МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

(Методичні вказівки до практичних занять
для студентів економічних спеціальностей)

Ч. 1. ВИЩА МАТЕМАТИКА

Ужгород – 2023

Математика для економістів (Методичні вказівки до практичних занять для студентів економічних спеціальностей). Ч. 1. Вища математика / Уклад.: Р.А. Кацала, Ю.Ю. Млавець, Л.М. Магула-Цубера, М.М. Шаркаді. Ужгород: ДВНЗ “УжНУ”, 2023. 56 с.

Укладачі:

Кацала Роман Андрійович, к.ф.-м..н., асистент кафедри кібернетики і прикладної математики;

Млавець Юрій Юрійович, к.ф.-м..н., доцент кафедри кібернетики і прикладної математики;

Магула-Цубера Людмила Михайлівна, асистент кафедри кібернетики і прикладної математики;

Шаркаді Маріанна Миколаївна, к.е.н., доцент кафедри кібернетики і прикладної математики.

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. Повідайчик М.М.,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Синявська О.О. .

Рекомендовано до друку Вченою радою факультету математики та цифрових технологій від 26 квітня 2023 року, протокол № 8.

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету математики та цифрових технологій від 20 квітня 2023 року, протокол № 8.

ЗМІСТ

ВСТУП

Математика – це мова, якою говорить наука. Вона є однією з найважливіших наук у сучасному світі і має безліч застосувань в різних галузях, зокрема в економіці. Математика є необхідною складовою для розв'язання багатьох економічних задач та досліджень. Для економістів, які працюють у різних сферах, володіння математичними знаннями є корисним. Щоб зрозуміти та аналізувати економічні процеси, необхідно володіти математичними знаннями. Саме тому, вивчення "Математики для економістів" є надзвичайно важливим.

Математика допомагає економістам не тільки розуміти та аналізувати складні економічні моделі, а й прогнозувати тенденції та ризики, використовуючи математичні методи. Вона дозволяє ефективно використовувати інформаційні технології, проводити аналіз даних та розробляти стратегії розвитку.

Також, знання математики є необхідним для вивчення більш складних дисциплін, таких як економетрія, фінансова математика та інші. Вивчення математики допоможе економістам поглибити свої знання та покращити навички, що необхідні для успішної кар'єри в галузі економіки.

Отже, можна стверджувати, що вивчення "Математики для економістів" є необхідною складовою частиною професійного розвитку та успішної кар'єри в галузі економіки. Вивчення математики дасть змогу ефективніше аналізувати економічні дані та приймати обгрунтовані рішення у своїй роботі.

Ми сподіваємося, що ці методичні вказівки стануть для вас надійним помічником у вивченні "Математики для економістів". Бажаємо успіху та досягнення ваших цілей!

Практичне заняття 1. Матриці та операції над ними.

Основні теоретичні відомості.

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка складається з m рядків і n стовпців:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Елементи з однаковими першими індексами утворюють **рядки**, з однаковими другими індексами – **стовпці** матриці.

Числа, що входять до складу матриці, називаються її **елементами**.

Матриці скорочено позначаються символами $A = \{a_{ij}\}$, або просто буквами $A, B, C, \dots$, або $A_1, A_2, \dots$, елементи матриці позначають як a_{ij}, де i – номер рядка, j – номер стовпця. Матриці розміру $m \times n$ позначають символом $A_{m\times n}$.

Приклад 1.1. Задано матрицю розміром 2×4: $A_{2\times4} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & 0{,}5 & \sqrt{5} & 9 \end{pmatrix}$.

Тоді $a_{11} = 1, a_{12} = -2, a_{23} = \sqrt{5}, a_{24} = 9$.

Дві матриці A і B одного розміру називаються **рівними**, якщо $a_{ij} = b_{ij}$, для довільних $i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n$.

Матриця $A_{m\times n}$ називається **квадратною**, якщо $n = m$; **прямокутною**, якщо $n \neq m$.

Матриця $A_{n\times1}$, що складається з одного стовпчика називається **матрицею-стовпчиком**, а $A_{1\times m}$ **матрицею-рядком**.

Порядком квадратної матриці називається число, що дорівнює кількості рядків(стовпчиків) цієї матриці.

Елементи матриці a_{ij}, в яких $i = j$ (тобто рівні індекси) називаються **діагональними**. Діагональні елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють **головну діагональ** квадратної матриці $A_{n\times n}$.

Матриця називається **діагональною**, якщо всі елементи, що знаходяться поза головною діагоналлю дорівнюють нулю.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця третього порядку.

Якщо всі елементи діагональної матриці n-го порядку дорівнюють одиниці, то матриця називається **одиничною** і позначається буквою E.

Наприклад, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця третього порядку.

Матриця довільного розміру називається **нульовою**, якщо всі її елементи рівні нулю: $O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Операції над матрицями.

1. *Добуток матриці на число.*

Добутком матриці $A_{m\times n}$ на число k називається матриця $B_{m\times n} = k\cdot A_{m\times n}$, елементи якої $b_{ij} = k\cdot a_{ij}$, для $i = 1, 2, \dots m,\ j = 1, 2, \dots n$.

Наслідок. Спільний множник рядка (стовпчика) можна виносити за знак матриці.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 16 & 20 & 12 \\ 5 & 25 & 10 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 25 & 10 \end{pmatrix} = 4\cdot 5\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 4\cdot 5\cdot 5\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 100\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. *Додавання матриць.*

Сумою двох матриць $A_{m\times n}$ і $B_{m\times n}$ називається матриця $C_{m\times n}$, всі елементи якої знаходяться за формулою:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Наприклад,

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, тоді $C = A + B = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. *Віднімання матриць.*

Різниця двох матриць $A_{m\times n}$ і $B_{m\times n}$ визначається через попередні операції:

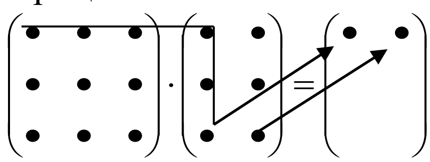
$$A_{m\times n} - B_{m\times n} = A_{m\times n} + (-1)\cdot B_{m\times n}.$$

4. *Добуток матриць.*

Добуток матриці $A_{n\times k}$ на матрицю $B_{k\times m}$ називається така матриця $C_{n\times m} = A_{n\times k}\cdot B_{k\times m}$, кожний елемент якої c_{ij}, дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці $A_{n\times k}$ на відповідні елементи j-го стовпця матриці $B_{k\times m}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j+}a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Зауважимо, що при множені двох матриць $A_{n\times k}$ і $B_{k\times m}$ кількість стовпців матриці *A* має дорівнювати кількості рядків матриці *B*.

Тобто множення проводиться по схемі:  .

Наприклад, $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ і $B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, тоді

$$C_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -2\cdot 2 + 1\cdot(-4) & -2\cdot 1 + 1\cdot 3 \\ 3\cdot 2 + 3\cdot(-4) & 3\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ 5\cdot 2 + 0\cdot(-4) & 5\cdot 1 + 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -6 & 12 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Наведемо деякі тотожності матричної алгебри:

1) $A + B = B + A$ (комутативний закон додавання);

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (асоціативний закон додавання);

3) $k(A + B) = k\cdot A + k\cdot B;\ k \epsilon R$;

4) $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$;

5) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;

6) $k\cdot(A\cdot B) = (k\cdot A)\cdot B = A\cdot(k\cdot B)$;

7) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

В той же час для операції множення матриць, взагалі кажучи, комутативний закон не виконується:

1) $A\cdot B \neq B\cdot A$;

2) З того, що $A\cdot B = 0$ не випливає, що $A = 0$ або $B = 0$.

5. *Цілий додатний степінь квадратної матриці.*

Цілим додатним степенем A^k $(k > 1)$ квадратної матриці A називається добуток k матриць, рівних A : $A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot \ldots A}_{k-\text{раз}}$.

Наприклад,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

6. *Транспонування матриць.*

Матриця A^T називається **транспонованою** до матриці A, якщо елементи першого рядка матриці A^T, є елементами першого стовпця матриці A, елементи другого рядка – елементами другого стовпця і т.д. $(A_{n\times m})^T = B_{m\times n}$, елементи i-го рядка матриці A є елементами i-го стовпця матриці B.

Наприклад,

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції транспонування:

1) $(A^T)^T = A$;

2) $(k\cdot A)^T = k\cdot A^T$;

3) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

4) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$.

Приклад 1.2. Знайдіть $A+B, A-B, AB, BA$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Позначимо, що матриця $C = A + B$, тоді

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 3+3 & -1+(-3) & 6+4 \\ -2+(-6) & 7+5 & 0+7 \\ 3+0 & -3+(-1) & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 10 \\ -8 & 12 & 7 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Позначимо, що матриця $D = A - B$, тоді

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3-3 & -1-(-3) & 6-4 \\ -2-(-6) & 7-5 & 0-7 \\ 3-0 & -3-(-1) & 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, тоді операція множення AB має сенс і добуток матриць обчислюємо так:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 3+(-1)\cdot(-6)+6\cdot 0 & 3\cdot(-3)+(-1)\cdot 5+6\cdot(-1) & 3\cdot 4+(-1)\cdot 7+6\cdot 0 \\ (-2)\cdot 3+7\cdot(-6)+0\cdot 0 & (-2)\cdot(-3)+7\cdot 5+0\cdot(-1) & (-2)\cdot 4+7\cdot 7+0\cdot 0 \\ 3\cdot 3+(-3)\cdot(-6)+3\cdot 0 & 3\cdot(-3)+(-3)\cdot 5+3\cdot(-1) & 3\cdot 4+(-3)\cdot 7+3\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 15 & -20 & 5 \\ -48 & 41 & 41 \\ 27 & -27 & -9 \end{pmatrix}.$$

Оскільки кількість стовпців матриці B дорівнює кількості рядків матриці A, тоді операція множення BA має сенс і добуток матриць обчислюємо так:

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 3+(-3)\cdot(-2)+4\cdot 3 & 3\cdot(-1)+(-3)\cdot 7+4\cdot(-3) & 3\cdot 6+(-3)\cdot 0+4\cdot 3 \\ (-6)\cdot 3+5\cdot(-2)+7\cdot 3 & (-6)\cdot(-1)+5\cdot 7+7\cdot(-3) & (-6)\cdot 6+5\cdot 0+7\cdot 3 \\ 0\cdot 3+(-1)\cdot(-2)+0\cdot 3 & 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 7+0\cdot(-3) & 0\cdot 6+(-1)\cdot 0+0\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 27 & -36 & 30 \\ -7 & 20 & -15 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3. Знайдіть AB, BA, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, тоді операція множення AB має сенс і добуток матриць обчислюємо так:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5\cdot 3+8\cdot 4+(-4)\cdot 9 & 5\cdot 2+8\cdot(-1)+(-4)\cdot 6 & 5\cdot 5+8\cdot 3+(-4)\cdot 5 \\ 6\cdot 3+9\cdot 4+(-5)\cdot 9 & 6\cdot 2+9\cdot(-1)+(-5)\cdot 6 & 6\cdot 5+9\cdot 3+(-5)\cdot 5 \\ 4\cdot 3+7\cdot 4+(-3)\cdot 9 & 4\cdot 2+7\cdot(-1)+(-3)\cdot 6 & 4\cdot 5+7\cdot 3+(-3)\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}.$$

