар мають вигляд:  $D(t) = 40 - 2p - 2p'$ ,  $S(t) = 60 + 2p - 3p'$ . Знайти залежність рівноважної ціни  $p$  від часу, якщо  $p(0) = 20$ . Перевірити, чи є рівноважна ціна стійкою.

4. На момент часу  $t = 0$  клієнт мав 50000 гривень заощаджень. Унаслідок інфляції через три роки їх розмір зменшився до 45000. Якою буде вартість заощаджень через 8 років? *Вказівка:* вважати, що швидкість знецінення заощаджень через інфляцію пропорційна до їх залишкової вартості.

5. Знайти залежність  $y(t)$ , яка описує зростання рівня виробництва продукції в момент часу  $t$  ( $t$  вимірюється в роках), якщо темп зростання випуску продукції  $T = 0,06$  (тобто 6% річних). Вирахувати сумарну кількість продукції, виробленої за проміжок часу від  $t_0 = 0$  до  $t_1 = 8$  років, якщо в базовому році  $t = t_0$  рівень виробництва відомий:  $y(t_0) = y_0$ . *Вказівка:* скористатися формулою темпу зростання випуску продукції  $T = y'/y$ ; сумарна кількість продукції, випущеної за час  $t \in [t_0, t_1]$ , визначається інтегралом

$$y(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} y(t) dt.$$

## РОЗДІЛ 12

### Екологія і медицина

**Найпростіші диференціальні моделі в екології.** Екологія – наука, що вивчає взаємовідносини людини і живих організмів загалом із довкіллям. Основним об'єктом вивчення екології є еволюція популяцій, тобто сукупностей організмів певного виду, що займають обмежений ареал (територію поширення), вільно схрещуються між собою і дають плодове потомство.

Нехай  $x(t)$  – число особин у популяції в момент часу  $t$ . Якщо позначити через  $A$  число особин популяції, що народжуються за одиницю часу, а через  $B$  – число особин, що помирають за одиницю часу, то досить ґрунтовно можна стверджувати, що зміна чисельності популяції з плином часу дається формулою

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \quad (12.1)$$

Завдання тепер полягає в тому, щоб описати залежність  $A$  і  $B$  від  $x$ . Найпростішим випадком є ситуація, коли  $A = ax$ ,  $B = bx$ , де  $a$  і  $b$  – коефіцієнти на-

роджуваності та смертності відповідно. Тоді диференціальне рівняння (12.1) запишеться у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = (a - b)x, \quad a, b > 0. \quad (12.2)$$

Припускаючи, що в початковий момент часу  $t = t_0$  число особин у популяції рівне  $x = x_0$ , із рівняння (12.2) знаходимо

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}.$$

Із отриманої рівності випливає, що у випадку  $a > b$  число особин із плином часу необмежено зростає:  $x \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Якщо ж  $a < b$ , то  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , і популяція стає вимираючою.

Наведена спрощена модель у ряді випадків відповідає дійсності, однак насправді практично всі моделі, що описують реальні явища й процеси, є нелінійними, тож замість диференціального рівняння (12.2) слід розглядати рівняння вигляду  $dx/dt = f(x)$ , де  $f(x)$  – нелінійна функція, наприклад, рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = ax - bx^2, \quad a, b > 0. \quad (12.3)$$

Припускаючи, що  $x(t_0) = x_0$ , із (12.3) знаходимо

$$x(t) = \frac{ab^{-1}x_0}{x_0 + (ab^{-1} - x_0)e^{-a(t-t_0)}}. \quad (12.4)$$

Із (12.4) очевидно, що при  $t \rightarrow \infty$  число особин у популяції  $x \rightarrow ab^{-1}$ . При цьому можливі два випадки: якщо  $ab^{-1} > x_0$ , то граничне значення досягається з додатним, а якщо  $ab^{-1} < x_0$ , то з від'ємним приростом популяції. Зауважимо, що співвідношення (12.4) описує зокрема популяції фруктових шкідників і деяких видів бактерій.

**Модель «хижак-жертва».** Якщо розглядається кілька співіснуючих видів, наприклад, великих і малих риб, де малі риби становлять поживу для великих, то, складаючи диференціальне рівняння для кожного виду, дістанемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}.$$

Розглянемо детальніше диференціальну модель співіснування двох біологічних видів (популяцій) з одним типом хижаків і одним типом жертв, уперше отриману в 1925 р. Альфредом Лоткою (1880-1949). У 1926 р. незалежно від Лотки аналогічні, а також складніші моделі були розроблені Віто Вольтеррою (1860-1940), чий глибокі дослідження в області екологічних проблем заклали підвалини математичної теорії біологічних угруповань (математичної екології).

Рівняння системи «хижак-жертва» (моделі Лотки-Вольтерри) мають вигляд

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y), \quad \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x), \quad (12.5)$$

де  $x(t)$  – число малих тварин-жертв,  $y(t)$  – число хижаків (які годуються «жертвами») у момент часу  $t$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – параметри (додатні сталі).

Рівняння (12.5) виражають зміну чисельності хижаків і жертв з урахуванням наступних процесів: **a)** розмноження жертв (доданок  $\alpha x$ ) та їх загибель унаслідок пожирання хижаками (доданок  $-\beta xy$ ); **b)** розмноження хижаків, яке вважається пропорційним кількості поживи, тобто потенційних жертв (доданок  $\delta xy$ ), та їх вимирання унаслідок зменшення кількості поживи (доданок  $-\gamma y$ ).

Система (12.5) має дві стаціонарні точки (положення рівноваги):  $x=0, y=0$  та  $x=\gamma/\delta, y=\alpha/\beta$ . Аналіз стійкості стаціонарних точок показує, що перша точка є сідлом, а друга – центром.

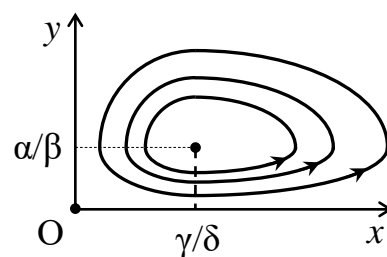
Знайдемо фазові траєкторії системи (12.5). Поділивши друге рівняння системи на перше, дістанемо звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(\gamma - \delta x)}{x(\alpha - \beta y)}.$$

Зінтегрувавши останнє рівняння шляхом відокремлення змінних, отримаємо його загальний розв'язок у вигляді

$$y^\alpha e^{-\beta y} \cdot x^\gamma e^{-\delta x} = C = const. \quad (12.6)$$

Співвідношення (12.6) називається *інтегралом руху* для системи (12.5). Інтеграл руху показує, що фазові траєкторії є замкнутими кривими, які проходять навколо стаціонарної точки-центра (мал. 12.1). Існування інтеграла руху обумовлює той факт, що величини популяцій визначаються початковими умовами. Так, якщо в початковий момент часу  $t=0$   $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ , то рух, тобто коливання чисельності популяцій, відбуватиметься по траєкторії, що відповідає значенню  $C = y_0^\alpha e^{-\beta y_0} \cdot x_0^\gamma e^{-\delta x_0}$ .



Мал. 12.1

При значному розмноженні жертв ( $x > \gamma/\delta$ ) створюються умови для розмноження хижаків завдяки доступності поживи. Але надмірне розмноження хижаків ( $y > \alpha/\beta$ ) призводить до зменшення кількості жертв, і коли число жертв значно скоротиться ( $x < \gamma/\delta$ ), хижаки також починають гинути через нестачу поживи. Тільки тоді, коли чисельність хижаків суттєво зменшиться ( $y < \alpha/\beta$ ), популяція жертв знову починає зростати.

Система (12.5) має рівноважний стан, коли число хижаків і жертв є сталим ( $y = 0$ ,  $x = 0$  або  $y = \alpha/\beta$ ,  $x = \gamma/\delta$ ). Відхилення від цього стану призводить до періодичних коливань чисельності хижаків і жертв, тобто розв'язки системи (12.5) є періодичними функціями. При цьому максимум  $x$  не співпадає в часі з максимумом  $y$ , тобто коливання в популяціях відбуваються з різними фазами.

Модель Лотки-Вольтерри може бути узагальненою для більшої кількості популяцій  $n > 2$ . У цьому випадку маємо рівняння

$$\frac{dx_i}{dt} = \left( \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} y_j \right) x_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = \left( -\gamma_i + \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j \right) y_i, \quad i = \overline{1, n},$$

де додатні параметри  $\alpha_i$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_i$ ,  $\delta_{ij}$  мають такий же зміст, як і в моделі (12.5) із двома видами.

Зауважимо, що вивчення угруповань зі складнішими взаємовідносинами дає більш цікаві практичні результати. Так, наприклад, якщо дві популяції конкурують у боротьбі за одне й те саме джерело поживи (третя популяція), то можна показати, що один із видів почне вимирати. При цьому зрозуміло: якщо цим видом виявиться джерело поживи, то така ж доля спіткає і два інших види.

**Задача про епідемію.** Розглянемо одну з диференціальних моделей, яка зустрічається в математичній теорії епідемій.

Припустимо, що деяка популяція загальною чисельністю  $n$  особин поділяється на три групи залежно від сприйнятливості до певної хвороби:

- 1) особини, сприйнятливі до розглядуваної хвороби, але наразі здорові;
- 2) особини, які є носіями інфекції – вони хворі самі й становлять джерело поширення хвороби;
- 3) особини, які є здоровими і мають імунітет до даної хвороби.

Позначимо через  $S(t)$ ,  $I(t)$  і  $R(t)$  число особин відповідно першої, другої та третьої груп у момент часу  $t$ . Таким чином,

$$S(t) + I(t) + R(t) = n. \quad (12.7)$$

Припустимо, що у випадку, коли кількість інфекційних особин перевищує деяке фіксоване число  $I^*$  (*епідемічний поріг*), то вони здатні заражати сприйнятливих до хвороби особин, тобто викликати спалах епідемії. За такого припущення береться до уваги факт ізоляції інфекційних особин до певного моменту часу (карантин чи перебування віддалено від сприйнятливих особин). При цьому швидкість зміни числа сприйнятливих до хвороби особин будемо вважати пропорційною числу самих сприйнятливих особин. А оскільки кожна сприйнятлива до хвороби особина, котра зрештою підхоплює хворобу, сама стає інфекційною, то швидкість зміни числа інфекційних особин буде рівною різниці за одиницю часу між числом особин, що захворіли, і тих, котрі вже одужують. Що

стосується швидкості зміни числа інфекційних, але одужуючих особин, то її будемо рахувати пропорційною числу інфекційних особин.

Зрозуміло, що ці припущення значно спрощують реальну ситуацію, однак у ряді випадків вони відображають суть справи. Із їх урахуванням отримуємо диференціальні рівняння:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & I(t) > I^*, \\ 0, & I(t) \leq I^*; \end{cases} \quad \frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & I(t) > I^*, \\ -\beta I, & I(t) \leq I^*; \end{cases} \quad \frac{dR(t)}{dt} = \beta I. \quad (12.8)$$

Коефіцієнти пропорційності  $\alpha$  і  $\beta$  (додатні сталі) називатимемо відповідно *коефіцієнтами захворюваності й одужання*.

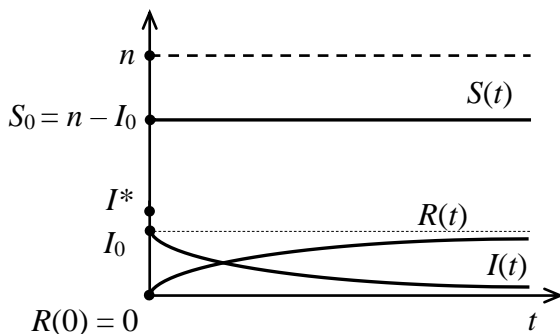
Для того, щоб розв'язки відповідних рівнянь визначалися однозначно, необхідно задати початкові умови. Задля простоти припустимо, що в момент часу  $t=0$  в популяції немає особин із імунітетом до хвороби, тобто  $R(0)=0$ , а початкова кількість інфекційних особин рівна  $I(0)=I_0$ . Надалі будемо рахувати, що коефіцієнти захворюваності й одужання рівні, тобто  $\alpha=\beta$ , і дослідимо побудовану диференціальну модель у двох випадках.

**1. Випадок недосягнення епідемічного порогу ( $I_0 \leq I^*$ ).** У цьому випадку з плином часу особини в популяції не піддаватимуться зараженню хворобою (це відповідає ситуації, коли досить багато інфекційних особин виявляються в ізоляції). При  $\alpha=\beta$  з урахуванням побудованих вище рівнянь (12.7) і (12.8) одержимо диференціальну модель у вигляді

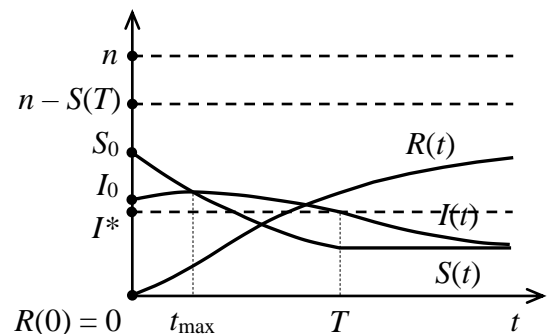
$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{dI}{dt} = -\alpha I, \quad \frac{dR}{dt} = \alpha I, \\ S(0) = S_0 = n - I_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Зінтегрувавши задачу Коші (12.9), маємо:  $S(t) = S_0 = n - I_0$ ,  $I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$ ,  $R(t) = n - S(t) - I(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-\alpha t})$ .

На мал. 12.2 графічно показана зміна чисельності особин із ростом  $t$  у кожній із трьох груп у випадку  $I_0 \leq I^*$ .



Мал. 12.2



Мал. 12.3

2. *Випадок перевищення епідемічного порогу* ( $I_0 > I^*$ ). У цьому випадку має існувати інтервал  $t \in [0, T)$ , в усіх точках якого справджується нерівність  $I(t) > I^*$ , оскільки за змістом задачі  $I(t)$  повинна бути неперервною функцією змінної часу. Звідси випливає, що протягом проміжку часу  $t \in [0, T)$  спостерігатиметься епідемія, коли хвороба поширюватиметься на сприйнятливих до неї особин. Із (12.8) для періоду епідемії при  $\alpha = \beta$  маємо:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S, \quad \frac{dI}{dt} = \alpha(S - I), \quad \frac{dR}{dt} = \alpha I, \quad (12.10)$$

$$S(0) = S_0 = n - I_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0.$$

Зінтегрувавши задачу Коші (12.10), знаходимо

$$S(t) = S_0 e^{-\alpha t}, \quad (12.11)$$

$$I(t) = (I_0 + \alpha S_0 t) e^{-\alpha t}, \quad (12.12)$$

$$R(t) = n - S(t) - I(t) = n - [I_0 + S_0(1 + \alpha t)] e^{-\alpha t}$$

для всіх  $t \in [0, T)$ .

Практичний інтерес становлять також задачі знаходження конкретного значення моменту часу  $T$ , коли зараження сприйнятливих до хвороби осіб припиняється, що означає кінець епідемії, а також моменту *піку епідемії*  $t_{\max}$ , коли число інфекційних особин виявляється максимальним, після чого починається *спад епідемії*.

Із (12.11) маємо

$$S(T) = S_0 e^{-\alpha T} \Rightarrow T = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{S_0}{S(T)}, \quad (12.13)$$

де  $S(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$  означає число сприйнятливих особин, котрі уникають захворюваності. Знаючи це значення, можна використати рівність (12.13) для передбачення часу припинення епідемії. Для знаходження  $S(T)$  скористаємося рівністю (12.12), підставивши в неї значення  $T$  із (12.13) із урахуванням рівності  $I(T) = I^*$ , що випливає з вищенаведених міркувань. Маємо:

$$I^* = \left( I_0 + S_0 \ln \frac{S_0}{S(T)} \right) \cdot \frac{S(T)}{S_0}.$$

Останню рівність можна переписати у вигляді

$$\frac{I^*}{S(T)} + \ln S(T) = \frac{I_0}{S_0} + \ln S_0. \quad (12.14)$$

Оскільки  $I^*$ ,  $I_0$  і  $S_0$  – відомі величини, то рівнянням (12.14) можна скористатися для розрахунку конкретного значення  $S(T)$ .



Щоб знайти момент піку епідемії, дослідимо на екстремум функцію (12.12) на інтервалі  $t \in [0, T)$ . Маємо:

$$\frac{dI}{dt} = [\alpha(S_0 - I_0) - \alpha^2 S_0 t] e^{-\alpha t} = 0.$$

Звідси час  $t_{\max}$ , коли  $I(t)$  сягає максимального значення, буде рівним

$$t_{\max} = \alpha^{-1} \left( 1 - \frac{I_0}{S_0} \right).$$

Підставивши це значення у (12.12), отримаємо, що

$$I_{\max} = S_0 e^{-[1 - I_0 / S_0]} = S(t_{\max}).$$

Остання рівність зокрема показує, що в момент часу  $t_{\max}$  число сприйнятливих до хвороби особин співпадає з числом інфекційних особин.

Якщо  $t > T$ , то сприйнятливі особини вже не стають інфекційними, і диференціальною моделлю задачі буде система рівнянь (12.9) із початковими умовами, заданими в точці  $t = T$ , в якій згідно з наведеним вище шукані функції набувають значень  $S = S(T)$ ,  $I = I^*$  і  $R = n - S(T) - I^*$ . Розв'язавши отриману задачу аналогічно до задачі Коші (12.9), маємо:  $S(t) = S(T)$ ,  $I(t) = I^* e^{-\alpha(t-T)}$  і  $R(t) = n - S(T) - I^* e^{-\alpha(t-T)}$  для всіх  $t > T$ .

Зміна чисельності особин із плином часу в кожній із трьох груп у випадку  $I_0 > I^*$  схематично показана на мал. 12.3.

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 12

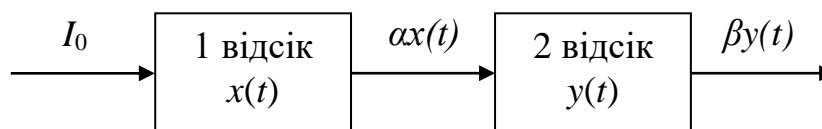
**1.** Із експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій за достатку поживи прямо пропорційна їх кількості. За який час кількість бактерій збільшиться в  $m$  разів порівняно з їх початковою кількістю?

**2.** Швидкість збільшення площі молодого латаття вікторії регії, яке має форму круга, пропорційна радіусу листа і кількості сонячного світла, що падає на нього. Кількість сонячного світла пропорційна площі листа і косинусу кута між напрямом променів і вертикаллю до листа. Знайти залежність між площею  $S$  латаття і часом  $t$ , якщо о 6:00 ранку ця площа складала  $1600 \text{ см}^2$ , а о 18:00 того ж дня  $2500 \text{ см}^2$ . Вважати, що кут між напрямом променя сонця і вертикаллю о 6:00 рівний  $90^\circ$ , а опівдні  $0^\circ$ .

**3.** Дослідити диференціальні моделі задачі про епідемії у випадку, коли коефіцієнти захворюваності й одужання не рівні між собою ( $\alpha \neq \beta$ ).

**4.** Двовідсічний (першим відсіком можна вважати, наприклад, власне ліки, другим – шлунок чи інший орган) процес неперервного введення ліків шляхом

інфузії (вливання) відбувається за схемою, зображеною на мал. 12.4 (із першого відсіку ліки зі швидкістю  $\alpha x(t)$  перетікають у другий, де всмоктуються зі швидкістю  $\beta y(t)$ ;  $\alpha, \beta = \text{const} > 0$ ). Знайти розподіл діючої речовини в першому та другому відсіках у довільний момент часу  $t$  за припущення, що вхідна швидкість вливання рівна  $I_0 = \text{const} > 0$ . Розглянути випадки: **a)**  $\alpha \neq \beta$ ; **б)**  $\alpha = \beta$ .



Мал. 12.4

**5.** Лікувальну речовину за допомогою крапельниці вводять у кров зі сталою швидкістю  $v$ . Швидкість виведення лікувальної речовини в довільний момент часу  $t$  вважаємо прямо пропорційною кількості речовини  $m(t)$  у крові з коефіцієнтом  $k$ . Знайти границю, до якої прямує з бігом часу  $t \rightarrow \infty$  кількість лікарської речовини у крові, якщо у початковий момент часу  $t = 0$  ця кількість становила  $m_0$ .

**6.** Нехай у початковий момент часу  $t = 0$  число носіїв інфекції у певній популяції рівне  $a$ , а число здорових особин, сприйнятливих до інфекції, рівне  $b$ . Зменшення числа здорових особин за проміжок часу  $\Delta t$  пропорційне добутку числа носіїв інфекції на число сприйнятливих до інфекції особин та проміжок часу. Знайти число здорових особин у довільний момент часу  $t > 0$ , нехтуючи загальною зміною чисельності популяції.

## РОЗДІЛ 13

### Військова справа

**Диференціальні моделі бойових дій Ланчестера.** У 1916 році, під час першої світової війни, англійський інженер Фредерік Вільям Ланчестер (1868-1946) побудував кілька математичних моделей ведення повітряних боїв. Потім ці моделі були узагальнені на випадки бойових дій за участі регулярних військ і партизанських загонів.

Нехай у бойових діях беруть участь дві ворогуючі сторони  $x$  і  $y$ . Їх чисельний склад у момент часу  $t$ , де  $t$  вимірюється у днях, починаючи з першого дня бойових дій, позначимо через  $x(t)$ ,  $y(t)$  відповідно. Будемо вважати, що в протистоянні перемагає та сторона, яка першою знищить бойові сили супротивника. При цьому припустимо, що  $x(t)$  і  $y(t)$  змінюються неперервно, і ці функції

є диференційовними по часу (можна вважати, що за малі проміжки часу чисельний склад також змінюється на малу величину, в тому числі й не цілу).

Дамо спосіб описання швидкості зміни чисельності воюючих сторін. Нехай для сторони  $x$   $A_x$  позначає швидкість втрат унаслідок чинників, не пов'язаних із бойовими діями (хвороб, нещасних випадків тощо),  $B_x$  – швидкість втрат унаслідок безпосередніх сутичок у ході бойових дій,  $C_x$  – швидкість підходу поповнень (резервних сил). Тоді очевидно, що загальна швидкість зміни  $x(t)$  описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = -(A_x + B_x) + C_x. \quad (13.1)$$

Аналогічне до (13.1) рівняння можна скласти і для  $y(t)$ . Тепер завдання полягає в тому, щоби вказати відповідні формули для введених вище величин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і після цього дослідити побудовані диференціальні моделі. Отримані висновки дозволять дати відповідь на питання про ймовірного переможця.

Наведемо три моделі, побудовані Ланчестером на підставі рівнянь вигляду (13.1). Небойові втрати сторін подамо формулами  $A_x = -ax$ ,  $A_y = -dy$ , де  $a$  і  $d$  – невід'ємні сталі, які за аналогією з задачею про епідемії можемо називати «коефіцієнтами захворюваності». Для доданків, що враховують можливість підходу підмоги до сил  $x$  і  $y$  протягом дня, введемо позначення  $C_x = P(t)$ ,  $C_y = Q(t)$ .

*Перша модель Ланчестера* описує бойові дії між регулярними військами і має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - by + P(t), \\ \dot{y} &= -cx - dy + Q(t), \end{aligned} \quad (13.2)$$

У цій моделі припускається, що **a**) кожна з воюючих сторін перебуває в зоні дії вогневих засобів супротивника; **b**) вогонь ведеться виключно по живій силі, яка бере безпосередню участь у бойових діях. За таких припущень бойові втрати сторін можна вважати прямо пропорційними чисельності супротивника, тобто  $B_x = -by$ ,  $B_y = -cx$ . Невід'ємні сталі  $b$  і  $c$  назвемо *коефіцієнтами бойової ефективності* сторін  $y$  та  $x$  відповідно (середнє число ворожих солдатів, котрих здатна знешкодити відповідна сторона за одиницю часу). Ці величини можна розглядати у вигляді

$$b = r_y p_y, \quad c = r_x p_x,$$

де  $r_y$ ,  $r_x$  – коефіцієнти вогневої потужності;  $p_y$ ,  $p_x$  – імовірності влучності пострілів сторін  $y$  та  $x$  відповідно.

*Друга модель Ланчестера* описує бойові дії між партизанськими загонами і має вигляд

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax - gxy + P(t), \\ \dot{y} &= -hxy - dy + Q(t),\end{aligned}\tag{13.3}$$

де  $g, h$  – невід’ємні сталі.

*Третя модель Ланчестера*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax - gxy + P(t), \\ \dot{y} &= -cx - dy + Q(t)\end{aligned}\tag{13.4}$$

описує змішаний тип бойових дій, у яких беруть участь як регулярні війська, так і партизанські загони.

Оскільки, тримаючи під вогнем територію  $S$ , яку займають партизанські загони, супротивник не може знати ефективності своїх дій, то в системах типу (13.2) і (13.3) доданки, що відповідають бойовим втратам партизан, мають нелінійний вигляд (припускається, що втрати партизанських загонів пропорційні кількості партизан на  $S$ , а також числу бойових сил супротивника). Тому ці доданки записуються у вигляді  $-gxy$ ,  $-hxy$ . Для розрахунку коефіцієнтів  $g$  і  $h$  можна скористатися коефіцієнтами вогневої потужності  $r_y$  і  $r_x$ , а також узяти до уваги міркування Ланчестера, згідно з якими імовірність влучного пострілу з боку однієї зі сторін прямо пропорційна так званій територіальній ефективності одного пострілу з цієї сторони і обернено пропорційна частині площі території  $S$ , яку займають сили супротивника. Таким чином, за вірогідні формули для визначення коефіцієнтів  $g$  і  $h$  можна взяти

$$g = r_y \frac{S_{1,x}}{S_x}, \quad h = r_x \frac{S_{1,y}}{S_y},$$

де через  $S_{1,x}$ ,  $S_{1,y}$  позначено площу, яку займає один із партизанів відповідної сторони, а через  $S_x$ ,  $S_y$  – площу, яку займають сили  $x$  і  $y$  відповідно.

Якщо перед початком бойових операцій чисельність сил  $x$  і  $y$  складала відповідно  $x_0$  і  $y_0$ , то для систем (13.2), (13.3), (13.4) маємо початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.\tag{13.5}$$

Дослідимо детальніше наведені вище диференціальні моделі за спрощеної ситуації, коли жодна зі сторін не зазнає втрат, не пов’язаних із бойовими діями, і не отримує ніякої підмоги, тобто

$$a = d = 0, \quad P(t) = Q(t) \equiv 0.\tag{13.6}$$

**1. Квадратичний закон ведення бойових дій.** За припущень (13.6) система (13.2) набуде вигляду

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -by, \\ \dot{y} &= -cx.\end{aligned}\tag{13.7}$$

Поділивши друге з рівнянь на перше, отримаємо відповідне до системи (13.7) звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by},$$

загальний інтеграл якого має вигляд

$$by^2 - cx^2 = K_1, \quad (13.8)$$

де згідно з початковими умовами (13.5)  $K_1 = by_0^2 - cx_0^2$ . Із (13.8) очевидно впливають критерії для визначення переможця (сторони, яка першою знищить бойові сили супротивника): якщо  $K_1 > 0$ , то перемагає сторона  $y$ , а якщо  $K_1 < 0$  – то сторона  $x$ . Співвідношення (13.8) визначає квадратичну залежність між  $x$  і  $y$ , тому систему (13.7) можна назвати диференціальною моделлю з *квадратичним* або *гіперболічним* законом ведення бойових дій.

З урахуванням формул для коефіцієнтів  $b$  і  $c$  критерій перемоги, наприклад, сторони  $y$  можна записати у вигляді

$$\left( \frac{y_0}{x_0} \right)^2 > \frac{r_x p_x}{r_y p_y}.$$

Остання нерівність показує, що зміни у відношенні сил  $y_0 / x_0$  дають перевагу одній зі сторін у квадратичній пропорції. Це твердження називають *квадратичним законом Ланчестера*.

**2. Лінійний закон ведення бойових дій.** За припущень (13.6) система (13.3) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -gxy, \\ \dot{y} &= -hxy. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Відповідне до системи (13.9) звичайне диференціальне рівняння отримується аналогічно до системи (13.7) і має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{g},$$

загальний інтеграл якого

$$gy - hx = K_2, \quad (13.10)$$

де згідно з початковими умовами (13.5)  $K_2 = gy_0 - hx_0$ . Із (13.10) випливає: якщо  $K_2 > 0$ , то перемагає сторона  $y$ , а якщо  $K_2 < 0$  – то сторона  $x$ . Співвідношення (13.10) визначає лінійну залежність між  $x$  і  $y$ , тому систему (13.9) можна назвати диференціальною моделлю з *лінійним* законом ведення бойових дій.

З урахуванням формул для коефіцієнтів  $g$  і  $h$  критерій перемоги, наприклад, сторони  $y$  можна записати у вигляді

$$\frac{S_y y_0}{S_x x_0} > \frac{r_x S_{1,y}}{r_y S_{1,x}}.$$

З останньої нерівності випливає, що для здобуття перемоги сторона  $y$  повинна прагнути максималізувати відношення  $y_0/x_0$  і  $S_y/S_x$ , тобто забезпечити собі якомога більшу перевагу за чисельністю і за площею зайнятої території.

**3. Параболічний закон ведення бойових дій.** За припущень (13.6) система (13.4) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -gx, \\ \dot{y} &= -cx. \end{aligned} \tag{13.12}$$

Відповідне до системи (13.12) звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{gy},$$

загальний інтеграл якого

$$gy^2 - 2cx = K_3, \tag{13.13}$$

де згідно з початковими умовами (13.5)  $K_3 = gy_0^2 - 2cx_0$ . Із (13.13) випливає: якщо  $K_3 > 0$ , то перемагає сторона  $y$  (регулярні війська), а якщо  $K_3 < 0$  – то сторона  $x$  (партизани). Співвідношення (13.13) визначає параболічну залежність між  $x$  і  $y$ , тому систему (13.12) можна назвати диференціальною моделлю з *параболічним* законом ведення бойових дій.

З урахуванням формул для коефіцієнтів  $g$  і  $c$  критерій перемоги, наприклад, сторони  $y$  можна записати у вигляді

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > 2 \frac{r_x p_x S_x}{r_y S_{1,x}} \cdot \frac{1}{x_0}.$$

Досвід показує, що регулярні війська  $y$  можуть завдати поразки партизанським загонам  $x$  тільки в тому випадку, коли відношення  $y_0/x_0$  значно більше за одиницю.

**Приклад 13.1.** На маленькому, загубленому в океані острові Кука-Марангой живуть племена жужу та чічі, що безперервно ворогують між собою й ведуть одне проти одного непримиренну відкриту війну, в якій беруть участь усі боєздатні особи обох племен, згуртовані в армії, чисельність яких у момент останньої активізації бойових дій була рівною. Визначити, котре з племен перемаже у війні за заволодіння островом Кука-Марангой, якщо коефіцієнти захворюваності для племен жужу та чічі рівні 4 і 2 відповідно, коефіцієнти бойової ефективності – 3 і 1 відповідно (тобто жужу більше хворіють, зате влучніше стріляють), і при цьому віддаленість і важкодоступність острова не

дають можливості для надходжень підмоги до жодної з воюючих сторін, а мала величина й природні характеристики острова не сприяють веденню партизанської війни.

*Розв'язання.* Позначимо через  $x(t)$ ,  $y(t)$  чисельності армій племен жужу та чічі відповідно, а через  $a$  – їх початкову чисельність у момент  $t = 0$  активізації бойових дій.

Застосувавши першу модель Ланчестера, з урахуванням заданих умов для опису воєнного стану на острові Кука-Марангой одержимо задачу Коші для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (СДР) зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - y, \\ \dot{y} = -3x - 2y, \end{cases} \quad (13.14)$$

із початковими умовами

$$x(0) = y(0) = a. \quad (13.15)$$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок СДР (13.14) із застосуванням методу Ейлера.

Система (13.14) задається матрицею  $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ . Власні значення цієї матриці є коренями характеристичного рівняння (ХР)

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -1 \\ -3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0.$$

Звідси  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -5$ .

Щоб знайти фундаментальну систему частинних розв'язків (ФСЧР) СДР (13.14), що відповідає знайденим дійсним однократним кореням ХР, визначимо власні вектори  $h_1 = \text{col}(h_{11}, h_{12}) \neq 0$  та  $h_2 = \text{col}(h_{21}, h_{22}) \neq 0$ , елементи яких вираховуються з рівностей  $(A - \lambda_1 E)h_1 = 0$ ,  $(A - \lambda_2 E)h_2 = 0$ , тобто

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетривіальними розв'язками наведених систем, є, наприклад,  $h_{11} = 1$ ,  $h_{12} = -3$ ;  $h_{21} = h_{22} = 1$ . Отже, за власні вектори можна взяти  $h_1 = \text{col}(1, -3)$ ,  $h_2 = \text{col}(1, 1)$ . Тоді згідно з правилами методу Ейлера відповідна до власних значень  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -5$  ФСЧР системи (1.1) має вигляд

$$\varphi_1(t) = h_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \varphi_2(t) = h_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t},$$

а загальний розв'язок СДР (13.14)  $\text{col}(x, y) = C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t)$ , або у скалярному вигляді

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-5t}, \quad y(t) = -3C_1 e^{-t} + C_2 e^{-5t}.$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі, для визначення яких скористаємося початковими умовами (13.15). Маємо:

$$x(0) \equiv C_1 + C_2 = a, \quad y(0) \equiv -3C_1 + C_2 = a,$$

звідки знаходимо  $C_1 = 0, C_2 = a$ . Отже, чисельності бойових армій племен жужу та чічі в ході бойових дій змінюються згідно з законами

$$x(t) = a e^{-5t}, \quad y(t) = a e^{-5t}.$$

Спрямувавши в отриманому розв'язку задачі Коші (13.14), (13.15)  $t \rightarrow \infty$ , маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,$$

звідки випливає, що переможця в такій війні не буде: це типовий приклад війни «на самознищення», і якщо жужу та чічі продовжать воювати, то це з часом призведе до цілковитого збезлюдіння їх острова.

Наведемо ще кілька цікавих задач на побудову диференціальних моделей, пов'язаних із військовою справою.

**Задача про параболу безпеки.** Знайти обвідну траєкторій снарядів, випущених із гармати зі швидкістю  $v_0$  під різними кутами нахилу ствола гармати до горизонту. Вважати, що гармата знаходиться в початку координат, а траєкторії снарядів проходять у площині  $xy$  (опором повітря знехтувати).

*Розв'язання.* Як було показано в Розділі 6, рух снаряду, запущеного в повітря під кутом  $\alpha$  до горизонтальної поверхні, за нехтування опором повітря описується диференціальною моделлю

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha,$$

звідки після інтегрування одержуємо параметричні рівняння руху снаряду

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - 0,5 g t^2,$$

із яких шляхом виключення змінної  $t$  дістанемо рівняння траєкторії польоту

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (13.16)$$

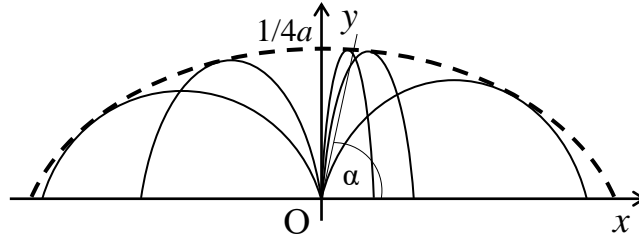
Введемо заради зручності позначення  $\operatorname{tg} \alpha = k, \frac{g}{2 v_0^2} = a$ , тоді з (13.16)

маємо



$$y = kx - ax^2(1 + k^2). \quad (13.17)$$

Це рівняння визначає параболу, обернуту вітками вниз, із вертикальною віссю, що проходить через початок координат. Для різних значень  $k$  отримуємо різні траєкторії. Отже, (13.17) є рівнянням однопараметричної сім'ї парабол, що являють собою траєкторії снаряду за різних кутів  $\alpha$  і заданої початкової швидкості  $v_0$  (мал. 13.1).



Мал. 13.1

Знайдемо обвідну цієї сім'ї парабол. Як відомо з курсу звичайних диференціальних рівнянь, обвідною  $\varphi(x, y) = 0$  сім'ї кривих  $\Phi(x, y, C) = 0$  називається крива, в кожній точці якої має місце дотик із однією з кривих сім'ї; для знаходження обвідної треба виключити параметр  $C$  із системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

і перевірити, чи буде отримана  $C$ -дискримінантна крива обвідною, а не геометричним місцем особливих точок.

Диференціюючи обидві частини рівності (13.17) за параметром  $k$ , маємо

$$x - 2akx^2 = 0. \quad (13.18)$$

Виключивши  $k$  з системи рівнянь (13.17), (13.18), дістанемо

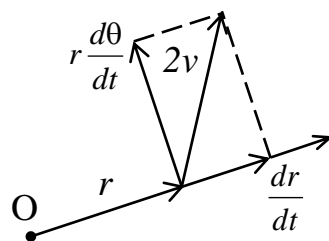
$$y = \frac{1}{4a} - ax^2. \quad (13.19)$$

Це – рівняння параболи з вершиною в точці  $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ , вісь якої співпадає з

віссю ординат. Вона не є геометричним місцем особливих точок, оскільки параболи (13.17) не мають особливих точок. Тому парабола (13.19) є обвідною сім'ї траєкторій. Вона називається *параболою безпеки*, оскільки жодна точка за її межами не є досяжною для снаряду, випущеного з наявної гармати із заданою початковою швидкістю  $v_0$ .

**Задача про криву погоні.** Міноносець полює за підводним човном у густому тумані. У певний момент часу туман здіймається, і субмарина виявляється

поміченою на поверхні води на віддалі 3 милі від міноносця. Швидкість міноносця удвічі більша за швидкість підводного човна. Вимагається визначити траєкторію (криву погоні), по якій має рухатися міноносець, аби він пройшов точно над субмариною, якщо остання одразу ж занурилася після виявлення і відпливла на повній швидкості прямим курсом у невідомому напрямі.