Оскільки кількість стовпців матриці B дорівнює кількості рядків матриці A, тоді операція множення BA має сенс і добуток матриць обчислюємо так:

$$BA=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}3\cdot5+2\cdot6+5\cdot4 & 3\cdot8+2\cdot9+5\cdot7 & 3\cdot(-4)+2\cdot(-5)+5\cdot(-3)\\ 4\cdot5+(-1)\cdot6+3\cdot4 & 4\cdot8+(-1)\cdot9+3\cdot7 & 4\cdot(-4)+(-1)\cdot(-5)+3\cdot(-3)\\ 9\cdot5+6\cdot6+5\cdot4 & 9\cdot8+6\cdot9+5\cdot7 & 9\cdot(-4)+6\cdot(-5)+5\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}47 & 77 & -37\\ 26 & 44 & -20\\ 101 & 161 & -81\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4. Знайдіть AB, BA, якщо:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, тоді операція множення AB має сенс і добуток матриць обчислюємо так:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{pmatrix}.$$

Оскільки кількість стовпців матриці B дорівнює кількості рядків матриці A, тоді операція множення BA має сенс і добуток матриць обчислюємо так:

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & -56 & 27\\ 17 & -36 & 19\\ 14 & -25 & 11\end{pmatrix}.$$

Вправи для аудиторної роботи.

1.1. Знайдіть $3A+5B, 2A-3B, AB, BA,$ якщо:

1.1.1. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 5 & 2 & 4\\ -4 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 2\\ 2 & -2 & -5\end{pmatrix}.$

1.1.2. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\ -3 & 3 & 3\\ 1 & 5 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -4\\ -3 & 3 & -3\\ 0 & -3 & -1\end{pmatrix}.$

1.1.3. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 5 & 0 & -4\\ 2 & -3 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -4\\ 3 & -3 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}.$

1.1.4. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ 3 & -5 & 4\\ 0 & 5 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ -4 & 5 & -3\\ 1 & -5 & 3\end{pmatrix}.$

1.1.5. $A=\begin{pmatrix}-4 & 4 & -2\\ 5 & 1 & -4\\ -3 & 0 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 5\\ 2 & -4 & -2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}.$

1.1.6. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Індивідуальні завдання.

1.2. Знайдіть $5A + 3B, 3A - 2B, AB, BA$, якщо:

1.2.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

1.2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.2.3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2.4. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2.5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & -5 \\ -4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.2.6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & -4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2.7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 4 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.2.8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ -5 & -5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

1.2.9. $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2.10. $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.2.11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2.12. $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.13. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2.14. $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2.15. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1.2.16. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

1.2.17. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.18. $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.2.19. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2.20. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2.21. $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -5 \\ -4 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

1.2.22. $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

1.2.23. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & -5 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2.24. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & -5 \\ -5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

1.2.25. $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.26. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2.27. $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1.2.28. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2.29. $A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.30. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ -4 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2.31. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2.32. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.33. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2.34. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2.35. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2.36. $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.37. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

1.2.38. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2.39. $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 \\ 5 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.2.40. $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Практичне заняття 2. Визначники та їх властивості. Теорема Лапласа.

Основні теоретичні відомості.

Визначником (детермінантом) будь-якої квадратної матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків елементів матриці, взятих по одному з кожного рядка і стовпця з певним знаком.

Кожній квадратній матриці A n-го порядку можна поставити у відповідність число, яке отримуємо з елементів матриці A за відповідними формулами.

Визначник n-го порядку позначається $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Визначником другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ називається число, яке обчислюється за формулою: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Приклад 2.1. Обчисліть визначник:

$$\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}=30-(-32)=62.$$

Визначником третього порядку називається число, що обчислюється за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

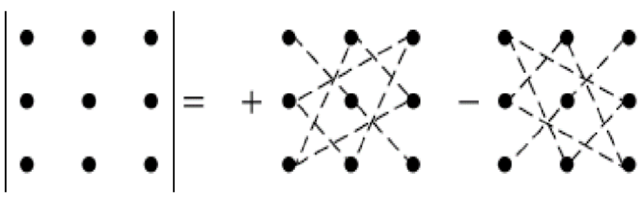
$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Приклад 2.2. Обчисліть визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot(-1)\cdot 3+2\cdot 1\cdot 1+3\cdot 1\cdot(-4)-$$

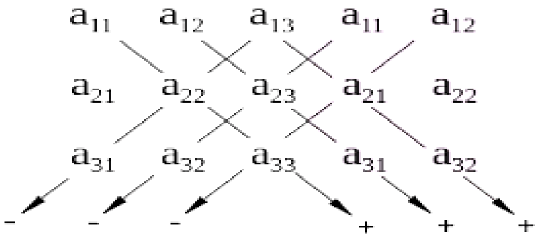
$$\big((-4)\cdot(-1)\cdot 1+2\cdot 3\cdot 3+1\cdot 1\cdot 3\big)=-9+2-12-(4+18+3)=-44$$

Схематично порядок формування множників в доданках можна задати наступним чином:



Зліва схема формування доданків, поряд з якими ставиться знак «+», а справа – знак «−».

Обчислення визначника 3-го порядку можна проводити за методом Саррюса, яке передбачає введення допоміжних стовпчиків, які дублюють 1 і 2 стовпчик визначника:



Приклад 2.3. Обчисліть визначник за методом Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\Bigg| = 3\cdot(-1)\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 1 + (-4)\cdot 3\cdot 1 -$$

$$-(2\cdot 3\cdot 3 + 3\cdot\ 1\cdot 1 + (-4)\cdot(-1)\cdot 1) = -9 + 2 - 12 - (18 + 3 + 4) = -44.$$

Нехай задана квадратна матриця A n-го порядку.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається визначник матриці $(n-1)$-го порядку, який отримано з матриці A викреслюванням елементів i-го рядка та j-го стовпця.

Наприклад, мінором елемента a_{23} матриці A, що задає визначник

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

є визначник другого порядку: $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$.

Кожна матриця n-го порядку має n^2 мінорів $(n-1)$-го порядку.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається мінор M_{ij} взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто: $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} відрізняється від мінора M_{ij} тільки знаком, коли $i + j$ – непарне число.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, тоді $M_{23} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 12$,

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -12.$$

Теорема 2.1. (*Теорема Лапласа*). Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпчика) на їх алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}A_{it}.$$

Це розклад визначника Δ за елементами i-го рядка($i = 1,2,\dots,n$). Розклад визначника за елементами j-го стовпця ($j = 1,2,\dots,n$) має наступний вигляд

$$\Delta = \ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \ = \ \sum_{t=1}^{n} a_{tj}A_{tj}\ .$$

Визначник n-го порядку визначається як число, що отримується з елементів матриці n-го порядку за теоремою Лапласа.

Приклад 2.4. Обчисліть визначник, розклавши його за елементами другого рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + (-4)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -4[(36 + 0 + 5) - (4 + 0 - 6)] - 2[(-9 + 4 + 0) - (-1 - 30 + 0)] =$$

$$= -4(41 + 2) - 2(-5 + 31) = -4 \cdot 43 - 2 \cdot 26 = -172 - 52 = -224.$$

Значення теореми Лапласа полягає в тому, що вона дозволяє обчислювати визначники довільного порядку, звівши їх до обчислення визначників менших порядків.

Наприклад, обчислення визначників 5-го порядку можна звести до обчислення 5 визначників 4-го порядку, або 20 визначників 3-го порядку, або 60 визначників другого порядку.

Властивості визначників:

1. Якщо у визначнику Δ один з рядків матриці (стовпців) складається тільки з нулів, тоді $\Delta = 0$.
2. Якщо у визначнику Δ є два однакові рядки (стовпці), тоді $\Delta = 0$.
3. Якщо у визначнику Δ елементи якогось рядка (стовпця) помножити на число K, тоді $\Delta_1 = K \cdot \Delta$.

   Наприклад, $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$, тоді

   $$\Delta_1 = -5 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -20 \end{vmatrix} = -60 - 10 = -70 = -5 \cdot 14.$$
4. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$.

   Наприклад, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$, тоді $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$.
5. При перестановці місцями двох рядків (стовпців) у визначнику Δ знак визначника змінюється на протилежний.

   Наприклад, $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.
6. Якщо елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то $\Delta = 0$.
7. Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), які попередньо помножені на одне й те саме число.

Властивості визначників дають можливість значно зменшити об’єм обчислень.

Приклад 2.5. Обчисліть визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & \boxed{1} \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{(R_3+2R_2)\\(R_4+(-3)R_2)}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -2 & 0 \\ -7 & -12 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 \\ 6 & 5 & -2 \\ -7 & -12 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{(C_2+2C_1)\\(C_3+3C_1)}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 17 & 16 \\ -7 & -26 & -20 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 17 & 16 \\ -26 & -20 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 17 & -4 \\ -26 & 5 \end{vmatrix} = 4(17 \cdot 5 - 26 \cdot 4) = -76.$$

Розв'язання: На першому кроці обчислення, другий рядок першого визначника домножили на 2 і додали його до елементів третього рядка, утворивши елементи третього рядка другого визначника. Аналогічно, елементи 4-го рядка другого визначника утворені в результаті додавання елементів 4-го рядка з елементами 2-го рядка, які помножили на число (-3). В результаті отримали визначник, у 4-ому стовпчику якого є тільки один ненульовий елемент. Застосувавши до цього стовпчика теорему Лапласа, отримаємо третій визначник. Використовуючи перший стовпчик, як основний, аналогічно отримаємо четвертий визначник, в якому у першому рядку є тільки один ненульовий елемент.

Вправи для аудиторної та самостійної роботи.

2.1. Обчисліть визначники:

2.1.1. $\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -3 & -7 & -6 \\ -3 & 7 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2.1.2. $\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \\ 7 & -7 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2.1.3. $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -7 & -2 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & -4 & 3 & 1 \\ -5 & -5 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

2.1.4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 7 & 5 & -6 \\ -2 & -6 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & -3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2.1.5. $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & -7 & -4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -5 & -5 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ -5 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

2.1.6. $\begin{vmatrix} 9 & -9 \\ -8 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \\ 3 & 7 & -5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Індивідуальні завдання.

2.2. Обчисліть визначники:

2.2.1. $\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -9 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ -5 & -6 & -3 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

2.2.2. $\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -5 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

2.2.3. $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -5 & 7 & 3 \\ 6 & 4 & -6 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

2.2.4. $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$.

2.2.5. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

2.2.6. $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & -5 \\ 5 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -5 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

2.2.7. $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -7 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & -6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & -5 & -2 & -4 \end{vmatrix}$.