Мал. 13.2

*Розв'язання.* Введемо полярні координати  $r$ ,  $\theta$  таким чином, щоб полюс  $O$  знаходився у точці виявлення субмарини, а полярна вісь  $r$  проходила через точку, в якій у момент виявлення підводного човна знаходився міноносець (мал. 13.2). Подальші міркування ґрунтуються на наступній стратегії. Міноносцю найперше слід зайняти таку позицію, щоб він і підводний човен опинилися на однаковій відстані від полюса  $O$ . Потім міноносець має рухатися навколо полюса  $O$  по такій траєкторії, щоб обидва рухомі об'єкти увесь час знаходилися на однаковій відстані від точки  $O$ . Тільки в цьому випадку міноносець, кружляючи навколо полюса  $O$ , пройде над субмариною.

Таким чином, міноносцеві спочатку слід іти прямим курсом на точку  $O$ , допоки він не опиниться на тій же відстані  $x$  від полюса  $O$ , що й підводний човен. Очевидно, що відстань  $x$  можна знайти або з рівняння

$$\frac{x}{v} = \frac{3-x}{2v},$$

або з рівняння

$$\frac{x}{v} = \frac{3+x}{2v},$$

де  $v$  – швидкість підводного човна, а  $2v$  – швидкість міноносця. З останніх рівнянь отримуємо, що відстань  $x$  дорівнює одній або трьом милям.

Якщо «зустрічі» не відбулося, то міноносець має в подальшому рухатися навколо полюса  $O$  (або за напрямом годинникової стрілки, або проти), віддаляючись від останнього зі швидкістю субмарини  $v$ . Для знаходження траєкторії цього руху («кривої погоні») розкладемо швидкість міноносця  $2v$  на дві складові: радіальну  $v_r$  і тангенціальну  $v_\theta$  (мал. 13.2).

Радіальна складова – це швидкість, із якою міноносець віддаляється від полюса  $O$ , тобто

$$v_r = \frac{dr}{dt}.$$

Тангенціальна складова – це лінійна швидкість обертання міноносця відносно полюса. Вона рівна добутку кутової швидкості  $d\theta/dt$  на радіус  $r$ , тобто

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}.$$

Але, оскільки  $v_r = v$ , то  $v_\theta = \sqrt{(2v)^2 - v^2} = \sqrt{3}v$ . Отже, розв'язання вихідної задачі зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}v,$$

яка у свою чергу шляхом виключення змінної  $t$  може бути зведена до одного рівняння

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{3}},$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$r = C e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}, \quad (13.20)$$

де  $C$  – довільна стала.

Тепер з урахуванням того, що міноносець розпочинає рух навколо полюса  $O$  з полярної осі  $r$  на відстані  $x$  миль від точки  $O$ , тобто  $r=1$  при  $\theta=0$  і  $r=3$  при  $\theta=-\pi$ , на підставі (13.20) отримуємо, що в першому випадку  $C=1$ , а у другому  $C=3e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ .

Таким чином, аби виконати своє завдання, міноносець повинен пройти 2 або 6 миль прямим курсом за напрямом до місця виявлення субмарини, а потім

рухатися або по спіралі  $r = e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}$ , або по спіралі  $r = 3e^{\frac{\theta+\pi}{\sqrt{3}}}$ .

### ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 13

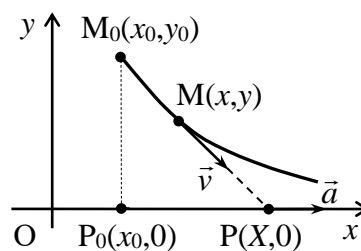
**1.** Дати бойову інтерпретацію та розв'язати наведені задачі Коші, вказавши переможця у кожній моделі бойових дій (вважати, що числові коефіцієнти у рівняннях і початкові умови вимірюються в тисячах осіб):

$$a) \begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y + 4\cos t + \sin t, & x(0) = 10, \\ \dot{y} = -3x - 2y + 7\cos t + 2\sin t, & y(0) = 4; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + 4, & x(0) = 9, \\ \dot{y} = -3x - 3y + 6, & y(0) = 1; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \dot{x} = -2x - 8y + 2e^{-2t}, & x(0) = 18\frac{1}{2}, \\ \dot{y} = -3x - 12y + e^{-2t}, & y(0) = 20. \end{cases}$$

2. Побудувати розв'язки  $x(t)$ ,  $y(t)$  задач Коші з початковими умовами (13.5) для систем а) (13.7), б) (13.9), в) (13.12).

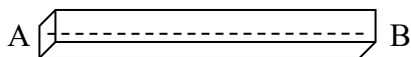
3. На осі  $Ox$  у додатному напрямі рухається зі сталою швидкістю  $a$  точка  $P$ ; водночас на площині  $xu$  рухається точка  $M$  зі сталою швидкістю  $v$  таким чином, що вектор швидкості завжди спрямований у точку  $P$ . Вважаючи, що погоня починається з положення  $M_0P_0$  (див. мал. 13.3), знайти траєкторію руху точки  $M$  («лінію погоні») у випадках: а)  $a < v$  (вказати також абсцису «точки зустрічі» та тривалість погоні); б)  $a = v$ .



Мал. 13.3

## РОЗДІЛ 14 Прогин брусів

Розглянемо горизонтальний брус  $AB$  (мал. 14.1) сталого поперечного перерізу, виготовлений з однорідного матеріалу. Вісь симетрії бруса вказана на мал. 14.1 пунктирною лінією. Припустимо, що під впливом сил, які діють на брус у вертикальній площині, що містить вісь симетрії, брус прогинається (мал. 14.2).

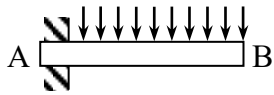


Мал. 14.1

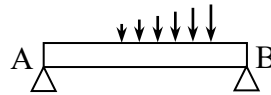


Мал. 14.2

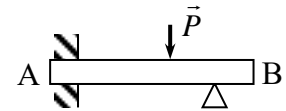
Діючі сили можуть бути обумовлені вагою бруса, прикладеним навантаженням або і тією, й іншою силами разом. Зрозуміло, що під дією сил вісь симетрії бруса вигинатиметься. Як правило, вигнуту (викривлену) вісь симетрії називають *пружною лінією*. Визначення форми цієї лінії грає важливу роль у теорії пружності.



Мал. 14.3

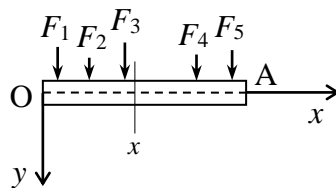


Мал. 14.4

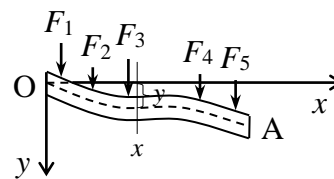


Мал. 14.5

Відзначимо, що існують різні типи брусів залежно від способу їх закріплення чи опори. Наприклад, на мал. 14.3 зображений брус, кінець  $A$  якого жорстко закріплений, а кінець  $B$  вільний. Такий брус називається *консольним*. На мал. 14.4 показаний брус, який вільно лежить на двох опорах  $A$  і  $B$ . Ще один тип брусів із опорами зображений на мал. 14.5. Існують також різні способи прикладення зовнішніх навантажень. Наприклад, на мал. 14.3 показане рівномірно розподілене навантаження. Звичайно, навантаження може бути й змінним уздовж усієї довжини бруса (мал. 14.4). На мал. 14.5 проілюстрований випадок зосередженого навантаження.



Мал. 14.6



Мал. 14.7

Розглянемо горизонтальний брус  $OA$  (мал. 14.6). Нехай його вісь симетрії (на малюнку показана пунктиром) лежить на осі  $x$ , де за додатний напрям вибирається напрям праворуч від точки  $O$ , в яку поміщений початок координат. За додатний напрям на осі  $y$  виберемо напрям униз від точки  $O$ . Під дією зовнішніх сил  $F_i$  ( $i$  ваги бруса, якщо вона є значною), вісь симетрії вигинається в пружну лінію, яка зображена на мал. 14.7 пунктиром. Відхилення (зміщення)  $y$  пружної лінії від осі  $x$  називається *прогином бруса* в положенні  $x$ . Таким чином, якщо відоме рівняння пружної лінії  $y = y(x)$ , то завжди можна вказати і прогин бруса. Функція  $y(x)$  є розв'язком крайової задачі – математичної моделі прогину бруса. Нижче покажемо, як складаються ці математичні моделі.

Позначимо через  $M(x)$  згинний момент у вертикальному поперечному перерізі бруса з координатою  $x$ . Згинний момент визначається як алгебраїчна сума моментів тих сил, які діють з одного боку бруса в положенні  $x$ . При розрахунку моментів вважають, що сили, які діють на брус знизу догори, дають від'ємні моменти, а сили, що діють згори донизу, дають додатні моменти.

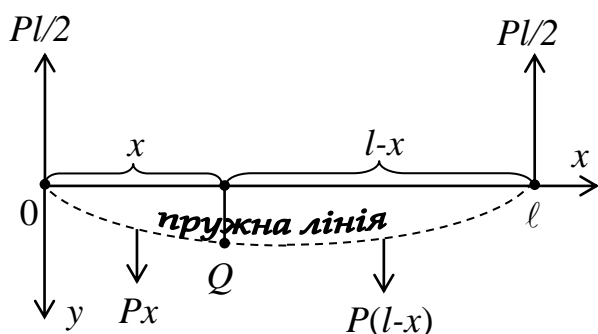
В опорі матеріалів доводиться, що згинний момент  $M(x)$  пов'язаний із радіусом кривини пружної лінії  $R$  співвідношенням

$$M(x) = \frac{EJ}{R} = EJ \frac{y''}{[1 + y'^2]^{3/2}}, \quad (14.1)$$

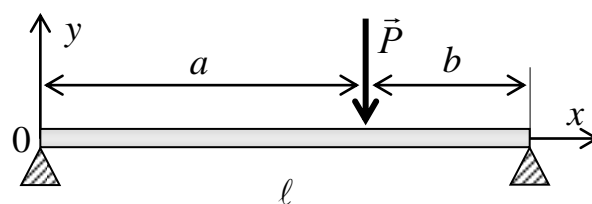
де  $y(x)$  – функція, що описує відхилення точки з абсцисою  $x$  від положення рівноваги (рівняння пружної лінії),  $E$  – модуль пружності Юнга (залежить від матеріалу), а  $J$  – головний момент інерції поперечного перерізу в точці бруса з абсцисою  $x$  відносно горизонтальної прямої, яка проходить через центр ваги цього перерізу (характеризує форму поперечного перерізу). Добуток  $EJ$  називають *жорсткістю згину*.

Якщо припустити, що брус має невеликий прогин (як це часто трапляється на практиці), то кутовий коефіцієнт пружної лінії  $y'(x)$  буде дуже малим, і замість рівняння (14.1) можна розглядати простіше рівняння

$$M(x) = EJy''. \quad (14.2)$$



Мал. 14.8



Мал. 14.9

Залежно від характеру сил, які діють на брус, рівняння (14.2) може набувати різного вигляду. Зокрема, рівняння

$$EJy''(x) = \frac{P}{2}(x^2 - lx)$$

описує прогин однорідного бруса довжини  $l$ , який вільно лежить на двох опорах, під дією власної ваги, рівної  $P$  кгс на одиницю довжини (мал. 14.8). Крайові умови у цьому випадку мають вигляд

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

(на кінцях брус не прогинається).

Рівняння

$$EJy_1''(x) = \frac{Pb}{l}x, \quad x \leq a;$$

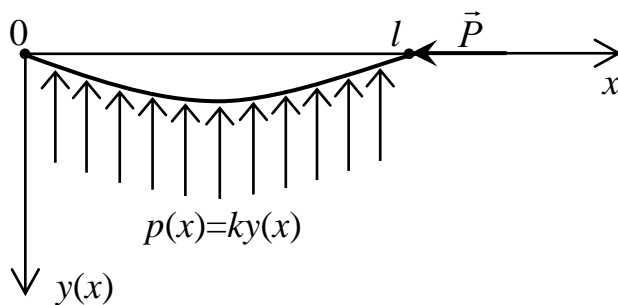
$$EJy_2''(x) = \frac{Pb}{l}x - P(x-a), \quad x \geq a,$$

де  $b = l - a$ , при крайових умовах

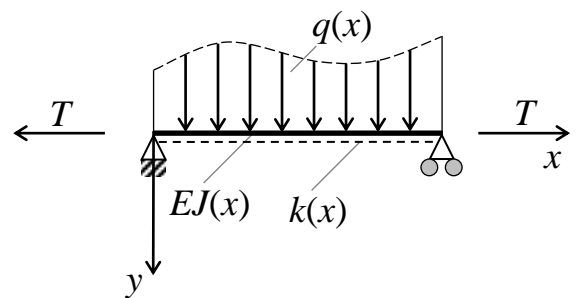
$$y_1(0) = 0, \quad y_2(l) = 0, \quad y_1(a) = y_2(a), \quad y_1'(a) = y_2'(a)$$

описують прогин такого ж бруса, але під дією зосередженого в точці  $a \in (0;l)$  навантаження величини  $P$  (мал. 14.9).

У деяких випадках із рівності 14.2 одержуємо диференціальне рівняння порядку вищого за другий.



Мал. 14.10



Мал. 14.11

Нехай однорідний брус довжини  $l$ , який піддається дії осьової стискувальної сили величини  $P$  (мал. 14.8), лежить на пружній основі (наприклад, залізнична рейка). Приймаємо гіпотезу Вінклера<sup>11</sup> про те, що сила  $p(x)$ , яка діє на одиницю довжини бруса при прогині на величину  $y(x)$ , пропорційна величині прогину, тобто  $p(x) = ky(x)$  (множник  $k$  називається *коефіцієнтом постелі*). Тоді при малому поздовжньому прогині рівняння пружної лінії одержується з (14.2), причому

$$M(x) = -Py(x) - \int_0^x k(x-\xi)y(\xi)d\xi.$$

Отже, у цьому випадку прогин бруса описується диференціально-функціональним рівнянням

$$Py(x) + \int_0^x k(x-\xi)y(\xi)d\xi = -EJy''(x). \quad (14.3)$$

Якщо брус однорідний і сталого перерізу ( $EJ = const$ ), а основа (опора) має сталу жорсткість ( $k = const$ ), то із (14.3) двократним диференціюванням дістанемо лінійне однорідне рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами

<sup>11</sup> Еміль Вінклер (1835-1880) – німецький інженер-будівельник, професор, котрий уперше сформулював і розв'язав задачу про пружний брус на основі, що піддається деформації. Модель бруса на пружній основі, що допускає лінійну залежність між силою і прогином, відома як гіпотеза Вінклера.

$$EJy^{(4)} + Py'' + ky(x) = 0.$$

Якщо ж брус має змінну товщину, тобто  $J = J(x)$ , а опора має змінну жорсткість  $k = k(x)$ , то із (14.3) одержуємо диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$[EJ(x)y'']'' + Py'' + k(x)y(x) = 0.$$

Розглянемо брус змінного перерізу, який лежить на пружній основі змінної жорсткості (мал. 14.11). Його прогин під дією зовнішніх сил описується диференціальним рівнянням четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$[EJ(x)y'']'' - Ty'' + k(x)y(x) = q(x). \quad (14.4)$$

У цьому рівнянні згідно з позначеннями на мал. 14.11:

- ❖ добуток  $EJ(x)$  – жорсткість бруса, де  $E$  – модуль пружності Юнга, а  $J(x)$  – момент інерції поперечного перерізу бруса відносно осі, яка проходить через його центр ваги;
- ❖  $k(x)$  – коефіцієнт постелі пружної основи;
- ❖  $q(x)$  – розподілене по всій довжині бруса навантаження;
- ❖  $T$  – величина осьового розтягу;
- ❖  $y(x)$  – прогин бруса по осі  $y$ .

Очевидно, що рівняння (14.4) є лінійним неоднорідним рівнянням, яке відповідає однорідному рівнянню (14.3), у якому взято  $P = -T$  (маємо розтяг, а не стиск).

Зауважимо, що механічний зміст має не тільки функція  $y(x)$ , яка описує рівняння пружної лінії бруса за прогину, але і її похідні. Зокрема:

- ❖  $\theta(x) = y'(x)$  – кут повороту поперечного перерізу;
- ❖  $M(x) = EJ(x)y''(x)$  – згинний момент для поперечного перерізу;
- ❖  $N(x) = M'(x) = [EJ(x)y''(x)]'$  – поперечна сила, чисельно рівна сумі проєкцій на вісь  $y$  усіх зовнішніх сил, які діють по один бік від перерізу в точці бруса з абсцисою  $x$ .

Для коректності постановки задачі прогину бруса слід також задати крайові умови на кінцях бруса  $x = 0$  та  $x = l$ . Наприклад, якщо кінці бруса шарнірно оперті, то крайові умови матимуть вигляд

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = 0$$

(на кінцях бруса прогин і кривина відсутні).



У будівництві, машинобудуванні, авіатехніці широко застосовуються *тришарові конструкції* (бруси, панелі), які складаються з трьох шарів – двох зовнішніх лицьових пластин і внутрішнього заповнювача між ними.

Тришарова конструкція має певні переваги. Так, тришарові поперечні перерізи є композитними. Вони зазвичай складаються з заповнювача малої чи середньої жорсткості, з'єднаного з двома жорсткими зовнішніми пластинами. Композитний брус («сандвіч-брус») характеризується значно більшим відношенням жорсткості зсуву до ваги, аніж у еквівалентного бруса, виготовленого цілком із матеріалу заповнювача або з матеріалу лицьових пластин. Композит також має значне відношення міцності щодо розриву до ваги. Значна жорсткість лицьових пластин дозволяє отримати високе відношення жорсткості згину до ваги для композиту.

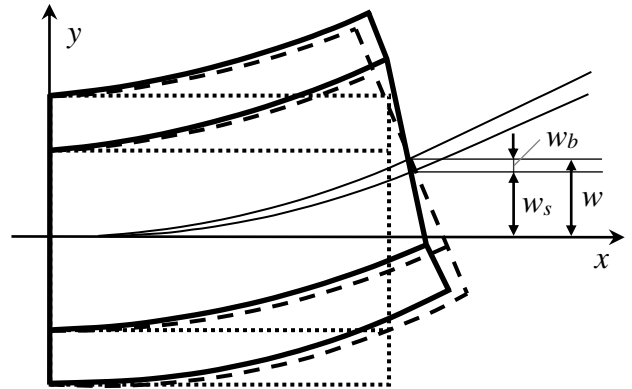
Поведінка бруса з тришаровим поперечним перерізом під дією навантаження відрізняється від бруса зі сталим пружним поперечним перерізом, як показано на мал. 14.12. Якщо радіус кривини при згині малий порівняно з товщиною тришарового бруса, і розтяг у матеріалах його шарів є малим, то в деформації тришарового композитного бруса можна виокремити дві складові: **а)** деформацію, спричинену згинними моментами, або *деформацію згину*, і **б)** деформацію, спричинену поперечними силами, яка має назву *деформації зсуву*.