2.2.8. $\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & -7 & -7 \\ -3 & 0 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

2.2.9. $\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}$.

2.2.10. $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & 5 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -4 \\ 5 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

2.2.11. $\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2.2.12. $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 5 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -4 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2.2.13. $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & -5 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & -6 & -5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -5 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

2.2.14. $\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -7 & -7 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 4 & 7 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$.

2.2.15. $\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -7 \\ 5 & -5 & -5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 & 0 \\ -4 & -3 & -1 & -2 \\ -5 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

2.2.16. $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -8 & -8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 7 & -2 \\ -1 & -3 & 6 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -5 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

2.2.17. $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \\ -7 & 5 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2.2.18. $\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

2.2.19. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -6 \\ 0 & -7 & 5 \\ -1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

2.2.20. $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 4 & -5 \\ -3 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

2.2.21. $\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 7 & 2 & -2 \\ -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & -5 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

2.2.22. $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ -5 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

2.2.23. $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 2 & -4 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 & -1 \\ 5 & -2 & -4 & 3 \\ -2 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

2.2.24. $\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & -1 & -4 & -1 \\ -5 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$.

2.2.25. $\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & -7 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & 5 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

2.2.26. $\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$.

2.2.27. $\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 6 & -4 & -4 \\ -7 & -3 & -6 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 & -2 \\ 4 & 3 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

2.2.28. $\begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ -4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -4 \end{vmatrix}$.

2.2.29. $\begin{vmatrix} -9 & 0 \\ -9 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -6 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -5 & -4 \end{vmatrix}$.

2.2.30. $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & -5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

2.2.31. $\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 4 & -2 & -7 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$.

2.2.32. $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -6 \\ 1 & -6 & -7 \\ 6 & 6 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

2.2.33. $\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

2.2.34. $\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -5 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

2.2.35. $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ -7 & -3 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 & 5 \\ 5 & -5 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

2.2.36. $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 7 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ -3 & -4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

2.2.37. $\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -6 & 4 & 6 \\ 7 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -5 & -2 & 2 \\ -3 & -5 & -5 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

2.2.38. $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 & -4 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \\ -5 & -5 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$.

2.2.39. $\begin{vmatrix} -9 & -4 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -6 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

2.2.40. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 7 \\ 3 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -4 \\ -5 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$.

Практичне заняття 3. Мінори, алгебраїчні доповнення. Обернена матриця.

Основні теоретичні відомості.

Нехай задана квадратна матриця A n-го порядку.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається визначник матриці $(n-1)$-го порядку, який отримано з матриці A викреслюванням елементів i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається мінор M_{ij} взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, тоді, $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10$.

Обернена матриця.

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A, якщо виконується рівність $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Матриці, визначник яких дорівнює нулю, називаються **виродженими**.

Теорема 3.1. (*Теорема про існування оберненої матриці*). Для того щоб матриця A мала обернену необхідно і досить, щоб її визначник $|A| \neq 0$.

Тобто, умовою існування оберненої матриці є її невиродженість.

Теорема 3.2. (*Теорема про єдиність оберненої матриці*). Якщо матриця має обернену, то вона єдина.

Обернену матрицю A^{-1} до матриці A можна знайти за допомогою формули:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $|A|$ – визначник матриці, A_{ij} – алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij}.

Теорема 3.3. Для довільних обернених матриць A і B порядку n є правильними наступні рівності:

1) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;
2) $(A^{-1})^{-1} = A$;
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці.

Нехай задана квадратна матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Для знаходження оберненої матриці до матриці A, можна скористатися декількома методами.

За допомогою мінорів та алгебраїчних доповнень:

1. Знайти визначник матриці A: $|A| = \Delta$.
2. Знайти транспоновану матрицю A^T до матриці A.
3. Знайти алгебраїчні доповнення елементів матриці A^T.

4. Скласти матрицю з алгебраїчних доповнень елементів матриці A^T. Ця матриця називається ***приєднаною*** (або союзною) і позначається $\tilde{A}$.
5. Помножити приєднану матрицю на число $\frac{1}{\Delta}$.

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{1n}}{\Delta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{n1}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$ – матриця, обернена до матриці A.

Другий метод, за допомогою **елементарних перетворень рядків**. Для цього потрібно розширити матрицю A праворуч на одиничну матрицю і застосовувати до неї елементарні перетворення рядків, доки ліва частина матриці не стане одиничною матрицею, тоді права частина матриці буде містити обернену матрицю.

Приклад 3.1. Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знаходимо визначник матриці A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 36 + 36 + 36 - 36 - 36 - 36 = 0$. Оскільки $\Delta = 0$, то оберненої матриці не існує.

Приклад 3.2. Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1. Перевіримо, чи матриця не є виродженою.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix} = 12 + 6 - (-10 - 9) = 18 + 19 = 37 \neq 0.$$

$|A| \neq 0$, тому обернена матриця A^{-1} існує.

2. Транспонуємо матрицю A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Знаходимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A^T і складаємо з них приєднану матрицю $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 3 \\ -5 & 6 & 2 \\ 1 & -16 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислюємо обернену матрицю за відповідною формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 11 & 9 & 3 \\ -5 & 6 & 2 \\ 1 & -16 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{37} & \frac{9}{37} & \frac{3}{37} \\ \frac{-5}{37} & \frac{6}{37} & \frac{2}{37} \\ \frac{1}{37} & \frac{-16}{37} & \frac{7}{37} \end{pmatrix}.$$

5. Переконаємося в правильності обчислень 1-4 за означенням оберненої матриці $A^{-1}A = AA^{-1} = E$:

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{37} & \frac{9}{37} & \frac{3}{37} \\ \frac{-5}{37} & \frac{6}{37} & \frac{2}{37} \\ \frac{1}{37} & \frac{-16}{37} & \frac{7}{37} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо для прикладу тільки діагональні елементи одиничної матриці:

$$\frac{11}{37} \cdot 2 + \frac{9}{37} \cdot 1 + \frac{3}{37} \cdot 2 = \frac{37}{37} = 1;$$

$$-\frac{5}{37} \cdot (-3) + \frac{6}{37} \cdot 2 + \frac{2}{37} \cdot 5 = \frac{37}{37} = 1;$$

$$\frac{1}{37} \cdot 0 - \frac{16}{37} \cdot (-1) + \frac{7}{37} \cdot 3 = \frac{37}{37} = 1.$$

Якщо матриця A квадратна другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і визначник якої $|A| \neq 0$, то обернену матрицю можна знайти за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.3. Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{\times(R_1/2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{\times(R_2+(-1)R_1)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{\times(R_3+(-2)R_1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)^{\times(R_2/\frac{7}{2})} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)^{\times(R_3+(-8)R_2)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-16}{7} & 1 \end{array}\right)^{\times(R_3/\frac{37}{7})} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{37} & \frac{-16}{37} & \frac{7}{37} \end{array}\right)^{\times(R_2+\frac{2}{7}R_3)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{37} & \frac{6}{37} & \frac{2}{37} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{37} & \frac{-16}{37} & \frac{7}{37} \end{array}\right)^{\times(R_1+\frac{3}{2}R_2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{37} & \frac{9}{37} & \frac{3}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{37} & \frac{6}{37} & \frac{2}{37} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{37} & \frac{-16}{37} & \frac{7}{37} \end{array}\right)$$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{37} & \frac{9}{37} & \frac{3}{37} \\ \frac{-5}{37} & \frac{6}{37} & \frac{2}{37} \\ \frac{1}{37} & \frac{-16}{37} & \frac{7}{37} \end{pmatrix}$.

Вправи для аудиторної та самостійної роботи.

3.1. Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо:

3.1.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -4 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

3.1.2. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.1.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

3.1.4. $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

3.1.5. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3.1.6. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 5 & -3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Індивідуальні завдання.

3.2.Знайдіть обернені матриці A^{-1} і B^{-1}, якщо:

3.2.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -4\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -5 & -3\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -4\end{pmatrix}$.

3.2.2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & -5 & 0\\ 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 4\\ 5 & -5 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

3.2.3. $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -5\\ 4 & 0 & -5\\ -3 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -5\\ 4 & 3 & -3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

3.2.4. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -3\\ -3 & 0 & -4\\ -3 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

3.2.5. $A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 4\\ 5 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ 2 & -5 & -5\\ -4 & 5 & -4\end{pmatrix}$.

3.2.6. $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 4\\ 1 & -5 & 2\\ 4 & -4 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -5 & -1\\ 1 & 1 & 4\\ -4 & -5 & -2\end{pmatrix}$.

3.2.7. $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -5\\ 4 & -2 & 4\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

3.2.8. $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 0\\ -5 & -5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 4 & -4 & 5\\ -3 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

3.2.9. $A=\begin{pmatrix}-4 & -5 & 5\\ 2 & -2 & 2\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

3.2.10. $A=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 5 & 2 & -2\\ 3 & 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -5 & 1\\ 2 & 0 & 5\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

3.2.11. $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 1\\ 1 & -4 & 5\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -5 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 5\end{pmatrix}$.

3.2.12. $A=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 5\\ -2 & 5 & 5\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3\\ 4 & 5 & -1\\ -5 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

3.2.13. $A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & -3 & 1\\ 0 & -3 & -5\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

3.2.14. $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2.15. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3.2.16. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

3.2.17. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.18. $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

3.2.19. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.2.20. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

3.2.21. $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -5 \\ -4 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

3.2.22. $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

3.2.23. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & -5 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2.24. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & -5 \\ -5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

3.2.25. $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.26. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2.27. $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

3.2.28. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

3.2.29. $A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

3.2.30. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ -4 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

3.2.31. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

3.2.32. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

3.2.33. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$

3.2.34. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

3.2.35. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$

3.2.36. $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$

3.2.37. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$

3.2.38. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$

3.2.39. $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 \\ 5 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

3.2.40. $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Практичне заняття 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Правило Крамера.

Основні теоретичні відомості.

Система m алгебраїчних рівнянь з n невідомими називається **лінійною**, якщо вона може бути записана у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – невідомі, a_{mn} – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами системи (індекс m вказує номер рівняння, а n номер невідомого, при якому записаний цей коефіцієнт); b_m – дійсні числа, що називаються вільними членами.

Якщо $b_m = 0$ для усіх $m = 1,2, \dots, n$, тоді систему називають **однорідною**, в іншому разі – **неоднорідною**.

Розв'язком системи (4.1) називається множина дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, які при підстановці у систему замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, перетворюють кожне рівняння системи в тотожність.

Система рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок і **несумісною**, якщо розв'язків у системі (4.1) немає.

Система рівнянь (4.1) називається **означеною**, якщо вона має тільки один розв'язок і **неозначеною**, якщо розв'язків більше ніж один.

Наприклад, система $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$ – означена,

система $\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 = -4 \\ -4x_1 + 12x_2 = -8 \end{cases}$ – неозначена,

а система $\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 = -4 \\ -4x_1 + 12x_2 = 2 \end{cases}$ – несумісна.

Дві системи рівнянь називаються **рівносильними** або **еквівалентними**, якщо вони мають однакові множини розв'язків.

Таким чином, всі несумісні системи є **еквівалентними** (бо їх розв'язком є порожня множина).

Правило Крамера.

Швейцарський математик Крамер у XVIII столітті довів теорему, яка дозволяє знаходити розв'язки означених систем.

Теорема 4.1. (*Теорема Крамера*). Якщо визначник Δ системи (4.1) відмінний від нуля, то система означена і її розв'язок знаходиться за формулою

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

де Δ_i визначник, який одержується з Δ заміною елементів і-го стовпчика стовпчиком вільних членів $i = 1,2, \dots, n$.

Якщо визначник системи Δ **дорівнює нулю** і хоча б один із визначників Δ_k **не дорівнює нулю**, то система розв'язків не має.

Якщо визначник системи Δ **дорівнює нулю** і всі визначники Δ_k дорівнюють нулю, то система має безліч розв'язків.

Приклад 4.1. Розв'яжіть систему $\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 = -7; \\ 3x_1 + 5x_3 = -1, \end{cases}$ методом Крамера.

Розв'язання:

$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -25 + 12 = -13$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -39$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 26$;

Відповідь: $x_1 = \frac{-39}{-13} = 3; \quad x_2 = \frac{26}{-13} = -2.$

Перевірка:

$$3(-5) - 4(-2) = -7;$$
$$3 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = -1.$$

Приклад 4.2. Розв'яжіть систему $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1; \\ -5x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -10, \end{cases}$ методом Крамера.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -5 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \\ -3 & -4 \end{matrix} = -16 + 9 - 100 - (30 + 16 + 30) =$$
$$= -107 - 76 = -183.$$

Безпосереднім обчисленням маємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 10 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & -10 & -2 \end{vmatrix} = -366;$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -10 \end{vmatrix} = -183.$$

За теоремою Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{-183} = 0$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-366}{-183} = 2$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-183}{-183} = 1.$

Відповідь: $(0;\ 2;\ 1)$.

Приклад 4.3. Розв'яжіть методом Крамера наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25; \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо визначники: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 25 & 6 & 7 \\ 17 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 25 & 7 \\ 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 25 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 4.$$

Використаємо формули $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, тоді $x_1 = \frac{12}{4} = 3$, $x_2 = \frac{8}{4} = 2$, $x_3 = \frac{4}{4} = 1$

Відповідь: $(3;\ 2;\ 1)$.

Вправи для аудиторної та самостійної роботи.

4.1. Розв'яжіть методом Крамера наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

4.1.1. $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -5; \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

4.1.2. $\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -5; \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

4.1.3. $\begin{cases} -x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2; \\ -3x_1 - 5x_2 - x_3 = 1; \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4. \end{cases}$

4.1.4. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ -5x_1 - 3x_2 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

4.1.5. $\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + x_3 = 5; \\ -3x_2 - x_3 = -2; \\ -5x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

4.1.6. $\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 - x_3 = -4; \\ 3x_1 - 5x_3 = 2; \\ 4x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

Практичне заняття 5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Матричний метод.

Основні теоретичні відомості.

Матричний розв'язок систем лінійних рівнянь.

Запишемо систему лінійних рівнянь (4.1) в матричній формі. Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

де A – матриця коефіцієнтів при невідомих, або матриця системи; X – матриця-стовпець невідомих; B – матриця-стовпець вільних членів.

Згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць систему (4.1) можна записати так:

$$A \cdot X = B.$$

Далі будемо розглядати системи рівнянь в яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь. В цьому випадку матриця A буде квадратною і якщо $|A| \neq 0$, то систему (4.1) можна розв'язати матричним способом звівши її до матричного рівняння $A \cdot X = B$. Помноживши обидві частини рівняння на A^{-1} маємо: $A^{-1}AX = A^{-1}B$; $EX = A^{-1}B$; $X = A^{-1}B$.

Алгоритм матричного методу.

1. Записати систему рівнянь у вигляді матричного рівняння $AX = B$.

Знайти визначник матриці A. Якщо він дорівнює нулю, то система має або нескінченну кількість розв'язків, або не має розв'язків. Якщо визначник не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок.

2. Якщо визначник матриці A не дорівнює нулю, знайти обернену матрицю A^{-1}.
3. Обчислити розв'язок системи за формулою $X = A^{-1} \cdot B$.

Приклад 5.1. Розв'яжіть систему рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10; \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14. \end{cases}$$

Розв'язання: Систему можна записати як матричне рівняння $A \cdot X = B$, де:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок матричного рівняння задається формулою $X = A^{-1}B$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю A^{-1} по формулі $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{matrix} = 40 + 54 + 24 - (30 + 48 + 36) = 4,\ A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 12 & 1 & -3 \\ -12 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{12}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{12}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв’язок системи скориставшись формулою $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{12}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{12}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{4} & -\frac{20}{4} & +\frac{28}{4} \\ \frac{36}{4} & +\frac{10}{4} & -\frac{42}{4} \\ -\frac{36}{4} & +\frac{20}{4} & +\frac{28}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

Перевірка:

$$2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 = 3;$$
$$3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 10;$$
$$9 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 14.$$

Вправи для аудиторної та самостійної роботи.

5.1. Розв’яжіть наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричним способом:

5.1.1. $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -5; \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

5.1.2. $\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -5; \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

5.1.3. $\begin{cases} -x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2; \\ -3x_1 - 5x_2 - x_3 = 1; \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4. \end{cases}$

5.1.4. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ -5x_1 - 3x_2 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

5.1.5. $\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + x_3 = 5; \\ -3x_2 - x_3 = -2; \\ -5x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

5.1.6. $\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 - x_3 = -4; \\ 3x_1 - 5x_3 = 2; \\ 4x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

Практичне заняття 6. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Гаусса.

Основні теоретичні відомості.

Метод Гаусса.

Методами Крамера та оберненої матриці можна розв'язати деякі типи систем лінійних рівнянь. Не можна розв'язувати цими методами системи, в яких визначник систем дорівнює нулю, або кількість рівнянь не дорівнює кількості невідомих. Метод Гаусса позбавлений цих недоліків.

Метод Гаусса – це метод послідовного виключення змінних (при виключенні невідомого x_1 з усіх рівнянь, починаючи з другого, x_2 – з усіх рівнянь, починаючи з третього і т.д.) за допомогою елементарних перетворень:

1) переставляння двох рівнянь місцями;
2) множення обох частин одного з рівнянь системи на одне й те саме число, відмінне від нуля;
3) додавання до обох частин якого-небудь рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;
4) вилучення із системи рівняння, що є тотожністю.

Система рівнянь приводиться до рівносильної системи ступінчастого або трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\qquad x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_m. \end{cases}$$

З одержаної системи послідовно, починаючи з останньої за номером невідомої, рухаючись знизу вгору, знаходять усі інші невідомі. Часто на практиці замість перетворень над системою виконують відповідні перетворення над розширеною матрицею системи.

Нехай задана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (6.1)$$

і $a_{11} \neq 0$ (якщо це не так, то цього можна досягнути перестановкою рівнянь).

1. Помножимо перше рівняння на числа $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$,…, $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ і додаємо отримане рівняння до другого, третього, …, m-вого рівнянь систем (6.1). Виключимо змінну x_1 з усіх рівнянь, починаючи з другого. Отримаємо еквівалентну (6.1) систему лінійних рівнянь (6.2):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \dots \\ a'_{i2}x_2 + \cdots + a'_{in}a_n = b'_i; \\ \dots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \tag{6.2}$$

де a'_i – нові коефіцієнти, які отримаємо в результаті описаних вище перетворень.

2. Далі алгоритм описаний на 1-му кроці застосовується до системи (6.2) з якої виключено перше рівняння і його місце займає друге рівняння. Продовжуючи процес послідовного виключення змінних, після $(k-1)$-го кроку отримаємо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2k}x_k + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots \\ a^{k-1}_{kk}x_k + \cdots + a^{k-1}_{nn}x_n = b^{k-1}_k, \\ \dots \\ 0 = b^{k-1}_{k+1}, \\ \dots \\ 0 = b^{k-1}_m. \end{cases} \tag{6.3}$$

Якщо в системі (6.3) $k = n$, то система звелась до трикутного вигляду і є означеною. В іншому разі система звелась до ступінчатого вигляду і є неозначеною.

Змінні $x_1, x_2, \cdots, x_r$ в системі (6.3) називаються базисними (основними), а $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ – вільними.

Якщо вільним змінним надати довільні значення $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n$, то система (6.3) буде трикутною і базисні змінні можна знайти оберненим ходом Гаусса. **Обернений хід** полягає в послідовному знаходженні невідомих значень із отриманою ступінчастої матриці (6.3). Отриманий розв'язок $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_n)$ називається **частинним розв'язком** системи (6.1). Якщо система лінійних рівнянь (6.1) однорідна, то частинні розв'язки мають вигляд:

$$\overline{\alpha_1} = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \cdots, \alpha_r^1, 1, 0, \cdots, 0);$$
$$\overline{\alpha_2} = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \cdots, \alpha_r^2, 0, 1, \cdots 0);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\overline{\alpha_{n-r+1}} = (\alpha_1^{n-r-1}, \cdots, \alpha_2^{n-r-1}, 0, \cdots, 1);$$

і утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідної системи (6.1). Це означає, що довільний розв'язок однорідної системи $\bar{b}$ може бути представлений у вигляді:

$$\bar{b} = k_1\overline{\alpha_1} + k_2\overline{\alpha_2}, \cdots + k_{n-r+1}\overline{\alpha_{k-r+1}}.$$

Довільний розв'язок $\bar{U}$ неоднорідної системи (6.1) може бути записаний у вигляді:

$$\bar{U} = k_1\overline{\alpha_1} + k_2\overline{\alpha_2}, \cdots + k_{n-r+1}\overline{\alpha_{k-r+1}} + \bar{\alpha},$$

де $\overline{\alpha_1}, \cdots, \overline{\alpha_{n-r+1}}$ – фундаментальна система розв’язків відповідної однорідної системи і $\bar{\alpha}$ – частинний розв’язок системи (6.1).

Частинний розв’язок, в якому всі вільні змінні рівні «0» називається **базисним.**

Алгоритм методу Гаусса.

1. Скласти розширену матрицю системи.
2. Зробити так, щоб коефіцієнт $a_{11} = 1$. Для цього можна поміняти рядки місцями, або поділити перший рядок на a_{11}.
3. У першому стовпці під коефіцієнтом 1 зробити всі нулі. Для цього помножити перший рядок послідовно на $-a_{21}, -a_{31}, \ldots, -a_{m1}$ і додати відповідно до другого, третього, ..., m-го рядків.
4. Зробити так, щоб коефіцієнт $a_{22} = 1$, а під ним були нулі.
5. Описані дії повторити для всіх діагональних елементів (з однаковими індексами).
6. Знайти ранги (**ранг матриці** – це порядок найбільшого відмінного від нуля мінора цієї матриці) основної і розширеної матриці системи.
7. За останньою матрицею скласти систему лінійних рівнянь та дослідити її:
   a) якщо ранги основної і розширеної матриці не рівні, то система розв’язків не має;

   Наприклад:

   $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4; \end{cases}$ (ранг основної матриці рівний 1, а розширеної - 2);

   $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 9; \end{cases}$ (ранг звичайної - 2, розширеної – 3).