Нехай тришаровий брус піддається дії згинного моменту  $M$  та зсувної сили  $Q$ . Позначимо загальне відхилення бруса під дією цих навантажень через  $w$ . На мал. 14.12 показано, що при малих зміщеннях загальне відхилення середньої лінії бруса може подаватися у вигляді суми двох відхилень: чистого згинного відхилення  $w_b$  і чистого відхилення зсуву  $w_s$ , тобто

$$w(x) = w_b(x) + w_s(x).$$

У теорії тришарових структур («сандвіч-теорії») з урахуванням оцінок  $Q \approx M'(x)$ ,  $q \approx Q'(x)$ , де  $q$  – інтенсивність прикладеного до бруса навантаження, для опису прогину тришарового бруса отримують рівняння:

$$\begin{aligned} 2d_2s^{-1}w^{(4)} - (1 + 2d_2d_1^{-1})w''(x) &= d_1^{-1}M - s^{-1}q; \\ d_1s^{-1}w_s''' - (1 + 0,5d_1d_2^{-1})w_s'(x) &= -0,5d_1d_2^{-1}s^{-1}Q, \end{aligned} \quad (14.5)$$



Мал. 14.12

де  $d_1$  – жорсткість згину тришарового бруса,  $d_2$  – жорсткість згину у зовнішніх пластинах,  $s$  – жорсткість зсуву тришарового бруса, яка рівна жорсткості зсуву заповнювача (внутрішнього шару).

Розглянемо тришаровий брус сталого перерізу, рівномірно навантажений по всій довжині  $[0;l]$ . У цьому випадку із (14.5) для деформації зсуву  $y(x)$  отримаємо рівняння вигляду

$$y''' - k^2 y' + a = 0, \quad (14.6)$$

де  $k^2$ ,  $a$  – фізичні параметри, що характеризують пружні властивості шарів. Очевидно, що за змінного навантаження рівняння (14.6) набуде вигляду

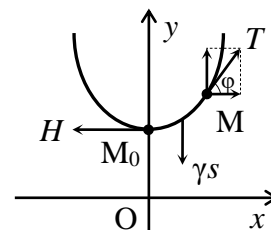
$$y''' - k^2 y' = f(x).$$

Для коректності постановки задачі необхідно задати крайові умови на кінцях сандвіч-бруса. Наприклад, якщо кінці бруса вільні, тобто момент сил у точках  $x=0$  та  $x=l$  рівний нулеві, то матимемо  $y'(0) = y'(l) = 0$ , а з умови симетрії одержимо третю крайову умову:  $y(0,5l) = 0$ .

Наостанок розглянемо одну класичну задачу на прогин при підвісі.

**Приклад 14.1.** Гнучка однорідна нитка підвішена за два кінці. Знайти рівняння кривої, по якій розміститься нитка під дією власної ваги (так розміщуються підвішені канати, дроти, ланцюги).

*Розв'язання.* Нехай  $M_0(0;b)$  – найнижча точка нитки, а  $M(x, y)$  її довільна точка. Розглянемо відрізок нитки  $M_0M$ . Ця частина знаходиться в рівновазі під дією трьох сил (мал. 14.13):



Мал. 14.13

1) натягу  $T$ , який діє по дотичній у точці  $M$  і утворює з віссю  $Ox$  кут  $\varphi$ ;

2) натягу  $H$  у точці  $M_0$ , який діє горизонтально (дотична паралельна осі  $Ox$ );

3) ваги нитки  $\gamma s$ , напрямленої вертикально донизу, де  $s$  – довжина дуги  $M_0M$ ,  $\gamma$  – лінійна густина (питома вага) нитки.

Розкладаючи натяг  $T$  на горизонтальну й вертикальну складові, отримаємо рівняння рівноваги:

$$T \cos \varphi = H, \quad T \sin \varphi = \gamma s,$$

звідки  $\operatorname{tg} \varphi = H^{-1} \gamma s$ . З іншого боку, якщо  $y = y(x)$  – рівняння шуканої кривої, то з огляду на геометричний зміст похідної маємо  $y'(x) = \operatorname{tg} \varphi$ , а отже,  $y' = a^{-1} s$ , де  $a = \gamma^{-1} H$ . Продиференціювавши отриману рівність за змінною  $x$  і врахувавши, що  $ds/dx = \sqrt{1 + y'^2}$ , дістанемо диференціальне рівняння шуканої кривої

$$y'' = a^{-1} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (14.7)$$

Зінтегрувавши рівняння (14.7), знайдемо його загальний розв'язок

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2. \quad (14.8)$$

Графіки всіх отриманих таким чином функцій називають *ланцюговими лініями*.

Із початкових умов  $y(0) = b$ ,  $y'(0) = 0$  маємо  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = b - a$ . Підклавши ці значення в (14.8), дістанемо рівняння шуканої ланцюгової лінії

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + b - a.$$

Це рівняння набуває особливо простого вигляду, якщо ординату точки  $M_0$  узяти рівною  $a$ . Тоді рівняння ланцюгової лінії (14.8) буде  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ .

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 14

**1.** Навантажений тришаровий брус сталого перерізу із вільними кінцями описується диференціальним рівнянням  $y''' - k^2 y'(x) = f(x)$ . Визначити деформацію зсуву бруса за крайової умови  $y(0,5l) = 0$ , де  $l$  – довжина бруса, у наступних випадках: **a)**  $l = 2$ ,  $k = 1$ ,  $f(x) = 4$ ; **б)**  $l = \pi$ ,  $k = \frac{1}{2}$ ,  $f(x) = 5 \sin x$ ; **в)**  $l = \frac{1}{2}$ ,  $k = 2$ ,  $f(x) = 16e^{-2x}$ .

**2.** Навантажений однорідний брус довжини  $l$ , що лежить на пружній основі, описується диференціальним рівнянням  $y^{(4)} + ay'' + ky(x) = f(x)$ . Визначити прогин бруса, якщо його кінці шарнірно оперті (тобто на кінцях прогин і кривина відсутні), у наступних випадках: **a)**  $l = \sqrt{2}$ ,  $a = 2$ ,  $k = 1$ ,  $f(x) = x/\sqrt{2}$ ; **б)**  $l = 1$ ,  $a = -5$ ,  $k = 4$ ,  $f(x) = 11,25e^{-x/2}$ ; **в)**  $l = \frac{1}{2}$ ,  $a = -2$ ,  $k = 1$ ,  $f(x) = 2$ .

**3.** Знайти прогин однорідного горизонтального консольного бруса довжини  $l$ , закріпленого на кінці  $x = 0$ , під дією **a)** зосередженої сили  $P = \text{const}$ , прикладеної до вільного кінця бруса; **б)** рівномірно розподіленого по всій довжині бруса навантаження  $P = \text{const}$ .

**4.** Знайти прогин однорідного двоопорного бруса довжини  $l$ , опертого на кінцях  $x = 0$  і  $x = l$ , під дією **a)** зосередженої сили  $P = \text{const}$ , прикладеної до середини бруса; **б)** рівномірно розподіленого по всій довжині бруса навантаження  $P = \text{const}$ .

**5.** Циліндричний резервуар для зберігання рідини висоти  $H$ , товщина стінок  $d$  якого мала в порівнянні з середнім радіусом циліндра  $R$ , а меридіональ-

ний перетин стінки – прямокутник, піддається силовій дії тиску рідини. Знайти закон деформації стінок резервуару. *Вказівка:* функція  $y(x)$ , яка визначає зміщення точок стінки в радіальному напрямі (деформацію) на висоті  $x$ , є розв'язком крайової задачі для диференціального рівняння  $y^{(4)} + 4\alpha^4 y(x) = m^4 x$ , де сталі  $\alpha^4 = \frac{3}{R^2 d^2}$ ,  $m^4 = \frac{12\gamma}{Ed^3}$  ( $E$  – модуль пружності стінок,  $\gamma$  – питома вага рідини), із крайовими умовами  $y(0) = y(H) = y'(0) = y'(H) = 0$  (за припущення, що донце резервуару не деформується).

## РОЗДІЛ 15

### Спектральні задачі

Нехай  $L$  – лінійний диференціальний оператор, породжений лінійним диференціальним виразом

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^n p_k(x) y^{(n-k)}(x), \quad x \in (a, b)$$

та лінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} (\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b)) = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Розглянемо операторне рівняння з дійсним параметром  $\lambda = const$

$$Ly = \lambda y, \tag{15.1}$$

еквівалентне крайовій задачі

$$\ell_n(y) = \lambda y(x), \quad x \in (a, b); \tag{15.2}$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{15.3}$$

Рівняння (15.1) при різних значеннях параметра  $\lambda$  може мати чи не мати нетривіальні розв'язки  $y(x) \neq 0$ .

**Означення 15.1.** Ті значення параметра  $\lambda$ , при яких операторне рівняння (15.1) має нетривіальні розв'язки, називаються *власними значеннями* оператора  $L$ , а відповідні нетривіальні розв'язки називаються *власними функціями*.

**Означення 15.2.** Уся множина власних значень називається *спектром* оператора  $L$ . Тому крайову задачу (15.2), (15.3), а також подібні до неї задачі знаходження власних значень і власних функцій часто називають *спектральними задачами*.

Нехай  $p_k(x) \in C_{(a,b)}$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Тоді для довільного фіксованого значення  $\lambda$  рівняння (15.1), а отже, і крайова задача (15.2), (15.3), має не більш ніж  $n$  лінійно незалежних розв'язків.

**Означення 15.3.** Максимальна кількість лінійно незалежних власних функцій, які відповідають одному й тому ж власному значенню, називається *кратністю* цього власного значення. Кратність довільного власного значення не може перевищувати порядку диференціального рівняння (15.2).

**Означення 15.4.** Спектр оператора  $L$  називається *дискретним*, якщо всі його власні значення однократні, тобто кожному власному значенню відповідає єдина лінійно незалежна власна функція.

Позначимо через  $y_i(\lambda, x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned} \ell_n(y_i) &= \lambda y_i(x), \quad x > a; \\ y_i^{(s)}(a) &= \begin{cases} 1, & i = s + 1; \\ 0, & i \neq s + 1, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Очевидно, що наведені задачі Коші мають розв'язки і ці розв'язки єдині; а система функцій  $\{y_i(\lambda, x)\}$  є лінійно незалежною. Тоді функція

$$y(\lambda, x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(\lambda, x), \quad (15.4)$$

де  $C_i$  – довільні сталі, буде загальним розв'язком рівняння (15.2). Для існування власних значень необхідно, щоб із (15.4) можна було вибрати нетривіальний розв'язок, який справджував би крайові умови (15.2), тобто щоб існував нетривіальний розв'язок системи

$$\sum_{i=1}^n C_i U_j(y_i) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (15.5)$$

Мають силу наступні критерії:

**1)** якщо  $m < n$ , то система (15.5), а отже, й крайова задача (15.2), (15.3) має нетривіальні розв'язки при будь-яких значеннях параметра  $\lambda$ ;

**2)** якщо  $m = n$ , то нетривіальні розв'язки існують тоді й тільки тоді, коли детермінант матриці системи (15.5) рівний нулеві:

$$\Delta(\lambda) \equiv \det \|U_j(y_i)\| = 0. \quad (15.6)$$

У цьому випадку рівняння (15.6) називається *характеристичним*, а нулі функції  $\Delta(\lambda)$  – тобто ті значення параметра  $\lambda$ , котрі справджують рівність (15.6) – є власними значеннями крайової задачі (15.2), (15.3). Кратність власного значення не може перевищувати кратності відповідного кореня характеристичного рівняння;

3) якщо  $m > n$ , то система (15.5) має нетривіальні розв'язки, коли ранг її матриці менший за  $n$ , тобто всі мінори  $n$ -го порядку рівні нулеві. Тут можливі два випадки:

а) усі мінори  $n$ -го порядку тотожно рівні нулеві при довільних значеннях параметра  $\lambda$  – тоді будь-яке значення  $\lambda$  буде власним;

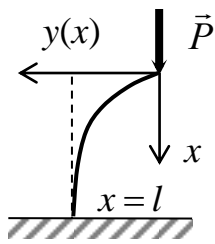
б) серед мінорів  $n$ -го порядку є не рівні тотожно нулеві – тоді власними значеннями крайової задачі (15.2), (15.3) будуть ті значення параметра  $\lambda$ , при яких усі мінори  $n$ -го порядку перетворюються в нуль, а відповідні їм нетривіальні розв'язки будуть власними функціями.

Зауважимо, що аналогічні критерії мають силу і для загальної спектральної задачі вигляду

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^n p_k(\lambda, x) y^{(n-k)}(x) = 0, \quad x \in (a, b);$$

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} [\alpha_{s,j}(\lambda) y^{(s)}(a) + \beta_{s,j}(\lambda) y^{(s)}(b)] = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

де коефіцієнти  $p_k(\lambda, x)$ ,  $\alpha_{s,j}(\lambda)$ ,  $\beta_{s,j}(\lambda)$  є неперервними функціями параметра  $\lambda$ , а за змінною  $x$  коефіцієнти  $p_k(\lambda, x) \in C_{(a,b)}$ , причому  $p_0(\lambda, x) \neq 0$ .



Мал. 15.1

**Приклад 15.1.** Дано тонкий однорідний стрижень довжини  $l$ , нерухомо закріплений на одному з кінців. На вільний кінець стрижня діє стискувальна сила  $P$ . Завдання: визначити ту величину сили  $P$ , при якій стрижень губить прямолінійну форму.

*Розв'язання.* Функція  $y(x)$ , яка описує форму зігнутого стрижня (мал. 15.1), є розв'язком диференціального рівняння

$$Py(x) = -EJy'', \quad (15.7)$$

де  $J$  – осьовий момент інерції поперечного перерізу стрижня,  $E$  – модуль пружності Юнга. Вважаємо, що стрижень однорідний і сталого перерізу: тоді  $EJ = const$ . Позначимо  $\lambda^2 = P(EJ)^{-1} \geq 0$ , тоді з (15.7) одержимо диференціальне рівняння  $y'' = -\lambda^2 y(x)$ .

Із мал. 15.1 видно, що верхній кінець стрижня  $x = 0$  у вибраній системі координат не зміщується, тобто  $y(0) = 0$ , а в нижньому закріпленому кінці дотичні до профілю стрижня завжди паралельні до осі  $Ox$ , тобто  $y'(l) = 0$ . У підсумку одержуємо наступну спектральну задачу:

$$y'' = -\lambda^2 y(x), \quad x \in (0, l); \quad (15.8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \quad (15.9)$$

При  $\lambda = 0$  загальний розв'язок рівняння (15.8) має вигляд  $y(x) = C_1x + C_2$ . Із крайових умов (15.9) одержимо:  $C_1 = C_2 = 0$ , тобто задача має тільки тривіальний розв'язок. Отже,  $\lambda = 0$  не буде власним значенням. Зауважимо, що з фізичної точки зору цей факт є очевидним, оскільки  $\lambda = 0$  означає, що стрижень не піддається дії сили, а отже займає прямолінійне положення.

Нехай  $\lambda \neq 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (15.8) матиме вигляд  $y(x) = C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x$ . Із крайових умов (15.9) одержимо систему:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ \lambda(-C_3 \sin \lambda l + C_4 \cos \lambda l) = 0. \end{cases}$$

Маємо випадок  $m = n = 2$ , тому для визначення власних значень потрібно знайти ненульові (адже  $\lambda \neq 0$ ) корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda \sin \lambda l & \lambda \cos \lambda l \end{vmatrix} \equiv \lambda \cos \lambda l = 0.$$

Звідси одержуємо множину власних значень

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

а відповідні власні функції матимуть вигляд

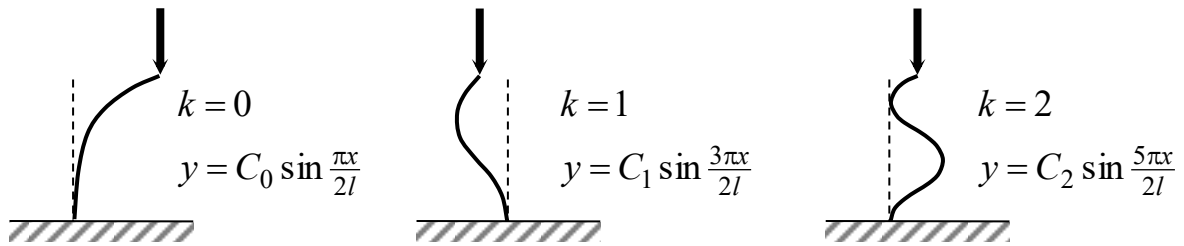
$$y_k(x) = C_k \sin \frac{\pi(2k+1)}{2l} x, \quad C_k = \text{const.}$$

Бачимо, що власні функції визначаються з точністю до сталого множника. Це означає, що спектр досліджуваної задачі є дискретним, тобто кожному власному значенню відповідає лише одна лінійно незалежна власна функція.

Оскільки власні значення відомі, то можна знайти і значення критичної сили:

$$P_k = EJ\lambda_k^2 = \frac{\pi^2(2k+1)^2}{4l^2} EJ, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

На мал. 15.2 подані профілі стрижня під дією критичної сили для деяких значень  $k$  у випадку  $C_k > 0$ . Якщо  $C_k < 0$ , то відповідний графік буде симетричним відносно вертикальної осі, яка проходить через закріплений кінець стрижня (на малюнках зображена пунктирною лінією).



Мал. 15.2

Слід відзначити: якщо стрижень неоднорідний або змінної товщини, то жорсткість згину  $EJ$  буде функцією координати і задача значно ускладниться.

Зауважимо, що не всяка спектральна задача має розв'язок, або ж її спектр є дискретним.

**Приклад 15.2.** Дослідити спектральну задачу:

$$y'' = -\lambda y(x), \quad x \in (0,1); \quad (15.10)$$

$$y(0) - y(1) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0. \quad (15.11)$$

*Розв'язання.* Залежно від знаку параметра  $\lambda$  загальний розв'язок рівняння (15.10) матиме різний вигляд. Тому для повного дослідження необхідно розглянути три можливі випадки.

Нехай  $\lambda < 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (15.10) матиме вигляд  $y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ . Із крайових умов (15.11) одержимо систему:

$$\begin{cases} C_1(1 - e^{\sqrt{-\lambda}}) + C_2(1 - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0; \\ C_1\sqrt{-\lambda}(1 - e^{\sqrt{-\lambda}}) - C_2\sqrt{-\lambda}(1 - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{\sqrt{-\lambda}} & 1 - e^{-\sqrt{-\lambda}} \\ \sqrt{-\lambda}(1 - e^{\sqrt{-\lambda}}) & \sqrt{-\lambda}(e^{-\sqrt{-\lambda}} - 1) \end{vmatrix} \equiv 4\sqrt{-\lambda}(\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda} - 1) = 0$$

не має від'ємних коренів. Отже,  $C_1 = C_2 = 0$ , тобто крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, а тому при  $\lambda < 0$  власних значень не існує.

Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (15.10) матиме вигляд  $y(x) = C_3x + C_4$ . Ця функція справджує крайові умови (15.11) при довільному значенні  $C_4$ , якщо тільки  $C_3 = 0$ . Отже,  $\lambda = 0$  буде власним значенням, якому відповідатиме власна функція  $y(x) = C_4 \neq 0$ .

Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (15.10) матиме вигляд  $y(x) = C_5 \cos \sqrt{\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{\lambda}x$ . Із крайових умов (15.11) одержимо систему:



$$\begin{cases} C_5(\cos\sqrt{\lambda} - 1) + C_6 \sin\sqrt{\lambda} = 0; \\ C_5\sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} - C_6\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1) = 0. \end{cases} \quad (15.12)$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda} - 1 & \sin\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}(1 - \cos\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} \equiv 2\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1) = 0$$

має додатні корені вигляду  $\lambda_k = 4\pi^2 k^2$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , які й будуть шуканими власними значеннями. Для цих значень обидва рівняння системи (15.12) перетворюються в тотожності, тому відповідні власні функції запишуться у вигляді  $y_k(x) = C_5 \cos 2\pi kx + C_6 \sin 2\pi kx$ . Це означає, що кожному додатному власному значенню відповідатимуть дві лінійно незалежні власні функції, тобто спектр у випадку крайової задачі (15.10), (15.11) не є дискретним.

Об'єднавши випадки  $\lambda = 0$  і  $\lambda > 0$ , можна записати всю множину власних значень і власних функцій крайової задачі (15.10), (15.11):

$$\lambda_k = 4\pi^2 k^2, \quad y_k(x) = A_k \cos 2\pi kx + B_k \sin 2\pi kx, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Тут  $A_k, B_k$  – довільні сталі, причому  $A_0 \neq 0$ ,  $A_k^2 + B_k^2 \neq 0$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ .

**Приклад 15.3.** Дослідити спектральну задачу:

$$y^{(4)} = -\lambda y''(x), \quad x \in (0,1); \quad (15.13)$$

$$y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0. \quad (15.14)$$

*Розв'язання.* Як і в попередньому прикладі, для повного дослідження необхідно розглянути три можливі випадки.

Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (15.13) має вигляд  $y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$ . Із крайових умов (15.14) одержимо систему:

$$\begin{cases} 2C_2 = 0; \\ 6C_1 = 0; \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0; \\ 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ , тобто крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, а тому  $\lambda = 0$  не є власним значенням.

Нехай  $\lambda < 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (15.13) має вигляд  $y(x) = C_5 + C_6 x + C_7 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_8 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ . Із крайових умов (15.14) одержимо систему:

$$\begin{cases} -\lambda(C_7 + C_8) = 0; \\ -\lambda\sqrt{-\lambda}(C_7 - C_8) = 0; \\ C_5 + C_6 + C_7 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_8 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0; \\ C_6 + \sqrt{-\lambda}(C_7 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_8 e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0, \end{cases}$$

звідки при від'ємних  $\lambda$   $C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0$ , тобто крайова задача знову має тільки тривіальний розв'язок. Отже, при  $\lambda < 0$  власних значень не існує.

Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (15.13) має вигляд  $y(x) = C_9 + C_{10}x + C_{11} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{12} \sin \sqrt{\lambda}x$ . Із крайових умов (15.14) одержимо систему:

$$\begin{cases} -\lambda C_{11} = 0; \\ -\lambda\sqrt{\lambda}C_{12} = 0; \\ C_9 + C_{10} + C_{11} \cos \sqrt{\lambda} + C_{12} \sin \sqrt{\lambda} = 0; \\ C_{10} - \sqrt{\lambda}(C_{11} \sin \sqrt{\lambda} - C_{12} \cos \sqrt{\lambda}) = 0, \end{cases}$$

звідки при додатних  $\lambda$   $C_9 = C_{10} = C_{11} = C_{12} = 0$ , тобто крайова задача знову має тільки тривіальний розв'язок. Тому при  $\lambda > 0$  власних значень також не існує.

Отже, крайова задача (15.13), (15.14) взагалі не має нетривіальних розв'язків.

**Означення 15.5.** Задачею Штурма-Ліувілля (ЗШЛ) називається спектральна задача  $Ly = -\lambda\rho(x)y$  вигляду

$$\begin{aligned} [p(x)y']' - q(x)y + \lambda\rho(x)y &= 0, \quad y = y(x), \quad x \in (a,b); \\ A_0y(a) + B_0y'(a) &= 0, \quad A_1y(b) + B_1y'(b) = 0, \end{aligned} \quad (15.15)$$

де  $p(x) \in C_{(a,b)}^1$ ,  $q(x), \rho(x), f(x) \in C_{(a,b)}$ , причому  $p(x) > p_0 > 0$ ,  $\rho(x) > \rho_0 > 0$ .

Наведемо основні властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (15.15).

**1.** Усі власні значення ЗШЛ (15.15) є дійсними й утворюють зростаючу послідовність чисел  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ , яка прямує до нескінченості при  $n \rightarrow \infty$ .

**2.** Спектр ЗШЛ (15.15) є дискретним, тобто кожному власному значенню відповідає одна лінійно незалежна власна функція.

**3.** Якщо  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – два різні власні значення ЗШЛ (15.15), то відповідні власні функції  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  ортогональні з вагою  $\rho(x)$  на проміжку  $[a,b]$ .

**4.** Якщо в задачі (15.15) коефіцієнти рівняння  $p(x)$  і  $q(x)$  замінити на  $\tilde{p}(x) \geq p(x)$  і  $\tilde{q}(x) \geq q(x)$ , то власні значення не зменшаться (тобто  $\tilde{\lambda}_n \geq \lambda_n$ );

якщо ж замінити коефіцієнт  $\rho(x)$  на  $\tilde{\rho}(x) \geq \rho(x)$ , то  $\tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n$  (власні значення не збільшаться). При цьому власні значення  $\lambda_n$  ЗШЛ (15.15) неперервно залежать від коефіцієнтів рівняння.

**5.** При зменшенні довжини відрізка  $[a,b]$  власні значення ЗШЛ (15.15) не зменшуються, а при збільшенні відповідно – не збільшуються.

**6.** Власна функція  $y_n(x)$  ЗШЛ (15.15), яка відповідає власному значенню  $\lambda_n$  ( $n=0,1,2,\dots$ ), має рівно  $n$  нулів на інтервалі  $(a,b)$ .

**7.** Якщо функція  $g(x) \in C^1_{[a,b]}$  і справджує крайові умови задачі (15.15), то її можна розкласти в ряд Фур'є за системою власних функцій  $\{y_n(x)\}$  ЗШЛ (15.15):

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_n(x), \quad \text{де} \quad \alpha_n = \frac{\int_a^b g(x) \rho(x) y_n(x) dx}{\int_a^b \rho(x) y_n^2(x) dx} -$$

коефіцієнти Фур'є, причому цей ряд збігається абсолютно й рівномірно до функції  $g(x)$  на відрізку  $[a,b]$ .

**8.** Для будь-якої функції  $g(x) \in C^1_{[a,b]}$ , яка справджує крайові умови задачі (15.15), виконується нерівність

$$\lambda_0 < -\frac{1}{\rho_0} \frac{(Lg, g)}{(g, g)},$$

яка має назву *принципу Релея* для задачі Штурма-Ліувілля (15.15).

Задачі типу (15.15) часто виникають при застосуванні методу Фур'є до розв'язування задач математичної фізики. При цьому крайові умови можуть набувати вигляду, відмінного від наведених в означенні, наприклад,

$$y(a) = y(b), \quad p(a)y'(a) = p(b)y'(b). \quad (15.16)$$

Умови (15.16) у випадку  $p(a)=p(b)$  можна розглядати як умови періодичності. Зауважимо, що для ЗШЛ з крайовими умовами вигляду (15.16) мають силу всі наведені вище властивості, окрім пункту **2.** (тобто спектр задачі не обов'язково буде дискретним).

**Приклад 15.4.** Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини  $l$  із нерухомо закріпленими кінцями  $x=0$  та  $x=l$ , якщо початкове відхилення точок струни описується функцією  $\varphi(x) = ql^{-2}x(l-x)$ ,  $q = \text{const} \neq 0$ , а їх початкова швидкість рівна нулеві.

*Розв'язання.* Із курсу рівнянь математичної фізики відомо, що вільні коливання однорідної струни описуються рівнянням із частинними похідними другого порядку

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (15.16)$$

де невідома функція  $u(t, x)$  визначає відхилення точки струни з абсцисою  $x$  у момент часу  $t$ , а  $a^2 = \frac{P}{\rho}$ , де  $P$  величина сили натягу,  $\rho$  – маса одиниці довжини струни. Згідно з умовою задачі потрібно знайти нетривіальний розв’язок  $u = u(t, x)$  рівняння (15.16), який справджує крайові умови на кінцях  $x=0$  та  $x=l$

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad (15.17)$$

а також початкові умови в момент часу  $t = 0$

$$u(0, x) = \varphi(x) = ql^{-2}x(l-x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) = 0. \quad (15.18)$$

Зауважимо, що умови (15.17) та (15.18) є узгодженими, оскільки

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0,$$

тобто задача поставлена коректно. Розв’язок шукатимемо методом відокремлення змінних (методом Фур’є) у вигляді

$$u(t, x) = X(x)T(t). \quad (15.19)$$

Підставивши (15.19) у ДРЧП (15.16) і відокремивши змінні, отримаємо рівності вигляду

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda, \quad (15.20)$$

де  $\lambda$  стала (це впливає з того, що ліва частина є функцією лише змінної  $x$ , а права лише змінної  $t$ ), яка може набувати довільних дійсних значень. Оскільки з крайових умов (15.17)  $X(0) = 0$ ,  $X(l) = 0$ , тому з урахуванням (15.20) дістанемо задачу Штурма-Ліувілля

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad (15.21)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (15.22)$$

та рівняння

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0. \quad (15.23)$$

Досліджуючи ЗШЛ (15.21), (15.22) аналогічно до Прикладу 15.2, переконуємося, що у випадках  $\lambda > 0$  та  $\lambda = 0$  крайова задача має тільки тривіальний розв’язок, а отже, власних значень не існує.

Якщо  $\lambda < 0$ , то загальний розв’язок рівняння (15.21) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{-\lambda}x,$$

і на підставі крайових умов отримуємо систему

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 = 0, \\ C_2 \sin \sqrt{-\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи  $C_1 = 0$ , а з другого  $\sin \sqrt{-\lambda}l = 0$ ,  $\sqrt{-\lambda}l = n\pi$ ,  $n \in N$  ( $C_2 \neq 0$ , бо в протилежному випадку одержується тривіальний розв'язок). Отже, система власних значень і власних функцій ЗШЛ (15.21), (15.22)

$$\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n \in N. \quad (15.24)$$

За знайдених власних значень для кожного  $n \in N$  загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (15.23) запишеться у вигляді

$$T_n(t) = \bar{c}_1 \cos\left(\frac{n\pi}{l}at\right) + \bar{c}_2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}at\right).$$

Тоді на підставі (15.19) для кожного  $n \in N$  можемо виписати відповідний частинний розв'язок ДРЧП (15.16), який справджує крайові умови (15.17):

$$\begin{aligned} u_n(t, x) &= c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[ \bar{c}_1 \cos\left(\frac{n\pi}{l}at\right) + \bar{c}_2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}at\right) \right] = \\ &= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[ \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}at\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}at\right) \right] \end{aligned} \quad (15.25)$$

Із лінійності й однорідності ДРЧП (15.16) і крайових умов (15.17) випливає, що лінійна комбінація частинних розв'язків (15.25)

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[ \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}at\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}at\right) \right] \quad (15.26)$$

також буде розв'язком ДРЧП (15.16), який справджує крайові умови (15.17) – за припущення, що ряд у правій частині збігається і його можна почленно диференціювати двічі за  $t$  і за  $x$  (це можна показати для достатньо гладких початкових функцій  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$ ).

Виберемо в (15.26) довільні сталі  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  таким чином, аби задовольнити початкові умови (15.18):

$$\begin{cases} u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \varphi(x) = ql^{-2}x(l-x), \\ u_t(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{n\pi}{l}a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \psi(x) = 0. \end{cases} \quad (15.27)$$

Із теорії рядів Фур'є відомо, що непарну функцію  $f(x)$ , визначену на інтервалі  $(-l, l)$ , можна розкласти в синус-ряд Фур'є вигляду

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin\left(\frac{j\pi}{l}x\right), \quad b_j = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{j\pi}{l}x\right) dx.$$

Застосувавши ці розклади в рівностях (15.27), бачимо, що коефіцієнти  $\alpha_n$  і  $\beta_n$  можна виразити через коефіцієнти Фур'є функцій  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$ , продовжених непарним чином на інтервал  $(-l, 0)$ :

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \quad \beta_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx.$$

Після обчислення інтегралів одержимо значення коефіцієнтів:

$$\alpha_n = \frac{2q}{l^3} \int_0^l x(l-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{-4q}{n^3 \pi^3} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{8q}{n^3 \pi^3}, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k \in N;$$

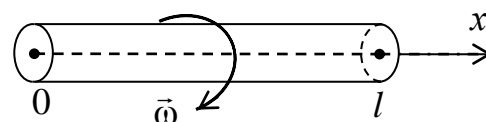
$$\beta_n = 0, \quad n \in N.$$

Підклавши знайдені коефіцієнти в ряд (15.26), одержимо шуканий закон вільних коливань однорідної струни

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8q}{(2k-1)^3 \pi^3} \cos\left[\frac{(2k-1)\pi t}{l}\right] \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right].$$

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 15

**1.** Знайти формулу критичних швидкостей тонкого валу довжини  $l$ , який обертається навколо осі (мал. 15.3), якщо модуль пружності матеріалу рівний  $E$ , а поперечний переріз валу є круг радіуса  $a$ . *Вказівка:* знайти власні значення і власні функції спектральної задачі



Мал. 15.3

$$y^{(4)} - \lambda^4 y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = 0,$$

де  $\lambda^4 = \frac{4\omega^2}{Ea^2}$ ,  $\omega$  – кутова швидкість обертання валу.

**2.** Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини  $l$ , лівий кінець якої  $x=0$  нерухомо закріплений, а правий  $x=l$  вільний, якщо коливання відбуваються тільки за рахунок початкової швидкості точок струни, рівної  $\psi(x) = 49 \sin \frac{7\pi}{2l} x$ .

**3.** Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стрижні однорідної довжини з теплоізолюваними кінцями та бічною поверхнею, якщо початкова температура точок стрижня описується функцією  $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2$ . *Вказівка.* Рівняння поширення тепла в однорідному ізотропному стрижні з теплоізолюваною бічною поверхнею має вигляд  $u_t = a^2 u_{xx}$ , де невідома функ-

ція  $u(t, x)$  визначає температуру точки стрижня з абсцисою  $x$  у момент часу  $t$ , а  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ , де  $k$  – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності,  $c$  – питома теплоємність,  $\rho$  – густина стрижня.

4. В однорідному ізотропному стрижні довжини  $l$  лівий кінець  $x=0$  і бічна поверхня теплоізовані, а правий кінець  $x=l$  підтримується при нульовій температурі. Початкова температура стрижня рівна  $\varphi(x) = b \cos \frac{3\pi}{2l} x$ . Знайти розподіл температури у стрижні при  $t > 0$ .

5. Дослідити спектральні задачі, вважаючи параметр  $\lambda$  дійсним:

а)  $y'' = -\lambda^2 y(x), \quad x \in (0,1);$   
 $y(0) = 0, \quad y(1) = P(\lambda)y'(1),$   $P(\lambda)$  – деякий многочлен, залежний від параметра.

б)  $y'' + \lambda y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$   
 $y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$       в)  $y'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$   
 $y'(0) + y(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0.$

г)  $2y'' - 8y' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$   
 $y'(0) - 2y(0) = 0, \quad y'(1) - 2y(1) = 0.$

д)  $y''' + \lambda y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi/6);$   
 $y(0) = y'(0) = 0, \quad y'(\pi/6) = 0.$       е)  $y''' + \lambda y'' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$   
 $y(0) = y''(0) = 0, \quad y''(1) = 0.$

є)  $y^{(4)} - \lambda^4 y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (-1;1);$   
 $y(-1) = y(1), \quad y'(-1) = y'(1), \quad y''(-1) = y''(1), \quad y'''(-1) = y'''(1).$

ж)  $y^{(4)} - \lambda^4 y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (-1;1);$   
 $y(-1) = -y(1), \quad y'(-1) = -y'(1), \quad y''(-1) = -y''(1), \quad y'''(-1) = -y'''(1).$

з)  $y^{(4)} - \lambda^3 y'(x) = 0, \quad x \in (0;1);$   
 $y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$       и)  $y^{(4)} = -\lambda y''(x), \quad x \in (0;1);$   
 $y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0.$

6. Дослідити задачі Штурма-Ліувілля:

а)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2\pi);$   
 $y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0.$       б)  $y'' - \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$   
 $y'(0) = y(0), \quad y(1) = 0.$

в)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2\pi);$   
 $y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

e)  $x^2 y'' + 2xy' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (1;2);$   
 $y(1) = 0, \quad y(2) = 0.$



## ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

### РОЗДІЛ 1

- $y = a + Cx$ .
- $(C \pm x)y = a^2$ .
- $b \ln y - y = C \pm x, 0 < y < b$ .
- $y = Cx^2; y^2 = Cx$ .
- $r(1 \pm \cos \varphi) = C$ .
- $y = C(x^2 + y^2)$ .
- $x^2 + y^2 = Cx$ .
- $xy = Cx^3 + 2a^2$ .
- $xy = a^2 + Cy^2$ .
- $xy = \pm a^2$ .
- $x^2 + y^2 = 1$ .
- $x = \frac{p(p^2 + 2)}{(p^2 + 1)^{3/2}}, y = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^{3/2}}$  і  $x = \frac{p}{(p^2 + 1)^{3/2}}, y = \frac{2p^2 + 2}{(p^2 + 1)^{3/2}}$ .
- a)**  $2y^2 + x^2 = C$ ; **б)**  $y^2 + 2x = C$ ; **в)**  $y^2 = C \exp(x^2 + y^2)$ ; **г)**  $(x^2 + y^2)^2 = 2Cxy$ .
- a)**  $y^2 = C(x + y), y = -x$ ; **б)**  $(y + x)^2(y - 2x)^4 = C(y - x)^3, y = x$ .
- a)**  $\alpha \neq \pi/2, \operatorname{tg} \alpha = k: 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - k \left( 2x + \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2} \right) = C; \alpha = \pi/2: x^2 + y^2 = C;$   
**б)**  $\alpha \neq \pi/2, \operatorname{tg} \alpha = k: x^2 - y^2 + 2kxy = C; \alpha = \pi/2: y = C|x|^{-1}$ .
- a)**  $4(C_1y - 1) = C_1^2(x + C_2)^2$ ; **б)**  $y\sqrt{(C_1/y) - 1} + C_1 \arccos \sqrt{y/C_1} = C_2 \pm x$ .
- $y = C_2 - k \ln \cos(xk^{-1} + C_1)$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

### РОЗДІЛ 2

- Кількість солі  $y(t) = 10 \exp\left(-\frac{3t}{100}\right); y(60) = 10e^{-1,8} \approx 1,65$  кг.
- Кількість солі  $y(t) = 10 \exp\left(-\frac{t}{20}\right); y(60) = 10e^{-3} \approx 0,5$  кг.
- Кількість азоту (в літрах)  $y(t) = 20 - 4 \exp\left(-\frac{t}{200}\right); y(t) = 19,8$  при  $t = 200 \ln 20 \approx 600$  с = 10 хв.
- Об'єм  $\text{CO}_2$  (в  $\text{м}^3$ )  $y(t) = 0,08 + 0,22 \exp\left(-\frac{t}{10}\right)$ ; а)  $y(t) = 0,15$  при  $t = 10 \ln \frac{22}{7} \approx 11,45$  хв = 11 хв 27 с; б)  $y(t) = 0,1$  при  $t = 10 \ln 11 \approx 24$  хв.
- Об'єм  $\text{CO}_2$  (в  $\text{м}^3$ )  $y(t) = 4,32 + 8,64 \exp\left(-\frac{Nt}{10800}\right)$ , де  $N$  об'єм повітря, який потрібно подавати щохвилини;  $y(10) = 6,48$  при  $N = 1080 \ln 4 \approx 1497,2$   $\text{м}^3$ .
- Через 20 хв; найбільша кількість рівна 3,68 кг.
- Маса солі в момент часу  $t$   $y(t) = 0,2t + 10 - \frac{12500}{(50+t)^2}$ .
- Кількість світла, що проходить через товщу  $x$  см,  $y(x) = y(0) \cdot 2^{-\frac{x}{35}}$ ;  $y(200) \approx 0,02 y(0)$ ; поглинається  $100\% - 2\% = 98\%$ .