   Системи не мають розв’язків.

   b) якщо ранги основної і розширеної матриці рівні та ранг системи дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв’язок.

Його шукають так: з одержаної системи послідовно, починаючи з останньої за номером невідомої, рухаючись знизу вгору, знаходять усі інші невідомі.

Наприклад:

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$ (ранг основної матриці рівний 3, розширеної – 3);

Після застосування елементарних перетворень отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{-10}{3} & -9 \end{array}\right)$$

Розв’язок: $x_1 = \frac{7}{10}$; $x_2 = \frac{7}{2}$; $x_3 = \frac{27}{10}$.

c) якщо ранги співпадають, але ранг системи менший, ніж кількість невідомих n, то ця система неозначена. Розв'язки її шукають так: перші s невідомих $x_1, x_2, \dots, x_s$ (*базисні*), визначають через інші невідомі $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n$ (*вільні*).
Наприклад:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Ранг основної та розширеної матриць рівний 1.

Після застосування елементарних перетворень отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Розв'язок: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$; $x_2 = x_2$; $x_3 = x_3$.

Приклад 6.1. Розв'яжіть методом Гаусса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3. \end{cases}$$

1. Виконуємо перетворення над розширеною матрицею системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array}\right)^{\times(R_1/2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array}\right)^{\times(R_2+(-3)R_1)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array}\right)^{\times(R_3+(-4)R_1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right)^{\times(R_3+(-6/5)R_2)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{-22}{5} \end{array}\right)$$

Як ми бачимо ранги основної та розширеної матриць рівні 3. З чого можемо зробити висновок, що розв'язок існує і він є тільки один.

2. З останньої матриці складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + x_3 = \dfrac{1}{2}; \\ -\dfrac{5}{2}x_2 - x_3 = -\dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{11}{5}x_3 = -\dfrac{22}{5}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -2; \\ x_2 = -\dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{1}{2} + x_3\right) = 1; \\ x_1 = \dfrac{1}{2}(1 - x_2 - 2x_3) = 2. \end{cases}$$

Відповідь: (2;1;-2).

Приклад 6.2. Розв'язати систему методом Гауса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = -4. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right), \end{array}$$

де x_1, x_2 – базисні змінні, x_3 , x_4, x_5 – вільні змінні.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & & -x_3 & -x_4 & -x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & -3 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right). \end{array}$$

Знайдемо частинний розв'язок $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$.
Нехай $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$. Система прийме вигляд:

$$\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -7 \end{array}\right).$$

$$5x_2 = -7 \quad x_2 = -\frac{7}{5};$$

$$x_1 = -3 - 2x_2 = -3 + 2 \cdot \frac{7}{5} = -3 + \frac{14}{5} = -\frac{1}{5};$$

$$\bar{a} = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, 0,0,0\right).$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Якщо $\overline{a_1} = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, 1,0,0)$, тоді отримаємо систему: $\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$.

Звідки:

$$x_2 = \frac{4}{5};$$

$$x_1 = 3 - 2x_2 = 3 - 2 \cdot \frac{4}{5} = 3 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5}.$$

Отже, $\overline{a_1} = \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 1{,}0{,}0\right)$.

Якщо $\overline{a_2} = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, 0{,}1{,}0)$, тоді отримаємо систему $\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{array}\right)$.

Звідки:

$$5x_2 = 1; \quad x_2 = \frac{1}{5};$$

$$x_1 = -1 - 2x_2; \; x_1 = -1 - \frac{2}{5} = -\frac{7}{5}.$$

Отже, $\overline{a_2} = \left(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, 0{,}1{,}0\right)$.

Якщо $\overline{a_3} = (\alpha_1^3, \alpha_2^3, 0{,}0{,}1)$, тоді отримаємо систему: $\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{array}\right)$.

Звідки:

$$5x_2 = -3; \quad x_2 = \frac{-3}{5};$$

$$x_1 = -2 - 2x_2; \; x_1 = -2 - 2 \cdot \frac{-3}{5} = 2 + \frac{6}{5} = \frac{-4}{5}.$$

Отже, $\overline{a_3} = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0{,}0{,}1\right)$; $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ – фундаментальна система розв’язків; $\bar{b} = k_1\overline{a_1} + k_2\overline{a_2} + k_3\overline{a_3} + \bar{a}$ – загальний розв’язок системи.

В координатній формі загальний розв’язок можна записати у виді:

$$\bar{b} = \left(-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}k_1 - \frac{7}{5}k_2 - \frac{4}{5}k_3; \; -\frac{7}{5} + \frac{4}{5}k_1 + \frac{1}{5}k_2 - \frac{3}{5}k_3; k_1; k_2; k_3\right).$$

Вправи для аудиторної та самостійної роботи.

6.1. Розв’яжіть методом Гаусса наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

6.1.1. $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -5; \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

6.1.2. $\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -5; \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

6.1.3. $\begin{cases} -x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2; \\ -3x_1 - 5x_2 - x_3 = 1; \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4. \end{cases}$

6.1.4. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ -5x_1 - 3x_2 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

6.1.5. $\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + x_3 = 5; \\ -3x_2 - x_3 = -2; \\ -5x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

6.1.6. $\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 - x_3 = -4; \\ 3x_1 - 5x_3 = 2; \\ 4x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

Індивідуальні завдання.

6.2. Розв’яжіть систему: а) методом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса.

6.2.1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4; \\ x_1 + 5x_3 = -3; \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

6.2.2. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -3; \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2; \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

6.2.3. $\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 8; \\ -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -7. \end{cases}$

6.2.4. $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 9; \\ -5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -10; \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

6.2.5. $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6; \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 9; \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

6.2.6. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 12; \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -6; \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$

6.2.7. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12; \\ -x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -4; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -12. \end{cases}$

6.2.8. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 8; \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 9; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$

6.2.9. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -11; \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6; \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -12. \end{cases}$

6.2.10. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -10; \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = -12; \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$

6.2.11. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -4; \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -1; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.2.12. $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2; \\ x_1 + 4x_2 - 1x_3 = -2; \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

6.2.13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -5; \\ -3x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

6.2.14. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 = -3; \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -3; \\ x_1 - 4x_3 = -3. \end{cases}$

6.2.15. $\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3; \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

6.2.16. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_3 = -4; \\ 9x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$

6.2.17. $\begin{cases} -3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 5; \\ 7x_1 - 9x_2 - 2x_3 = 8; \\ 8x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

6.2.18. $\begin{cases} -8x_1 + x_2 - x_3 = -5; \\ 9x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2; \\ -2x_1 = 0. \end{cases}$

6.2.19. $\begin{cases} 4x_1 + 8x_3 = 8; \\ -9x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9; \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

6.2.20. $\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 - 6x_3 = 0; \\ -7x_1 + 8x_2 + 8x_3 = 3; \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

6.2.21. $\begin{cases} 2x_2 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

6.2.22. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = -3; \\ -5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$

6.2.23. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$

6.2.24. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \\ -2x_1 + -3x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

6.2.25. $\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3; \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -1; \\ 3x_1 - 4x_3 = -1. \end{cases}$

6.2.26. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 12; \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -6; \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$

6.2.27. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12; \\ -x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -4; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -12. \end{cases}$

6.2.28. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 8; \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 9; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$

6.2.29. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -11; \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6; \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -12. \end{cases}$

6.2.30. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -10; \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = -12; \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$

6.2.31. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4; \\ x_1 + 5x_3 = -3; \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

6.2.32. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -3; \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2; \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

6.2.33. $\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 8; \\ -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -7. \end{cases}$

6.2.34. $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -9; \\ -5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -10; \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

6.2.35. $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6; \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 9; \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

6.2.36. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 12; \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -6; \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$

6.2.37. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12; \\ -x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -4; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -12. \end{cases}$

6.2.38. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 8; \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 9; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$

6.2.39. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -11; \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6; \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -12. \end{cases}$

6.2.40. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -10; \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = -12; \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$

Практичне заняття 7. Диференційованість функції. Означення похідної функції однієї змінної.

Основні теоретичні відомості.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$. Зафіксуємо деяке значення $x = x_0$ і візьмемо нове значення $x = x_1$ $\left(x_0, x_1 \in (a, b)\right)$. Позначимо приріст аргументу через $\Delta x = x_1 - x_0$. Знайдемо значення функції в точці x_1:

$$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$$

і приріст функції

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Похідною функції однієї змінної в даній точці x_0, або звичайною похідною, називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = y'(x_0).$$

Операція знаходження похідної функції називається **диференціюванням функції**.

Якщо функція $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ має похідну, то кажуть, що вона **диференційована** в точці x_0.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідні в кожній точці інтервалу $(a; b)$, то кажуть, що вона **диференційована** на інтервалі $(a; b)$.

Теорема 7.1. Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці $x = x_0$, то вона є неперервною в цій точці.

Обернене твердження не є істинним.

Правила диференціювання:

1. $(c)' = 0$ $(c = const)$.
2. $(cu)' = cu'$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$.

Похідна складеної функції.

Розглянемо складену функцію $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, x – незалежна змінна, u – проміжкова змінна.

Теорема 7.2. Якщо функція $\varphi(x)$ має похідну в деякій точці x, тобто існує $\varphi'(x)$, а функція $f(u)$ має похідну $f'(u)$ у відповідній точці $u = \varphi(x)$, тоді складена функція $y = f(u)$ теж має похідну у цій точці x, яка дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжковій змінній на похідну від проміжкової змінної по незалежній змінній, тобто: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Зауваження. Якщо складена функція містить кілька проміжкових змінних ($y = f(u), u = \varphi(x), x = \psi(t)$), тоді $y'_t = y'_u \cdot u'_x \cdot x'_t$.

Таблиця похідних:

1. $C' = 0, (C = const)$; 10. $(\sin x)' = \cos x$;

2. $x' = 1$;
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
5. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
6. $(a^x)' = a^x \ln a$;
7. $(e^x)' = e^x$;
8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
11. $(\cos x)' = -\sin x$;
12. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
13. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
16. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклад 7.1. Знайдіть похідні функцій:

1. $y = 4x^5 - 3x^4 + 1$.

   $y' = (4x^5 - 3x^4 + 1)' = (4x^5)' - (3x^4)' + (1)' = 4 \cdot 5 \cdot x^4 - 3 \cdot 4 \cdot x^3 = 20x^4 - 12x^3$.

2. $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$.

   $y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, отже $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Приклад 7.2. Знайдіть похідні складених функцій:

1. $y = \ln(\sin x)$.

   $y' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$.

2. $y = \ln(\sin 2x)$.

   $y' = \frac{1}{\sin 2x}(\sin 2x)' = 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\operatorname{ctg} 2x$.

3. $y = \cos^5 3x$.

   $y' = 5 \cdot \cos^4 3x \cdot (\cos 3x)' = 5 \cdot \cos^4 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' = -15\cos^4 3x \cdot \sin 3x$.

4. $y = \sqrt[3]{\sin^2 2x} = (\sin 2x)^{2/3}$.

   $y' = \frac{2}{3}(\sin 2x)^{\frac{2}{3}-1}(\sin 2x)' = \frac{2}{3}(\sin 2x)^{-\frac{1}{3}} \cdot \cos 2x \cdot 2 = \frac{4\cos 2x}{3\sqrt[3]{\sin 2x}}$.

Похідні вищих порядків.

Нехай функція $f(x)$ має похідну у всіх точках інтервалу (a,b). Якщо функція $f'(x)$ диференційована у точці $x_0 \in (a,b)$, то її похідну називають **похідною другого порядку** функції $f(x)$ у точці x_0 і позначають одним з наступних способів $f''(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$.

Обчислення другої похідної зводиться до послідовного знаходження похідних і ніяких спеціальних правил для обчислення похідної другого порядку не потрібно.

Приклад 7.3. Знайдіть другу похідну функції $y = \sin^2 x$.

Розв'язання: $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$, $y'' = (y')' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$.

Похідну від другої похідної функції $f(x)$ називають **третьою похідною** або **похідною третього порядку** і позначають $f'''(x)$ або $f^{(3)}(x)$.

Аналогічно визначаються похідні будь-якого порядку. Нехай функція $f(x)$ має на інтервалі (a,b) похідні $f'(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$. Якщо в точці $x \in (a,b)$ існує похідна функції $f^{(n-1)}(x)$, то цю похідну називають **похідною *n*-го порядку** або ***n*-ою похідною функції** $f(x)$ й позначають $f^{(n)}(x)$. За визначенням $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Приклад 7.4. Знайдіть похідну четвертого порядку:

$$y = x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 5.$$

Розв'язання: Для того, щоб знайти похідну четвертого порядку знайдемо спочатку похідні першого, другого та третього порядків:

$$y' = 5x^4 + 12x^3 - 4x + 1,$$
$$y'' = (y'(x))' = 20x^3 + 36x^2 - 4,$$
$$y^{(3)} = (y''(x))' = 60x^2 + 72x,$$
$$y^{(4)} = (y^{(3)}(x))' = 120x + 72.$$

Вправи для аудиторної та самостійної роботи.

7.1. Знайдіть похідні функцій:

7.1.1. $y = x^4 - 4x^2 + x - 5$;

7.1.2. $y = \frac{4}{x} + \frac{3}{2x^3} - \frac{5}{4x^2}$;

7.1.3. $y = 5\sqrt{x} - 4tgx$;

7.1.4. $y = 3\ln x - 2e^x$;

7.1.5. $y = \frac{ctgx - 2\ln x}{4}$;

7.1.6. $y = \left(x + \frac{5}{x}\right)^2$;

7.1.7. $y = lnx \cdot \cos x$;

7.1.8. $y = \frac{x^3 + 3x}{2\ln x}$;

7.1.9. $y = \frac{1 + \sin x}{x^4}$;

7.1.10. $y = (3x + 2)^2 \cdot 3^x$;

7.1.11. $y = 2^x \cdot \sqrt[3]{x^2}$;

7.1.12. $y = (3x^4 - 8x^3) \cdot (2lnx + 1)$.

7.2. Знайдіть похідні складених функцій:

7.2.1. $y = \cos^4(3x - 2x^3)$;

7.2.2. $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\ln(1 - 2x)}$;

7.2.3. $y = \frac{\cos(2 - 5x)}{tg(3x + 1)}$;

7.2.4. $y = \sqrt[4]{\frac{\cos 3x^3}{e^{2x} - 2}}$;

7.2.5. $y = \cos(5x \cdot e^{3x^2 - 2x})$;

7.2.6. $y = ln(\,ln(\,x^3 - 3x))$.

Індивідуальні завдання.

7.3. Знайдіть похідні функцій:

7.3.1. $y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 5x - 3$;

7.3.2. $y = x^5 - 5x^3 + 2x - 4$;

7.3.3. $y = \frac{3x^6}{2} - \frac{2}{x} + x - 5$;

7.3.4. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$;

7.3.5. $y = \frac{5}{x} + \frac{3}{3x^2} - \frac{4}{3x^3}$;

7.3.6. $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}$;

7.3.7. $y = \frac{5}{x} - 3\sqrt[3]{x} - 11$;

7.3.8. $y = \left(1 + 2\sqrt{x}\right)^2$;

7.3.9. $y = \left(2x + 3\sqrt{x}\right)^2$;

7.3.10. $y = \left(3x + \sqrt{x^3}\right)^2$;

7.3.11. $y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$;

7.3.12. $y = \frac{4}{\sqrt[4]{x^2}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$;

7.3.13. $y = \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt[6]{x^4}}$;

7.3.14. $y = 3tgx - 2\cos x + 1$;

7.3.15. $y = 5\sin x + 4e^x$;

7.3.16. $y = 6\cos x + 8e^x + 5$;

7.3.17. $y = \sqrt{x} + 6ctgx$;

7.3.18. $y = 4\cos x + 5 \cdot 3^x$;

7.3.19. $y = 5ln\,x + 3\sqrt[5]{x^3}$;

7.3.20. $y = 3e^x - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$;

7.3.21. $y = 3 - \frac{3\cos x}{2}$;

7.3.22. $y = 4\sin x - 5tgx$;

7.3.23. $y = 6\,ln\,x + 4e^x$;

7.3.24. $y = \frac{e^x}{\sqrt{3}} - \frac{2ln\,x}{\sqrt{5}}$;

7.3.25. $y = \frac{5cosx}{\sqrt{7}} - \frac{4ln\,x}{\sqrt{3}}$;

7.3.26. $y = 8x^4 + 3ctgx$;

7.3.27. $y = 2e^x - \frac{3}{2x} + \frac{1}{5}ln\,x$;

7.3.28. $y = e^x - \frac{3sinx}{2} + \frac{1}{4}ctg\,x$;

7.3.29. $y = 5\cos x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$;

7.3.30. $y = 5\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}$;

7.3.31. $y = \frac{tgx + 4ln\,x}{3}$;

7.3.32. $y = \sqrt{5}\sin x - \frac{tgx}{3}$;

7.3.33. $y = 3\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x}$;

7.3.34. $y = 5e^x + 3\cos x - 4\sin x$;

7.3.35. $y = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^2$;

7.3.36. $y = \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$;

7.3.37. $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{\sqrt[4]{x^5}} + 5x^4$;

7.3.38. $y = \frac{5}{\sqrt[5]{x}} - \frac{4}{\sqrt[4]{x^6}} + 6x^3$;

7.3.39. $y = \left(\frac{5}{\sqrt[5]{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$;

7.3.40. $y = e^x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{3}$.

7.4. Знайдіть похідні функцій:

7.4.1. $y = \sin x \cdot tg\,x$;

7.4.2. $y = (x^3 + x^2)\sin x$;

7.4.3. $y = ctgx \cdot lnx$;

7.4.4. $y = e^x \cdot \cos x$;

7.4.5. $y = tg\,x \cdot \left(\frac{x}{6} + \sqrt[3]{x}\right)$;

7.4.6. $y = (x^2 + x^4)^2$;

7.4.7. $y = \frac{x-5}{x+3}$;

7.4.8. $y = \frac{x^2+2x}{\ln x}$;
7.4.9. $y = \frac{x+5}{\sin x}$;
7.4.10. $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$;
7.4.11. $y = \frac{x^6-3x^4}{\cos x}$;
7.4.12. $y = \frac{x^4+x-5}{x^5+1}$;
7.4.13. $y = (\cos x + ctg\, x)^2$;
7.4.14. $y = \frac{(x^2-x)^2}{tg\, x}$;
7.4.15. $y = \frac{\cos x - 2\sin x}{x-e^x}$;
7.4.16. $y = \frac{ctg\, x - e^x}{\ln x}$;
7.4.17. $y = \frac{\ln x + \sin x}{x^2}$;
7.4.18. $y = \sqrt[5]{x^4} \cdot tg\, x$;
7.4.19. $y = \sin x \cdot e^x$;
7.4.20. $y = \frac{2x^3-3x}{4x+1}$;
7.4.21. $y = \frac{tg\, x - 4x}{\cos x}$;
7.4.22. $y = \ln x \cdot \left(\frac{e^x}{3} + x^2\right)$;
7.4.23. $y = \sin x \cdot tgx$;
7.4.24. $y = ctgx \cdot \cos x$;
7.4.25. $y = (4x-5)^2 \cdot 5^x$;
7.4.26. $y = \frac{\sin x + \ln x}{x^2-2}$;
7.4.27. $y = (\sin x + 3^x)^2$;
7.4.28. $y = \frac{e^x-3^x}{x-ctgx}$;
7.4.29. $y = \frac{\cos x \cdot 5^x}{x^5}$;
7.4.30. $y = \frac{tgx}{(3x^2-7x)}$;
7.4.31. $y = 10^x \cdot \sqrt[5]{x^3}$;
7.4.32. $y = \frac{x^5-1}{4} \cdot e^x$;
7.4.33. $y = \frac{4x^6-3}{4x^4+1}$;
7.4.34. $y = \frac{e^x-4x}{4^x}$;
7.4.35. $y = ctg\, x \cdot \left(\frac{5^x}{3} + x^5\right)$;
7.4.36. $y = 7^x \cdot tgx$;
7.4.37. $y = \cos x \cdot (e^x + 3^x)$;
7.4.38. $y = (4x^4 - 5x^2) \cdot (e^x + 1)$;
7.4.39. $y = \frac{\sin x + 2x}{x^2 - 2e^x}$;
7.4.40. $y = \frac{\sin x + 2x}{x^2 - 2e^x}$.