### РОЗДІЛ 3

- $\sqrt{H} - \sqrt{x} = 0,3\sqrt{2g} \cdot r^2 R^{-2}t$ ;  $x(t) = 0$  при  $t = \frac{R^2}{0,3r^2} \sqrt{\frac{H}{2g}} \approx 1061$  с = 17 хв 41 с.
- $(2R - x)^{3/2} = 0,45\pi r^2 \sqrt{2g} \cdot H^{-1}t$ ;  $x(t) = 0$  при  $t = \frac{2RH}{0,45\pi r^2} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 1050$  с = 17 хв 30 с.
- $\sqrt{H} - \sqrt{x} = kt$ ,  $k = \frac{\sqrt{H}}{5} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ;  $x(t) = 0$  при  $t = 5 \cdot (2 + \sqrt{2}) \approx 17,07$  хв = 17 хв 4 с.
- $(d - x)^{3/2} = 0,45s\sqrt{2g} \cdot H^{-1}t$ ;  $x(t) = 0$  при  $t \approx 30$  хв 44 с.
- $H^{5/2} - x^{5/2} = \frac{3d^2 H^2 t}{8R^2} \sqrt{2g}$ ;  $x(t) = 0$  при  $t = \frac{4R^2}{3d^2} \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 27,4$  с.
- $H^{5/2} - x^{5/2} = \frac{3st}{2\pi \text{tg}^2(\alpha/2)} \sqrt{2g}$ ;  $x(t) = 0$  при  $t \approx 10$  с.
- $2\pi(3x^{5/2} - 10Hx^{3/2} + 7H^{5/2}) = 9s\sqrt{2gt}$ ;  $x(t) = 0$  при  $t = \frac{14\pi H^{5/2}}{9s\sqrt{2g}} \approx 11038$  с = 3 год 3 хв 58 с.
- Якщо  $x(t)$  – об'єм води в чані в літрах, то  $t = \frac{2q}{a^2} \ln \frac{q}{q - a\sqrt{x}} - \frac{2}{a} \sqrt{x}$ , де  $q = 1,8$ ,  $a = 10^{-3/2}$ ;  $x(t) = 360$  при  $t = 260$  с (для чану без отвору  $t = 200$  с).
- Має рацію Славко. Час витікання води з кубика Сашка  $t_1 = 12$  хв 37 с, а з кубика Славка  $t_2 = 8$  хв 58 с. Отже, вода з кубика Славка витече на 3 хв 39 с раніше.

### РОЗДІЛ 4

- $m(t) = m(0) \cdot 2^{-\frac{t}{30}}$ ;  $m(t) = 0,01m(0)$  при  $t = 60/\lg 2 \approx 200$  днів.
- $m(t) = m(0) \cdot 0,99956^t$ ;  $m(t) = 0,5m(0)$  при  $t = \ln 0,5/\ln 0,99956 \approx 1600$  років.
- Кількість урану  $m(t) = m(0)e^{-\alpha t}$ , де  $m(0) = 100 + 14 \cdot \frac{238}{206} = 116,2$ ,  
 $\alpha = \ln 2/(4,5 \cdot 10^9)$ ;  $m(t) = 100$  при  $t = 4,5 \cdot 10^9 \cdot \frac{\lg 1,162}{\lg 2} \approx 970 \cdot 10^6$  років.
- Кількість радію  $x(t) = x_0 e^{-0,00044 t}$ ; кількість радону  
 $y(t) = 0,000006 x_0 (e^{-0,00044 t} - e^{-70t})$ ;  $y'(t) = 0$  при  $t = \frac{\ln \frac{70}{0,00044}}{69,99956} \approx 0,17$  року,  
тобто приблизно 62 дні.
- Кількість нерозчиненої сірки в момент часу  $t$  хвилин  $y(t) = \frac{30}{11 \cdot \left(\frac{48}{33}\right)^{t/42} - 6}$ ,  
через 6 годин  $y(360) \approx 0,19$  г.

## РОЗДІЛ 5

1. Закон зміни температури металу  $T(t) = 60 - 80 \cdot 2^{-0,1t}$ ; початкова температура рівна  $T(0) = -20^\circ\text{C}$ .
2. Закон охолодження калача  $T(t) = 75 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^{0,1t} + 25$ ; температура повітря  $25^\circ\text{C}$ .
3. Різниця температур води і предмета  $T(t) = 55 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^t$ ;  $T(t) = 1$  при  $t = \frac{\ln 55}{\ln 5 - \ln 3} \approx 8$  хв.
4. Температура металу  $T(t) = a + \frac{b-a}{60} \left(t - \frac{1-e^{-kt}}{k}\right)$ ;  $x(60) = b - \frac{b-a}{60k} (1 - e^{-60k})$ .
5. Див. Додаток 1.
6.  $\theta(x) = \theta_0 + \frac{(\theta_2 - \theta_0)\text{sh}ax + (\theta_1 - \theta_0)\text{sh}a(l-x)}{\text{sh}al}$ , де  $a = \sqrt{\frac{P\alpha}{\lambda S}}$ . Вказівка:

скористатися рівнянням теплового балансу для елемента стрижня довжини  $dx$  (кількість тепла, яка надходить в елемент стрижня крізь поперечні перерізи за час  $dt$ , рівна кількості тепла, що випромінюється через бічну поверхню за той же проміжок часу).

## РОЗДІЛ 6

1.  $s(t) = -0,5gt^2 + v_0t + s_0$ ; максимальна висота  $h = s(v_0/g) = s_0 + 0,5v_0^2/g$ .
2. Швидкість  $v = \frac{100}{\sqrt{25+200t}}$  (м/с); шлях  $s = \sqrt{25 + 200t}$  (м); через 10 с після початку руху швидкість  $v = \frac{20}{9}$  м/с, шлях  $s(10) - s(0) = 40$  м.
3. Швидкість  $v = 60 \cdot 2^{-100t}$  (км/год);  $v(1/20) = 15/8$ .
4. Швидкість  $v = \left(\frac{2}{3}\right)^{0,25t-1}$  (м/с);  $v(t) = 0,01$  при  $t = 4\left(\frac{2}{\sqrt[10]{1,5}} + 1\right) \approx 49,4$  с; шлях  $s = \frac{6}{\ln 1,5} \approx 14,8$  м.
5. Швидкість  $v(t) = 50 \text{th} \frac{t}{5}$  (м/с); шлях  $s(t) = 250 \ln \text{ch} \frac{t}{5}$  (м);  $s(t) = 1000$  при  $t = 5(4 + \ln 2) \approx 23,466$  с.
6. Швидкість  $v = 28,868 \text{tg}(0,606 - 0,34t)$  (м/с);  $t_{\max} \approx 1,783$  с;  $h \approx 16,65$  м;  
а)  $t_{\max} \approx 2,039$  с;  $h \approx 20,39$  м; б) при  $k = 4,8$  г  $t_{\max} \approx 1,063$  с;  $h \approx 7,47$  м.
7. Швидкість  $v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \text{th} \sqrt{\frac{kg}{m}} t$  (м/с), шлях  $s(t) = \frac{m}{k} \ln \text{ch} \sqrt{\frac{kg}{m}} t$  (м);  $s(t) = h = 19,92$  при  $t = \sqrt{\frac{m}{kg}} \ln \left( e^{kh/m} + \sqrt{e^{2kh/m} - 1} \right) \approx 2,095$  с.
8. Сила тяги  $F = (b - kv_0)e^{-\frac{kt}{m}}$ .

9. Див. Додаток 2.

$$10. x = \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \cos \alpha, \quad y = \left(\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0}{k} \sin \alpha\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k} t.$$

11. Сила натягу канату на відстані  $\varphi$  (в радіанній мірі) по дузі від початкової точки рівна  $f(\varphi) = f(0)e^{\varphi/3} = 10e^{\varphi/3}$ ;  $f(6\pi) \approx 5355$  кг.

## РОЗДІЛ 7

1.  $v_2 = \sqrt{2gR}$ , де  $R$  – радіус Землі, рівний 6378 км, тобто  $v_2 = 11,2$  км/с (друга космічна швидкість).

2. Див. Додаток 3.

3.  $V = c \ln \frac{M}{m}$  (формула Ціолковського).

4. Див. Додаток 4.

## РОЗДІЛ 8

1. а)  $y = -0,5e^{-0,5t}(2+t)$ ;  $y(t)$  прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ ; б)  $y = 6\sin t - 2t \cos t$ ; амплітуда необмежено зростає (резонанс); в)  $y = \frac{\sqrt{85}}{3} e^{-t} \sin(3t - \arctg \frac{9}{2}) + \sqrt{13} \sin(2t - \arctg \frac{2}{3})$ ; при  $t \rightarrow \infty$   $y(t)$  прямує до періодичного розв'язку, що визначається вимушеними коливаннями.

2.  $y = \frac{(b-\omega^2) \sin \omega t - a\omega \cos \omega t}{(b-\omega^2)^2 + (a\omega)^2}$ ; амплітуда  $A = \frac{1}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + (a\omega)^2}}$ . 3.  $T = 2\pi\sqrt{mk^{-1}}$ .

4. а)  $y = \frac{v_0}{\gamma} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \gamma t$ , де  $\alpha = \frac{h}{2m}$ ,  $\gamma = \frac{\sqrt{h^2 - 4km}}{2m}$ ;

б)  $y = \frac{v_0}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$ , де  $\alpha = \frac{h}{2m}$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m}$ .

5.  $y = \frac{b(k - m\omega^2) \sin \omega t - bh\omega \cos \omega t}{(k - m\omega^2)^2 + (h\omega)^2}$ . 6.  $A = \frac{kB}{k - m\omega^2}$ . 7.  $y = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t$ . 8.  $x = 4 - 2 \cos t$ .

9.  $x = a \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t$ .

10. Якщо за початок координат узяти середину відрізка між центрами, то маємо задачу:

$$m\ddot{x} = -2kx, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0; \quad m\ddot{y} = -2ky, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0.$$

Траєкторією руху є еліпс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{2ky^2}{mv_0^2} = 1$ .

11.  $x = b \cos at$ ,  $y = va^{-1} \sin at$ ; еліпс  $\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{ay}{v}\right)^2 = 1$ .

12.  $x = C_1 \sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}} + C_2\right)$ ,  $y = 1,5C_1 \sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}} + C_2\right)$ ;  $x = C_3 \sin(at + C_4)$ ,  
 $y = -C_3 \sin(at + C_4)$ .
13. Рівняння руху  $m\ddot{x} + f \operatorname{sgn} \dot{x} + kx = 0$ , початкові умови  $x(0) = h$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .
14. Рівняння руху  $\ddot{r} = \omega^2 r$ , початкові умови  $r(0) = 0$ ,  $\dot{r}(0) = v_0$ ; розв'язок задачі  
 Коші  $r = v_0 \omega^{-1} \operatorname{sh} \omega t$ .
15.  $\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K(I_1^{-1} + I_2^{-1})}$ .
16. Див. Додаток 5.

## РОЗДІЛ 9

1. Див. Додаток 6.
2.  $l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$ .
3.  $ml\ddot{\varphi} + kl^2 \dot{\varphi} |\dot{\varphi}| + mg \sin \varphi = 0$ .
4.  $\ddot{\varphi} + \sin \varphi = 0,5$ . 5. У  $(L/l)^3$  разів.

## РОЗДІЛ 10

1.  $I = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-RL^{-1}t}\right)$ . 2.  $I = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$ . 3.  $I = \frac{q}{RC} e^{-t/RC}$ .
4.  $I = \frac{q}{\omega CL} e^{-Rt/(2L)} \sin \omega t$ ,  $CR^2 < 4L$ ,  $\omega = \frac{\sqrt{4CL - R^2 C^2}}{2LC}$ .
5.  $I = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} Q_0 e^{\alpha t} \sin \beta t$ ,  $q = Q_0 e^{\alpha t} \left(\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t\right)$ ,  $U_C = \frac{q}{C}$ , де  $\alpha = -\frac{R}{2L}$ ,  
 $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ .
6.  $I(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$ , де  $A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ ,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$ .
7.  $I(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , де  $A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + [\omega L - (\omega C)^{-1}]^2}}$ ,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{(\omega C)^{-1} - \omega L}{R}$ ;  $\max A = V$  при  
 $\omega^2 = (LC)^{-1}$ .
8.  $I(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , де  $A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + [\omega L / (1 - \omega^2 LC)]^2}}$ ;  $\max A = \frac{V}{R}$  при  $\omega = 0$  і  $\omega = \infty$ ,  
 $\min A = 0$  при  $\omega^2 = (LC)^{-1}$ .
9. а)  $y(t) = e^{-t}(1-t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ ; б)  $y(t) = 5 \sin t - 4t \cos t$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ ;  
 в)  $y(t) = 0,5e^{-t} - 0,2e^{-2t} + 0,1 \sin t - 0,3 \cos t$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(t - \operatorname{arctg} 3)$ .

## РОЗДІЛ 11

1. Кількість «знавців»:  $x(t) = \frac{45000}{1 + 19 \cdot \left(\frac{3}{38}\right)^{0,1t}}$ ;  $x(30) = 44583$ .
2. Рівноважна ціна:  $p(t) = 10 \cdot (1 + e^{-10t})$ .
3. Рівноважна ціна:  $p(t) = 0,5 \cdot (5e^{4t} - 1)$ . Оскільки  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty$ , то рівноважна ціна є нестійкою, а саме зростає у часі.
4. Зміна обсягу заощаджень описується функцією:  $y(t) = 50000 e^{-0,03t}$ . Через 8 років обсяг заощаджень дорівнюватиме  $y(8) \approx 39333$  грн.
5. Зростання рівня виробництва описується функцією:  $y(t) = y_0 e^{0,06(t-t_0)}$ . Сумарна кількість продукції, випущеної за 8 років, рівна  $y(t) = \frac{1}{0,06} \cdot y_0 (e^{0,06 \cdot 8} - 1) \approx 10 y_0$ .

## РОЗДІЛ 12

1. Кількість бактерій:  $b(t) = b_0 e^{kt}$ , де  $b_0$  – початкова чисельність популяції,  $k$  – коефіцієнт пропорційності;  $b(t) = mb_0$  при  $t = k^{-1} \ln m$ .
2. Площа листа:  $S(t) = \frac{160000}{\left[9 - \sin \frac{\pi(t-12)}{12}\right]^2}$  см<sup>2</sup>.
3. Випадок недосягнення епідемічного порогу ( $I_0 \leq I^*$ ):  $S(t) = S_0 = n - I_0$ ,  $I(t) = I_0 e^{-\beta t}$ ,  $R(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-\beta t})$ ; випадок перевищення епідемічного порогу ( $I_0 > I^*$ ):  $S(t) = S_0 e^{-\alpha t}$ ,  $I(t) = I_0 e^{-\beta t} + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ ,  
 $R(t) = n - S_0 e^{-\alpha t} - I_0 e^{-\beta t} + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$  при  $t \in [0, T)$  і  $S(t) = S(T)$ ,  
 $I(t) = I^* e^{-\beta(t-T)}$ ,  $R(t) = n - S(T) - I^* e^{-\beta(t-T)}$  при  $t > T$ .
4. Див. **Додаток 7**.
5. Кількість лікувальної речовини в крові  $m(t) = \left(m_0 - \frac{v}{k}\right) e^{-kt} + \frac{v}{k}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \frac{v}{k}$ .
6. Число здорових особин  $y(t) = \frac{b(a+b)}{b + a e^{\beta(a+b)t}}$ , де  $\beta > 0$  – коефіцієнт пропорційності.

## РОЗДІЛ 13

1. а)  $x(t) = 6e^{-5t} + 2e^t + 2\cos t$ ,  $y(t) = 6e^{-5t} - 2e^t + \sin t$ , перемагає сторона  $x$ ;  
 б)  $x(t) = 4e^{-t} + 5e^{-6t}$ ,  $y(t) = -6e^{-t} + 5e^{-6t} + 2$ , перемагає  $y$ ;

в)  $x(t) = 14e^{-14t} - 0,5e^{-2t} + 5$ ,  $y(t) = 21e^{-14t} + 0,25(e^{-2t} - 5)$ , блискавична перемога  $x$ .

2. а)  $x(t) = x_0 \operatorname{ch} \sqrt{bct} - y_0 \sqrt{bc^{-1}} \operatorname{sh} \sqrt{bct}$ ,  $y(t) = y_0 \operatorname{ch} \sqrt{bct} - x_0 \sqrt{b^{-1}c} \operatorname{sh} \sqrt{bct}$ ;

б)  $x(t) = \frac{K_2 x_0 e^{-2K_2 t}}{g y_0 - h x_0 e^{-2K_2 t}}$ ,  $y(t) = \frac{K_2 y_0}{g y_0 - h x_0 e^{-2K_2 t}}$ , де  $K_2 = g y_0 - h x_0$ ;

в) вигляд розв'язку залежить від значення  $K_3 = g y_0^2 - 2c x_0$ : якщо  $K_3 = 0$

(рівновага сил), то  $x(t) = x_0 - \frac{g^2 y_0^3 t (4 + g y_0 t)}{2c(2 + g y_0 t)^2}$ ,  $y(t) = \frac{2y_0}{2 + g y_0 t}$ ; якщо  $K_3 > 0$

(перемагає  $y$ ), то  $x(t) = \frac{2AK_3 e^{-t\sqrt{K_3 g}}}{c(1 + A e^{-t\sqrt{K_3 g}})^2}$ ,  $y(t) = \sqrt{\frac{K_3}{g}} \cdot \frac{1 + A e^{-t\sqrt{K_3 g}}}{1 - A e^{-t\sqrt{K_3 g}}}$ , де

$$A = \frac{\sqrt{g} y_0 - \sqrt{K_3}}{\sqrt{g} y_0 + \sqrt{K_3}}; \text{ якщо } K_3 < 0 \text{ (перемагає } x), \text{ то при } B = \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{g}{K_3}} y_0$$

$$x(t) = -\frac{K_3}{2c \cos^2(B - 0,5t\sqrt{-K_3 g})}, \quad y(t) = \sqrt{-\frac{K_3}{g}} \operatorname{tg}(B - 0,5t\sqrt{-K_3 g}).$$

3. Див. Додаток 8.