7.5. Знайдіть похідні складених функцій:

7.5.1. $y = \sin^2 4x$;
7.5.2. $y = \cos^5 \frac{2x}{3}$;
7.5.3. $y = \sin 4x \cdot tg\, 5x$;
7.5.4. $y = (\sin 3x + \ln 2x)^2$;
7.5.5. $y = \sin^3(x - 2x^2)$;
7.5.6. $y = \sqrt[4]{ctg\, 5x}$;
7.5.7. $y = \sqrt{(3x^2 - 5x + 7)}$;
7.5.8. $y = \frac{\cos 6x}{\sin 4x}$;
7.5.9. $y = \frac{2^{3x} - e^{-3x}}{\sqrt{x}+1}$;
7.5.10. $y = \ln(4x^4 + 5x - 2)$;
7.5.11. $y = (\cos 2x + 1)^8$;
7.5.12. $y = \frac{5}{\sqrt[5]{(2x - \ln 3x)^2}}$;
7.5.13. $y = \frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\cos\sqrt{2x-1}}$;
7.5.14. $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{tg(1-2x)}$;
7.5.15. $y = \frac{1}{(1+\ln 4x)^7}$;
7.5.16. $y = \frac{ctg\sqrt{x^3+2x+5}}{tg(3x^2)}$;
7.5.17. $y = \frac{\sqrt{1-\ln 2x}}{(x-2x^2)}$;
7.5.18. $y = \sqrt[6]{\frac{5x-1}{1+4x}}$;
7.5.19. $y = \frac{\cos\sqrt{x-5}}{\sqrt{2x-1}}$;
7.5.20. $y = \frac{\sin 2x - 5x}{\cos(x+1)}$;
7.5.21. $y = (ctg 7x + 5)^4$;

7.5.22. $y = \frac{\sqrt{ln(5x+5)}}{sin\, 2x}$;

7.5.23. $y = \frac{1}{(1+\sqrt{ln\, 2x})^3}$;

7.5.24. $y = \frac{2^{3x}}{sin(3x)}$;

7.5.25. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(cos\, 2x - sin3x)^4}}$;

7.5.26. $y = sin(\, 2x) \cdot e^{3x^2-2x}$;

7.5.27. $y = \frac{\sqrt{1+5x-2x^4}}{ln(2x-x^2)}$;

7.5.28. $y = \frac{ln\sqrt{1+3x^2}}{sin\, 6x}$;

7.5.29. $y = \sqrt[3]{\frac{sin\, 2x^3}{e^{3x}-3}}$;

7.5.30. $y = ln(\, sin(\, x^2 - 2x))$;

7.5.31. $y = tg^5(7x+5)^4$;

7.5.32. $y = \frac{e^{sin\, x}}{sin\, 2x}$;

7.5.33. $y = \frac{10}{(1+\sqrt{tg\, 7x})^{10}}$;

7.5.34. $y = \frac{2^{x+tgx}}{sin(x+5)}$;

7.5.35. $y = \frac{1}{\sqrt[5]{(ln\, 2x)^4}}$;

7.5.36. $y = sin(\, 2x \cdot e^{x^2-x})$;

7.5.37. $y = \frac{\sqrt{cos7x}}{ln(x)-x^2}$;

7.5.38. $y = \frac{ln\sqrt{e^{sinx}}}{sin\, 6x}$;

7.5.39. $y = \sqrt[3]{\frac{cos\, 2x^3}{e^{3x}}}$;

7.5.40. $y = ln(\, cos^3(\, x^4) - 2x)$

Практичне заняття 8. Первісна функція і невизначений інтеграл. Визначений інтеграл.

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на проміжку (a,b), якщо для будь-яких значень x, де $x \in (a,b)$, функція $F(x)$ диференційована і має похідну $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, функції $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} - 3$, $F_3(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ є первісними для однієї й тієї ж функції $f(x) = x^2$.

Дійсно, $\left(\frac{x^3}{x}\right)' = x^2$, $\left(\frac{x^3}{x} - 3\right)' = x^2$, $\left(\frac{x^3}{x} + 5\right)' = x^2$.

Теорема 8.1. (*Основна теорема інтегрального числення*). Нехай функція $f(x)$ визначена і *неперервна* на (a,b). Тоді $f(x)$ має первісну на цьому інтервалі.

Далі довільну сталу будемо позначати C.

Теорема 8.2. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ є первісними функціями для $f(x)$ на проміжку(a,b), то різниця між цими первісними дорівнює сталій:

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на (a,b), то будь-яка інша первісна для функції $f(x)$ матиме вигляд $F(x) + C$.

Сукупність всіх первісних функцій для даної функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на цьому інтервалі та позначається символом $\int f(x)\,dx$. В цьому позначенні знак $\int$ називається **знаком інтеграла**, $f(x)$ – **підінтегральна функція**, $f(x)\,dx$ – **підінтегральний вираз**.

Зауважимо, що не будь-яка функція є первісною, тому що не кожна функція є диференційованою на (a,b).

З означення випливають наступні **властивості**:

1) Якщо $F(x)$ одна з первісних функцій для функції $f(x)$ на (a,b), тоді
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$
2) Якщо первісна (а отже, й невизначений інтеграл) для функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) існує, тоді підінтегральний вираз у символічному записі $\int f(x)\,dx$ зображує диференціал будь-якої з цих первісних
$$dF(x) = f(x)\,dx.$$
3) Похідна від інтегралу є підінтегральною функцією.
$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x); \; \left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$
4) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.
5) $\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C$;
   $\int dx = x + C$.
6) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.
7) $\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$.
8) $\int f(kx + b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$, якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Табличні інтеграли.

1. $\int 0\,dx = C$, де C – довільна стала;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$;
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
6. $\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$;
7. $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$;
8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
9. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;
13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;
16. $\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$, де $u = u(x)$, визначена і диференційована;
17. $\int \frac{u'dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$, де $u = u(x)$, визначена і диференційована;
18. $\int \frac{u'dx}{u} = \ln u + C$, де $u = u(x)$, визначена і диференційована.

Приклад 8.1. Знайдіть інтеграл: $\int \frac{2}{3x^5}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{2}{3x^5}dx = \int \frac{2}{3}x^{-5}dx = \frac{2}{3}\int x^{-5}dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{1}{6}x^{-4} + C = -\frac{1}{6x^4} + C$.

Приклад 8.2. Знайдіть інтеграл: $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз представляє дріб. Правила інтегрування дробу, на відміну від диференціювання, не існує. Але якщо розділити почленно чисельник дроба на знаменник, отримаємо під знаком інтеграла суму степеневих функцій, інтегрування яких не викликає труднощів.

$$\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{5}{12}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{5}{12}}\right)dx =$$

$$\frac{1}{6}\int x^{\frac{1}{6}}\,dx-\frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{3}}\,dx+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}\int x^{\frac{5}{12}}\,dx=$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1}+C=\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{8\sqrt[4]{5}}{17}x^{\frac{17}{12}}+C=$$

$$\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{8}{17}\sqrt[12]{125x^{17}}+C.$$

Приклад 8.3. Знайдіть інтеграл: $\int(2x^2+1)^3dx$.

Розв'язання. Скористаємося для підінтегральної функції формулою скороченого множення:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Отримаємо:

$$(2x^2+1)^3=8x^6+12x^4+6x^2+1.$$

Тоді, отримаємо:

$$\int(2x^2+1)^3\,dx=$$

$$\int(8x^6+12x^4+6x^2+1)\,dx=8\int x^6\,dx+12\int x^4\,dx+6\int x^2\,dx+\int dx=$$

$$\frac{8}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5+2x^3+x+C.$$

Методи інтегрування невизначених інтегралів. Заміна змінних у невизначеному інтегралі.

Нехай задано інтеграл $\int f(x)\,dx$, який безпосередньо проінтегрувати по x немає можливості, оскільки він не є табличним інтегралом.

Ефективним прийомом зведення підінтегрального виразу до виду, який присутній в табличних інтегралах, є **заміна змінної** (або підстановка). В підінтегральному виразі $f(x)\,dx$ вводять замість змінної x допоміжну змінну t, пов'язану деякою залежністю: $x=\varphi(t)$. Причому, береться така функція $\varphi(t)$, яка має неперервну похідну $\varphi'(t)$, що забезпечує тим існування диференціала $dx=\varphi'(t)\,dt$. При такій заміні підінтегральний вираз представиться у вигляді $f[\varphi(t)\cdot\varphi'(t)]\,dt$. Ми одержали $\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)\cdot\varphi'(t)]\,dt$. В правій частині останньої рівності підінтегральна функція $f[\varphi(t)\cdot\varphi'(t)]$ є функцією від t. Якщо виявиться, що ця функція $f_1(t)=f[\varphi(t)\cdot\varphi'(t)]$ є такою, при якій $\int f_1(t)\,dt$ уже належить до табличних або зводиться до табличних простіше, ніж вихідний інтеграл, тоді наша заміна змінної і наше перетворення досягає мети. Після того як інтеграл буде обчислений по змінній t, потрібно повернутися до старої змінної x.

Приклад 8.4. Знайдіть інтеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+4}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+4}=\begin{vmatrix}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{vmatrix}=\int\frac{2t}{t+4}dt=2\int\frac{(t+4)-4}{t+4}dt=$

$$2\int\left(\frac{t+4}{t+4}-\frac{4}{t+4}\right)dt = 2\int\left(1-\frac{4}{t+4}\right)dt = 2(t-4\ln|t+4|)+C =$$
$$= 2\left(\sqrt{x}-4\ln|t+4|\right)+C.$$

Приклад 8.5. Знайдіть інтеграл: $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Розв'язання. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left|\begin{matrix} 4-x^2=t \\ -2x\,dx = dt \\ xdx = -\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right| = \int\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{t}}dt = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}2\sqrt{t} + C = C-\sqrt{t} = C-\sqrt{4-x^2}$.

Приклад 8.6. Знайдіть інтеграл: $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\cos x}}$.

Розв'язання. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\cos x}} = \left|\begin{matrix} 2+\cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \\ \sin x\,dx = -dt\end{matrix}\right| = -\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t}+C = C-2\sqrt{2+\cos x}$.

Приклад 8.7. Знайдіть інтеграл: $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$.

Розв'язання. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}} = \left|\begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \\ \sin x\,dx = -dt\end{matrix}\right| = -\int\frac{dt}{\sqrt{2+t^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{2+t^2}\right|+C = -\ln\left|\cos x+\sqrt{2+\cos^2 x}\right|+C$.

Інтегрування частинами.

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ неперервно диференційовані функції. Тоді справедлива формула:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

яка називається **формулою інтегрування частинами**.

Інтегрування частинами використовується тоді, коли підінтегральна функція є:

1. Добутком степеневої на тригонометричну функцію.
2. Добутком степеневої на показникову функцію.
3. Добутком показникової на тригонометричну функцію.
4. Деяких інших видів, зокрема добутком степеневої на логарифмічну функцію та обернену тригонометричну функцію.

Приклад 8.8. Знайдіть інтеграл: $\int xe^{-x}$.

Розв'язання. $\int xe^{-x} = \left|\begin{matrix} u = x \\ dv = e^{-x}dx \\ du = dx, v = -e^{-x}\end{matrix}\right| = -xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx =$

$$-xe^{-x}-e^{-x}+C = C-e^{-x}(x+1).$$

Приклад 8.9. Знайдіть інтеграл: $\int x^2\cos 2x\,dx$.

Розв'язання. $\int x^2\cos 2x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2 \\ du = 2xdx \\ dv = \cos 2x\,dx \\ v = \int\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}x^2\sin 2x -$
$\int 2x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin 2x\,dx \\ v = \int\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - (-\frac{1}{2}x\cos 2x +$
$\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx) = \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)\sin 2x +$
$\frac{1}{2}x\cos 2x + C$.

Приклад 8.10. Знайдіть інтеграл: $\int x^2\ln x\,dx$.