## РОЗДІЛ 14

1. а)  $y(x) = 4\left(1 - x + \frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch}(x-2)}{\operatorname{sh} 2}\right)$ ; б)  $y(x) = 4 \cos x$ ;

в)  $y = \frac{\operatorname{ch}(2x-1) - \operatorname{ch} \frac{1}{2}}{\operatorname{sh} 1} + 2x e^{-2x} - e^{-1}$ .

2. а)  $y(x) = \frac{2\left(\cos 1 \operatorname{sh} 1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{2}} + \sin 1 \operatorname{ch} 1 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\cos 2 - \operatorname{ch} 2} + \frac{x}{\sqrt{2}}$ ;

б)  $y(x) = \frac{5[\operatorname{sh}(x-1) - e^{-0,5} \operatorname{sh} x]}{\operatorname{sh} 1} - \frac{\operatorname{sh}(2x-2) - e^{-0,5} \operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh} 2} + 4e^{-0,5x}$ ;

в)  $y(x) = 2(1 - \operatorname{ch} x) + x \operatorname{sh} x + \frac{4 \operatorname{sh} \frac{1}{2} - 1}{2(1 + \operatorname{ch} \frac{1}{2})} \operatorname{sh} x + \frac{1 - \operatorname{ch} \frac{1}{2}}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}} x \operatorname{ch} x$ .

3. а)  $y(x) = \frac{P x^2 (3l - x)}{6EJ}$ ; б)  $y(x) = \frac{P x^2 (x^2 - 4lx + 6l^2)}{24EJ}$ .

$$4. a) y(x) = \begin{cases} \frac{Px}{48EJ} (3l^2 - 4x^2), & x \in [0, \frac{l}{2}], \\ \frac{P}{48EJ} (4x^3 - 12lx^2 + 9l^2x - l^3), & x \in [\frac{l}{2}, l]; \end{cases}$$

$$б) y(x) = \frac{Px(x^3 - 2lx^2 + l^3)}{24EJ}.$$

$$5. y(x) = \frac{m^4}{4\alpha^6 (\text{sh}^2 \beta - \sin^2 \beta)} \left\{ [\sin^2 \beta - H(\sin \beta \text{ch} \beta + \cos \beta \text{sh} \beta)] \text{sh} \alpha x \cos \alpha x + \right. \\ \left. + [(\text{ch} \beta - \cos \beta)(\text{sh} \beta + \sin \beta) - 2H \sin \beta \text{sh} \beta] \text{sh} \alpha x \sin \alpha x - \right. \\ \left. - [\text{sh}^2 \beta + \sin \beta \text{sh} \beta - H(\sin \beta \text{ch} \beta + \cos \beta \text{sh} \beta)] \text{ch} \alpha x \sin \alpha x \right\} + \frac{m^4}{4\alpha^4} x, \text{ де } \beta = \alpha H.$$

## РОЗДІЛ 15

$$1. \omega_k = \frac{k^2 \pi^2 a \sqrt{E}}{2l^2}, \quad k = \overline{1, \infty}; \text{ власні функції: } y_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

$$2. u(t, x) = \frac{14l}{a\pi} \sin \frac{7a\pi t}{2l} \sin \frac{7\pi x}{2l}.$$

$$3. u(t, x) = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{96}{\pi^4 (2k-1)^4} e^{-[a\pi(2k-1)]^2 t} \cos \pi(2k-1)x.$$

$$4. u(t, x) = 6e^{-\left(\frac{3a\pi}{2l}\right)^2 t} \cos \frac{3\pi}{2l} x.$$

5. а) власні значення – ненульові корені рівняння  $\sin \lambda = P(\lambda) \cdot \lambda \cos \lambda$ , відповідні власні функції  $y(x) = C \sin \lambda x$ ;

б) тільки тривіальний розв'язок;

$$в) \lambda_n = (\pi n)^2 + 1, \quad y_n(x) = C_n e^{-x} \cos \pi n x, \quad n = \overline{0, \infty};$$

$$г) \lambda_n = 2(\pi n)^2 + 8, \quad y_n(x) = C_n e^{2x} \cos \pi n x, \quad n = \overline{0, \infty};$$

$$д) \lambda_n = (6n)^2, \quad y_n(x) = C_n \sin^2 3n x, \quad n \in \mathbb{N};$$

е)  $y = Cx$  для довільного  $\lambda$ ;

$$є) \lambda_n = \pi n, \quad y_n(x) = A_n \cos \pi n x + B_n \sin \pi n x, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$ж) \lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2}, \quad y_n(x) = A_n \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x + B_n \sin \frac{\pi(2n-1)}{2} x, \quad n \in \mathbb{Z};$$

з)  $\lambda \in \mathbb{R}$ , причому при  $\lambda = 0$   $y(x) = A(x^2 - 2x) + B(x^3 - 3x)$ , при  $\lambda \neq 0$

$$y(x) = C \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{2} e^{\frac{3+\sqrt{3}}{2}\lambda} (e^{-\lambda x} - 1) + e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}\lambda x} - 1 \right\} + D \left\{ \frac{1-\sqrt{3}}{2} e^{\frac{3-\sqrt{3}}{2}\lambda} (e^{-\lambda x} - 1) + e^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}\lambda x} - 1 \right\}.$$



**u)**  $\lambda_k = (2\pi k)^2$ ,  $y_k(x) = A_k \sin^2 \pi kx$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;

$\lambda_j = \mu_j^2$ ,  $y_j(x) = B_j \left( \mu_j \sin^2 \frac{\mu_j}{2} x + \sin \mu_j x - \mu_j x \right)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , де  $\mu_j$  – додатні

корені рівняння  $\mu_j - 2\operatorname{tg} \frac{\mu_j}{2} = 0$ .

**6. a)**  $\lambda_n = 0,25n^2$ ,  $y_n(x) = C_n \sin(0,5nx)$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ ;

**б)**  $\lambda_n = -\mu_n^2$ ,  $y_n(x) = C_n (\mu_n \cos \mu_n x + \sin \mu_n x)$ , де  $\mu_n$  – додатні корені рівняння  $\operatorname{tg} \mu_n = -\mu_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

**в)**  $\lambda_n = n^2$ ,  $y_n(x) = A_n \cos nx + B_n \sin nx$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ ;

**г)**  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ln 2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ ,  $y_n(x) = C_n x^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi n \ln x}{\ln 2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

## ДОДАТКИ

**Додаток 1. Чия кавка гарячіша? (Розділ 5, задача 5).** Виведемо спочатку закон зміни температури кави у філіжанці Івана до змішування кави з вершками. У відповідності до припущень задачі на підставі закону Фур'є (5.4) кількість тепла  $dQ$ , отримана повітрям від філіжанки Івана за проміжок часу  $dt$ , визначається співвідношенням

$$dQ = \lambda s \frac{T - \theta}{l} dt, \quad (1)$$

де  $T$  – температура кави в момент часу  $t$ ,  $\theta$  – температура повітря в кав'ярні,  $\lambda$  – теплопровідність матеріалу філіжанки,  $l$  – товщина стінок філіжанки,  $s$  – площа бічної поверхні стінок філіжанки. З іншого боку, кількість тепла, віддану кавою, згідно з (5.1) можна знайти з рівності

$$dQ = -cm dT, \quad (2)$$

де  $c$  – питома теплоємність кави,  $m$  – маса кави у філіжанці. Порівнюючи співвідношення (1) і (2), приходимо до рівняння

$$\lambda s \frac{T - \theta}{l} dt = -cm dT,$$

або після відокремлення змінних

$$\frac{dT}{T - \theta} = -\frac{\lambda s}{lcm} dt. \quad (3)$$

Позначивши початкову температуру кави через  $T_0$ , після інтегрування рівняння (3) за початкової умови  $T(0) = T_0$  одержимо

$$T = \theta + (T_0 - \theta)e^{-\frac{\lambda s}{lcm} t}. \quad (4)$$

Таким чином, формула (4) виражає закон  $T_I^{(1)}$  зміни температури кави у філіжанці Івана до додавання вершків. Дослідимо тепер, яким стане закон зміни температури кави після того, як Іван долив у філіжанку вершки [відзначимо, що це сталося через 10 хв або 600 с, коли температура кави в його філіжанці вже була рівною  $T_I^{(1)}(600)$ ]. Для цього скористаємося рівнянням теплового балансу, яке в нашому випадку запишеться у вигляді

$$cm[T_I^{(1)}(600) - \theta_I] = c_1 m_1 [\theta_I - T_1], \quad (5)$$

де  $\theta_I$  – температура суміші в момент додавання вершків,  $T_1$  – температура вершків,  $c_1$  – питома теплоємність вершків,  $m_1$  – маса вершків, доданих у каву. Із рівняння (5) знаходимо

$$\theta_I = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T_I^{(1)}(600),$$

або з урахуванням рівності (4)

$$\theta_I = \frac{c_1 m_1 T_1}{cm + c_1 m_1} + \frac{cm \left[ \theta + (T_0 - \theta) e^{-\frac{600s}{lcm}} \right]}{cm + c_1 m_1}. \quad (6)$$

Отже, закон  $T_I^{(2)}$  зміни температури кави у філіжанці Івана після додавання вершків можемо отримати, скориставшись формулою (4), де роль початкової температури грає вже  $\theta_I$ , що розраховується згідно з рівністю (6), а добуток  $cm$  замінюється сумою  $cm + c_1 m_1$ .

Для виведення закону зміни температури кави в філіжанці Василя знову скористаємося рівнянням теплового балансу, яке в даному випадку набуває вигляду

$$cm(T_0 - \theta_B) = c_1 m_1 (\theta_B - T_1), \quad (7)$$

де  $\theta_B$  – температура суміші в момент додавання вершків Василем, тобто в початковий момент часу  $t = 0$ . Із рівняння (7) знаходимо

$$\theta_B = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T_0.$$

Отже, закон  $T_B$  зміни температури кави у філіжанці Василя можемо отримати, ще раз скориставшись формулою (4), де роль початкової температури грає вже  $\theta_B$ , а добуток  $cm$  так само замінюється сумою  $cm + c_1 m_1$ .

Таким чином, з урахуванням числових значень із умови задачі маємо: температура кави в філіжанці Івана до додавання вершків  $T_I^{(1)}(t) = 20 + 60e^{-0,01t}$ , після додавання вершків  $T_I^{(2)}(t) = 20 + 0,116e^{-0,008t}$ ; температура кави в філіжанці Василя  $T_B(t) = 20 + 48,473e^{-0,008t}$ . Якщо припустити, що приятелі взялися пити каву через 30 с після повернення Василя (і додавання вершків у каву Івана), то розрахунки дають значення  $T_I^{(2)}(30) = 20,091^\circ\text{C}$ ,  $T_B(630) = 20,314^\circ\text{C}$ . Отже, «більш гарячу» каву пив Василь.

**Додаток 2. Літак на засніженій смузі (Розділ 6, задача 9).** За припущень з умови задачі горизонтальна і вертикальна складові сили опору рівні

$$R_x = av^2 = as^2, \quad R_y = bv^2 = bs^2,$$

оскільки швидкість  $v(t) = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$ . Диференціальне рівняння руху літака отримаємо на підставі другого закону Ньютона з урахуванням сил, що діють на літак (при цьому зауважимо: сила тертя прямо пропорційна навантаженню на поверхні, що труться):

$$m\ddot{s} = -R_x - \mu(mg - R_y) \Rightarrow \quad (8)$$

$$\Rightarrow m\ddot{s} + a\dot{s}^2 + \mu(mg - b\dot{s}^2) = 0 \Rightarrow \ddot{s} + A\dot{s}^2 + B = 0,$$

де  $A = \frac{a-\mu b}{m}$ ,  $B = \mu g$ . Беручи до уваги, що

$$v = \dot{s} \Rightarrow \ddot{s} = \dot{v} = \frac{dv}{ds} \cdot \dot{s} \Rightarrow \ddot{s} = \frac{dv}{ds} v,$$

рівняння (8) можна записати у вигляді

$$v \frac{dv}{ds} + Av^2 + B = 0,$$

і зінтегрувати шляхом відокремлення змінних:

$$\begin{aligned} v \frac{dv}{ds} + Av^2 + B = 0 &\Rightarrow -\frac{v dv}{Av^2 + B} = ds \Rightarrow -\int \frac{v dv}{Av^2 + B} = \int ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2A} \ln(Av^2 + B) + C_1 = s. \end{aligned}$$

На підставі початкових умов  $s = 0$ ,  $v = v_0$  отримуємо

$$C_1 = \frac{1}{2A} \ln(Av_0^2 + B).$$

Отже, шлях, пройдений від моменту приземлення, визначається функцією

$$s(t) = -\frac{1}{2A} \ln(Av^2 + B) + \frac{1}{2A} \ln(Av_0^2 + B) \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2A} \ln \frac{Av_0^2 + B}{Av^2 + B}. \quad (9)$$

Очевидно, що величину шляху до зупинки можна розрахувати з (9), поклавши  $v = 0$ :

$$s(T) = \frac{1}{2A} \ln \frac{Av_0^2 + B}{B} = \frac{1}{2A} \ln \left( 1 + \frac{Av_0^2}{B} \right).$$

Відповідну величину часу  $T$  можна знайти, скориставшись рівнянням (8) у вигляді

$$\dot{v} + Av^2 + B = 0,$$

звідки шляхом відокремлення змінних отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + Av^2 + B = 0 &\Rightarrow \frac{dv}{Av^2 + B} = -dt \Rightarrow \int \frac{dv}{Av^2 + B} = -\int dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot v \right) = -t + C_2 \Rightarrow t = 0, \quad v = v_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_2 = \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot v_0 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot v_0 \right) - \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot v \right). \end{aligned}$$

Тепер час  $t=T$  руху літака до зупинки можемо одержати з останнього співвідношення при значенні  $v=0$ :

$$T = \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{A}{B}} \cdot v_0\right)$$

**Додаток 3. Метеорит у полі земного тяжіння (Розділ 7, задача 2).** Нехай  $x=x(t)$  – відстань, подолана метеоритом із початку падіння, тоді  $h-x$  – відстань від метеорита в момент часу  $t$  до центру Землі. У момент  $t$  на метеорит діє сила  $F=ma$ , де  $m$  – маса метеорита,  $a$  – його прискорення. На поверхні Землі на тіло діє сила тяжіння  $P=mg$ , де  $g$  – прискорення вільного падіння на поверхні Землі. Згідно з законом всесвітнього тяжіння Ньютона ці сили обернено пропорційні до квадратів відповідних відстаней від метеорита до центра Землі, а отже, виражаються формулами

$$F = G \frac{mM}{(h-x)^2}, \quad P = G \frac{mM}{R^2}, \quad (10)$$

де  $G$  – гравітаційна стала,  $M$  – маса Землі. Із (10) маємо

$$\frac{F}{P} = \frac{R^2}{(h-x)^2} \Rightarrow \frac{ma}{mg} = \frac{R^2}{(h-x)^2},$$

звідки  $a = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}$ , але з іншого боку  $a = \frac{dv}{dt}$ , тому  $\frac{dv}{dt} = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}$ , де  $v(t)$  – швидкість руху метеорита.

Враховуючи рівність  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$ , отримаємо диференціальне рівняння руху

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо

$$\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{2gR^2}{(h-x)^2} \Rightarrow v^2 = \frac{2gR^2}{h-x} + C.$$

Рух починався зі стану спокою, тобто при  $t=0$  маємо  $x=0$  і  $v=0$ . Тоді

$$0 = \frac{2gR^2}{h-0} + C \Rightarrow C = -\frac{2gR^2}{h}.$$

Отже, зміна швидкості метеорита  $v$  залежно від подоланої відстані  $x$  виражається формулою

$$v^2 = \frac{2gR^2 x}{h(h-x)}.$$

На поверхні Землі (при  $x = h - R$ ) швидкість метеорита  $v = \sqrt{2gR\left(1 - \frac{R}{h}\right)}$ .

Оскільки згідно з умовою задачі висота  $h$  може бути необмежено великою, то, переходячи до границі при  $h \rightarrow \infty$ , отримуємо  $v = \sqrt{2gR}$ .

Тоді за удару об поверхню Землі метеорит матиме швидкість

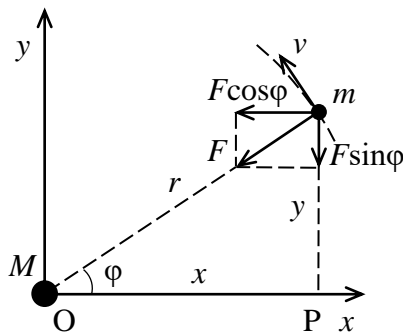
$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6377000} \approx 11,2 \text{ км/с.}$$

**Додаток 4. Рух планет навколо Сонця (Розділ 7, задача 4).** Згідно з законом всесвітнього тяжіння будь-які два тіла, що знаходяться на відстані  $r$  одне від одного і мають маси  $m$  і  $M$  відповідно, притягуються з силою  $F = \frac{\gamma mM}{r^2}$ , де  $\gamma$  – універсальна гравітаційна стала.

Будемо вважати, що планета здійснює рух у площині  $xy$  («площині екліптики») навколо Сонця, що міститься в початку координат  $O$  (мал. 1). Якщо нехтувати впливом інших планет, то згідно з другим законом Ньютона диференціальні рівняння руху планети в проекціях на осі  $x$  і  $y$  матимуть вигляд

$$m\ddot{x} = -\frac{\gamma mM}{r^2} \cos\varphi, \quad m\ddot{y} = -\frac{\gamma mM}{r^2} \sin\varphi,$$

де  $r$  і  $\varphi$  виражають відповідно полярний радіус і кут для планети в довільному її положенні, як показано на мал. 1.



Мал. 1

Беручи до уваги, що  $\sin\varphi = y/r$ ,  $\cos\varphi = x/r$ , останні рівняння можна переписати у вигляді

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{r^3},$$

де  $k = \gamma M$ .

Нарешті, враховуючи, що  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , приходимо до динамічної моделі руху планети

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що планета починає рух із точки на осі  $Ox$  із абсцисою  $a$ , де має швидкість  $v_0$ . Тоді для повного опису руху планети до рівнянь (11) слід додати початкові умови

$$x(0) = a, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0. \quad (12)$$

Отже, диференціальною моделлю поставленої задачі є задача Коші для системи диференціальних рівнянь (11) із початковими умовами (12).

Для спрощення інтегрування системи (11) перейдемо до полярних координат  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Тоді

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi;$$

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \sin \varphi, \quad \ddot{y} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \cos \varphi,$$

а отже, рівняння системи (11) запишуться у вигляді

$$(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \sin \varphi = -\frac{k \cos \varphi}{r^2}, \quad (13)$$

$$(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \cos \varphi = -\frac{k \sin \varphi}{r^2}. \quad (14)$$

Домноживши обидві частини рівняння (13) на  $\cos \varphi$ , рівняння (14) – на  $\sin \varphi$  і додавши отримані результати, маємо

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{r^2}. \quad (15)$$

Якщо ж обидві частини рівняння (13) домножити на  $\sin \varphi$ , рівняння (14) – на  $\cos \varphi$  і відняти від першого результату другий, то дістанемо

$$2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi} = 0. \quad (16)$$

Початкові умови (12) у полярних координатах набудуть вигляду

$$r(0) = a, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = v_0 / a. \quad (17)$$

Таким чином, диференціальна модель (11), (12) за переходу до полярних координат зводиться до задачі Коші (15) – (17).