Розв'язання. $\int x^2\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x & dv = x^2dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^3}{3} \end{matrix}\right| = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{x}dx =$
$\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C$.

Визначений інтеграл.

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$. Нехай функція $F(x)$ є **первісною** для функції $f(x)$ на цьому відрізку, тобто

$$F'(x) = f(x).$$

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

називається відповідний приріст її первісної (формула Ньютона–Лейбніца)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Число a називається нижньою межею інтегрування, b – верхньою межею; $f(x)\,dx$ називається підінтегральним виразом, $f(x)$ – підінтегральною функцією; відрізок $[a;b]$ – проміжком інтегрування. Звідси випливає, щоб обчислити визначений інтеграл потрібно знайти первісну підінтегральної функції, обчислити значення цієї первісної від верхньої та нижньої меж і обчислити їх різницю. Різницю з правої частини формули Ньютона–Лейбніца записують у вигляді підстановки:

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Тоді маємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Властивості визначеного інтеграла:

1) Значення визначеного інтеграла не залежить від того, яким символом позначена змінна інтегрування, тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2) Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі, то знак інтеграла змінится на протилежний:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

3) Визначений інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

4) Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx, (C = \text{const}).$$

5) Визначений інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

6) Адитивність:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

причому точка c може міститься як усередині відрізка $[a; b]$, так і зовні цього відрізка.

7) Якщо $a < b$ і $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

8) Якщо $a < b$ і $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

9) **Теорема про середнє значення визначеного інтеграла**.
Визначений інтеграл від неперевної функції дорівнює добутку довжини проміжка інтегрування на значення підінтегральної функції у деякій внутрішній точці проміжка інтегрування:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - c)f(c), \quad c \in [a; b].$$

Приклад 8.11. Знайдіть інтеграл: $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання. Первісною функцією для $\frac{1}{1+x^2}$ є функція $\operatorname{arctg} x$. Тому за формулою Ньютона–Лейбніца маємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \,|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Застосування визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл має широке застосування у математиці та фізиці. Розглянемо застосування визначеного інтеграла у геометрії, зокрема для знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій.

Площа криволінійної трапеції.

Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної невід'ємної функції на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$ і $x=b$, дорівнює(Рис. 8.1.): $S=\int_a^b f(x)\,dx$.

Якщо на заданому проміжку $[a;b]$ неперервні функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ мають ту властивість, що $f(x)>g(x)$ для всіх x з проміжку $[a;b]$, тоді (Рис. 8.2.):

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

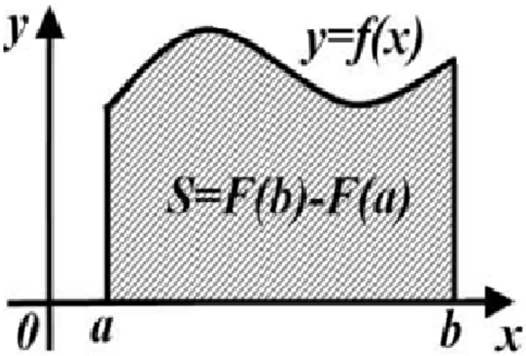


Рис 8.1.

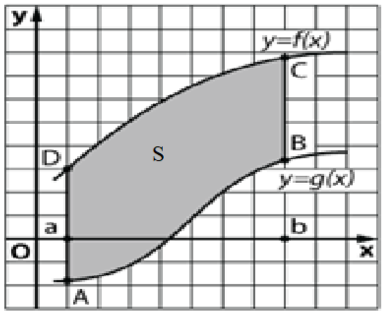
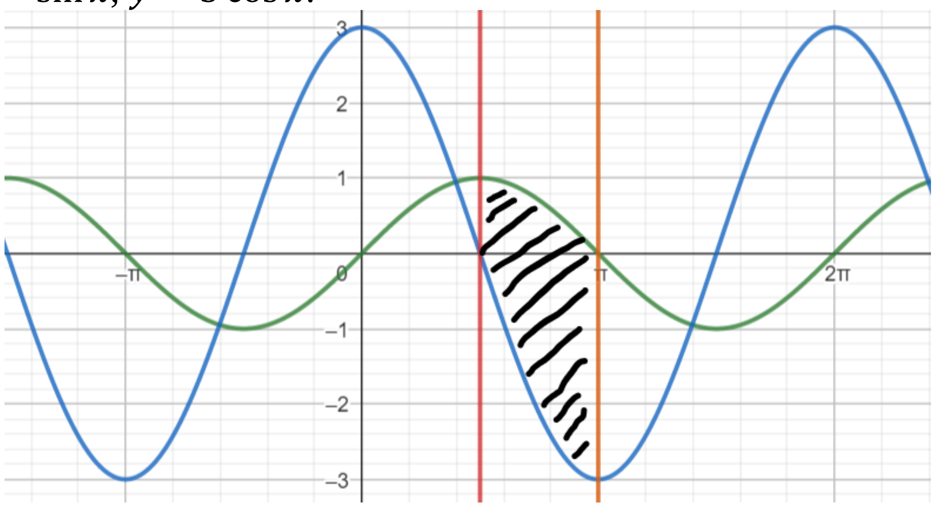


Рис. 8.2.

Приклад 8.12. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y=\sin x$, $y=3\cos x$, $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. 1. Для обчислення площі фігури спочатку побудуємо графіки функцій $y=\sin x$, $y=3\cos x$.



2. Межі інтегрування у даному випадку нам задані.

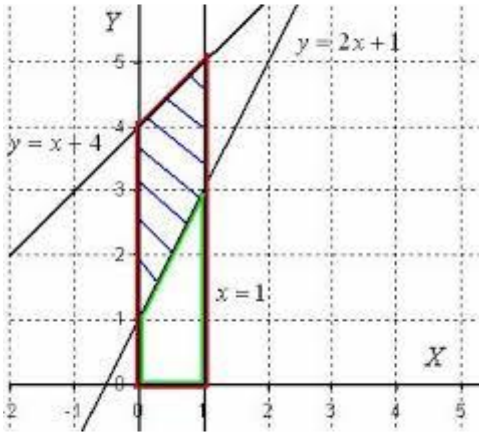
3. Шукана фігура обмежена на заданому проміжку згори графіком функції $y=\sin x$, а знизу – $y=3\cos x$.

4. Обчислимо площу, застосовуючи формулу: $S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-3\cos x)\,dx=\quad(-\cos x-3\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=(-\cos\pi-3\sin\pi)-\left(-\cos\frac{\pi}{2}-3\sin\frac{\pi}{2}\right)=1-0+0+3=4.$$

Приклад 8.13. Обчисліть площу фігури, обмеженої прямими $y=x+4$, $y=2x+1$, $x=0$, $x=1$.



Розв'язання.

$$S=\int_{0}^{1}(x+4-2x-1)\,dx=$$

$$\int_{0}^{1}(-x+3)\,dx=\left(-\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{0}^{1}=2{,}5.$$

Вправи для аудиторної та самостійної роботи.

8.1.Обчисліть площі фігур, обмежених кривими.

8.1.1. $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$.

8.1.2. $y=x^2-2$, $y=x$.

8.1.3. $y=2x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

8.1.4. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.

8.1.5. $4y=x^2$, $2y=6-x^2$.

8.1.6. $y=x^2-2x-1$, $2y=3x-2$.

Вправи для аудиторної та самостійної роботи.

8.2.Обчисліть площі фігур, обмежених кривими.

8.2.1. $y=x^2+4x+4$, $y=x+4$.

8.2.2. $y=4x-x^2$, $y=4-x$.

8.2.3. $y=4-x^2$, $y=3$.

8.2.4. $y=x^2-4$, $y=-3$.

8.2.5. $y=x^2+1$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$.

8.2.6. $y=4x-x^2$, $y=-\frac{9}{4}$.

8.2.7. $y=2\sqrt{x}$, $x=0$, $y=6$.

8.2.8. $y=-3\sqrt{x}$, $x=0$, $y=-6$.

8.2.9. $y=3x-x^2$, $y=-4$.

8.2.10. $y=-x^2-1$, $x=-2$, $x=2$, $y=0$.

8.2.11. $y=x^2+2$, $y=3$.

8.2.12. $y=x^2-2$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$.

8.2.13. $y = 3\sqrt{x}, x = 0, y = 3.$

8.2.14. $y = x^2 + 4x, y = -\frac{9}{4}.$

8.2.15. $y = -x^2 - 2, x = -1, x = 2, y = 0.$

8.2.16. $y = x^2 - 2x, y = -x^2 + 2x + 6.$

8.2.17. $y = x^2 - 6x + 6, y = -x^2 + 2x.$

8.2.18. $y = x^2 + 4x + 2, y = 2 + x.$

8.2.19. $y = x^2 + 2x - 2, y = -2 - x.$

8.2.20. $y = x^2 - 2x - 1, y = 1 - x.$

8.2.21. $y = x^2 + 2x - 1, y = -1 - x.$

8.2.22. $y = x^2 - 2, y = -x.$

8.2.23. $y = x^2 - 2x - 2, y = -x.$

8.2.24. $y = x^2 + 5x, y = 7 - x.$

8.2.25. $y = 3x - 4, y = -x^2.$

8.2.26. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$

8.2.27. $y = x^2 + 6x, y = -x^2.$

8.2.28. $y = x^2 - 4x + 2, y = 2 - x.$

8.2.29. $y = x^2 + 2x + 3, y = 8 - 2x.$

8.2.30. $y = 2x^2 - 12x + 16, y = -x^2 + 5x + 4.$

8.2.31. $y = x^2 + 8x + 7, y = -x^2 - 2x - 5.$

8.2.32. $y = -2x^2 - 8x + 4, y = x^2 - 3x.$

8.2.33. $y = 3 - 2x, y = x^2.$

8.2.34. $y = 2x - x^2, y = -x.$

8.2.35. $y = 3 - x, y = x^2.$

8.2.36. $y = x + 2, y = 2x + x^2.$

8.2.37. $y = 4 - x^2, 3x - 2y = 6.$

8.2.38. $y = \sqrt{x}, x + y = 2, y = 0.$

8.2.39. $y = 2 - x^2, y = x^2.$

8.2.40. $y = x^2 - 2, y = x.$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Собчук В.В. Вища математика для економістів. Конспект лекцій. Частина 1. К.: ДУТ, 2019. 224 с.
2. Бескровний О.І. Б Математика для економістів: Вища математика [Текст]: конспект лекцій для студентів економічних спеціальностей / О.І. Бескровний; М-во освіти і науки України, Університет Україна, каф. КІ. К: УУ, 2019. 192 с.
3. Вища математика у прикладах і задачах для економістів [Електронний ресурс] : навч. посібник / А. М. Алілуйко, Н. В. Дзюбановська, О. Ф. Лесик [та ін.]. Тернопіль : ТНЕУ, 2017. 148 с.
4. Кондрук Н.Е., Маляр М.М., Ніколенко В.В., Шаркаді М.М. Елементи вищої математики: Навч. посібник. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. 124 с.