Рівняння (16) після домноження на  $r$  подається у вигляді точної похідної:

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \dot{\varphi} = C_1. \quad (18)$$

На підставі початкових умов (17) із (18) при  $t = 0$  одержуємо  $\tilde{N}_1 = av_0$ , а тоді

$$r^2 \dot{\phi} = av_0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{av_0}{r^2}. \quad (19)$$

Підставивши отримане значення  $\dot{\phi}$  в (15), маємо

$$\ddot{r} = \frac{a^2 v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}. \quad (20)$$

Після введення підстановки  $\dot{r} = p(r)$ , інтегрування і врахування початкової умови  $p = \dot{r} = 0$  при  $r = a$  з (20) одержимо рівняння першого порядку

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\left(v_0^2 - \frac{2k}{a}\right) + \frac{2k}{r} - \frac{a^2 v_0^2}{r^2}}. \quad (21)$$

Поділивши рівняння (21) на рівняння (19), знаходимо

$$\frac{dr}{d\phi} = r \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2k}{a^3 v_0^2}\right) r^2 + \frac{2kr}{a^2 v_0^2} - 1}.$$

Останнє рівняння інтегрується підстановкою  $r = 1/u$ , що дає результат

$$r = \frac{a^2 v_0^2}{k[1 + \varepsilon \cos(\phi + C_2)]}, \quad \varepsilon = \frac{av_0^2}{k} - 1.$$

Із початкової умови  $r = a$  при  $\phi = 0$  знаходимо  $C_2 = 0$ . Отже, остаточно отримуємо траєкторію руху планети у вигляді

$$r = \frac{a^2 v_0^2}{k(1 + \varepsilon \cos\phi)}. \quad (22)$$

Як відомо з аналітичної геометрії, (22) є рівнянням у полярних координатах конічного перерізу з ексцентриситетом  $\varepsilon$ . При цьому можливі наступні випадки:

- a)** еліпс, якщо  $\varepsilon < 1$ , тобто  $v_0^2 < 2k/a$ ;
- б)** гіпербола, якщо  $\varepsilon > 1$ , тобто  $v_0^2 > 2k/a$ ;
- в)** парабола, якщо  $\varepsilon = 1$ , тобто  $v_0^2 = 2k/a$ ;
- г)** коло, якщо  $\varepsilon = 0$ , тобто  $v_0^2 = k/a$ .

Із астрономічних спостережень випливає, що для всіх планет Сонячної системи величина  $v_0^2$  завжди менша за  $2k/a$ . Таким чином, приходимо до одного з законів Кеплера: *траєкторії руху планет є еліпсами, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.*

Зауважимо, що небесні тіла, які мають параболічні й гіперболічні орбіти, можуть спостерігатися тільки одиний раз, оскільки вони ніколи не повертаються.



**Додаток 5. Задача про періодичні коливання пружного стрижня (Розділ 8, задача 16).** Розглянемо періодичні коливання стрижня, що відбуваються внаслідок дії періодичної зовнішньої сили  $f(t, x) = \tilde{f}(x)\cos\omega t$  ( $\omega$  – частота). Будемо шукати розв’язок наведеного у Вказівці рівняння (8.13) також у періодичному вигляді:  $U(t, x) = \tilde{u}(x)\cos\omega t$ . Тоді для амплітуди  $\tilde{u}(x)$  періодичних коливань, що встановилися в системі під дією періодичної зовнішньої сили, із (8.13) дістанемо звичайне диференціальне рівняння:

$$\left[ E(x)S(x)\tilde{u}'(x) \right]' + \omega^2\rho(x)S(x)\tilde{u}(x) = -\tilde{f}(x). \quad (23)$$

Якщо стрижень однорідний і сталого перерізу, то  $E(x) \equiv E = \text{const}$ ,  $\rho(x) \equiv \rho = \text{const}$ ,  $S(x) \equiv S = \text{const}$ ; тоді рівняння (23) запишеться в простішому вигляді:

$$\tilde{u}'' + \omega^2 E^{-1}\rho\tilde{u} = -(ES)^{-1}\tilde{f}(x).$$

Введемо позначення:  $\omega^2 E^{-1}\rho = a^2$ . Враховуючи, що згідно з умовою задачі  $\tilde{f}(x) = 0,5l - x$ , а  $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(l) = 0$  (кінці стрижня закріплені), для визначення амплітуди  $\tilde{u}(x)$  одержимо крайову задачу:

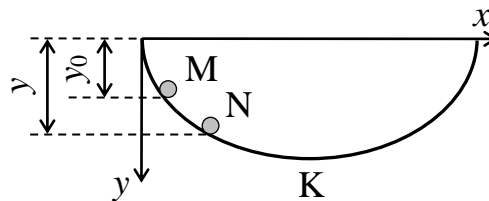
$$\begin{aligned} \tilde{u}'' + a^2\tilde{u} &= -(ES)^{-1}(0,5l - x), \quad x \in (0; l); \\ \tilde{u}(0) &= 0, \quad \tilde{u}(l) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Легко показати, що крайова задача (24) має єдиний розв’язок

$$\tilde{u}(x) = \frac{l}{2a^2 ES} \left( \cos ax - \frac{\cos al + 1}{\sin al} \sin ax + \frac{2x}{l} - 1 \right), \quad a = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

**Додаток 6. Задача про ізохрону (Розділ 9, задача 1).** Нехай  $(x_0, y_0)$  – координати вихідного положення кульки, тобто точки  $M$ , а  $\theta_0$  – відповідне їй значення параметра. Коли кулька скотиться з положення  $M$  у деяке положення  $N(\theta)$  (див. мал. 2), то вона знизиться по вертикалі на відстань  $h$ , яка для циклоїди  $x = r(\theta - \sin\theta)$ ,  $y = r(1 - \cos\theta)$  буде рівна

$$h = y - y_0 = r(1 - \cos\theta) - r(1 - \cos\theta_0) = r(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$



Мал. 2

Швидкість падаючого тіла обчислюється за формулою  $v = \sqrt{2gh}$ , тобто маємо

$$v = \sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)}.$$

З іншого боку, оскільки  $v = ds/dt$ , де  $s$  – шлях, то одержимо

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)}. \quad (25)$$

Для циклоїди  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta$ , тому з (25) маємо

$$dt = \frac{2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}. \quad (26)$$

Із (26) шляхом інтегрування знаходимо час скочення кульки від рівня  $M$  до нижнього рівня  $K$  (згідно з теоремою Рена довжина однієї арки циклоїди рівна чотирьом діаметрам твірного кола, тобто положенню точки  $K$  відповідає значення параметра  $\theta = \pi$ ):

$$\begin{aligned} t &= \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \\ &= -2\sqrt{\frac{r}{g}} \arcsin \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} \Big|_{\theta_0}^{\pi} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}. \end{aligned}$$

Отже, час  $t$ , за який кулька скотиться з положення  $M$  у положення  $K$ , не залежить від  $\theta_0$ , тобто від початкового положення кульки.

**Додаток 7. Задача про вливання ліків (Розділ 12, задача 4).** Якщо позначити через  $x_0$ ,  $y_0$  кількість діючої речовини в початковий момент часу  $t = 0$  в першому та другому відсіках відповідно, то згідно з умовою задачі процес вливання ліків описується задачею Коші для лінійної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x + I_0, \\ \dot{y} = \alpha x - \beta y, \end{cases} \quad (27)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (28)$$

Перше з рівнянь системи (27) інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dx}{I_0 - \alpha x} = dt \Rightarrow x(t) = C_1 e^{-\alpha t} + \frac{I_0}{\alpha}.$$

На підставі першої з початкових умов (28) знаходимо розподіл діючої речовини в першому відсіку:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow \tilde{N}_1 = x_0 - \frac{I_0}{\alpha} \Rightarrow x(t) = \left(x_0 - \frac{I_0}{\alpha}\right) e^{-\alpha t} + \frac{I_0}{\alpha}.$$

Підставивши знайдену функцію  $x(t)$  у друге рівняння системи (27), одержимо лінійне рівняння першого порядку відносно другої шуканої функції  $y(t)$ :

$$\dot{y} + \beta y = I_0 + (x_0 - I_0) e^{-\alpha t},$$

розв'язок якого у випадку  $\alpha \neq \beta$  рівний

$$y(t) = e^{-\beta t} \left\{ C_2 + \int [I_0 + (\alpha x_0 - I_0) e^{-\alpha t}] e^{\beta t} dt \right\} = C_2 e^{-\beta t} + \frac{\alpha x_0 - I_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} + \frac{I_0}{\beta}.$$

На підставі другої з початкових умов (28)

$$y(0) = y_0 \Rightarrow C_2 = y_0 - \frac{\alpha x_0 - I_0}{\beta - \alpha} - \frac{I_0}{\beta},$$

а тому розподіл діючої речовини в другому відсіку

$$y(t) = \left( y_0 - \frac{\alpha x_0 - I_0}{\beta - \alpha} - \frac{I_0}{\beta} \right) e^{-\beta t} + \frac{\alpha x_0 - I_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} + \frac{I_0}{\beta}.$$

Аналогічно при  $\alpha = \beta$  отримуємо:

$$x(t) = K e^{-\alpha t} + \frac{I_0}{\alpha}, \quad y(t) = \left( y_0 - \frac{I_0}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} + \alpha K t e^{-\alpha t} + \frac{I_0}{\alpha},$$

де  $K = x_0 - \frac{I_0}{\alpha}$ .  $\alpha = \beta$ .

### **Додаток 8. Кінематична задача про лінію погоні (Розділ 13, задача 3).**

Позначимо декартові координати точки  $M$  через  $(x, y)$ , а абсцису точки  $P$  через  $X$ . Із умови задачі маємо (див. мал. 13.3):

$$X = x_0 + at, \tag{29}$$

$$dx^2 + dy^2 = v^2 dt^2, \tag{30}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{X - x}. \tag{31}$$

Із рівнянь (29) та (31) маємо

$$X - x = x_0 - x + at \Rightarrow x_0 - x + at = -\frac{y}{dy/dx}, \tag{32}$$

Беремо  $x$  за незалежну змінну, позначаючи похідні від  $y$  за  $x$  штрихами, і виключаємо  $t$ . Із рівняння (30) маємо:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2},$$

тоді як із (32) після диференціювання за  $x$  знаходимо:

$$-1 + a \frac{dt}{dx} = \frac{yy'' - y'^2}{y'^2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{yy''}{ay'^2}.$$

Прирівнюючи обидва знайдені вирази для  $dt/dx$ , отримуємо диференціальне рівняння лінії погоні:

$$y'' = \frac{a}{v} \cdot \frac{y'^2}{y} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Це неповне рівняння другого порядку, що не містить незалежної змінної. Заміною

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy}$$

воно зводиться до рівняння першого порядку

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{a}{v} \cdot \frac{p^2}{y} \sqrt{1 + p^2} \Rightarrow \frac{dp}{dy} = \frac{a}{v} \cdot \frac{p}{y} \sqrt{1 + p^2},$$

оскільки розв'язок  $p = 0$  із урахуванням (31) дає  $y = 0$ , тобто рух по осі  $Ox$ .

Зінтегрувавши останнє рівняння шляхом відокремлення змінних, одержимо

$$\frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{p^2} + 1} = (Cy)^{\frac{a}{v}}. \quad (33)$$

Надалі задля визначеності будемо припускати, що в момент, коли точки  $P$  і  $M$  знаходилися на одній паралелі до осі  $Oy$ , ординати точки  $M$  була рівна  $y_0$  (тобто погоня розпочинається з положення  $M_0P_0$ ): у цей момент очевидно  $1/p = 0$ , а тоді з (33) знаходимо  $C = 1/y_0$ , і таким чином проміжковий інтеграл запишеться у вигляді

$$\frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{p^2} + 1} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}. \quad (34)$$

Аби розв'язати (34) відносно  $p$ , перетворимо цю рівність до вигляду

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{p^2} + 1} - \frac{1}{p}}{\left(\sqrt{\frac{1}{p^2} + 1} - \frac{1}{p}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{p^2} + 1} + \frac{1}{p}\right)} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}} \Rightarrow -\frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{p^2} + 1} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}. \quad (35)$$

Віднявши (35) від (34), одержимо

$$\frac{2}{p} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}} \right\} dy.$$

Припускаючи що  $a \neq v$  (будемо вважати, що  $a < v$ , тобто точка  $M$  може наздогнати точку  $P$ ), отримуємо шукане рівняння «лінії погоні» за допомогою другої квадратури з урахуванням початкової умови  $y(x_0) = y_0$ :

$$x = \frac{y_0}{2\left(1 + \frac{a}{v}\right)} \left[ \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1 + \frac{a}{v}} - 1 \right] - \frac{y_0}{2\left(1 - \frac{a}{v}\right)} \left[ \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1 - \frac{a}{v}} - 1 \right] + x_0.$$

Абсцису «точки зустрічі» отримуємо при  $y = 0$ :  $x_1 = x_0 + \frac{avy_0}{v^2 - a^2}$ , тоді

тривалість погоні рівна  $T = \frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{vy_0}{v^2 - a^2}$ .

Аналогічно одержується рівняння «лінії погоні» у випадку  $a = v$ :

$$x = \frac{y_0}{4} \left\{ \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 1 - 2 \ln \frac{y}{y_0} \right\} + x_0.$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Пріщенко О. П., Черногор Т. Т.* Диференціальні рівняння та їх застосування: Навчально-методичний посібник. – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. – 88 с.
2. *Хохлова Л. Г., Хома Н. Г.* Застосування диференціальних рівнянь: Навчальний посібник. – Тернопіль: «Тайп», 2018. – 72 с.
3. *Маринець В. В., Рего В. Л., Маринець К. В.* Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. – Ужгород: «Говерла», 2013. – 196 с.
4. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння в задачах: Навчальний посібник. – К.: «Либідь», 2003. – 504 с.
5. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 334 с.
6. *Кузнецов А. М., Чорний О. Л.* Методичні вказівки до застосування диференціальних рівнянь у коливальних процесах: у 2 ч. – Ч. 1. – Миколаїв: НУК, 2013. – 59 с.
7. *Кузнецов А. М., Чорний О. Л.* Методичні вказівки до застосування диференціальних рівнянь у коливальних процесах: у 2 ч. – Ч. 2. – Миколаїв: НУК, 2015. – 40 с.
8. *Булавін Л. А., Гречко Л. Г., Лерман Л. Б., Чалий А. В.* Медична фізика: підручник. – У 4 т. – Т. 1: Динамічні і статистичні моделі. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 600 с.
9. *Ляшенко І. М., Коробова М. В., Горіцина І. А.* Моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів: навчальний посібник. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 320 с.
10. *Александров Ю. В.* Небесна механіка: підручник. – Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2003. – 190 с.
11. *Рейтій О. К.* Теоретична механіка: методичний посібник з лабораторних робіт. Ч. 2: Динаміка матеріальної точки. – Ужгород: «Говерла», 2006. – 76 с.
12. *Rontó Miklós, Raisz Péterné.* Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. – Miskolci egyetemi kiadó, 2004. – 323 о.
13. *Aggregated Combat Models.* – Operations Research Department Naval Postgraduate School Monterey CA. – February 2000. – 112 p.
14. *Бірюкова Т. В., Сукач Т. М., Яровий І. М.* Застосування диференціальних рівнянь у формуванні професійних компетентностей у здобувачів вищої та передвищої освіти // Вісник університету імені Альфреда Нобеля «Педагогіка і психологія. Педагогічні науки»: 2020, 2(20). – С. 141-150 (DOI: 10.32342/2522-4115-2020-2-20-16).

15. *Фурсенко О. К., Черновол Н. М.* Ланчестеровські моделі бойових дій // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил ім. І. Кожедуба: 2020, 4(66). – С. 85-91 (DOI: 10.30748/zhups.2020.66.12).
16. *Макаренко Л. Л., Мірзоєва А. Т.* Застосування диференціальних рівнянь в шкільному курсі фізики // Науковий часопис Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова. Серія 05. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – 2014. – Вип. 47. – С. 169-176.
17. *Корнійчук О. Е.* Моделі динаміки у задачах менеджменту лісового та мисливського господарства // Фізико-математична освіта: науковий журнал. – 2017. – Вип. 1(11). – С. 62-67.
18. [https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve).
19. [https://en.wikipedia.org/wiki/Sandwich\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Sandwich_theory).

## ЗМІСТ

Вступ .....	4
<b>РОЗДІЛ 1</b> Геометричний зміст похідної. Диференціальні моделі	
геометричних задач .....	5
Задачі до Розділу 1 .....	10
<b>РОЗДІЛ 2</b> Основні принципи диференціального моделювання фізичних	
задач .....	11
Задачі до Розділу 2 .....	14
<b>РОЗДІЛ 3</b> Витікання рідини з посудин .....	15
Задачі до Розділу 3 .....	17
<b>РОЗДІЛ 4</b> Хімічні реакції. Радіоактивний розпад .....	18
Задачі до Розділу 4 .....	22
<b>РОЗДІЛ 5</b> Задачі теорії теплопровідності .....	23
Задачі до Розділу 5 .....	26
<b>РОЗДІЛ 6</b> Найпростіші динамічні моделі механіки .....	27
Задачі до Розділу 6 .....	32
<b>РОЗДІЛ 7</b> Деякі задачі небесної механіки .....	33
Задачі до Розділу 7 .....	37
<b>РОЗДІЛ 8</b> Механічні коливання .....	38
Задачі до Розділу 8 .....	44
<b>РОЗДІЛ 9</b> Рівняння маятника .....	46
Задачі до Розділу 9 .....	49
<b>РОЗДІЛ 10</b> Задачі електротехніки .....	40
Задачі до Розділу 10 .....	55
<b>РОЗДІЛ 11</b> Диференціальні моделі в економіці .....	56
Задачі до Розділу 11 .....	58
<b>РОЗДІЛ 12</b> Екологія і медицина .....	59
Задачі до Розділу 12 .....	65
<b>РОЗДІЛ 13</b> Військова справа .....	66
Задачі до Розділу 13 .....	75
<b>РОЗДІЛ 14</b> Прогин брусів .....	76
Задачі до Розділу 14 .....	83
<b>РОЗДІЛ 15</b> Спектральні задачі .....	84
Задачі до Розділу 15 .....	94
Відповіді до задач .....	97
Додатки .....	106
Література .....	118



Навчальне видання

**ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМ ПРИРОДОЗНАВСТВА**

Навчальний посібник

**Рего В. Л., Варга Я. В.** Застосування диференціальних рівнянь для розв'язування проблем природознавства. Навч. пос.– Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2023. – 121 с.

*Відповідальний за випуск:* завідувач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь, канд. фіз.-мат. наук, доц. Рейтій О. К.

**Автори:** ст. викл. Рего В. Л.  
канд. фіз.-мат. наук Варга Я. В.

*Рецензенти:* д-р. фіз.-мат. наук, проф. Ронто М. Й.,  
д-р. фіз.-мат. наук, доц. Сливка-Тилищак Г. І.